Przestrzeń probabilistyczna

1. Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce?

   Odpowiedź: 5!

2. Ile słów pięcioliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter $A,\ B,\ C$?

   Odpowiedź: $3^5 = 243$

3. Z partii towaru zawierającej sztuki dobre i niedobre losujemy 3 sztuki (*próba*). Niech A oznacza zdarzenie: *dokładnie jedna sztuka dobra w próbie*, B zdarzenie: *co najwyżej jedna sztuka dobra w próbie*, C zdarzenie: *co najmniej jedna sztuka dobra w próbie*. Opisz słownie następujące zdarzenia:

   a) A', B', C'
   b) $A \cup B$
   c) $A \cap B$
   d) $B \cup C$
   e) $B \cap C$
   f) $B' \cap C'$

   Odpowiedź: W próbie może być (dokładnie) 0, 1, 2 lub 3 sztuki dobre. Zatem:

   a) — A' Ze wszystkich możliwości usuwamy odpowiedź 1 sztuka dobra, uzyskując: *0 lub 2 lub 3 sztuki dobre w próbie.* Uwaga, odpowiedź *Dokładnie 1 sztuka zła w próbie* nie jest poprawna, bo to znaczy to samo co *dokładnie 2 sztuki dobre w próbie*, a to jest tylko jedna z pozostałych możliwości.
   — B' Ze wszystkich możliwości usuwamy odpowiedzi 0 i 1 sztuk dobrych, uzyskując: *2 lub 3 sztuki dobre w próbie.*
   — C' Ze wszystkich możliwości usuwamy odpowiedzi 1, 2, 3 sztuki dobre, uzyskując: *0 sztuk dobrych w próbie.*

   b) $A \cup B$ zachodzi zdarzenie A i/lub zachodzi zdarzenie B, zatem *w próbie jest dokładnie jedna sztuka dobra i/lub w próbie jest co najwyżej jedna sztuka dobra*, co upraszcza się do *w próbie jest co najwyżej jedna sztuka dobra*

   c) $A \cap B$ zachodzi zdarzenie A i jednocześnie zachodzi zdarzenie B, zatem *w próbie jest dokładnie jedna sztuka dobra i jednocześnie w próbie jest co najwyżej jedna sztuka dobra*, co upraszcza się do *w próbie jest dokładnie jedna sztuka dobra*

   d) $B \cup C$ *co najwyżej 1 sztuka dobra i/lub co najmniej 1 sztuka dobra*, czyli *dowolna liczba sztuk dobrych* lub *zdarzenie pewne*

   e) $B \cap C$ *co najwyżej 1 sztuka dobra i jednocześnie co najmniej 1 sztuka dobra*, czyli *dokładnie 1 sztuka dobra*

   f) $B' \cap C'$ *2 lub 3 sztuki dobre w próbie i jednocześnie 0 sztuk dobrych w próbie*, czyli *zdarzenie niemożliwe.*

4. Inżynier projektuje magazyn do przechowywania kartonów puszek żywności. Kartony mają kształt sześcianów o krawędzi 4 dm i masie 50 kg każdy. Zakłada się, że kartony nie mogą być ułożone w wieżę wyższą niż 24 dm. Zaproponować przestrzeń zdarzeń losowych dla następujących doświadczeń:

   a) Obserwacja całkowitego obciążenia 16 dm^2 powierzchni pochodzącego z jednego stosu kartonów.
   b) Obserwacja całkowitego obciążenia 16 dm^2 powierzchni pochodzącego z dwóch stosów kartonów, przy założeniu, że jest to obciążenie wywołane przezpolowę masy każdego z dwóch stosów.

   W obu przestrzeniach opisać następujące zdarzenia:

   A całkowite obciążenie wynosi co najmniej 150 kg;
   B całkowite obciążenie wynosi nie więcej niż 200 kg;
   C całkowite obciążenie przekracza 250 kg;

Odpowiedź: Istnieje wiele możliwych rozwiązań, poniżej zaprezentowane są przykłady. Kryterium jest takie: w danej przestrzeni zdarzeń elementarnych musi dać się opisać jako jej podzbiory zdarzenia A, B, C i dla danej obserwacji stosu/stosów kartonów musi dać się przypisać dokładnie jedno zdarzenie elementarne (ale może być tak że wielu obserwacjom przypisujemy to samo zdarzenie elementarne).

a) Obserwacja całkowitego obciążenia 16 dm^2 powierzchni pochodzącego z jednego stosu kartonów.

i. Zdarzeniom elementarnym odpowiadają masy stosu i nie rozpatrujemy pustych stosów

$$\Omega = \{50, 100, 150, 200, 250, 300\}$$
$$A = \{150, 200, 250, 300\}$$
$$B = \{50, 100, 150, 200\}$$
$$C = \{300\}$$

ii. J.w., ale rozpatrujemy puste stosy

$$\Omega = \{0, 50, 100, 150, 200, 250, 300\}$$
$$A = \{150, 200, 250, 300\}$$
$$B = \{0, 50, 100, 150, 200\}$$
$$C = \{300\}$$

iii. Kodujemy zdarzenia elementarne jako wysokość stosu zamiast masy

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$C = \{6\}$$

b) Obserwacja całkowitego obciążenia 16 dm^2 powierzchni pochodzącego z dwóch stosów kartonów, przy założeniu, że jest to obciążenie wywołane przez połowę masy każdego z dwóch stosów. Wszystkie uwagi o kodowaniu i zerach z poprzedniego podpunktu nadal obowiązują.

i. Zdarzeniom elementarnym oznaczone są obserwowaną masą, dopuszczamy puste stosy. Należy zwrócić uwagę, że dopuszczalne jest stosowanie $\ldots$ jeżeli jest jasne co skraca. Musi się wtedy obowiązkowo pojawić ostatni element, bo inaczej zbiór wygląda na nieskończony.

$$\Omega = \{0, 25, 50, 75, \ldots, 300\}$$
$$A = \{150, 175, \ldots, 300\}$$
$$B = \{0, 25, \ldots, 200\}$$
$$C = \{275, 300\}$$

ii. Możemy też kodować zdarzenia elementarne jako uporządkowane dwójki, w każdym przypadku kodując oddzielnie wysokość pierwszego i drugiego stosu. Dla ułatwienia zapisu można posłużyć się tzw. *set-builder notation.*

$$\Omega = \{(i, j) \colon i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{(0, 0), (0, 1), \ldots (0, 6), (1, 0), (1, 1), \ldots, (6, 6)\}$$
$$A = \{(i, j) \in \Omega \colon \frac{i + j}{2} \cdot 50 \geqslant 150\}$$
$$B = \{(i, j) \in \Omega \colon \frac{i + j}{2} \cdot 50 \leqslant 200\}$$
$$C = \{(i, j) \in \Omega \colon \frac{i + j}{2} \cdot 50 > 250\}$$

iii. Zamiast dwójek uporządkowanych (oznaczanych nawiasami okrągłymi) możemy stosować dwójki nieuporządkowane (dwuelementowe multizbiory)

$$\Omega = \{\{i, j\} : i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \dots \{0, 6\}, \{1, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 6\}, \dots, \{5, 6\}, \{6, 6\}\}$$

$$A = \{\{i, j\} \in \Omega : \frac{i + j}{2} \cdot 50 \geqslant 150\}$$

$$B = \{\{i, j\} \in \Omega : \frac{i + j}{2} \cdot 50 \leqslant 200\}$$

$$C = \{\{i, j\} \in \Omega : \frac{i + j}{2} \cdot 50 > 250\}$$

5. Na 10 kartkach napisano liczby od 1 do 10 i wrzucono do pudełka. Losujemy w sposób przypadkowy dwie kartki. Niech A odpowiada zdarzeniu *wylosowanie kartki z numerem 1*, a B zdarzeniu *wylosowanie pary liczb, których suma jest większa od 4*. Zakładamy, że wylosowanie każdej z kartek jest równoprawdopodobne.
   a) Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych. Podaj jej rozmiar.

      Odpowiedź: $\Omega = \{\{i, j\} | i, j \in \{1, \dots, 10\} \wedge i \neq j\}, |\Omega| = \binom{10}{2} = 45$

   b) Zdefiniuj zdarzenia A i B jako zbiory zdarzeń elementarnych.

      Odpowiedź: $A = \{\{i, j\} \in \Omega | i = 1 \vee j = 1\}$, $B = \{\{i, j\} \in \Omega | i + j > 4\}$

   c) Ile jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniom A i B.

      Odpowiedź: $|A| = 9$, $|B| = 45 - 4 = 41$

   d) Oblicz $P(A)$ i $P(B)$

      Odpowiedź: $P(A) = \frac{9}{45}, P(B) = \frac{41}{45}$

      Odpowiedź: Alternatywne rozwiązanie korzysta z par uporządkowanych, wtedy wszystkie zbiory są dwa razy bardziej liczne, ale prawdopodobieństwa wychodzą takie same. Można też rozważyć przypadek losowania ze zwracaniem, wtedy Ω musi składać się z par *uporządkowanych*, $|\Omega| = 100$ no i liczności A oraz B, a w konsekwencji prawdopodobieństwa wychodzą trochę inne.

6. W gospodzie *Złoty okoń* zorganizowano loterię, w której do sprzedania było 100 biletów, a wygrywał tylko jeden. Każdy mógł kupić najwyżej jeden bilet. Niech zdarzenie A odpowiada sytuacji, w której Estella posiada los wygrywający. Jakie ma szanse na wygraną?
   a) Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych.

      Odpowiedź: $\Omega = \{\omega_n | n = 1, 2, \dots, 100\}$

   b) Czy w tej przestrzeni wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne?

      Odpowiedź: Tak (przy czym jest to raczej kwestia założenia)

   c) Jaki jest rozmiar przestrzeni zdarzeń elementarnych?

      Odpowiedź: $|\Omega| = 100$

   d) Zdefiniuj zdarzenie A jako zbiór zdarzeń elementarnych.

