Lab nr 3

Charakterystyki częstotliwościowe

Program zajęć:

1. Do opisu dynamiki układu można wykorzystać transmitancję widmową.

   Def. **Transmitancja widmowa** układu to stosunek wartości zespolonej odpowiedzi Y tego układu wywołanej wymuszeniem sinusoidalnym, do wartości tego wymuszenia sinusoidalnego X, w stanie ustalonym.

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

   Korzystając z twierdzenia Eulera dla liczb zespolonych $e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsin(\omega t)$,

   sinusoidalny sygnał wejściowy można opisać jako $x(t) = A_X(\omega)e^{j\omega t}$,

   odpowiedź na sygnał wejściowy sinusoidalny można opisać jako
$$y(t) = A_Y(\omega)e^{j(\omega t+\varphi)}$$

   gdzie $\omega = 2\pi f$ – pulsacja.

   Stąd transmitancję można zapisać:

$$G(j\omega) = \frac{A_Y(j\omega)}{A_X(j\omega)}e^{j\varphi(\omega)}$$

   Z powyższej zależności wynika, że transmitancja widmowa jest wektorem, którego moduł $M(\omega)$ dla każdej pulsacji ω jest stosunkiem amplitudy sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego.

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{A_Y(\omega)}{A_X(\omega)}$$

   A argumentem $\varphi(\omega)$ jest przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego.

   Przy sygnale wejściowym sinusoidalnie zmiennym, obiekt odpowie sygnałem również sinusoidalnie zmiennym o takiej samej pulsacji ω co sygnał wejściowy, lecz o innej amplitudzie i z przesunięciem fazowym względem sygnału wejściowego.

2. Analityczna metoda wyznaczania transmitancji widmowej z podanej transmitancji operatorowej (s → jω).

   Znaleźć transmitancję widmową dla obiektu z Lab nr 1.

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \qquad \rightarrow \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$$

   Przekształcenie transmitancji widmowej do postaci $G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$:

$$G(jw) = \frac{1}{1+j\omega T} \cdot \frac{1-j\omega T}{1-j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} + j\frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

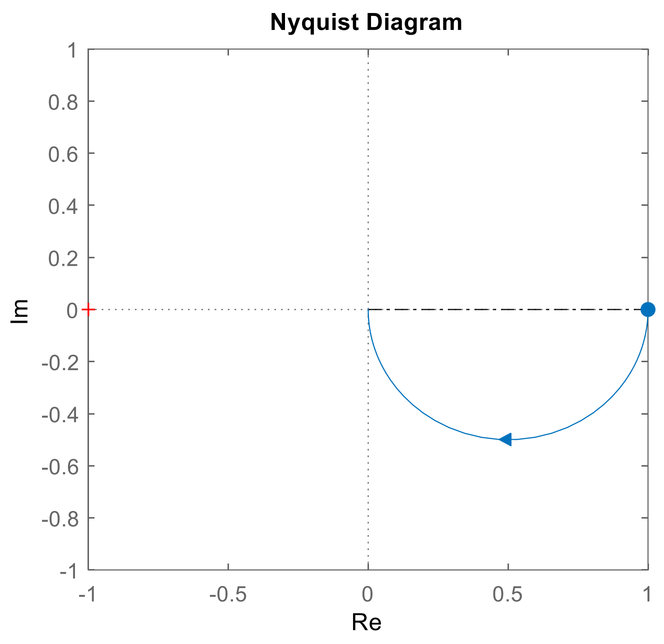
$$P(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} \qquad Q(\omega) = \frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

3. Wykreślenie charakterystyki częstotliwościowej dla $0 \geq \omega > \infty$ (charakterystyki amplitudowo-fazowej, charakterystyki Nyquista) na płaszczyźnie zespolonej (płaszczyźnie Gaussa, płaszczyźnie Arganda).

