Scilab

G=syslin('c', 1/(T*s+1)); //transmitancja operatorowa (funkcja generująca model w przestrzeni roboczej – linear system definition) ‘c’ – ciągła
skokowa=csim('step', t, G); //odpowiedź skokowa dla obiektu G (t=0:0.05:10;)
impulsowa=csim('impulse', t, G);//odpowiedź impulsowa dla G
nyquist(G, 0, 100, 0.01); //charakterystyka nyquista dla G (zakres zmienności pulsacji, (krok))

Obiekty z dziedziny automatyki można modelować np. za pomocą równania różniczkowego lub transmitancji operatorowej.

Transmitancja operatorowa

Stosunek transformaty Laplace’a odpowiedzi do transformaty Laplace’a wymuszenia przy zerowych warunkach początkowych. Jest ona najczęściej wykorzystywana w analizie i syntezie układów sterowania; pozwala uzyskać niezbędne dane o obiekcie i jego zachowaniu się w przypadku różnych wymuszeń.

$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

I. Definicje charakterystyk

1. **Charakterystyka czasowa**

   przebieg czasowy wielkości wyjściowej wywołany danym wymuszeniem. Do charakterystyk czasowych zaliczamy ch. skokową i impulsową.

2. **Charakterystyka impulsowa g(t)**

   odpowiedź **g(t)** układu na wymuszenie w postaci **impulsu Diraca δ(t)** przy zerowych warunkach początkowych.

   Impuls Diraca:

   $$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

   Transformata Laplace'a wymuszenia i odpowiedzi:

   $X(s) = 1 \Rightarrow Y(s) = G(s)$

   Charakterystyka impulsowa:

   $$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

   Odpowiedź impulsowa g(t) sygnału jest zatem oryginałem jego transmitancji operatorowej G(s).

3. **Charakterystyka skokowa h(t)**

   odpowiedź **h(t)** tego układu na wymuszenie w postaci **skoku jednostkowego 1(t)** przy zerowych warunkach początkowych.

   Skok jednostkowy:

$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ dla } t < 0 \\ 1 \text{ dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Transformata Laplace'a wymuszenia i odpowiedzi:

$X(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)}{s}$

Charakterystyka skokowa:

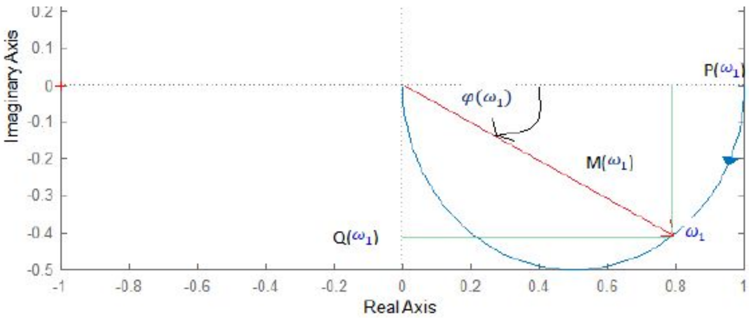
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \int_0^t g(\tau)\,d\tau \Rightarrow g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Pochodna odpowiedzi skokowej jest zatem oryginałem transmitancji operatorowej.

4. Charakterystyka amplitudowo-fazowa (ch. Nyquista)

wykres transmitancji widmowej układu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Argumentem jest pulsacja. Można z niego odczytać amplitudę i przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego.

Gdy układ jest realizowalny fizycznie (stopień licznika <= stopień mianownika), dąży do początku ukł. współrzędnych.



(dla czwórnika RC)

5. Charakterystyka amplitudowa

zależność modułu transmitancji widmowej $G(j\omega)$ w funkcji pulsacji ω.

6. Charakterystyka widmowa

zależność argumentu transmitancji widmowej $\varphi(j\omega)$ w funkcji pulsacji ω

7. Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa

zależność 20 logG(jω) w funkcji log ω.

8. Logarytmiczna charakterystyka fazowa

zależność $\varphi(j\omega)$ w funkcji log ω.

---

9. Transmitancja widmowa

stosunek wartości zespolonej odpowiedzi Y tego układu wywołanej wymuszeniem sinusoidalnym, do wartości tego wymuszenia sinusoidalnego X, w stanie ustalonym.

$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{A_Y(j\omega)}{A_X(j\omega)}e^{j\varphi(\omega)}$

gdzie $\omega = 2\pi f$ – pulsacja

Sygnał wejściowy (sinusoidalny):

$x(t) = AX(\omega)e\,j\omega t$

Odpowiedź:

$y(t) = AY(\omega)e\,j(\omega t + \varphi)$

Transmitancja widmowa:

Z powyższej zależności wynika, że transmitancja widmowa jest wektorem, którego **moduł** M(ω) dla każdej pulsacji ω :

$$|G(j\omega)| = \frac{A_{Y_W}(\omega)}{A_X(\omega)}$$

argumentem $\phi(\omega)$ jest **przesunięcie fazowe** sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego.

Właściwości:

Przy sygnale wejściowym sinusoidalnie zmiennym, obiekt odpowie sygnałem również sinusoidalnie zmiennym o **takiej samej pulsacji** $\boldsymbol{\omega}$ co sygnał wejściowy, lecz o **innej amplitudzie i z przesunięciem fazowym** względem sygnału wejściowego.