      Odpowiedź: $A = \{\omega_1\}$ (Wybieramy dowolny los jako wygrywający, powiedzmy ten, któremu odpowiada zdarzenie elementarne ω_1)

   e) Oblicz prawdpodobieństwo $P(A)$, dbając o to by jasno przedstawić tok rozumowania.

      Odpowiedź: Na podstawie odpowiedzi w punkcie b możemy posłużyć się prawdopodobieństwem klasycznym: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{100}$

7. W gospodzie *Pod Zielonym Smokiem* oferują sześć różnych dań obiadowych. Pięciu klientów wchodzi jeden po drugim do gospody i niezależnie od siebie zamawia posiłek. Niech zdarzenie A odpowiada sytuacji, w której pierwsze danie z menu zamówi dokładnie jedna osoba.
   a) Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych.

   Odpowiedź: $\Omega = \{(i_1, \ldots, i_5) | i_j = 1, 2, \ldots, 6\}$ Uporządkowane ciągi 5-ciu elementów, w których kolejne pozycje odpowiadają numerom dań zamówionych przez kolejnych klientów. Musimy rozpatrywać wszystkich klientów jednocześnie, ponieważ nasze doświadczenie polega na obserwacji wszystkich klientów na raz (*dokładnie jedna osoba*), a jednemu wynikowi obserwacji musi odpowiadac *dokładnie jedno* zdarzenie elementarne.

   b) Czy w tej przestrzeni wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne?

   Odpowiedź: Tak (zakładając, że klienci zamawiają dania niezależnie od siebie i

   c) Jaki jest rozmiar przestrzeni zdarzeń elementarnych?

   Odpowiedź: $|\Omega| = 6^5$

   d) Zdefiniuj zdarzenie A jako zbiór zdarzeń elementarnych.

   Odpowiedź: $A = \{(i_1, \ldots, i_5) | \exists j : i_j = 1 \wedge \forall k \neq j : i_k \neq 1\}$, $|A| = 5 \cdot 5^4$

   e) Oblicz prawdpodobieństwo $P(A)$, dbając o to by jasno przedstawić tok rozumowania.

   Odpowiedź: $P(A) = \frac{5^5}{6^5} = \frac{5}{6}^5 \approx 0{,}40$

8. Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

9. Drewniane pale mają losową długość L nie przekraczającą 12 m. Pale są przeznaczone do wbijania w ziemię, której skalna warstwa stanowiąca opór znajduje się na losowej głębokości H, nie większej niż 10 m. Zaproponować przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tak opisanego doświadczenia. Zdefiniować przez odpowiednie zdarzenia elementarne następujące doświadczenia:

   A długość losowo wybranego pala będzie większa od głębokości skalnej warstwy;

   B głębkość skalnej warstwy przekroczy 8 metrów;

   C długość losowo wybranego pala przekroczy 8 metrów;

   D $B \cap C$

   E $B \cup C$

   F $(B \cup C) \cap A'$

10. Partia towaru składa się ze 100 elementów, wśród których 5 jest wadliwych. Poddajemy kontroli 50 elementów. Partię przyjmujemy, jeśli wśród kontrolowanych elementów jest nie więcej niż jeden wadliwy. Niech zdarzenie A odpowiada przyjęciu partii.
   a) Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych.

   Odpowiedź: $\Omega = \{\omega_J | \, |J| = 50 \wedge J \subset \{1, 2, \ldots, 100\}\}$

   b) Czy w tej przestrzeni wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne?

   Odpowiedź: Tak

   c) Jaki jest rozmiar przestrzeni zdarzeń elementarnych?

   Odpowiedź: $|\Omega| = \binom{100}{50}$

   d) Zdefiniuj zdarzenie A jako zbiór zdarzeń elementarnych.

   Odpowiedź: $A = \{\omega_J | \, |J \cap \{1, 2, \ldots, 5\}| \leqslant 1\}$

e) Oblicz prawdpodobieństwo $P(A)$, dbając o to by jasno przedstawić tok rozumowania.

Odpowiedź: $|A| = \binom{5}{1}\binom{95}{49} + \binom{95}{50}$, $P(A) \approx 0{,}181$

11. Winda rusza z siedmioma pasażerami i zatrzymuje się na dziesięciu piętrach. Niech zdarzenie A odpowiada sytuacji, w której żadnych dwóch pasażerów nie opuści windy na tym samym piętrze.

a) Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź: $\Omega = \{\omega_{i_1,\ldots,i_7} | i_j = 1, 2, \ldots, 10\}$

b) Czy w tej przestrzeni wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne?

Odpowiedź: Tak

c) Jaki jest rozmiar przestrzeni zdarzeń elementarnych?

Odpowiedź: $|\Omega| = 10^7$

d) Zdefiniuj zdarzenie A jako zbiór zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź: $A = \{\omega_{i_1,\ldots,i_7} | \forall j, k \colon j \neq k \to i_j \neq i_k\}$, $|A| = \frac{10!}{3!} = 604800$

e) Oblicz prawdpodobieństwo $P(A)$, dbając o to by jasno przedstawić tok rozumowania.

Odpowiedź: $P(A) = \frac{604800}{10^7} = 0{,}06$

12. Dwudziestoosobowa grupa studencka, w której jest 6 kobiet, otrzymała 5 biletów do teatru. Bilety rozdziela się drogą losowania. Niech zdarzenie A odpowiada sytuacji, w której wśród posiadaczy biletów znajdą się dokładnie trzy kobiety.

a) Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź: $\Omega = \{\omega_J | \, |J| = 5 \wedge J \subset \{1, 2, \ldots, 20\}\}$

b) Czy w tej przestrzeni wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne?

Odpowiedź: Tak

c) Jaki jest rozmiar przestrzeni zdarzeń elementarnych?

Odpowiedź: $|\Omega| = \binom{20}{5} = 15504$

d) Zdefiniuj zdarzenie A jako zbiór zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź: $A = \{\omega_J | \, |J \cap \{1, 2, \ldots, 6\}| = 3\}$, $|A| = \binom{6}{3}\binom{14}{2} = 1820$

e) Oblicz prawdpodobieństwo $P(A)$, dbając o to by jasno przedstawić tok rozumowania.

Odpowiedź: $P(A) = 0{,}12$

13. Dane są dwa pojemniki. W pierwszym z nich znajduje się 11 kul: 7 białych i 4 czarne. W drugim pojemniku jest 6 kul: 3 białe i 3 czarne. Z każdego pojemnika losujemy po dwie kule. Rozpatrz poniższe pytania w dwóch wariantach: wszystkie kule w danym kolorze są identyczne oraz gdy kule są rozróżnialne (np. numerowane).

a) Ile jest możliwych układów?

Odpowiedź: $\binom{11}{2}\binom{6}{2} = 825$

b) Ile jest układów składających się wyłącznie z kul czarnych?

Odpowiedź: $\binom{4}{2}\binom{3}{2} = 18$

c) Ile jest układów składających się wyłącznie z kul białych?

Odpowiedź: $\binom{7}{2}\binom{3}{2} = 63$

d) Ile jest układów składających się z pary białej i pary czarnej?

Odpowiedź: $\binom{7}{2}\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\binom{3}{2} + 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 333$

e) Ile jest układów składających się z jednej kuli białej i trzech czarnych?

Odpowiedź: $7 \cdot 4 \cdot \binom{3}{2} + 3 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} = 138$

f) Ile jest układów składających się z jednej kuli czarnej i trzech białych?

Odpowiedź: $4 \cdot 7 \cdot \binom{3}{2} + 3 \cdot 3 \cdot \binom{7}{2} = 273$

Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń

1. W sklepie są sprzedawane baterie dwóch firm A i B. Firma A dostarcza do sklepu dwa razy więcej baterii niż firma B. Braki wśród baterii (inaczej: niesprawne baterie) tych firm stanowią odpowiednio 0,9% i 1,4%. Kupujemy jedną baterię. Jakie jest prawdopodobieństwo kupienia baterii dobrej?

   Odpowiedź: Definiujemy zdarzenia:
   — A bateria pochodzi z firmy A
   — B bateria pochodzi z firmy B
   — D bateria jest dobra
   — Z bateria jest niesprawna
   Z treści zadania budujemy układ równań:

$$\begin{cases} P(A) = 2P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases}$$

   I obliczamy prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{2}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3}$$

   Odczytujemy prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(Z|A) = 0{,}9\% \qquad P(Z|B) = 1{,}4\%$$

   Zauważamy, że A i B stanowią podział przestrzeni: oba są możliwe, sumują się do całej przestrzeni i są rozłączne. Zatem możemy zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$P(Z) = P(Z|A)P(A) + P(Z|B)P(B) = 0{,}9\% \cdot \frac{2}{3} + 1{,}4\% \cdot \frac{1}{3} = \frac{3,2}{3}\% = \frac{32}{3000}$$

   Zauważamy, że $D = Z'$, a zatem:

$$P(D) = 1 - P(Z) = \frac{2968}{3000} \approx 98,93\%$$

2. O pewnym roczniku studentów wiadomo, że dzielą się na grupy:
   G_1 5% potrafiące odpowiedzieć na wszystkie pytania;
   G_2 30% potrafiące odpowiedzieć na 70% pytań;
   G_3 40% potrafiące odpowiedzieć na 60% pytań;
   G_4 25% potrafiące odpowiedzieć na 50% pytań;
   Wybrano w sposób przypadkowy jednego studenta. Obliczyć:
   a) prawdopodobieństwo, że odpowie on na pytanie;
   b) prawdopodobieństwo, że należy do grupy drugiej, jeżeli wiadomo, że odpowiedział na pytanie.