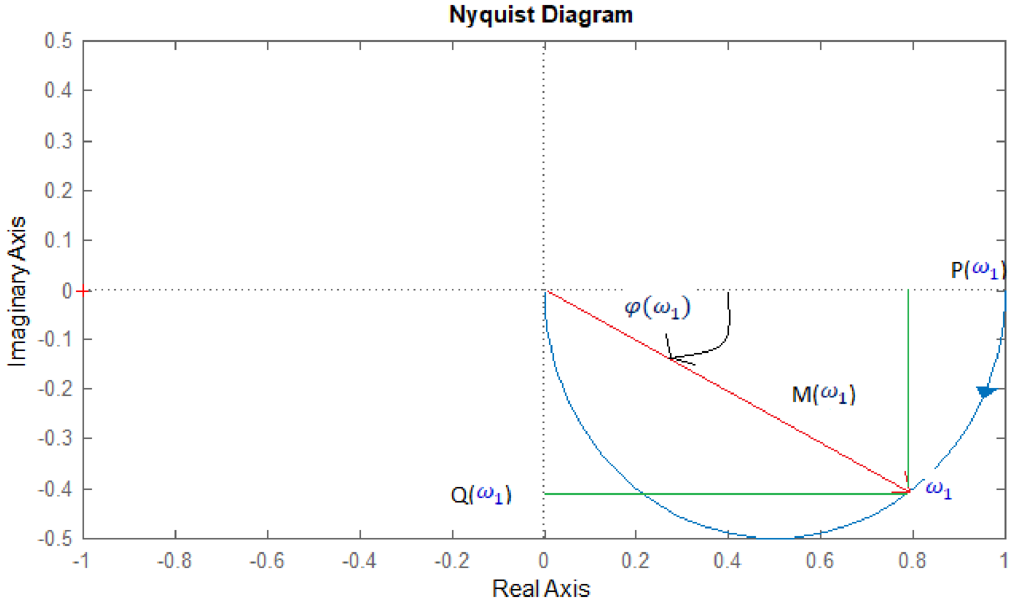
   Graficznym obrazem transmitancji widmowej jest charakterystyka amplitudowo – fazowa.

$$P(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2 T^2}; Q(\omega) = \frac{-\omega T}{1+\omega^2 T^2}$$

$$P(\omega = 0) = 1;\ Q(\omega = 0) = 0 \qquad P(\omega = \infty) = 0; Q(\omega = \infty) = 0$$



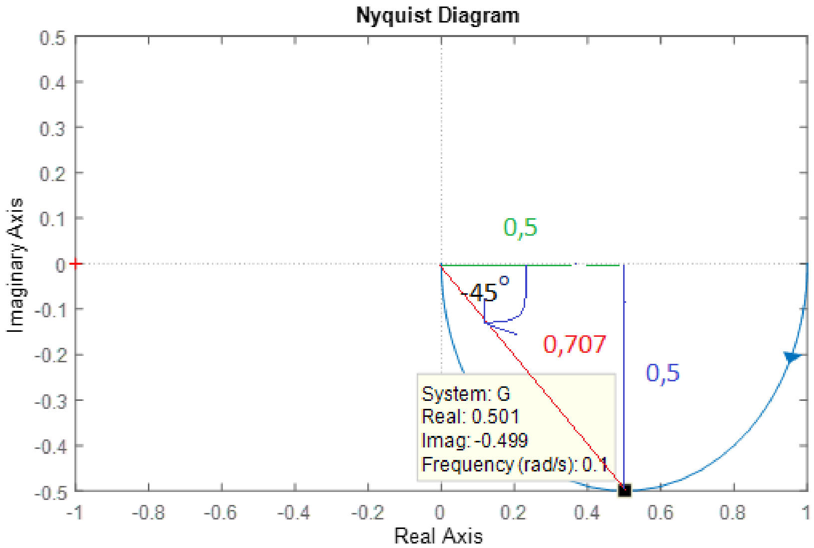
Rys. 1. Charakterystyka amplitudowo – fazowa dla czwórnika RC



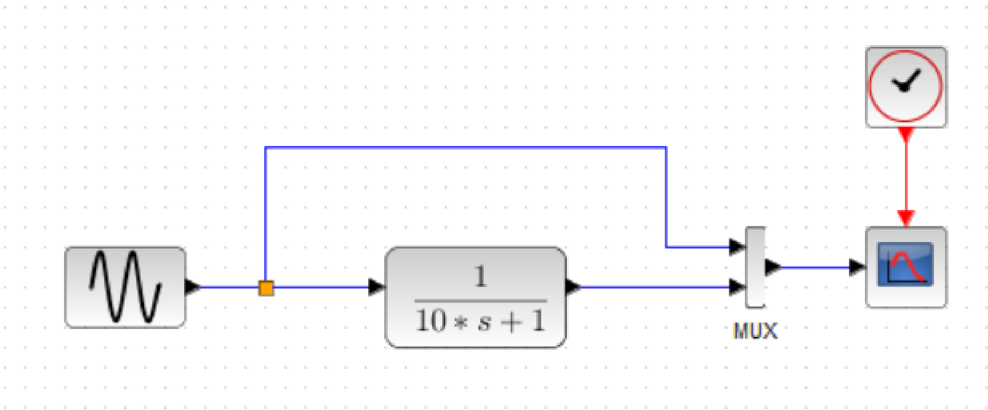
Rys. 2. Charakterystyka amplitudowo – fazowa dla czwórnika RC ze wskazanym modułem oraz przesunięciem fazowym