Transmitancję widmową możemy również zapisać w postaci algebraicznej, wyróżniając część rzeczywistą i urojoną:

$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$

Charakterystyka podstawowych członów układów sterowania:

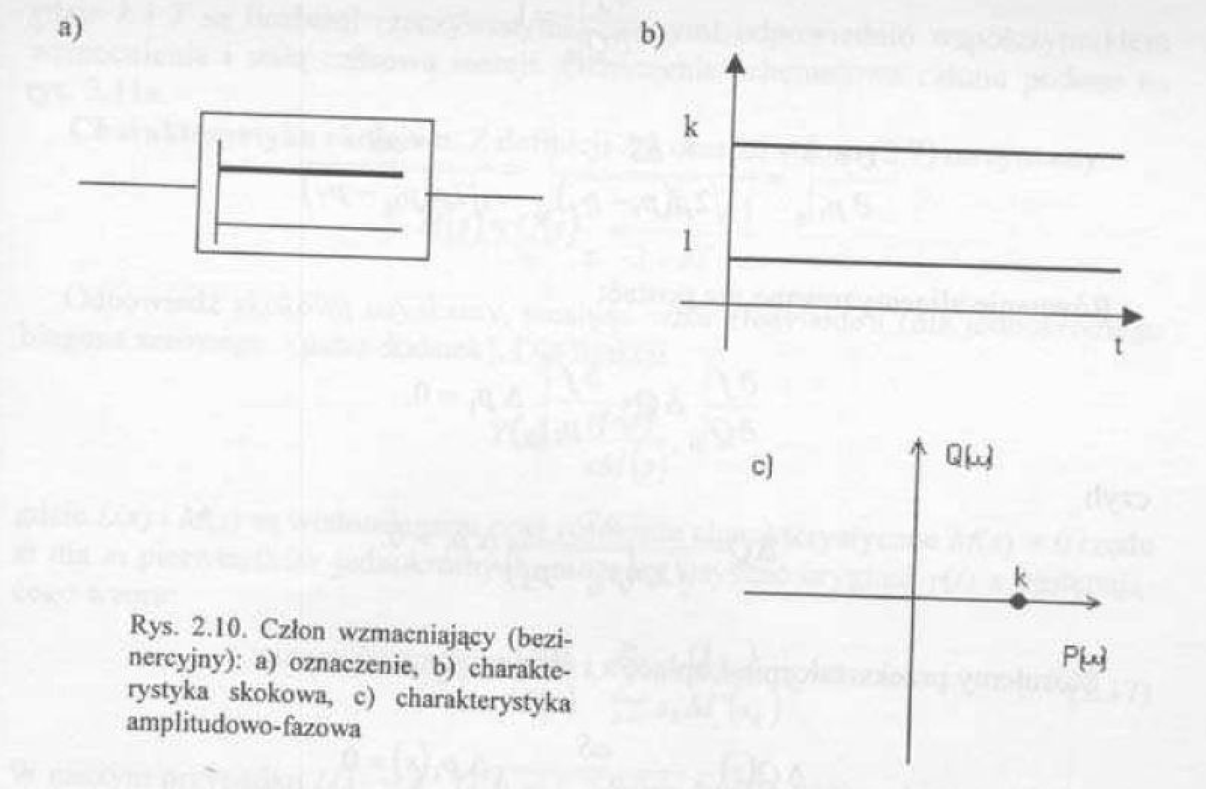
1. Człon bezinercyjny (proporcjonalny)

Przykład: dźwignia jednostronna i dwustronna, wzmacniacze, zawory

$y(t) = kx(T), \quad Y = kX$

$G(s) = k$

k - współczynnik wzmocnienia



Rys. 2.10. Człon wzmacniający (bezinercyjny): a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

2. Człon inercyjny pierwszego rzędu

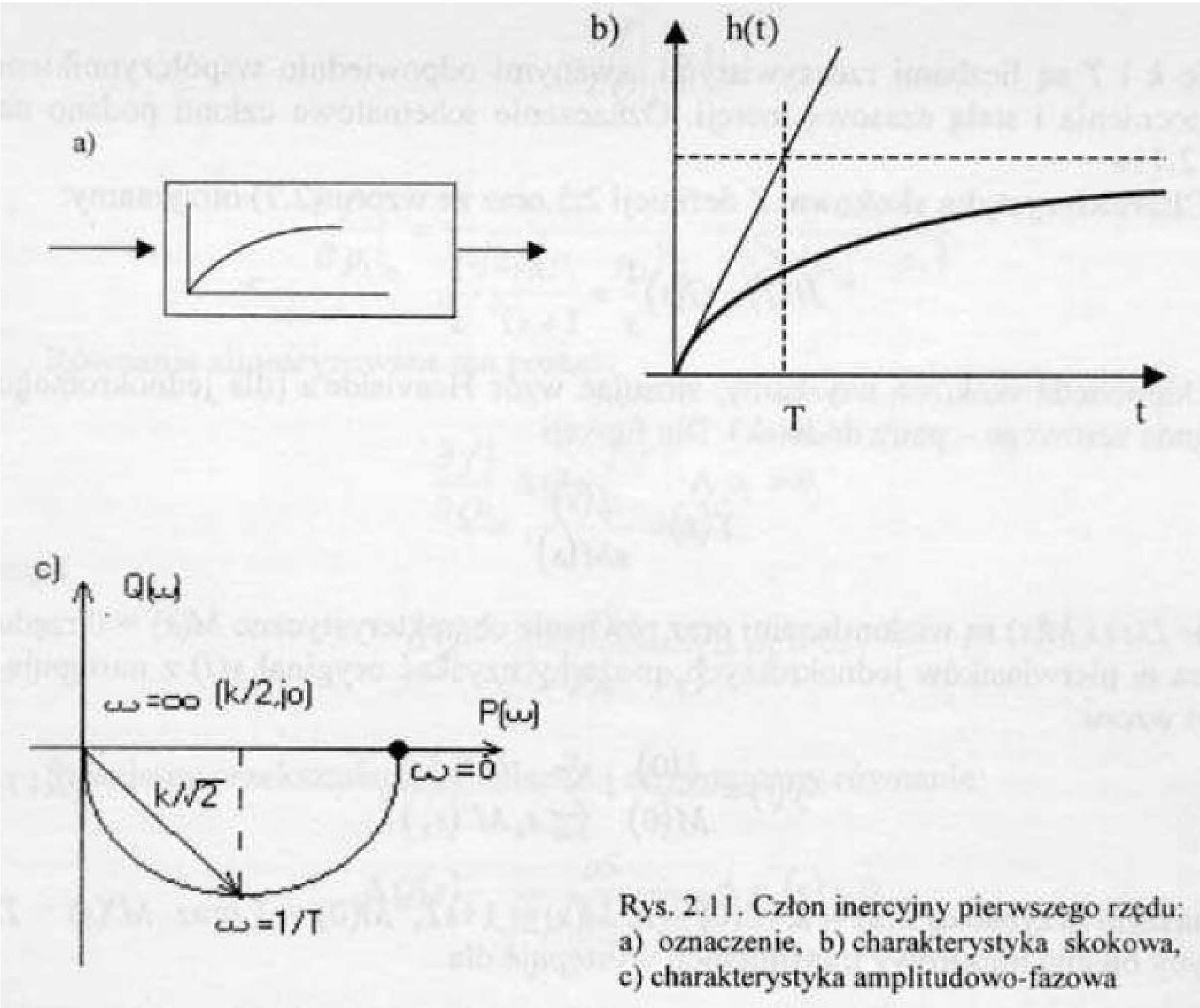
Przykład: wzmacniacz rzeczywisty, maszyny proste, zawór