Odpowiedź: Definiujemy zdarzenia:
— O student umie odpowiedzieć na pytanie
— G_1, G_2, G_3, G_4 student należy do danej grupy
Odczytujemy prawdopodobieństwa z treści:

$$\begin{aligned} P(G_1) &= \frac{5}{100} \qquad & P(O|G_1) &= 1 \\ P(G_2) &= \frac{30}{100} \qquad & P(O|G_2) &= \frac{7}{10} \\ P(G_3) &= \frac{40}{100} \qquad & P(O|G_3) &= \frac{6}{10} \\ P(G_4) &= \frac{25}{100} \qquad & P(O|G_4) &= \frac{5}{10} \end{aligned}$$

Student należy do dokładnie jednej grupy, a zatem zdarzenia $G_1, \ldots, G_4$ stanowią podział przestrzeni i możemy zastosować twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, żeby obliczyć odpowiedź na pytanie z punktu a:

$$P(O) = P(O|G_1)P(G_1) + P(O|G_2)P(G_2) + P(O|G_3)P(G_3) + P(O|G_4)P(G_4) = \frac{625}{1000}$$

Następnie korzystamy z twierdzenia Bayesa, żeby obliczyć prawdopodobieństwo z punktu b:

$$P(G_2|O) = \frac{P(O|G_2)P(G_2)}{P(O)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{30}{100}}{\frac{625}{1000}} = \frac{210}{625} = 0{,}336$$

3. Prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez jeden przekaźnik jest równe 0,9. Przekaźniki działają niezależnie, tzn. awaria jednego z nich nie ma wpływu na działanie pozostałych. Obliczyć prawdopodobieństwo przekazania sygnału:
   a) przy połączeniu szeregowym dwóch przekaźników (inaczej: muszą działać oba przekaźniki);
   b) przy połączeniu równoległym dwóch przekaźników (inaczej: wystarczy, że chociaż jeden przekaźnik będzie działał);
   c) przy połączeniu szeregowym trzech przekaźników;
   d) przy połączeniu równoległym trzech przekaźników;

Odpowiedź: Oznaczamy zdarzenia:
— A działa 1. przekaźnik
— B działa 2. przekaźnik
— C działa 3. przekaźnik
Zdarzenia są niezależne i każde zachodzi z prawdopodobieństwem 0,9. Zatem:
a)
$$P(A \cap B) \underset{\text{z niezależności}}{=} P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$$
b) Interesuje nas $P(A \cup B)$. Możemy skorzystać z prawa de Morgana:
$$P(A \cup B) = P([A' \cap B']') = 1 - P(A' \cap B')$$
A następnie z twierdzenia o niezależności zdarzeń przeciwnych:
$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = (1 - 0{,}9)^2 = 0{,}01$$
Wracając do pierwszego równania otrzymujemy
$$P(A \cup B) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$
c)
$$P(A \cap B \cap C) \underset{\text{z niezależności}}{=} P(A) \cdot P(B) \cap P(C) = 0{,}9^3 = 0{,}729$$
d) Analogicznie jak punkt b:
$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - (1 - 0{,}1)^3 = 0{,}999$$

4. Wiadomo, że 90% produkcji spełnia wymagania techniczne. Przeprowadzono dodatkową kontrolę, przy której mogły być popełnione pewne błędy, a mianowicie: element wadliwy mógł zostać sklasyfikowany jako dobry z prawdopodobieństwem 0,05, a element dobry mógł zostać sklasyfikowany jako wadliwy z prawdopodobieństwem 0,02. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że element, który został sklasyfikowany jako dobry, faktycznie jest dobry.

Odpowiedź: Oznaczamy zdarzenia:
— K element sklasyfikowany jako dobry
— K' element sklasyfikowany jako zły
— D element faktycznie dobry
— D' element faktycznie zły
Odczytujemy prawdopodobieństwa z treści zadania i obliczamy prawdopodobieństwa zdarzeń przeciwnych:

$$P(D) = 0{,}9 \qquad P(D') = 0{,}1$$
$$P(K|D') = 0{,}05 \qquad P(K'|D') = 0{,}95$$
$$P(K'|D) = 0{,}02 \qquad P(K|D) = 0{,}98$$

Mamy policzyć $P(D|K)$, a skoro znamy prawdopodobieństwa "w drugą stronę" (tj. np. $P(K|D)$), to korzystamy z tw. Bayesa:

$$P(D|K) = \frac{P(K|D)P(D)}{P(K)} = \frac{P(K|D)P(D)}{P(K|D)P(D) + P(K|D')P(D')} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}9}{0{,}98 \cdot 0{,}9 + 0{,}05 \cdot 0{,}1} = \frac{882}{887}$$

5. Merry wybrał się do Starego Lasu zbierać pewne rośliny o wielce pożądanych właściwościach na nadchodzącą Sobótkę. Niestety, Merry nie jest zbyt biegły w rozpoznawaniu roślin. Jedyne co wie, to że ma zbierać lejkowate kwiaty w jednym z trzech kolorów: białe, różowe lub niebieskie. Czego Merry'emu nie powiedziano to, że wśród białych kwiatów tylko 30% posiada pożądane właściwości, wśród różowych 55%, a wśród niebieskich aż 90%. Wracając do domu Merry zauważył, że wśród kwiatów, które zebrał liczba białych do liczby różowych ma się jak 3 : 2, a liczba różowych do liczby niebieskich jak 2 : 1. Merry dla zabawy zamknął oczy i na chybił-trafił wybrał jeden z zebranych kwiatów.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany kwiat jest niebieski?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany kwiat jest biały lub różowy?
c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany kwiat ma pożądane właściwości, jeżeli wiadomo, że jest niebieski?
d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany kwiat jednocześnie ma pożądane właściwości i jest niebieski?
e) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany kwiat ma pożądane właściwości, jeżeli nie wiadomo jaki ma kolor?
f) Co by było gdyby Merry nie wiedział, jakiego koloru wylosował kwiat, ale wiedział, że wybrany kwiat nie ma pożądanych właściwości: jakie byłoby wtedy prawdopodobieństwo, że kwiat będzie biały lub niebieski?

Odpowiedź: Zaczynamy od nazwania zdarzeń:

— N niebieski kwiat
— B biały kwiat
— R różowy kwiat
— W kwiat ma właściwości

Odczytujemy prawdopodobieństwa z treści:

$$P(W|B) = \frac{3}{10} \qquad P(W|R) = \frac{55}{100} = \frac{11}{20} \qquad P(W|N) = \frac{9}{10}$$

Z proporcji budujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{P(B)}{P(R)} = \frac{3}{2} \\ \frac{P(R)}{P(N)} = 2 \\ P(B) + P(N) + P(R) = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań otrzymując:

$$P(B) = \frac{3}{6} \qquad P(R) = \frac{2}{6} \qquad P(N) = \frac{1}{6}$$

a) $P(N) = \frac{1}{6}$
b) $P(B \cup R) = P(B) + P(R) = \frac{5}{6}$ (zdarzenia B i R są rozłączne)
c) odczytujemy z treści zadania: $P(W|N) = \frac{9}{10}$
d) korzystamy z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(W \cap N) = P(W|N)P(N) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{60}$$

e) Zdarzenia B, R, N stanowią podział przestrzeni, zatem korzystam z prawdopodobieństwa całkowitego:

$$P(W) = P(W|N)P(N) + P(W|R)P(R) + P(W|B)P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} + \frac{11}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9 + 11 + 9}{60} = \frac{29}{60}$$

f) Korzystamy z faktu, że R jest zdarzeniem przeciwnym dla $B \cup N$ i przepisujemy z twierdzenia Bayesa:

$$P(B \cup N|W') = 1 - P(R|W') = 1 - \frac{P(W'|R)P(R)}{P(W')}$$

Korzystając ze zdarzeń przeciwnych:

$$1 - \frac{P(W'|R)P(R)}{P(W')} = 1 - \frac{[1 - P(W|R)]P(R)}{1 - P(W)}$$

Podstawiamy wartości liczbowe:

$$1 - \frac{[1 - P(W|R)]P(R)}{1 - P(W)} = 1 - \frac{\left(1 - \frac{11}{20}\right) \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{29}{60}} = 1 - \frac{\frac{9}{60}}{\frac{31}{60}} = \frac{22}{31}$$

6. Kuce w Oatbarton od czasu do czasu zapadają na Straszną Chorobę Kuców. Na szczęście zmyślni, hobbicy farmerzy wymyślili sposób na wykrywanie choroby we wczesnym stadium i izolowanie chorych zwierząt. Niestety, sposób nie jest idealny: prawdopodobieństwo, że zwierzę zostatnie uznane za chore, wynosi odpowiednio $0,85$ dla zwierzęcia chorego i $0,07$ dla zwierzęcia zdrowego. Z danych historycznych wiadomo, że prawdopodobieństwo zapadnięcia na Straszną Chorobę Kuców wynosi $0,2$ dla każdego kuca. Rozpatrujemy doświadczenie polegające na badaniu kuca Ostrouchego.

a) Zdefiniuj przestrzeń zdarzeń elementarnych.

b) Jaki jest rozmiar przestrzeni zdarzeń elementarnych?

c) Czy w tej przestrzeni wszystkie zdarzenia elementarne są równoprawdopodobne? Odpowiedź uzasadnij.

d) Nazwij i zdefiniuj jako zbiory zdarzeń elementarnych następujące zdarzenia opisane słownie:
— Ostrouchy jest chory.
— Ostrouchy jest zdrowy.
— Test wskazał, że Ostrouchy jest chory.
— Test wskazał, że Ostrouchy jest zdrowy.
Wykorzystaj tak przypisane nazwy w dalszych obliczeniach!

e) Bez przeprowadzania testu, jakie jest prawdopodobieństwo, że Ostrouchy jest zdrowy?

f) Jakie jest prawdopodobieństwo, że jednocześnie Ostrouchy jest zdrowy i test wskazał, że Ostrouchy jest zdrowy?

g) Jakie jest prawdopodobieństwo, że test wskaże, że Ostrouchy jest zdrowy?

h) Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ostrouchy jest zdrowy, jeżeli test wskazał, że Ostrouchy jest zdrowy?

i) Czy zdarzenia: *Ostrouchy jest zdrowy* oraz *test wskazał, że Ostrouchy jest zdrowy* są niezależne? Odpowiedź uzasadnij odpowiednim rachunkiem.