Sprawdzenie możliwości odczytu amplitudy i fazy sygnału wyjściowego z charakterystyki amplitudowo-fazowej przy znanej wartości amplitudy i pulsacji sygnału wejściowego:

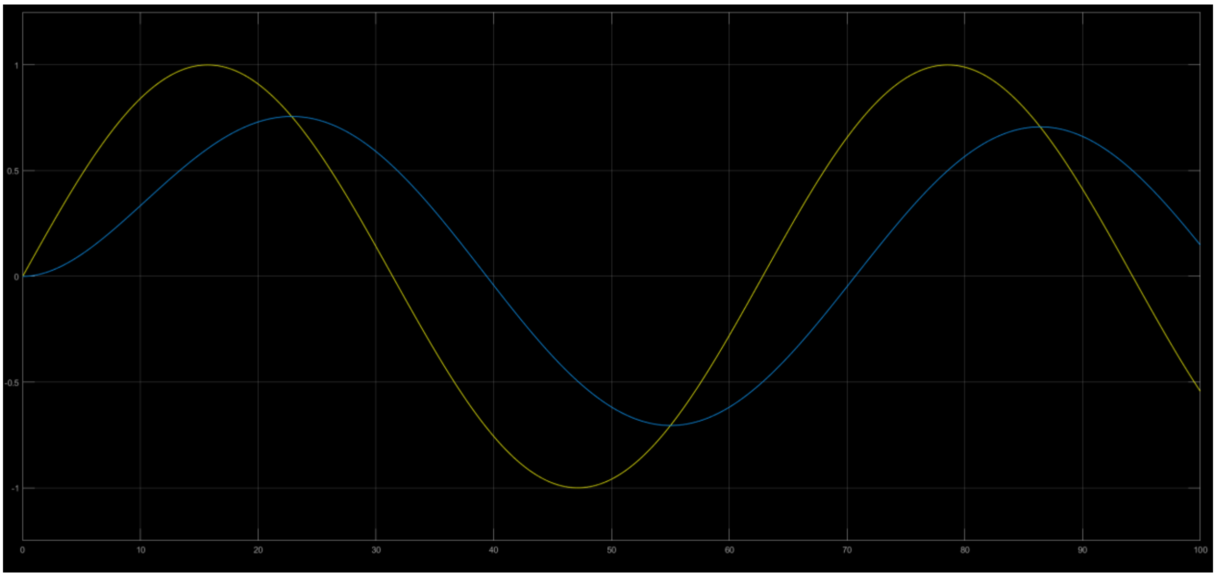
Odczytanie wartości pulsacji dla punktu o minimalnej wartości $\min\left(Q(\omega)\right)$: 0,1 rad/s (patrz rys. 3). Wyznaczenie wartości modułu: $M(\omega = 0{,}1) = 0{,}707$. Wyznaczenie przesunięcia fazowego: $\varphi(\omega = 0{,}1) = -45°$.



Rys. 3. Charakterystyka amplitudowo – fazowa dla czwórnika RC ze wskazanym modułem oraz przesunięciem fazowym dla ω=0,1



Rys. 4. Schemat blokowy układu do badania odpowiedzi obiektu na sygnał sinusoidalnie zmienny (Xcos)



Rys. 5. Przebieg wymuszenia i odpowiedzi dla obiektu inercyjnego I-rzędu. Sygnał wejściowy: sinusoida o amplitudzie =1 oraz pulsacji = 0,1 rad/s (Matlab Simulink)

Z rysunku 5 można odczytać wartość amplitudy sygnału wyjściowego A_Y=0,707 (przy A_X=1) oraz wartość przesunięcia fazowego $\varphi(\omega) = -45°$ (ok. 8 jednostek na osi czasu).

Charakterystyka amplitudowo – fazowa jest miejscem geometrycznym punktów, jakie zakreśla koniec wektora $G(j\omega)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej przy zmianie pulsacji sygnału wejściowego od 0 do ∞.

Charakterystyki amplitudowo – fazowe układów rzeczywistych, dla których stopień wielomianu licznika transmitancji jest niższy od stopnia wielomianu mianownika dążą do początku układu współrzędnych.