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \qquad sTY + Y = kX$$

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT}$$

k – współczynnik wzmocnienia

T – stała czasowa inercji



Rys. 2.11. Człon inercyjny pierwszego rzędu: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

3. Człon inercyjny drugiego rzędu

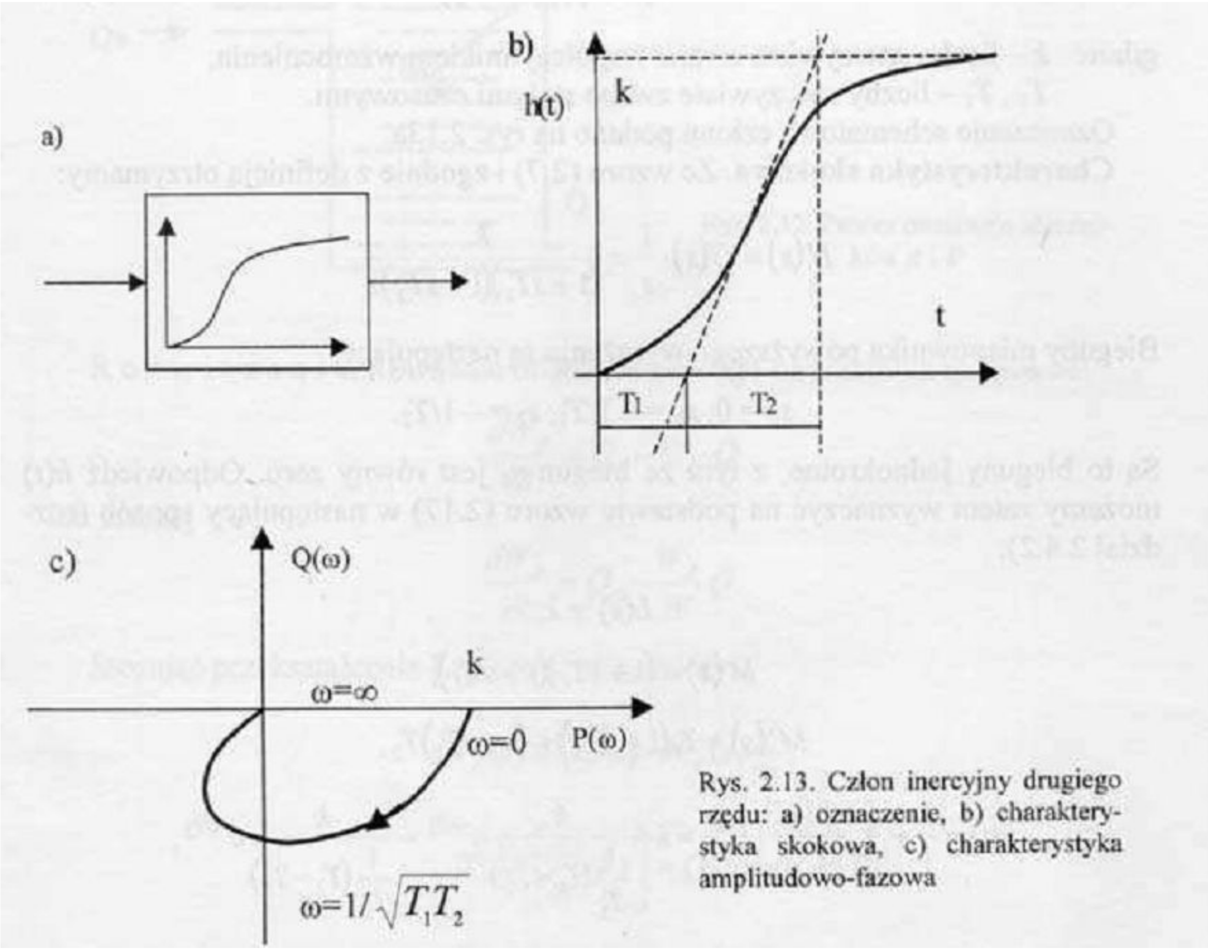
Przykład: maszyna prosta – wielokrążek, zawory z uwzględnieniem wielu niekorzystnych zjawisk