Odpowiedź:

a) *Rozpatrujemy doświadczenie polegające na badaniu kuca Ostrouchego*, zatem wystarczy, że opiszemy stan Ostrouchego, wszystkie inne kuce nas w tym zadaniu nie interesują. Ostrouchy może być chory albo zdrowy, może też mieć pozytywny (*test wskazuje, że kuc jest chory*) albo negatywny (*test wskazuje, że kuc jest zdrowy*) wynik testu. To daje nam 4 zdarzenia elementarne:
— $(C, -)$ Kuc chory (C), wynik testu negatywny $(-)$.
— $(C, +)$ Kuc chory (C), wynik testu pozytywny $(+)$.
— $(Z, -)$ Kuc zdrowy (Z), wynik testu negatywny $(-)$.
— $(Z, +)$ Kuc zdrowy (Z), wynik testu pozytywny $(+)$.
Zatem:

$$\Omega = \{(C, -), (C, +), (Z, -), (Z, +)\}$$

Oczywiście dowolna inna czteroelementowa przestrzeń zdarzeń elementarnych się nada.

b)

$$|\Omega| = 4$$

c) Zdarzenia elementarne nie są równoprawdopodobne, bo suma prawdopodobieństw dwóch zdarzeń elementarnych $\{(C, -), (C, +)\}$ jest podana w treści zadania jako 0,2, natomiast gdyby zdarzenia elementarne były równoprawdopodobne ta suma musiałaby wynosić 0,5.

d)
— $C = \{(C, -), (C, +)\}$ (Ostrouchy jest chory)
— $C' = \{(Z, -), (Z, +)\}$ (Ostrouchy jest zdrowy – zdarzenie przeciwne do C)
— $T = \{(C, +), (Z, +)\}$ (Test wskazał, że Ostrouchy jest chory)
— $T' = \{(C, -), (Z, -)\}$ (Test wskazał, że Ostrouchy jest zdrowy – zdarzenie przeciwne do T)

Zanim przejdziemy dalej zapiszemy prawdopodobieństwa podane w zadaniu posługując się zdefiniowanymi symbolami:

$$P(C) = 0{,}2 \qquad P(T|C) = 0{,}85 \qquad P(T|C') = 0{,}07$$

e)

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

f) Przekształcamy definicję prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(C' \cap T') = P(T'|C') \cdot P(C') = (1 - P(T|C')) \cdot P(C') = (1 - 0{,}07) \cdot 0{,}8 = 0{,}744$$

g) Wykorzystujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(T') = P(T'|C)P(C) + P(T'|C')P(C') = (1 - 0{,}85) \cdot 0{,}2 + 0{,}744 = 0{,}03 + 0{,}744 = 0{,}774$$

h) Wykorzystujemy wyniki w poprzednich dwóch podpunktów:

$$P(C'|T') = \frac{P(C' \cap T')}{P(T')} = \frac{0{,}744}{0{,}774} = \frac{744}{774}$$

i) Zdarzenia C' i T' są niezależne wtedy, i tylko wtedy, gdy $P(C' \cap T') = P(C') \cdot P(T')$. Podstawiając wyniki wcześniejszych punktów wiemy, że zatem musiałoby zachodzić: $0{,}744 = 0{,}774 \cdot 0{,}8$, ale tak nie jest. Zatem zdarzenia C' i T' są zależne.

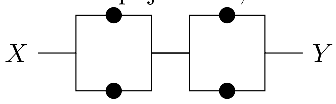
7. Telegraficzne przekazywanie informacji odbywa się metodą nadawania sygnałów kropka-kreska. Statystyczne właściwości zakłóceń są takie, że błędy następują przeciętnie w 2 przypadkach na 5 przy nadawaniu sygnału kropka i w 1 przypadku na 3 przy nadawaniu sygnału kreska. Wiadomo, że ogólny stosunek liczby nadawanych sygnałów kropka do sygnałów kreska jest $\frac{5}{3}$.

   a) Odebrano kropkę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nadano kropkę?

   Odpowiedź: $P(N.|O.) = \frac{P(O.|N.)P(N.)}{P(O.|N.)P(N.)+P(O.|N_-)P(N_-)} = \frac{\frac{3}{5}\frac{5}{8}}{\frac{3}{5}\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\frac{3}{8}} = \frac{3}{4}$

b) Odebrano kreskę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nadano kreskę?

8. Brzeczka piwna za pomocą systemu pomp (na rysunku poniżej: czarne koła) płynie z kadzi warzelnej (punkt X) do pojemnika fermentacyjnego (punkt Y) zgodnie ze schematem pokazanym na poniższym rysunku. Niestety, prawodpodobieństwo awarii każdej z pomp w trakcie przepompowywania brzeczki wynosi 0,1 i jest stałe, i niezależne od sprawności pozostałych pomp. Niech zdarzenie A odpowiada przepompowaniu brzeczki z kadzi do pojemnika, tzn. istnieniu jakiejkolwiek ścieżki pomiędzy punktami X i Y bez uszkodzonej pompy.



a) Przedstaw przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź: $\Omega = \{\omega_{i_1,\ldots,i_4} | i_j \in \{0,1\}\}$

b) Czy w tej przestrzeni wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne?

Odpowiedź: Nie

c) Jaki jest rozmiar przestrzeni zdarzeń elementarnych?

Odpowiedź: $|\Omega| = 2^4$

d) Zdefiniuj zdarzenie A jako zbiór zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź: $A = \{\omega_{1111}, \omega_{1110}, \omega_{1101}, \omega_{1011}, \omega_{1010}, \omega_{1001}, \omega_{0111}, \omega_{0110}, \omega_{0101}\}$

e) Oblicz prawdpodobieństwo $P(A)$, dbając o to by jasno przedstawić tok rozumowania.

Odpowiedź: $P(A) = 0{,}9^4 + 4 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}9801 = (0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}9^2)^2$, np. $P(\omega_{1111}) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$

Zmienne losowe jednowymiarowe typu skokowego

1. Rozważamy doświadczenie polegające na jednokrotnym rzucie uczciwą kostką sześciościenną
   a) Zaproponuj zmienną losową X odpowiednią do tego doświadczenia.

   Odpowiedź: Oznaczmy zdarzenia elementarne za pomocą liczb rzymskich reprezentujących liczbę oczek wyrzuconych na kostce:
   $$\Omega = \{I, II, III, IV, V, VI\}$$
   Zmienne losowe możemy wymyślić tu różne (zadanie jest mało precyzyjne), ale ograniczmy się do najprostszej, odwzorowujemy wynik w liczbę oczek:
   $$X = \{I \mapsto 1, II \mapsto 2, III \mapsto 3, IV \mapsto 4, V \mapsto 5, VI \mapsto 6\}$$

   b) Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

   Odpowiedź:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   Możemy to też oczywiście zapisać inaczej, np. $P(X = i) = \frac{1}{6}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Istotne, żeby pokazać przyporządkowanie prawdopodobieństw do poszczególnych punktów skokowych.

   c) Podaj dystrybuantę zmiennej losowej X i narysuj jej wykres.

   Odpowiedź:
   $$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{6} & x \in [1, 2) \\ \frac{2}{6} & x \in [2, 3) \\ \frac{3}{6} & x \in [3, 4) \\ \frac{4}{6} & x \in [4, 5) \\ \frac{5}{6} & x \in [5, 6) \\ 1 & x \in [6, \infty) \end{cases}$$
   Prościej zapisać to samo w formie tabeli:

x	$(-\infty, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, \infty)$
$F(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

   d) Oblicz $P(X < 4)$ korzystając z rozkładu prawdopodobieństwa.

   Odpowiedź:
   $$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

   e) Oblicz $P(X < 4)$ korzystając z dystrybuanty.

   Odpowiedź:
   $$P(X < 4) = \lim_{x \to 4-} F(x) = F(3) = \frac{1}{2}$$
   Przejście od $x \to 4-$ do 3 wynika z tego, że de facto interesuje nas dowolna liczba z przedziału kończącego się w 4 otwartym, tj. przedziału $[3, 4)$, a zatem np. 3.

   f) Oblicz $P(X > 2)$ korzystając z rozkładu prawdopodobieństwa.

   Odpowiedź:
   $$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

g) Oblicz $P(X > 2)$ korzystając z dystrybuanty.

Odpowiedź:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

h) Oblicz wartość średnią.

Odpowiedź:

$$EX = \sum_{x_i} x_i \cdot P(X = x_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + \frac{21}{6} = 3{,}5$$

i) Oblicz wariancję.

Odpowiedź: Dwa sposoby:

i. Bezpośrednio z definicji

$$\begin{aligned} D^2X =& E\left[(X - EX)^2\right] = \sum_{x_i} \big(x_i - EX)^2 \cdot P(X = x_i)\big) = \\ & (1 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6}(2 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6}(3 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6}(4 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6}(5 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6}(6 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \\ & \frac{1}{6}((-2{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-0{,}5)^2 + 2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2) = 2\frac{11}{12} \end{aligned}$$

ii. Posługując się przekształconym wzorem:

$$\begin{aligned} D^2X =& E(X^2) - (EX)^2 = \sum_{x_i} x_i^2 P(X = x_i) - (EX)^2 = \\ & 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - (3,5)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12} \end{aligned}$$

2. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale jest równie $\frac{1}{5}$. Niech X przyjmuje wartość 1 jeżeli udało się trafić i 0 w przeciwnym przypadku.

a) Podaj rozkład zmiennej losowej X.

Odpowiedź: $P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p \qquad p = \frac{1}{5}$

b) Oblicz średnią liczbę celnych strzałów.

Odpowiedź: $EX = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p = \frac{1}{5}$

c) Oblicz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Odpowiedź: $DX = \sqrt{D^2X} = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2} = \sqrt{1^2 \cdot p - p^2} = \sqrt{p(1 - p)} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$

d) Podaj najbardziej prawdopodobną wartość zmiennej losowej X.