Transmitancję można zapisać jako:

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

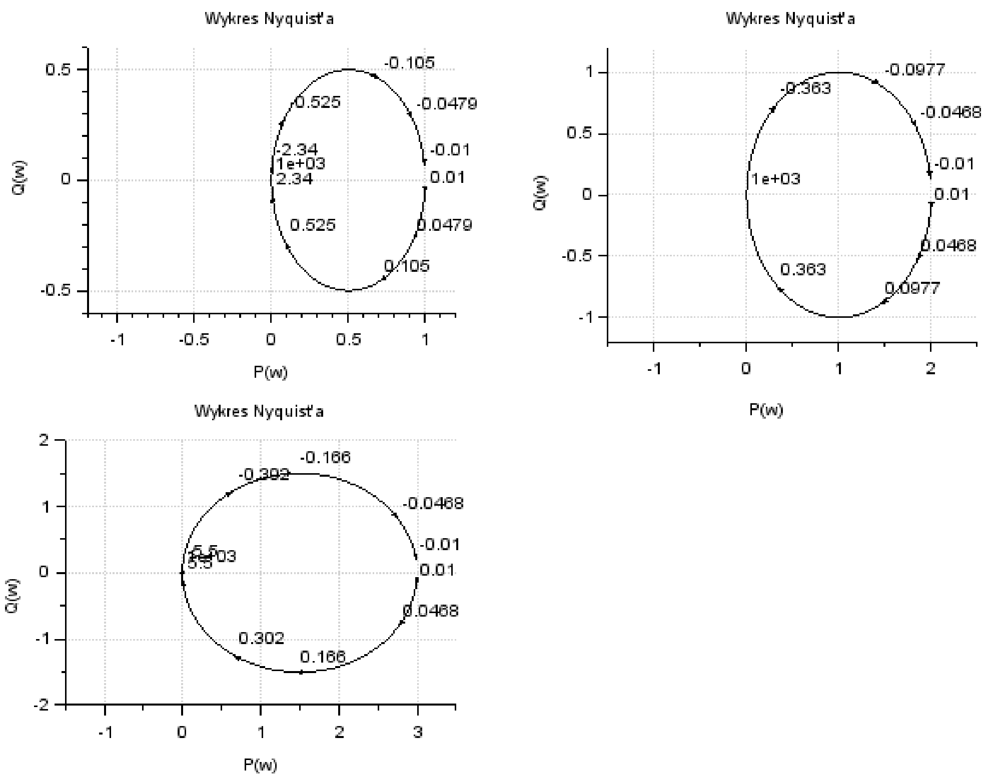
$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = arg\ G(j\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

4. Wykreślenie charakterystyk amplitudowo – fazowych dla członu inercja I-rzędu (stała wartość T i zmienne wartości k: k1, k2, k3).

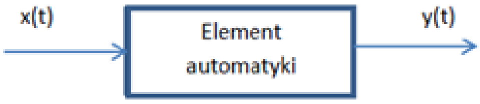
```
//Element inercyjny I-rzędu
s=poly(0,'s');
//stała wartość T oraz zmienne k
T=1;
k1=1;
k2=2;
k3=3;
//transmitancje operatorowe
G1=syslin('c',k1/(T*s+1));
G2=syslin('c',k2/(T*s+1));
G3=syslin('c',k3/(T*s+1));
t=0:0.05:10;
//charakterystyki nyquista (amplitudowo - fazowe))
subplot(2,2,1);
nyquist(G1,0.01,1000,0.01); //kreśli char. nyquista...
subplot(2,2,2);
nyquist(G2,0.01,1000,0.01); //...transmitancja,fmin,fmax,krok
subplot(2,2,3);
nyquist(G3,0.01,1000,0.01);
```



Rys. 6. Charakterystyki amplitudowo – fazowe dla inercji I-rzędu (stała wartość T i zmienne wartości k)

5. Zadania do samodzielnego wykonania.

Analiza charakterystyk Nyquista (charakterystyk amplitudowo-fazowych) podstawowych elementów automatyki (proporcjonalny, inercyjny I-rzędu, inercyjny II-rzędu, różniczkujący idealny, różniczkujący rzeczywisty, całkujący idealny, całkujący rzeczywisty, oscylacyjny, opóźniający).



Równania różniczkowe podstawowych elementów automatyki

1. $y(t) = kx(t)$
2. $T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$
3. $T_1T_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$
4. $y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}$
5. $T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}$
6. $\frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$
7. $T\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$
8. $T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$
9. $y(t) = kx(t - T_0)$

$$G_1(s) = k$$

$$G_2(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

$$G_3(s) = \frac{k}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

$$G_4(s) = ks$$

$$G_5(s) = \frac{ks}{Ts + 1}$$

$$G_6(s) = \frac{k}{s}$$

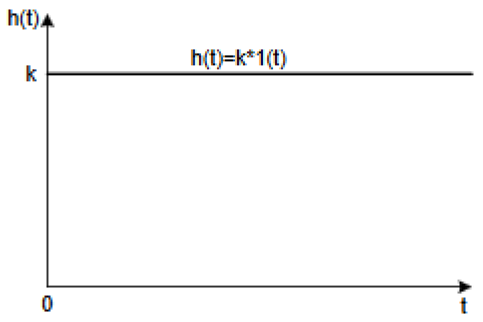
$$G_7(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}$$