$$T_1T_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t),\qquad T_1T_2sY+(T_1+T_2)sY+Y=kX$$

$$G(s)=\frac{k}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}$$

k – współczynnik wzmocnienia

T1, T2 – stałe czasowe inercji



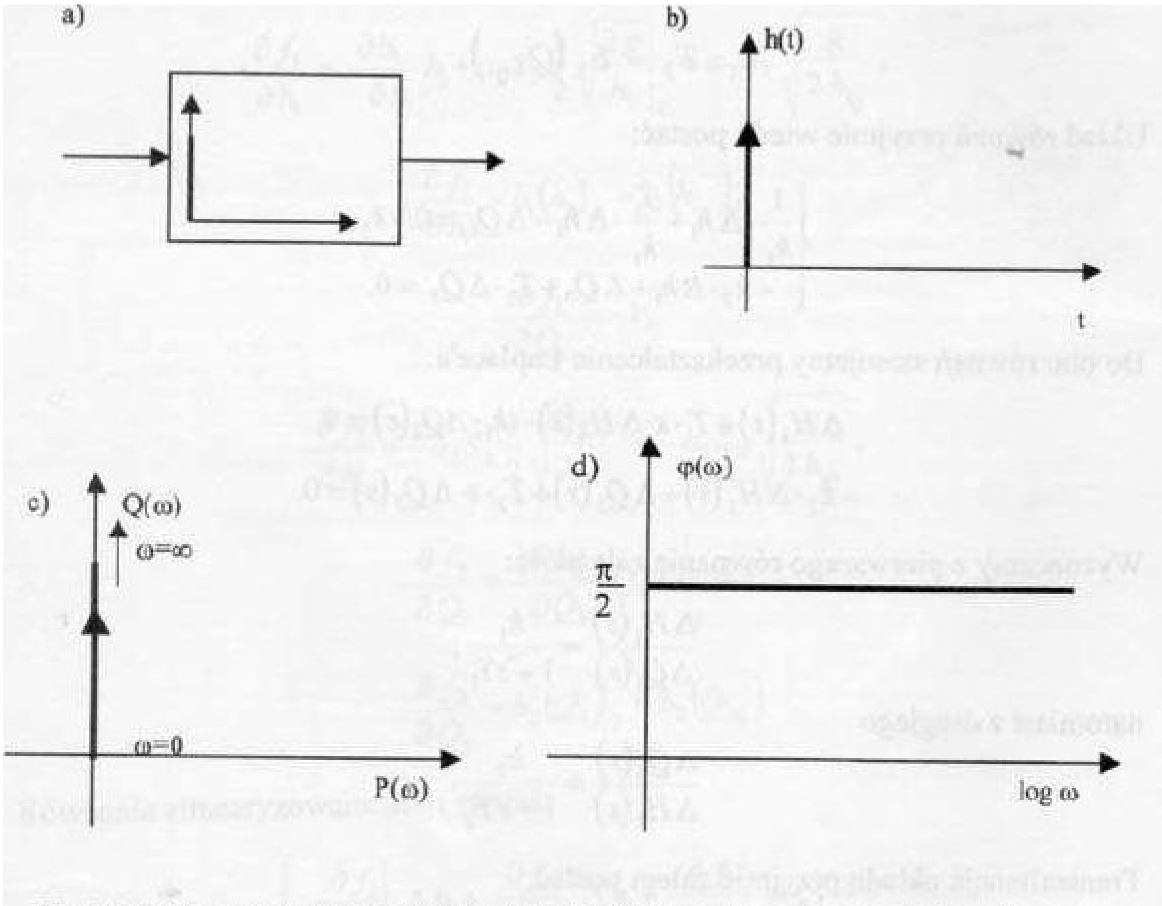
Rys. 2.13. Człon inercyjny drugiego rzędu: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

4. Obiekt różniczkujący idealny

Przykład: obiekt nie spełnia warunku realizowalności fizycznej. Brak przykładów.