Odpowiedź: 0, bo $P(X = 0) > P(X = 1)$, a mamy do wyboru tylko 0 i 1

3. Rozważamy doświadczenie polegające na obserwacji sumy oczek na dwóch uczciwych kostkach sześciościennych

a) Zaproponuj zmienną losową X odpowiednią do tego doświadczenia.

Odpowiedź: Niech pojedyncze zdarzenie elementarne to para uporządkowana: (wynik na 1. kostce, wynik na 2. kostce), gdzie wyniki są kodowane przez wyrzuconą liczbę oczek $1, 2, \ldots, 6$. Wtedy przestrzeń zdarzeń elementarnych wygląda następująco:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$$

Wtedy łatwo zdefiniować zmienną:

$$X((i, j)) = i + j \qquad \forall (i, j) \in \Omega$$

b) Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

Odpowiedź:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

c) Podaj dystrybuantę zmiennej losowej X i narysuj jej wykres.

Odpowiedź:

x	$(-\infty, 2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10)$	$[10,11)$	$[11,12)$	[
$F(x)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	

d) Oblicz $P(X > 5)$ korzystając z dystrybuanty.

Odpowiedź:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - F(5) = 1 - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

e) Oblicz wartość średnią.

Odpowiedź:

$$EX = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i) = 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

f) Oblicz odchylenie standardowe.

Odpowiedź:

$$EX^2 = 2^2\cdot\frac{1}{36}+3^2\cdot\frac{2}{36}+4^2\cdot\frac{3}{36}+5^2\cdot\frac{4}{36}+6^2\cdot\frac{5}{36}+7^2\cdot\frac{6}{36}+8^2\cdot\frac{5}{36}+9^2\cdot\frac{4}{36}+10^2\cdot\frac{3}{36}+11^2\cdot\frac{2}{36}+12^2\cdot\frac{1}{36} = \frac{1974}{36}$$

$$\sqrt{D^2X} = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2} = \sqrt{\frac{1974}{36} - 49} \approx 2{,}42$$

4. Kasyno w Bree wprowadziło następującą grę: gracz rozpoczyna z jednym punktem i rzuca uczciwą kostką sześciościenną. Jeżeli wypadnie 1, gracz traci wszystkie punkty i kończy grę. Jeżeli wypadnie 2, 3 lub 4, gracz podwaja liczbę punktów i kończy grę. Jeżeli wypadnie 5 lub 6, gracz podwaja liczbę punktów i może ponownie rzucić kostką. W ciągu gry można maksymalnie rzucić trzy razy kostką, tzn. w trzecim rzucie wyniki 5 lub 6 traktuje się tak samo jak wyniki 2, 3, 4. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę punktów gracza na końcu gry.

a) Podaj zbiór punktów skokowych, tj. możliwych wartości, zmiennej losowej X.

Odpowiedź: $\{0, 2, 4, 8\}$

b) Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

Odpowiedź:

$$P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(X = 4) = \frac{2}{6}\frac{3}{6} = \frac{1}{6} \qquad P(X = 8) = \frac{2}{6}\frac{2}{6}\frac{5}{6} = \frac{5}{54}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6}\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\frac{2}{6}\frac{1}{6} = \frac{13}{54}$$

c) Narysuj wykres dystrybuanty zmiennej losowej X.

d) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz zdobędzie niezerową liczbę punktów.

Odpowiedź:

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = \frac{41}{54}$$

e) Oblicz średnią liczbę punktów gracza na końcu gry.

Odpowiedź:

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{5}{54} = \frac{65}{27}$$

f) Obliczy odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Odpowiedź:

$$EX^2 = 4\frac{1}{2} + 16\frac{1}{6} + 64\frac{5}{54} = \frac{286}{27} \qquad D^2X = \frac{286}{27} - \left(\frac{65}{27}\right)^2 = \frac{3497}{27^2} \qquad DX = \frac{\sqrt{3497}}{27}$$

g) Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość zmiennej losowej X?

Odpowiedź: 2

5. Ted Cotton po pracy udaje się do kasyna w Bree, które niedawno wprowadziło następującą grę: gracz rozpoczyna z jednym punktem i rzuca uczciwą kostką sześcioscienną. Jeżeli wypadnie 1, gracz traci wszystkie punkty i kończy grę. Jeżeli wypadnie 2, 3 lub 4, gracz podwaja liczbę punktów i kończy grę. Jeżeli wypadnie 5 lub 6, gracz podwaja liczbę punktów i może ponownie rzucić kostką. Nie ma górnego ograniczenia na liczbę rzutów ani na wysokość wygranej. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę punktów gracza na końcu gry.
Podpowiedź:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

a) Podaj zbiór punktów skokowych, tj. możliwych wartości, zmiennej losowej X.

Odpowiedź: $\{0, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots\} = \{0\} \cup \{2^n : n \in \mathbb{N}_+\}$

b) Podaj funkcję prawdopodobieństwa P zmiennej losowej X.

Odpowiedź:

$$P(X = k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{2} & k = 2^n \; n \in \mathbb{N}_+ \\ \frac{1}{4} & k = 0 \quad \text{(wyprowadzenie niżej)} \end{cases}$$

c) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz skończy grę z niezerową liczbą punktów.

Odpowiedź:

$$P(X > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

d) Oblicz średnią liczbę punktów gracza na końcu gry.

Odpowiedź:

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

e) Obliczy odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Odpowiedź: $DX = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2}$

$$EX^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$$

Wyciągamy z tego wniosek, że nie można obliczyć odchylenia standardowego tej zmiennej losowej.

f) Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość zmiennej losowej X?

Odpowiedź: 2

6. Bilbo bierze udział w grze, w której punkty zdobywa się za trafianie kamykami do celu. Każdemu zawodnikowi przysługuje maksymalnie pięć rzutów, przy czym:
— na początku każdy zawodnik ma jeden punkt;
— każdy trafiony rzut powoduje podwojenie liczby posiadanych punktów;

— rzut nietrafiony oznacza koniec gry dla danego zawodnika.

Prawdopodobieństwo, że Bilbo w pojedynczym rzucie trafi do celu wynosi 0,7. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę punktów zdobytych przez Bilba.

a) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

b) Oblicz dystrybuantę zmiennej losowej X.

c) Oblicz EX.

d) Oblicz wariancję zmiennej losowej X.

e) Oblicz $P(5 \leqslant X \leqslant 30)$.

7. Dana jest następująca gra: gracz rzuca uczciwą kostką sześcioscienną tak długo, dopóki nie wyrzuci piątki bądź szóstki, ale nie więcej niż trzy razy. Jeżeli uda mu się wyrzucić założoną liczbę oczek w k-tym rzucie, wygrywa $5 - k$ zł, w przeciwnym razie nie wygrywa nic. Niech zmienna losowa X odpowiada wysokości wygranej. Podaj, dbając by przedstawić tok rozumowania:

   a) funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X;

   b) dystrybuatnę zmiennej losowej X;

   c) prawdopodobieństwo, że gracz wygra nie mniej niż 3, a nie więcej niż 4 zł;

   d) średnią wartość wygranej;

   e) odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

8. Linia technologiczna składająca samochody składa 5 sztuk w ciągu godziny. Przy okazji składania każdego z samochodów istnieje prawdopodobieństwo 0,1, że maszyna montująca drzwi kierowcy ulegnie rozregulowaniu i będzie rysować lakier. Co gorsza, rozregulowanie jest trwałe w tym sensie, że dopóki technik nie wyreguluje maszyny wszystkie montowane drzwi będą rysowane. W związku z kryzysem firma postanowiła wprowadzić oszczędności i technik regulujący maszyny dokonuje kontroli tylko raz na godzinę. Porysowanie lakieru na jednych drzwiach to koszt 600 zł. Niech zmienna X odpowiada kwocie, która firma straciła w ciągu godziny w wyniku porysowania lakieru przez maszynę montującą drzwi. Podaj, dbając by przedstawić tok rozumowania:

   a) funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X;

   b) dystrybuatnę zmiennej losowej X;

   c) średnią stratę;

   d) odchylenie standardowe zmiennej losowej X;

   e) prawdopodobieństwo, że firma straci przynajmniej 1000 zł w ciągu godziny

Dyskretne rozkłady prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale jest równie $\frac{1}{5}$. Niech X oznacza liczbę strzałów celnych w wykonanej serii 5 niezależnych strzałów.
   a) Podaj rozkład zmiennej losowej X.

   Odpowiedź: Mamy do czynienia z powtarzającymi się próbami, niezależnymi od siebie, o stałym prawdopodobieństwie sukcesu i których liczba jest z góry ustalona. Zatem korzystamy z rozkładu dwumianowego:

   $$P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

   b) Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba strzałów celnych będzie nie mniejsza niż 2.

   Odpowiedź: $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{4^5}{5^5} - 5 \cdot \frac{4^4}{5^5} = \frac{821}{3125} \approx 0{,}263$

   c) Oblicz średnią liczbę celnych strzałów.

   Odpowiedź: $EX = np = 1$

   d) Oblicz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

   Odpowiedź: $DX = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{4}{5}}$

   e) Podaj najbardziej prawdopodobną liczbę celnych strzałów.

   Odpowiedź: Patrzymy czy iloczyn $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą. W tym przypadku nie jest ($(n+1)p = \frac{6}{5}$), a zatem jest jeden punkt najbardziej prawdopodobny: $\lfloor (n+1)p \rfloor = 1$

2. Linia 64 jeżdżąca na trasie Literacka–Kacza jest obsługiwana przez 7 autobusów, które psują się przypadkowo i niezależnie od siebie. Każdy autobus może w ciągu całego dnia zepsuć się z prawdopodobieństwem 0,25. Niech X oznacza liczbę autobusów, które w ciągu dnia uległy awarii i musiały zjechać do zajezdni.
   a) Podaj rozkład zmiennej losowej X.