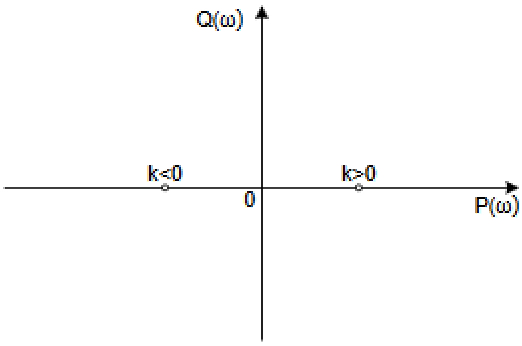
$$G_8(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

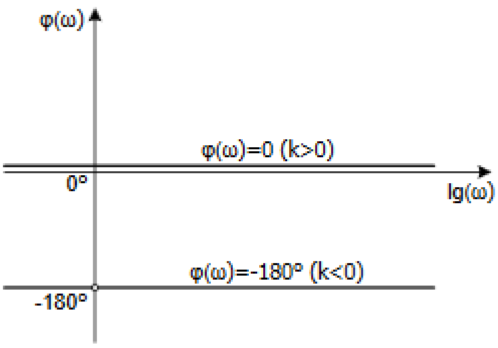
$$G_9(s) = ke^{-sT_o}$$

6. Charakterystyki skokowe oraz charakterystyki amplitudowo – fazowe podstawowych członów automatyki. *Zwrócić uwagę na wpływ wartości wzmocnienia k oraz stałej czasowej T na kształt charakterystyk*.