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}$$

$$G(s) = ks$$



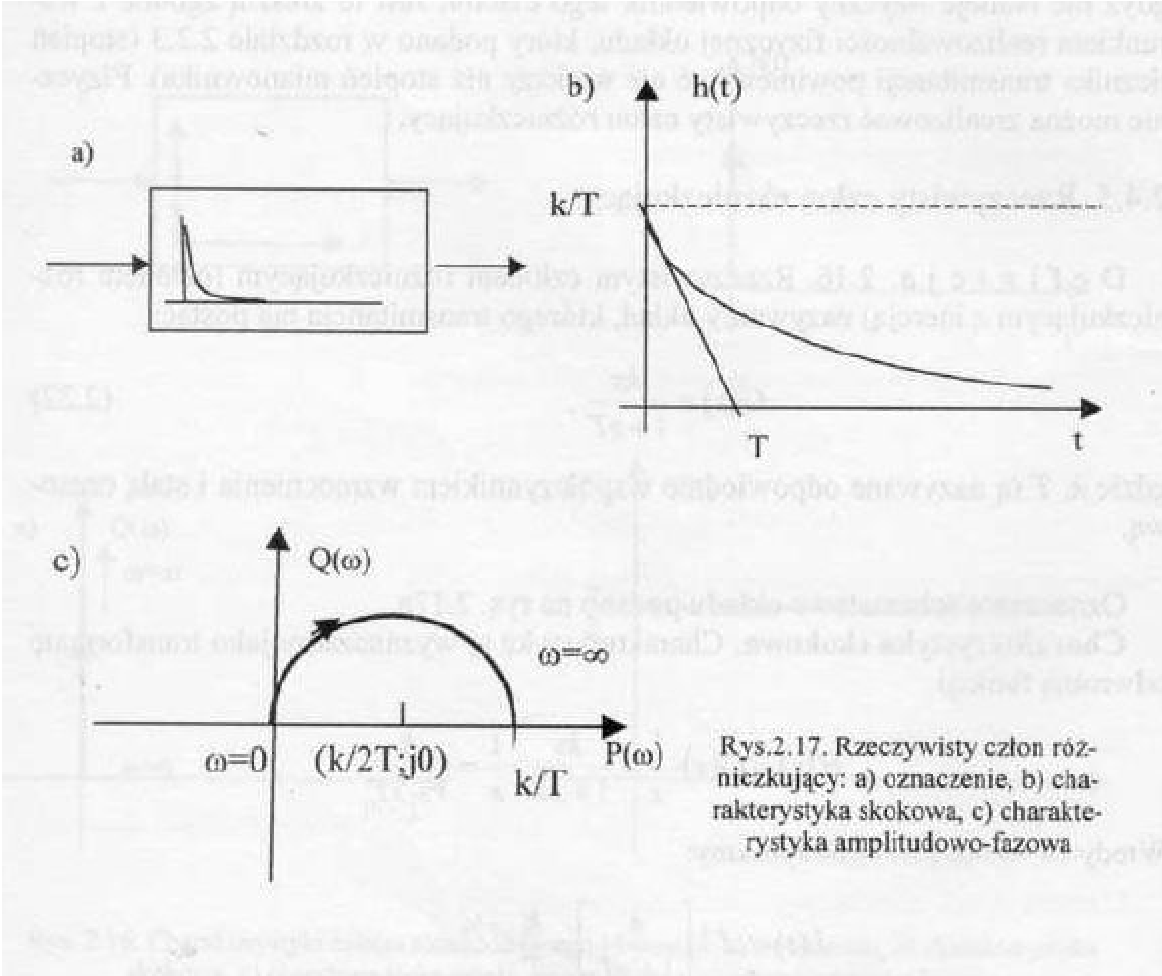
Rys. 2.16. Charakterystyki członu różniczkującego idelanego: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) charakterystyka fazowa

5. Obiekt różniczkujący rzeczywisty

Przykład: cewka indukcyjna, tłumik hydrauliczny, tarcie mechaniczne

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}, \quad TsY + Y = ksX$$

$$G(s) = \frac{ks}{1 + sT}$$

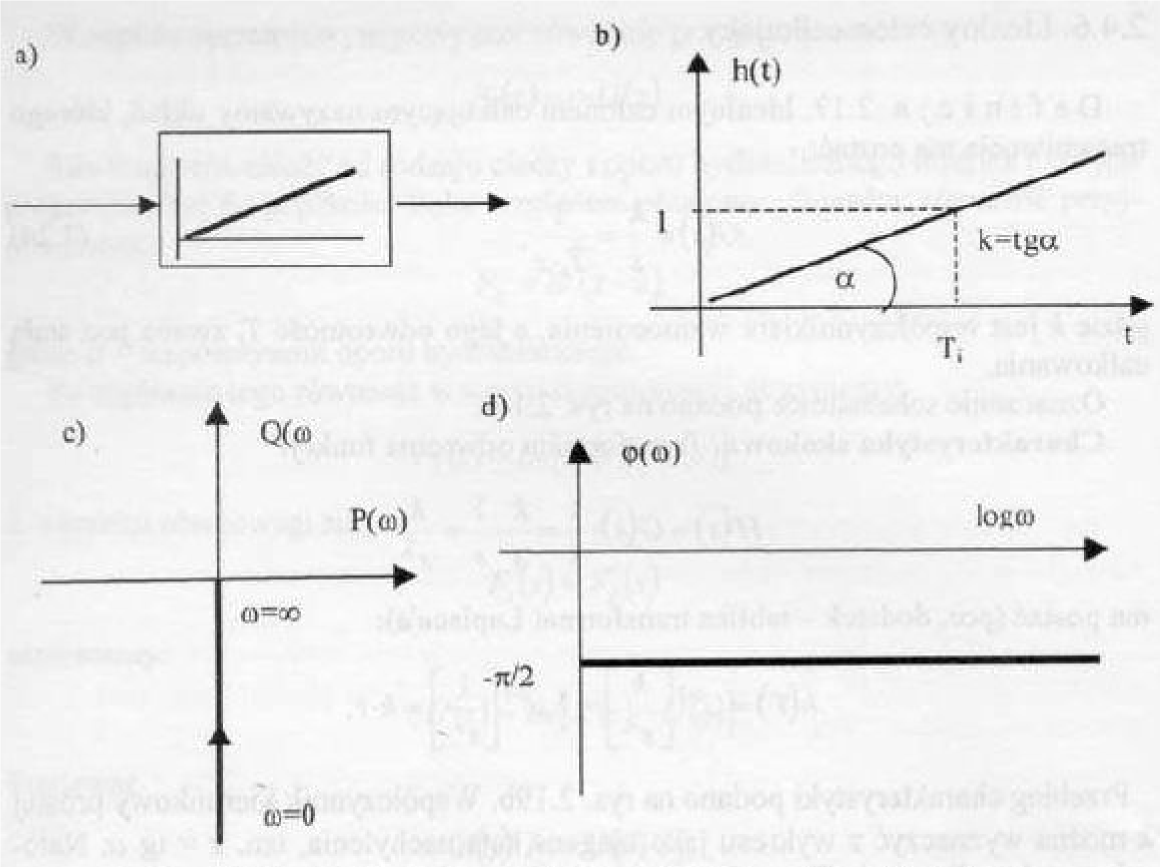


Rys.2.17. Rzeczywisty człon różniczkujący: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