   Odpowiedź: Mamy do czynienia z sytuacją analogiczną jak w poprzednim zadaniu, a zatem

   $$P(X = k) = \binom{7}{k} (0{,}25)^k \, (0{,}75)^{7-k} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$$

   b) Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu całego dnia zepsują się przynajmniej 3 autobusy.

   Odpowiedź:

   $$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) =& 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = \\ & 1 - (0{,}75)^7 - 7 \cdot 0{,}25 \cdot (0{,}75)^6 - \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot (0{,}25)^2 \cdot (0{,}75)^5 \end{aligned}$$

   c) Oblicz średnią liczbę zepsutych autobusów.

   Odpowiedź:

   $$EX = np = 7 \cdot 0{,}25 = 1{,}75$$

   d) Oblicz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

   Odpowiedź:

   $$DX = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{7 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \frac{\sqrt{21}}{4} \approx 1{,}15$$

e) Podaj najbardziej prawdopodobną liczbę zepsutych autobusów.

Odpowiedź: Iloczyn $(n+1)p = 2$ jest liczbą całkowitą, zatem mamy dwa punkty skokowe, które są najbardziej prawdopodobne:

$$(n+1)p - 1 = 1, (n+1)p = 2$$

3. W Minas Tirith gromadzą zapasy na wypadek oblężenia. Jeżeli mięso, pakowane w beczki, jest źle wysuszone może się zepsuć. Prawdopodobieństwo, że tak się stanie wynosi 0,0045 niezależnie dla każdej beczki. W piwnicach zgromadzono 1000 beczek z mięsem, niech X oznacza liczbę beczek z zepsutym mięsem.

a) Podaj rozkład zmiennej losowej X.

Odpowiedź: Mamy podobną sytuację jak w poprzednich zadaniach, możemy więc posłużyć się rozkładem dwumianowym:

$$P(X = k) = \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k}$$

Ponieważ mamy do czynienia z dużą liczbą mało prawdopodobnych prób ($n > 50, p < 0{,}1, np < 10$) możemy posłużyć się też przybliżeniem rozkładem Poissona:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda = 1000 \cdot 0{,}0045 = 4{,}5$$

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że zepsuje się nie więcej niż 5 beczek.

Odpowiedź: Możemy skorzystać ze stablicowanego rozkładu Poissona (dostępny na końcu tego rozdziału), odczytujemy wartości z wiersza odpowiadającego $\lambda = 4{,}5$ i kolumn odpowiadających punktom skokowym, które nas interesują:

$$P(X \leqslant 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$
$$0{,}0111 + 0{,}0500 + 0{,}1125 + 0{,}1687 + 0{,}1898 + 0{,}1708 = 0{,}70290$$

c) Oblicz średnią liczbę zepsutych beczek.

Odpowiedź: $EX = \lambda = 4{,}5$

d) Oblicz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Odpowiedź: $DX = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4{,}5}$

4. Hobbici znani są ze swojej intensywnej i obfitej korespondencji. W Michael Delving mieszka 500 hobbitów, a w ciągu jednego dnia do urzędu pocztowego przychodzi X hobbitów. Hobbici do urzędu pocztowego przychodzą niezależnie od siebie i z równym prawdopodobieństwem p, a każdego dnia jest ich tam *średnio* 75. Załóż, że zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy.

a) Oblicz wartość prawdopodobieństwa p przyjścia do urzędu przez pojedynczego hobbita.

Odpowiedź: Hobbici przychodzą niezależnie i z równym prawdopodobieństwem, jest ich też stała liczba $n = 500$, a zatem mamy do czynienia z modelem rozkładu dwumianowego. Znamy średnią, więc łatwo obliczyć prawdopodobieństwo:

$$p = \frac{EX}{n} = \frac{75}{500} = \frac{3}{20}$$

b) Podaj (w formie funkcji prawdopodobieństwa) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

Odpowiedź:

$$P(X = k) = \binom{500}{k} \left(\frac{3}{20}\right)^k \left(\frac{17}{20}\right)^{500-k} \quad k \in \{0, 1, \ldots, 500\}$$

c) Ile różnych wartości może przyjąć dystrybuanta zmiennej losowej X? Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedź: Mamy 500 hobbitów, a zatem 501 punktów skokowych (0 do 500). Dystrybuanta zmiennej losowej typu skokowego rośnie w każdym punkcie skokowym, zatem mamy 501 wzrostów. Żeby mieć 501 wzrostów musimy mieć 502 różne wartości.

d) Jaką wartość przyjmie dystrybuanta zmiennej losowej X w punkcie 1000?

Odpowiedź:

$$F(1000) = P(X \leqslant 1000) = 1$$

e) Oblicz prawdopodobieństwo, że przez cały dzień do urzędu nikt nie przyjdzie.

Odpowiedź:

$$P(X = 0) = \left(\frac{17}{20}\right)^{500} \approx 0$$

f) Podaj wartość EX.

Odpowiedź:

$$EX = 75$$

(wystarczy przepisać z treści zadania)

g) Oblicz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Odpowiedź:

$$DX = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{500 \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{17}{20}} \approx 7{,}98$$

h) Oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę hobbitów, którzy przyjdą w ciągu dnia do urzędu.

Odpowiedź: Iloczyn $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, zatem bierzemy z niego podłogę:

$$\lfloor (n+1)p \rfloor = 75$$

5. Słoń Nino przechodzi przez skład porcelany zawierający 4 regały, z których każdy zawiera talerze warte 3000 zł. Każdy z regałów może zostać przewrócony przez Nina z prawdopodobieństwem 0,2. Niech zmienna X oznacza wartość uszkodzonych talerzy (zakładając, że przewrócenie regału powoduje uszkodzenie się wszystkich zawartych na nim talerzy). Podaj, dbając by przedstawić tok rozumowania:

a) funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X;

Odpowiedź: Zmienna losowa X **nie** ma rozkładu dwumianowego i nie możemy bezpośrednio posłużyć się rozwiązaniami jak z poprzednich zadań. Na szczęście możemy posłużyć się zmienną pomocniczą o rozkładzie dwumianowym. Niech zmienna Y oznacza liczbę przewróconych regałów:

$$P(Y = k) = \binom{4}{k} (0{,}2)^k \, (0{,}8)^{4-k} \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Na tej bazie zdefiniujemy zmienną X:

$$X = 3000Y$$

I jej rozkład prawdopodobieństwa:

$$P(X = 3000k) = P(Y = k) = \binom{4}{k} (0{,}2)^k \, (0{,}8)^{4-k} \qquad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

albo:

$$P(X = k) = P(Y = \frac{k}{3000}) = \binom{4}{\frac{k}{3000}} (0{,}2)^{\frac{k}{3000}} \, (0{,}8)^{4-\frac{k}{3000}} \qquad k \in \{0, 3000, 6000, 9000, 12000\}$$

b) dystrybuatnę zmiennej losowej X;

Odpowiedź:

x	$(-\infty, 0)$	$[0, 3000)$	$[3000, 6000)$	$[6000, 9000)$	$[9000, 12000)$	$[12000, \infty)$
$F(x)$	0	$\frac{256}{625}$	$\frac{512}{625}$	$\frac{608}{625}$	$\frac{624}{625}$	1

c) prawdopodobieństwo, że słoń stłucze talerzy za co najmniej 5,5 tys. zł.

Odpowiedź:

$$P(X \geqslant 5500) = 1 - P(X < 5500) = 1 - F(5499) = 1 - \frac{512}{625} = \frac{113}{625}$$

d) średnią wartość straty;

Odpowiedź:

$$EX = E(3000Y) = 3000EY = 3000 \cdot 4 \cdot 0{,}2 = 2400$$

e) odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Odpowiedź:

$$DX = D(3000Y) = 3000DY = 3000 \cdot \sqrt{4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 2400$$

Uwaga! Odpowiedź **nie** brzmi 1920.

Gdyby pytanie było o wariancję, to wtedy trzeba uwzględnić, że tam jest kwadrat:

$$D^2X = D^2(3000Y) = 3000^2 D^2Y = 3000^2 \cdot 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8$$

6. W piwnicach Brandy Hallu zgromadzono 500 butelek soków na zimę. Niestety, z poprzednich lat wiadomo, że każda butelka ma 0,5% szans nie dotrwać zimy: spleśnieje, skwaśnieje itp. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę zepsutych butelek soku. Niech Y będzie zmienną losową oznaczającą liczbę zdatnych do spożycia butelek soku, to znaczy $X + Y = 500$.
   a) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
   b) Podaj wartość średnią i odchylenie standardowe zmiennej losowej X.
   c) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.
   d) Podaj wartość średnią i odchylenie standardowe zmiennej losowej Y.
   e) Podaj najbardziej prawdopodobną liczbę zepsutych butelek.
   f) Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba przynajmniej 496 butelek soku będzie się nadawało do spożycia.
   g) Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba zepsutych butelek będzie różniła się od oczekiwanej liczby zepsutych butelek o mniej niż odchylenie standardowe.
   h) Oszacuj (z dokładnością do 0,1) prawdopodobieństwo, że liczba butelek nadających się do spożycia przekroczy 300. Odpowiedź uzasadnij.
7. W piwnicy Bamfurlong znajduje się 10 słoików szczególnie cennej konfitury ze świecących gigantycznych pieczarek. Właściciel przechowuje je na Święto Zimowe, ale nie wie, że ze względu na bliskość rzeki, każdy słoik ma 20% szans spleśnieć do tego czasu! Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę słoików, które nie zapleśniały do Święta. Niech Y będzie zmienną losową oznaczającą liczbę słoików, które spleśniały. Inaczej: $X + Y = 10$.
   a) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
   b) Podaj wartość średnią i odchylenie standardowe zmiennej losowej X.
   c) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.
   d) Podaj wartość średnią i odchylenie standardowe zmiennej losowej Y.
   e) Podaj najbardziej prawdopodobną liczbę zepsutych słoików.
   f) Oblicz prawdopodobieństwo, że przynajmniej 8 słoików będzie się nadawało do spożycia.
   g) Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba zepsutych słoików będzie różniła się od oczekiwanej liczby zepsutych słoików o mniej niż odchylenie standardowe.