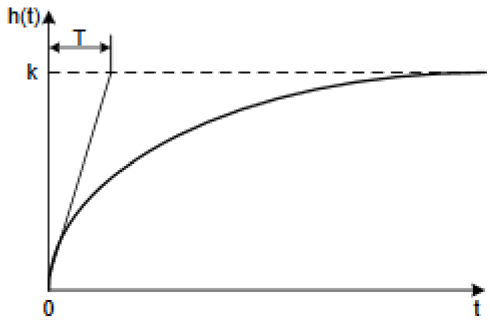
a. Element bezinercyjny

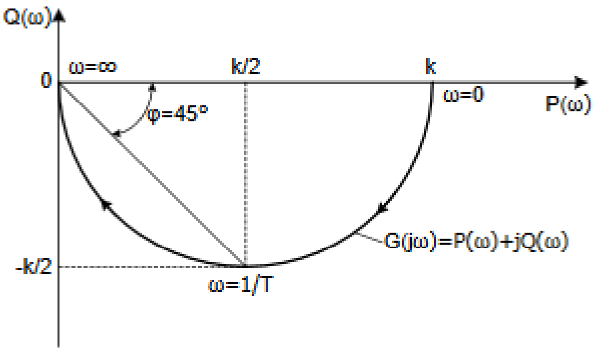


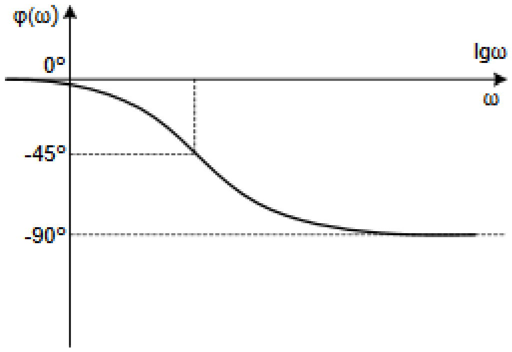




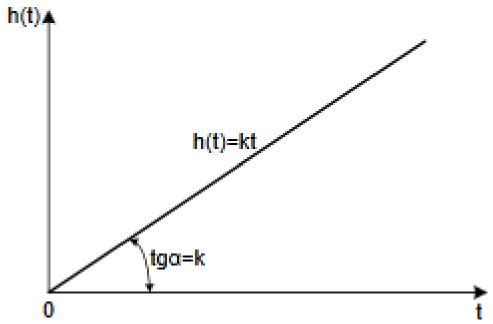
b. Inercja I-rzędu

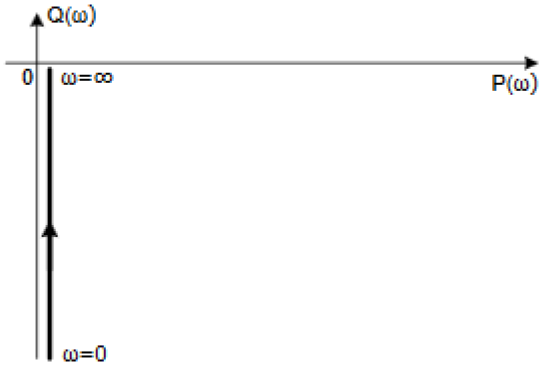


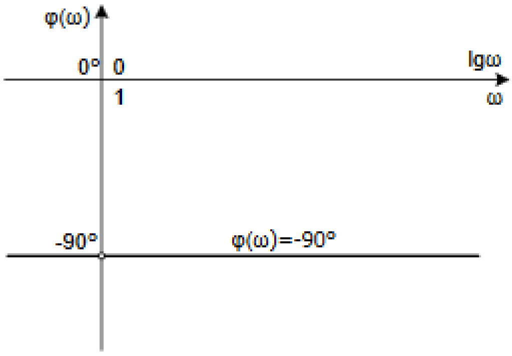




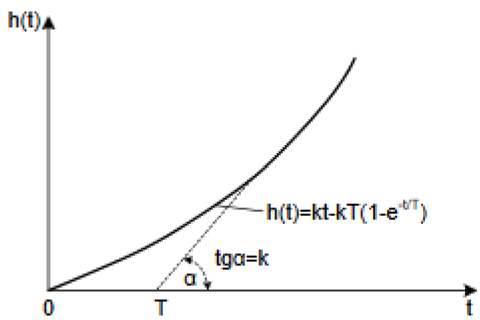