6. Obiekt całkujący idealny

Przykład: kondensator idealny

$$G(s) = \frac{k}{s} = \frac{1}{T_i s}, T_i = \frac{1}{k}$$



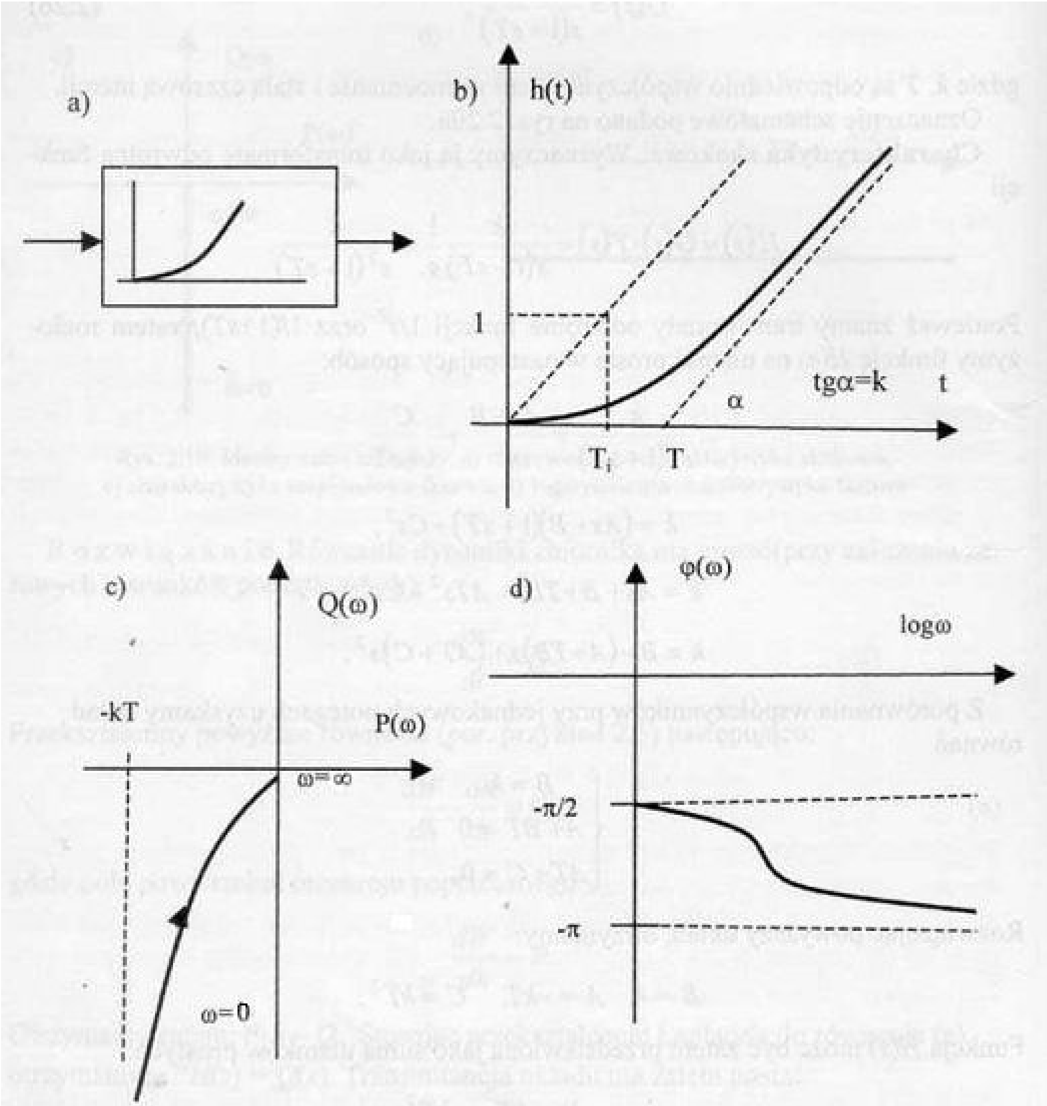
Rys. 2.19. Idealny człon całkujący: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) logarytmiczna charakterystyka fazowa

7. Obiekt całkujący rzeczywisty

Przykład: kondensator, zbiornik cieczy

$$T\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}=kx(t),\qquad Ts^2Y+sY=kX$$

$$G(s)=\frac{k}{s(1+Ts)}$$



Rys. 2.20. Rzeczywisty człon całkujący: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) logarytmiczna charakterystyka fazowa