Rozkład Poissona

λ \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	λ \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	**5,5**	0,0041	0,0225	0,0618	0,1133	0,1558	0,1714
1,0	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	**6,0**	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1339	0,1606
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	**6,5**	0,0015	0,0098	0,0318	0,0688	0,1118	0,1454
2,0	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	**7,0**	0,0009	0,0064	0,0223	0,0521	0,0912	0,1277
2,5	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	**7,5**	0,0006	0,0041	0,0156	0,0389	0,0729	0,1094
3,0	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	**8,0**	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916
3,5	0,0302	0,1057	0,1850	0,2158	0,1888	0,1322	**8,5**	0,0002	0,0017	0,0074	0,0208	0,0443	0,0752
4,0	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	**9,0**	0,0001	0,0011	0,0050	0,0150	0,0337	0,0607
4,5	0,0111	0,0500	0,1125	0,1687	0,1898	0,1708	**9,5**	0,0001	0,0007	0,0034	0,0107	0,0254	0,0483
5,0	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	**10,0**	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378

Zmienne losowe dwuwymiarowe

1. Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartość odpowiadającą liczbie wylosowanych waletów, zaś Y odpowiadającą liczbie wylosowanych trefli.

   a) Wyznacz rozkłady zmiennych losowych X oraz Y.

   Odpowiedź: Postępujemy tak samo przy zadaniach o zmiennych losowych jednowymiarowych typu skokowego. Obie zmienne mogą przyjmować wyłącznie wartości ze zbioru $\{0, 1\}$, zatem:

$$P(X=1) = P(\text{wylosowanie waleta}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad P(X=0) = 1 - P(X=1) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

$$P(Y=1) = P(\text{wylosowanie trefla}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$

   b) Wyznacz rozkład zmiennej losowej (X, Y).

   Odpowiedź: Musimy rozważyć wszystkie możliwe pary punków skokowych zmiennej losowej (X, Y): $\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, za każdym razem rozważając jednocześnie oba warunki wyznaczone przez zmienne losowe. Rozważania dotyczą tego samego zdarzenia elementarnego, tzn. $X = 1, Y = 1$ odpowiada sytuacji, w której *ta sama wylosowana karta* okazuje się waletem ($X = 1$) oraz treflem ($Y = 1$).

$$P(X=1, Y=1) = P(\text{wylosowanie waleta i wylosowanie trefla}) = P(\text{wylosowanie waleta trefl}) = \frac{1}{52}$$

$$\begin{aligned} P(X=1, Y=0) =& P(\text{wylosowanie waleta i wylosowanie nie-trefla}) = \\ & P(\text{wylosowanie waleta pik, kier lub karo}) = \frac{3}{52} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=1) =& P(\text{wylosowanie nie-waleta i wylosowanie trefla}) = \\ & P(\text{wylosowanie trefla niebędącego waletem}) = \frac{12}{52} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=0) =& P(\text{wylosowanie nie-waleta i wylosowanie nie-trefla}) = \\ & P(\text{dowolna z 13 kart poza waletem z kolorów pik, kier, karo}) = \frac{3 \cdot (13-1)}{52} = \frac{36}{52} \end{aligned}$$

   Wygodnie jest zapisać tak uzyskane prawdopodobieństwa w formie tablicy dwuwymiarowej:

y \ x	0	1	$\sum$
0	$\frac{36}{52}$	$\frac{3}{52}$	$\frac{39}{52}$
1	$\frac{12}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{13}{52}$
$\sum$	$\frac{48}{52}$	$\frac{4}{52}$	1

   Wiersz i kolumna podpisane $\sum$ reprezentują, odpowiednio, sumy w kolumnach i w wierszach, i jednocześnie *rozkłady brzegowe*, tzn. rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych Y i X, takie same jak te, które wyznaczyliśmy w poprzednim podpunkcie.

   c) Oblicz dystrybuantę zmiennej losowej (X, Y).

   Odpowiedź: Dystrybuanta $F(u, v)$ w ogólności dana jest wzorem:

$$F(u, v) = P(X \leqslant u, Y \leqslant v)$$

   Punkty skokowe w każdym z wymiarów wyznaczają przedziały, w których dystrybuanta przyjmuje identyczne wartości. Zatem musimy rozważyć 9 takich par przedziałów:

$$\{(-\infty, 0), [0, 1), [1, \infty)\} \times \{(-\infty, 0), [0, 1), [1, \infty)\}$$

Najwygodniej przedstawić to w postaci tabeli:

v \ u	$(-\infty,0)$	$[0,1)$	$(1,\infty)$
$(-\infty,0)$	0	0	0
$[0,1)$	0	$\frac{36}{52}$	$\frac{39}{52}$
$[1,\infty)$	0	$\frac{48}{52}$	1

Pierwszy wiersz i pierwsza kolumna zawierają same 0, bo zawsze co najmniej jeden z wymiarów jest przed pierwszym punktem skokowym, czyli jest niemożliwe żeby dana zmienna losowa przyjęła wartość nie większą niż dana. W prawym dolnym rogu zawsze 1, bo w obu wymiarach pytamy o sytuację gdzie zmienne losowe są nie większe niż największy z punktów skokowych - czyli zachodzi zdarzenie pewne. Pozostałe pola wypełniamy sumując kolejne fragmenty rozkładu prawdopodobieństwa, który uzyskaliśmy w poprzednim punkcie, np.:

$$F(0{,}5,2) = P(X \leqslant 0{,}5, Y \leqslant 2) = P(X=0,Y=0) + P(X=0,Y=1) = \frac{36}{52} + \frac{12}{52} = \frac{48}{52}$$

Dystrybuantę możemy zapisać też w formie funkcji sklejanej, np.

$$F(u,v) = \begin{cases} 0 & u < 0 \lor v < 0 \\ \frac{36}{52} & 0 \leqslant u < 1 \land 0 \leqslant v < 1 \\ \frac{39}{52} & 1 \leqslant u \land 0 \leqslant v < 1 \\ \frac{48}{52} & 0 \leqslant u < 1 \land 1 \leqslant v \\ 1 & 1 \leqslant u \land 1 \leqslant v \end{cases}$$

d) Czy zmienne losowej X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij odpowiednim rachunkiem.

Odpowiedź: Posługujemy się definicją niezależności zmiennych losowych X i Y:

$$[\forall x,y \in \mathbb{R}\colon P(X=x,Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)] \iff X \text{ i } Y \text{ są niezależne}$$

W takim razie musimy sprawdzić dla wszystkich par liczb rzeczywistych czy powyższy iloczyn zachodzi. Dla par (x,y) niebędących punktami skokowymi zachodzi trywialnie, bo po obu stronach mamy 0. Pozostają nam zatem 4 pary: $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$$\begin{array}{lll}
P(X=0,Y=0) = \frac{36}{52} & P(X=0)\cdot P(Y=0) = \frac{48}{52}\cdot\frac{39}{52} = \frac{36}{52} & \checkmark \\
P(X=0,Y=1) = \frac{12}{52} & P(X=0)\cdot P(Y=1) = \frac{48}{52}\cdot\frac{13}{52} = \frac{12}{52} & \checkmark \\
P(X=1,Y=0) = \frac{3}{52} & P(X=1)\cdot P(Y=0) = \frac{4}{52}\cdot\frac{39}{52} = \frac{3}{52} & \checkmark \\
P(X=1,Y=1) = \frac{1}{52} & P(X=1)\cdot P(Y=1) = \frac{4}{52}\cdot\frac{13}{52} = \frac{1}{52} & \checkmark
\end{array}$$

Skoro dla wszystkich par się zgadza, to znaczy, że zmienne losowe X i Y są niezależne.

e) Oblicz moment zwykły mieszany rzędu 1+1 zmiennej losowej (X,Y).

Odpowiedź:

$$EXY = E(X\cdot Y) = \sum_x\sum_y x\cdot y\cdot P(X=x,Y=y) = 0\cdot 0\cdot\frac{36}{52} + 0\cdot 1\cdot\frac{12}{52} + 1\cdot 0\cdot\frac{3}{52} + 1\cdot 1\cdot\frac{1}{52} = \frac{1}{52}$$

f) Oblicz kowariancję zmiennych losowych X i Y.

Odpowiedź:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{1}{52} - \left(0 \cdot \frac{48}{52} + 1 \cdot \frac{4}{52}\right) \cdot \left(0 \cdot \frac{39}{52} + 1 \cdot \frac{13}{52}\right) = 0$$

Oczywiście otrzymujemy 0, ponieważ zmienne losowe są niezależne, a zatem ich kowariancja musi wynosić 0.

g) Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y.

Odpowiedź:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX \cdot DY} = \frac{0}{DX \cdot DY} = 0$$

2. Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartość odpowiadającą liczbie wylosowanych dam trefl, zaś Y odpowiadającą liczbie wylosowanych trefli.

a) Wyznacz rozkłady zmiennych losowych X oraz Y.

Odpowiedź: Zadanie jest prawie identyczne jak poprzednie jeżeli chodzi o technikę rozwiązywania.

$$P(X=0)=\frac{51}{52} \qquad P(X=1)=\frac{1}{52}$$

$$P(Y=1)=\frac{13}{52} \qquad P(Y=0)=\frac{39}{52}$$

b) Wyznacz rozkład zmiennej losowej (X,Y).

Odpowiedź:

y \ x	0	1	$\sum$
0	$\frac{39}{52}$	0	$\frac{39}{52}$
1	$\frac{12}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{13}{52}$
$\sum$	$\frac{51}{52}$	$\frac{1}{52}$	1

c) Oblicz dystrybuantę zmiennej losowej (X,Y).

Odpowiedź:

v \ u	$(-\infty,0)$	$[0,1)$	$(1,\infty)$
$(-\infty,0)$	0	0	0
$[0,1)$	0	$\frac{39}{52}$	$\frac{39}{52}$
$[1,\infty)$	0	$\frac{51}{52}$	1

d) Czy zmienne losowej X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij odpowiednim rachunkiem.