c. Element całkujący idealny

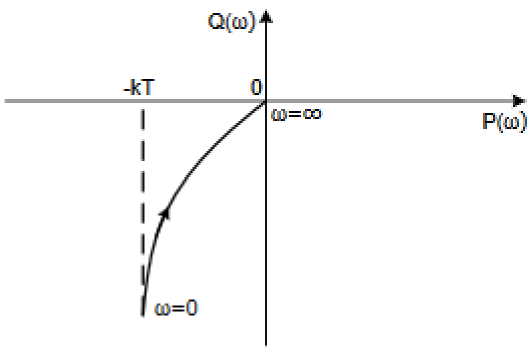


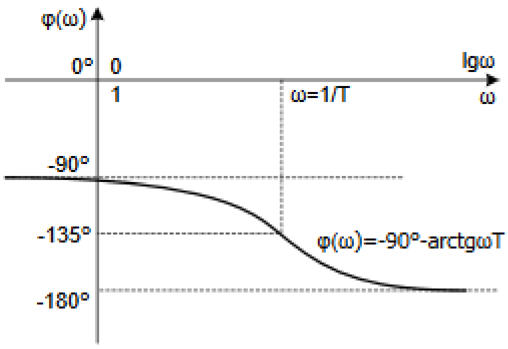




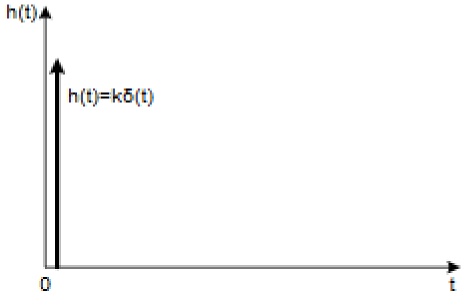
d. Element całkujący rzeczywisty

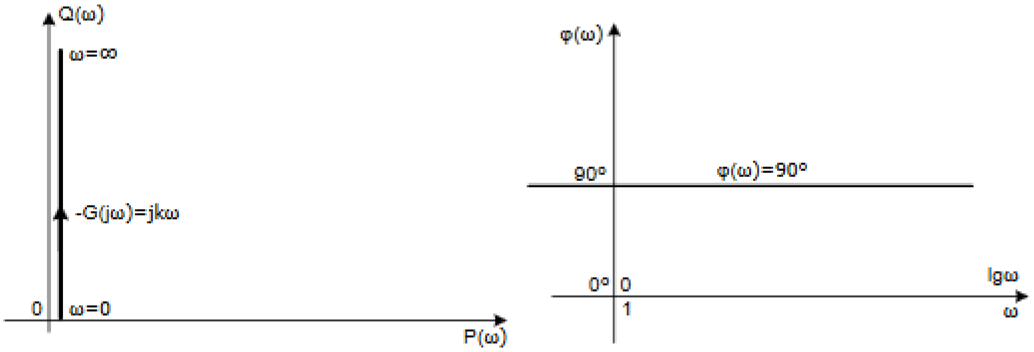




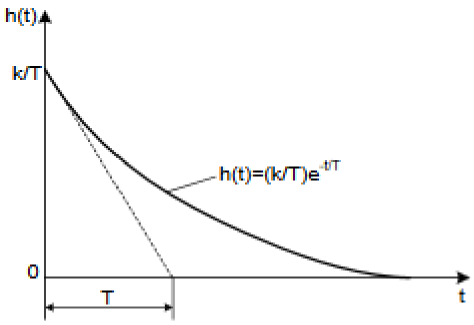


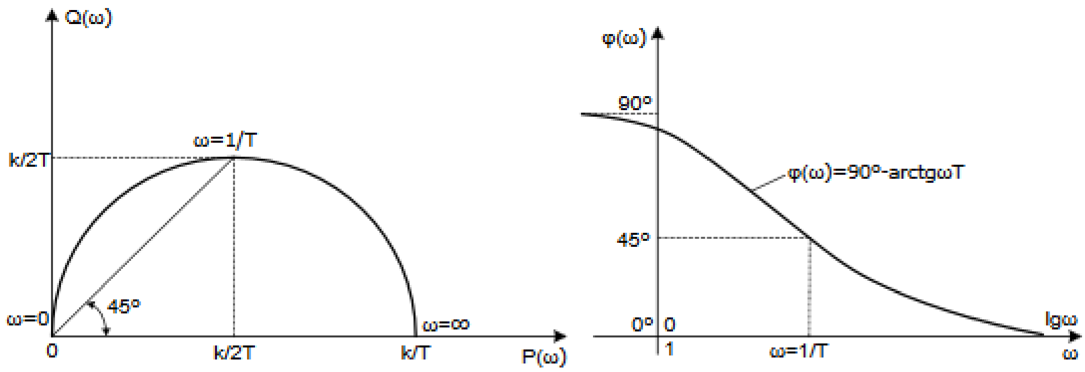
e. Element różniczkujący idealny