8. Człon oscylacyjny

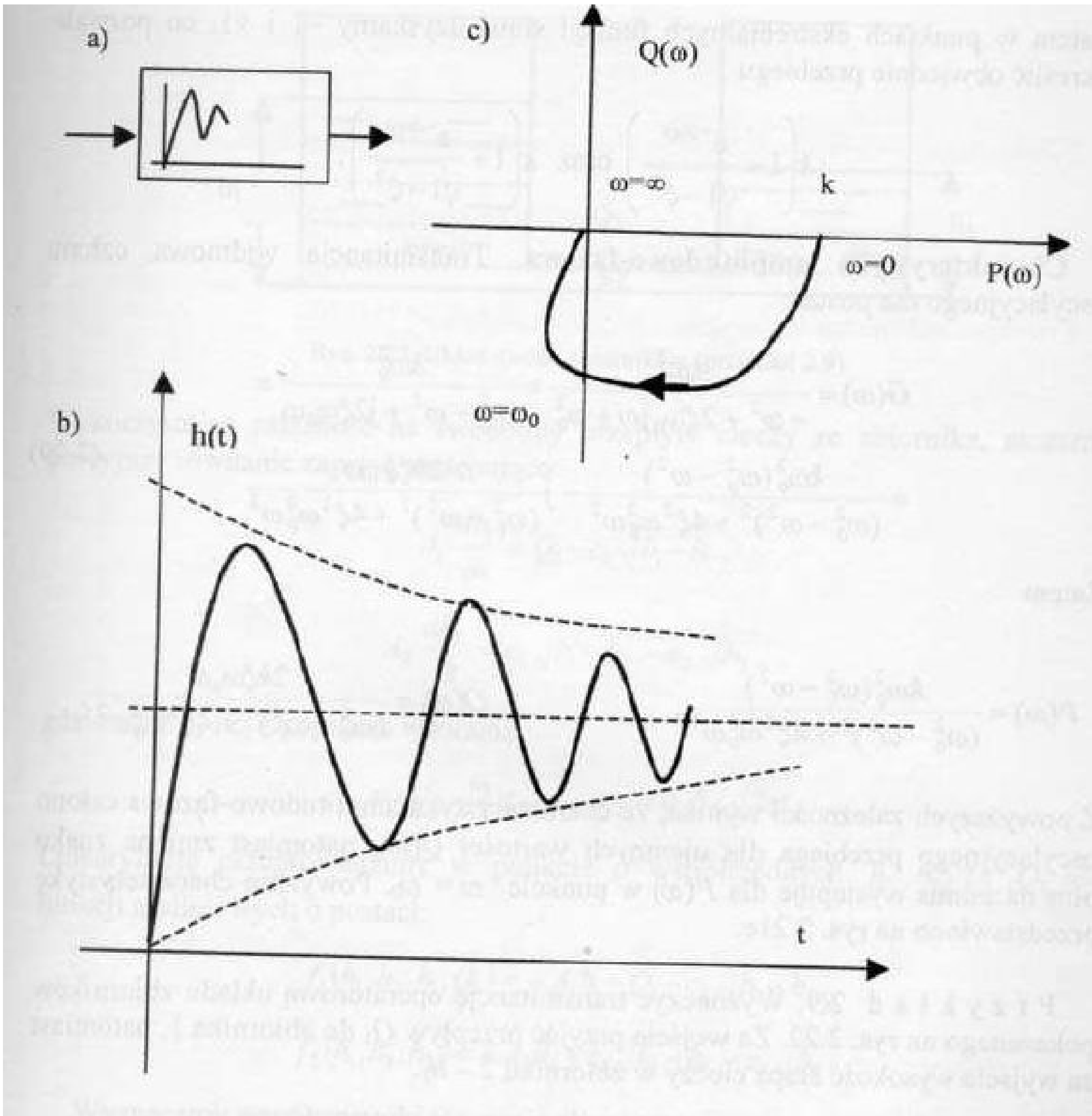
Przykład: układy mechaniczne oscylujące (masa + sprężyna), elektryczny układ drgający, wahadło

$$G(s) = \frac{k{\omega_0}^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + {\omega_0}^2}$$

$\omega_0 - pulsacja\ oscylacji\ własnych$

$\xi - względny\ współcznnik\ tłumienia\ (0 < \xi < 1)$

$k - wzmocnienie$



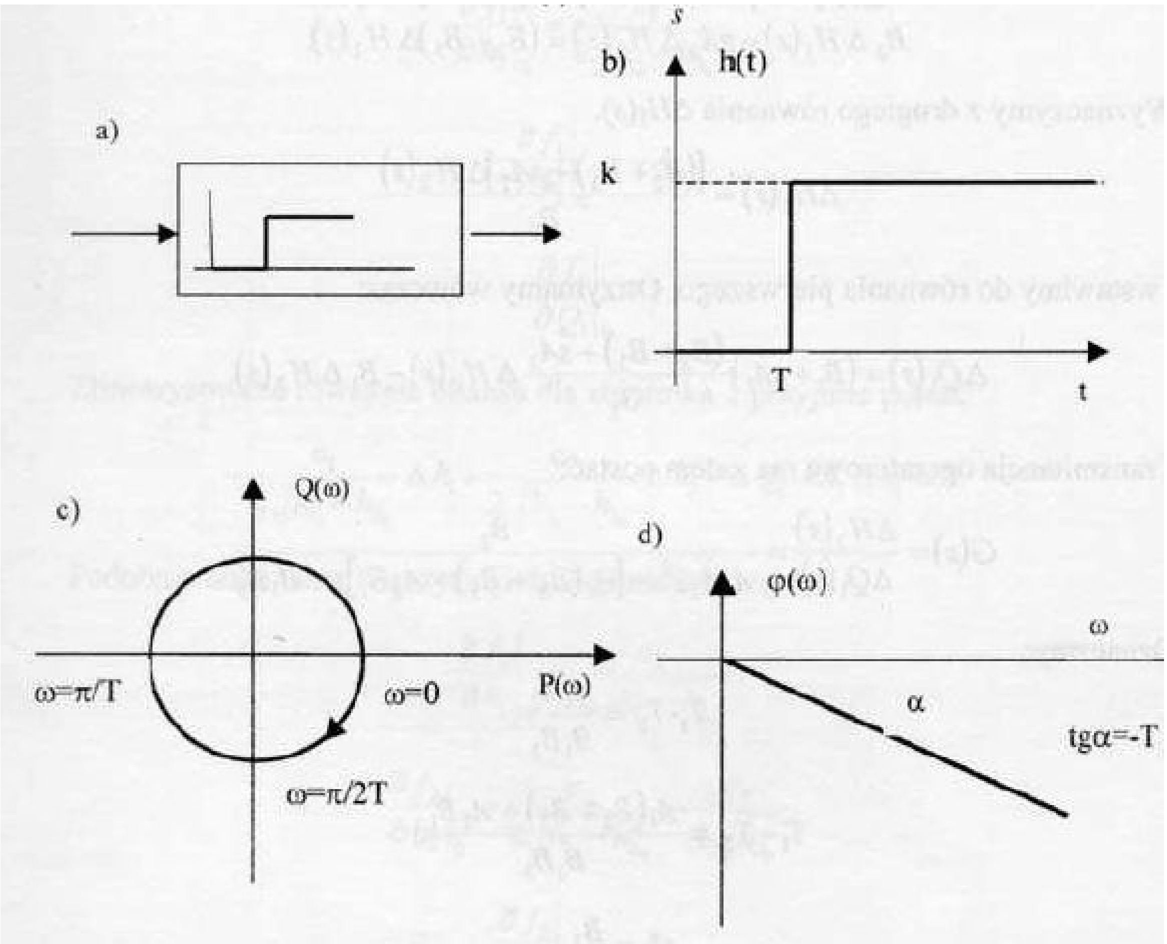
Rys. 2.21. Człon oscylacyjny: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