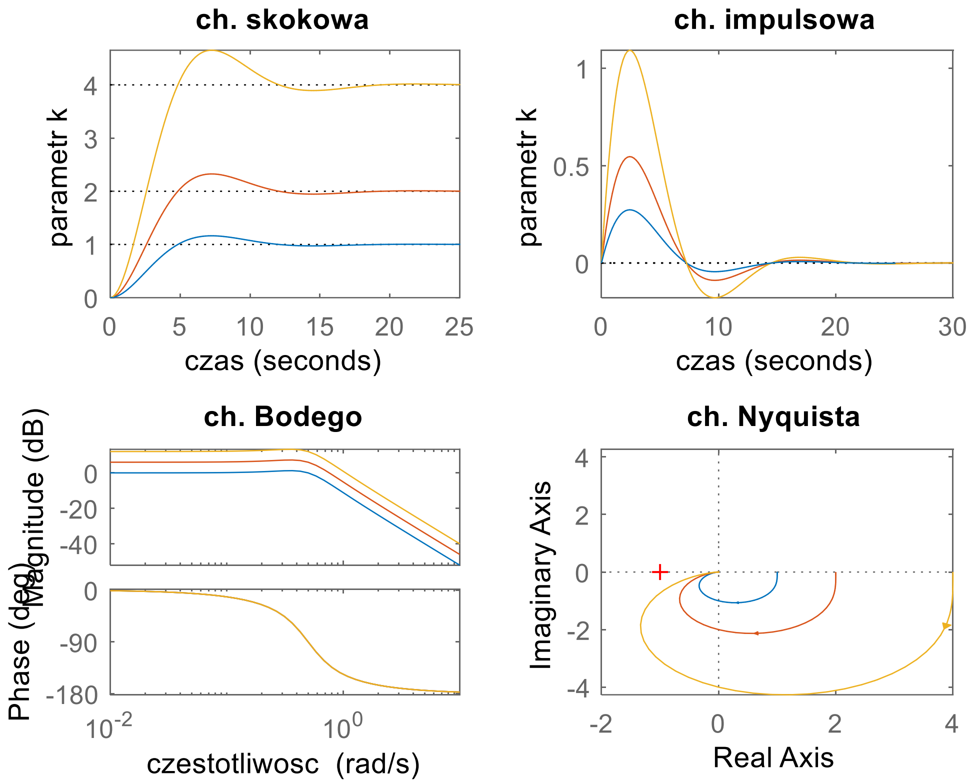
f. Element różniczkujący rzeczywisty

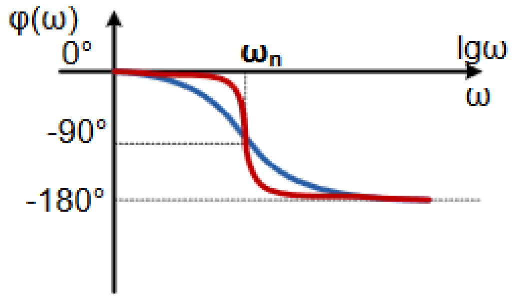




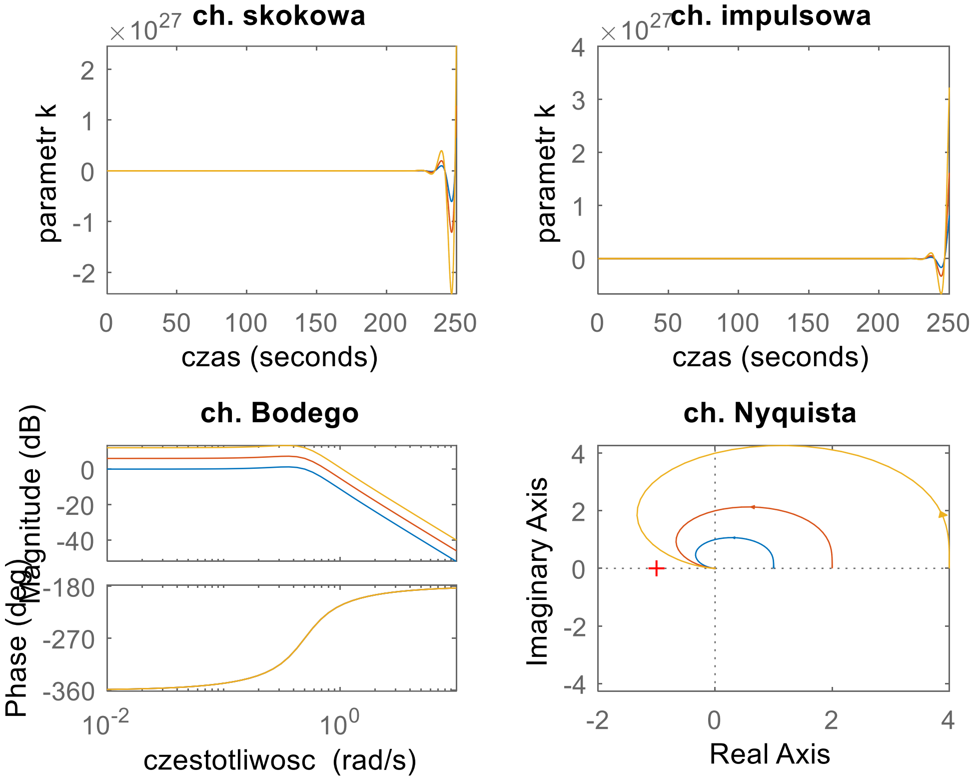
g. Element oscylacyjny

i. 0<ξ<1 (tłumienie drgań)

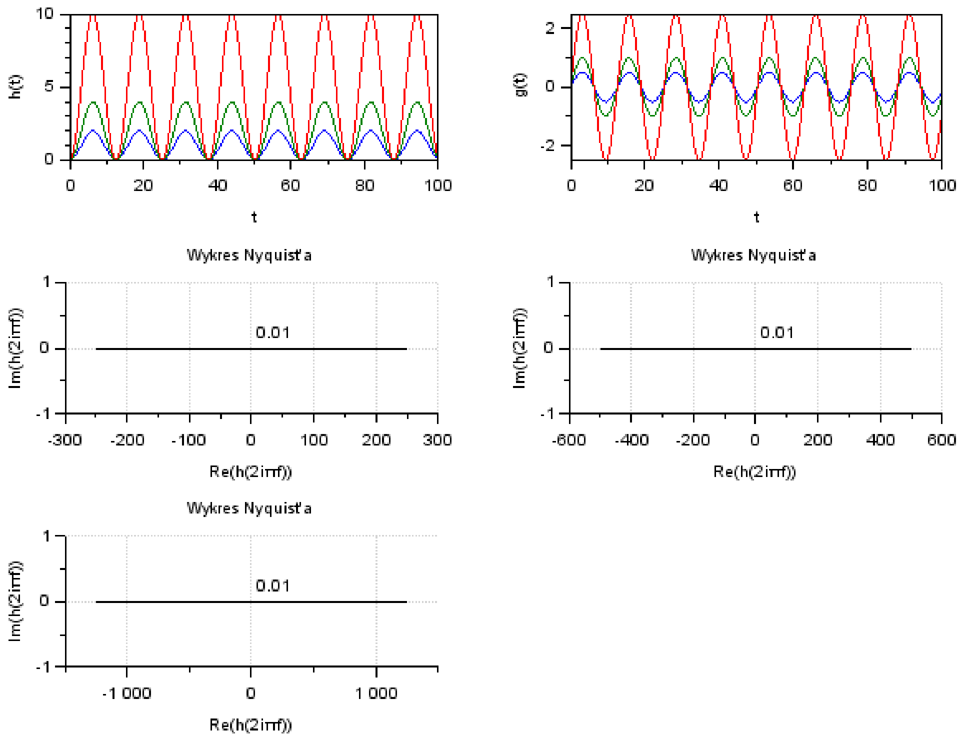




ii. -1<ξ<0 (drgania rosnące)



iii. ξ=0 (brak tłumienia drgań)



h. Element opóźniający