9. Obiekt opóźniający

Przykład: transporter taśmowy

$$G(s) = e^{-sT}$$

$$T - opóźnienie$$



Rys. 2.23. Człon opóźniający; a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) charakterystyka fazowa

Jakość regulacji - definicje

1. **Uchyb regulacji (uchyb statyczny)**

granica, do której dąży składowa wymuszona $e_w(t)$ sygnału uchybu e(t) dla $t \to \infty$.

$$e_u = \lim_{t\to\infty} e_w(t) = \lim_{t\to\infty} e(t)$$

z twierdzenia granicznego wynika, że:

$$\lim_{t \to \infty} e_w(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

dodatkowo wiemy, że:

$E(s) = X(s)G_e(s)$

(gdzie $G_e(s)$ to transmitancja uchybowa, X(s) transformata Laplace'a sygnału wymuszenia, E(s) transformata Laplace'a uchybu) zatem:

$$e_u = \lim_{s \to 0} sX(s)G_e(s)$$

2. **Układ statyczny (układ regulacji statycznej)**

UAR, którego uchyb w stanie ustalonym, przy wymuszeniu skokowym, jest różny od zera i proporcjonalny do amplitudy wymuszenia.

Dla układów z pełnym sprzężeniem zwrotnym: jego transmitancja w stanie otwartym nie ma biegunów zerowych (w układzie nie występują człony całkujące).

3. **Układ astatyczny i-tego rzędu**

UAR, którego uchyb w stanie ustalonym jest równy zeru dla wszystkich sygnałów wejściowych, których pochodne, począwszy od l-tej są równe zeru dla t dążącego do nieskończoności.

Dla układów z pełnym sprzężeniem zwrotnym: jego transmitancja w stanie otwartym ma *l*-krotny biegun zerowy.

4. **Przeregulowanie**

Wyrażony w procentach stosunek drugiej amplitudy uchybu do pierwszej.

$$\kappa = \frac{e_{p2}}{e_{p1}} 100\%$$

jako, że pierwsza amplituda odpowiedzi wynosi y_{ust}

$$\kappa = \frac{e_{p2}}{e_{p1}} 100\% = \frac{y_{max} - y_{ust}}{y_{ust}} 100\%$$

5. **Czas regulacji**

czas jaki upłynął od momentu wystąpienia skokowej zmiany wartości zadanej (lub zakłócenia) do ustalenia się wahań uchybu e(t) od 2 do 5% pierwszej amplitudy e_{p0} wokół wartości uchybu ustalonego.

6. **Zapas stabilności amplitudy L [dB]**

wartość Δk, o jaką musi wzrosnąć wzmocnienie układu otwartego przy niezmienionej fazie, aby układ zamknięty znalazł się na granicy stabilności.

$L = 20\log \Delta k$

7. **Zapas stabilności fazy**

wartość, o jaką musi wzrosnąć faza układu otwartego przy niezmienionym wzmocnieniu, aby układ znalazł się na granicy stabilności.

$\Delta\varphi = 180^\circ + \psi$, $\psi = \arg G_0(j\omega)$, $G_0(j\omega) = 1$

IV. Inne (z poprzednich lat)

10. **Zmierz stabilność układu regulacji o transmitancji układu otwartego równej**

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^3+3s^2+2s+1}$$

Rozwiązanie:

$M(s) = L_0(s) + M_0(s) = 2s + 1 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$

$M(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = 0$

1. Warunek konieczny:

   $a_0 = 2 > 0$
   $a_1 = 4 > 0$
   $a_2 = 3 > 0$
   $a_3 = 1 > 0$

2. Warunek dostateczny:

$\Delta 1 = |a_{n-1}| = |a_2| = 3 > 0$

$\Delta 2 =$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3*4 - 2*1 = 10 > 0$$

$\Delta 3 =$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3*4*2 - 2*1*2 = 24 - 4 = 20 > 0$$

Warunek konieczny i dostateczny są spełnione – układ regulacji jest stabilny.

Jeśli gdziekolwiek wyjdzie wartość mniejsza równa 0 to układ regulacji będzie wtedy niestabilny.