Odpowiedź: Żeby stwierdzić, że nie są wystarczy pokazać jedną parę (x,y) dla której równość $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$ nie zachodzi. Zatem niech $x=1$ i $y=0$:

$$P(X=1,Y=0)=0\neq P(X=1)P(Y=0)=\frac{39}{52}\cdot\frac{1}{52}=\frac{1}{208}$$

W takim razie zmienne losowe X i Y nie są niezależne.
Można też na to popatrzeć intuicyjnie: czy z wartości zmiennej losowej Y możemy się czegoś dowiedzieć o wartościach zmiennej losowej X? Przykładowo, jeżeli $Y=0$ (nie wylosowano trefla), to na pewno $X=0$ (nie wylosowano damy trefl), bo nie istnieją damy trefl niebędące treflami. W takim razie zmienne są zależne.

e) Oblicz moment zwykły mieszany rzędu 1+1 zmiennej losowej (X,Y).

Odpowiedź:

$$EXY=E(X\cdot Y)=\sum_x\sum_y x\cdot y\cdot P(X=x,Y=y)=0\cdot 0\cdot\frac{39}{52}+0\cdot 1\cdot\frac{12}{52}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{52}=\frac{1}{52}$$

f) Oblicz kowariancję zmiennych losowych X i Y.

Odpowiedź:

$$EX=0\cdot\frac{51}{52}+1\cdot\frac{1}{52}=\frac{1}{52}$$
$$EY=0\cdot\frac{39}{52}+1\cdot\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{1}{52}-\frac{1}{52}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{208}$$

g) Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y.

Odpowiedź:

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(X = x) = 0^2 \cdot \frac{51}{52} + 1^2 \cdot \frac{1}{52} = \frac{1}{52}$$

$$E(Y^2) = \sum_y y^2 P(Y = y) = 0^2 \cdot \frac{39}{52} + 1^2 \cdot \frac{13}{52} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$D^2 X = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{52} - \left(\frac{1}{52}\right)^2 = \frac{51}{52^2}$$

$$D^2 Y = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4^2}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX \cdot DY} = \frac{\frac{3}{208}}{\sqrt{\frac{51}{52^2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4^2}}} = \frac{3}{\sqrt{51 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{3}{51}} \approx 0{,}2425$$

3. W Shire szaleje burza śnieżna, a Merry i Pippin, zamknięci w czterech ścianach, grają w pewną nietypową grę, korzystając z dziwnej kostki sześciościennej, której każda ścianka wypada z równym prawdopodobieństwem, ale ścianki nie są ponumerowane tak jak zwykle. Mianowicie, na ściankach znajdują się wyłącznie cyfry 1,2 oraz 3 w kolorach czerwonym i zielonym: dwie czerwone 1, jedna czerwona 2, jedna zielona 2 oraz dwie zielone 3. Merry w sekrecie rzuca dwukrotnie kostką, mnoży wyniki i zlicza liczbę czerwonych wyników. Niech zmienna losowa X odpowiada iloczynowi, a Y liczbie czerwonych wyników. Merry podaje Pippinowi liczbę czerwonych wyników (tj. wartość, którą przyjęła zmienna losowa Y), a zadaniem Pippina jest zgadnąć iloczyny wyrzuconych liczb (tj. wartość, którą przyjęła zmienna losowa X).

a) Podaj brzegowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

b) Podaj brzegowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.

c) Podaj łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y).

Odpowiedź: Pierwsze trzy punkty rozwiązujemy łącznie budując łączny rozkład prawdopodobieństwa. Zaczniemy od stworzenia pomocniczej tabeli zawierającej pary wyników wraz z odpowiadającymi im kolorami oraz wartości iloczynów:

kostka 1 \ kostka 2	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
2	2	2	4	4	6	6
2	2	2	4	4	6	6
3	3	3	6	6	9	9
3	3	3	6	6	9	9

Lewy górny kwadrat odpowiada iloczynom, które powstają z dwóch czerwonych wyników (czyli $Y = 2$). Prawy dolny kwadrat iloczynom, które powstają z dwóch zielonych wyników (czyli $Y = 0$). Pozostałe dwa kwadraty są mieszane: jeden wynik czerwony, jeden wynik zielony (czyli $Y = 1$).

Rzuty kostką się niezależne od siebie, a każdy wynik równoprawdopodobny, zatem wystarczy zliczać liczbę wyników spełniających kryteria wyznaczone przez zmienne losowe i dzielić przez 36:

	zmienna X – iloczyn						
y \ x	1	2	3	4	6	9	$\sum$
0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$
1	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
2	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	0	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
$\sum$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	1

Wiersz oznaczony $\sum$ stanowi jednocześnie odpowiedź na podpunkt a, a kolumna oznaczona $\sum$ odpowiedź na podpunkt b.

d) Czy zmienne losowe X oraz Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedź: Zmienne są zależne, bo np. $P(X = 1, Y = 0) = 0 \neq P(X = 1) \cdot P(Y = 0) = \frac{9}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{1}{36}$

e) Oblicz wartości średnie zmiennych losowych X oraz Y.

Odpowiedź:

$$EX = 1 \cdot \frac{4}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{8}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{8}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} = \frac{144}{36} = 4$$

$$EY = 0 \cdot \frac{9}{36} + 1 \cdot \frac{18}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} = 1$$

f) Oblicz kowariancję zmiennej losowej (X, Y) (poniższe wyliczenia pomijają składniki sumy gdzie prawdopodobieństwo jest równe 0, co oczywiście nie wpływa na wynik)

Odpowiedź:

$$EXY = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot P(X = x, Y = y) =$$
$$4 \cdot 0 \cdot \frac{1}{36} + 6 \cdot 0 \cdot \frac{4}{36} + 9 \cdot 0 \cdot \frac{4}{36} +$$
$$2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{36} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{8}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{4}{36} +$$
$$1 \cdot 2 \cdot \frac{4}{36} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{36} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{96}{36} = \frac{8}{3}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{8}{3} - 4 \cdot 1 = -\frac{4}{3}$$

g) Oblicz odchylenia standardowe zmiennych losowych X oraz Y.

Odpowiedź:

$$EX^2 = 1^2 \cdot \frac{4}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + 3^2 \cdot \frac{8}{36} + 4^2 \cdot \frac{4}{36} + 6^2 \cdot \frac{8}{36} + 9^2 \cdot \frac{4}{36} = \frac{784}{36} = \frac{196}{9}$$
$$EY^2 = 0^2 \cdot \frac{9}{36} + 1^2 \cdot \frac{18}{36} + 2^2 \cdot \frac{9}{36} = \frac{3}{2}$$
$$DX = \sqrt{EX^2 - (EX)^2} = \sqrt{\frac{196}{9} - 4^2} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$
$$DY = \sqrt{EY^2 - (EY)^2} = \sqrt{\frac{3}{2} - 1^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

h) Oblicz współczynnik korelacji zmiennej losowej (X,Y).

Odpowiedź:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX \cdot DY} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2\sqrt{13}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{26}} \approx -0{,}784$$

4. Hobbici w skórzanym woreczku mają 7 kartek zapisanych atramentami w dwóch różnych kolorach: czerwonym i zielonym. Na każdej z kartek jest inna cyfra od 1 do 7, przy czym cyfry 1, 2, 3, 6, 7 są zapisane kolorem czerwonym, a cyfry 4, 5 kolorem zielonym. Pippin losuje ze zwracaniem z woreczka dwie kartki. Niech X będzie zmienną losową odpowiadającą liczbie wylosowanych kartek, na których była napisana parzysta liczba, natomiast Y zmienną losową odpowiadającą liczbie kartek zapisanych czerwonym atramentem.

a) Podaj rozkład brzegowy zmiennej X.

b) Podaj rozkład brzegowy zmiennej Y.

c) Podaj łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y).

Odpowiedź: Podobnie jak w poprzednim zadaniu budujemy pomocniczą macierz, której nagłówki odpowiadają możliwym wartościom kartek, a w komórkach znajdują się odpowiadające im wartości zmiennej losowej X, natomiast wartości zmiennej losowej Y będziemy widzieli na podstawie prostokątów wyznaczonych w macierzy:

II kartka \ I kartka	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	2	1	2	1	2	1
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	2	1	2	1	2	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	2	1	2	1	2	1
7	0	1	0	1	0	1	0

Prostokąty w narożnikach odpowiadają dwóm kartkom zapisanym na czerwono, a więc $Y = 2$. Kwadrat w środku odpowiada dwóm kartkom zapisanym na zielono, a więc $Y = 0$. Pozostałe 4 prostokąty odpowiadają $Y = 1$. Podobnie jak poprzednio: 49 równoprawdopodobnych możliwości, wystarczy zliczać i uzupełniać rozkład prawdopodobieństwa:

y \ x	0	1	2	$\sum$
0	$\frac{1}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{4}{49}$
1	$\frac{6}{49}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{20}{49}$
2	$\frac{9}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{25}{49}$
$\sum$	$\frac{16}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{9}{49}$	1

d) Zbadaj, czy zmienne losowej X oraz Y są niezależne.

Odpowiedź: Zmienne nie są niezależne, ponieważ

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{49} \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = \frac{16}{49} \cdot \frac{4}{49}$$

e) Oblicz moment zwykły mieszany rzędu 1+1 zmiennej losowej (X, Y).

Odpowiedź: W obliczeniach EXY (czyli momentu zwykłego mieszanego rzędu 1+1) pominięte są składniki wynoszące 0.

$$EXY = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot P(X = x, Y = y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{10}{49} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{49} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{12}{49} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{49} = \frac{58}{49}$$

f) Oblicz kowariancję zmiennych losowych X i Y.

Odpowiedź:

$$EX = 0 \cdot \frac{16}{49} + 1 \cdot \frac{24}{49} + 2 \cdot \frac{9}{49} = \frac{42}{49} = \frac{6}{7}$$
$$EY = 0 \cdot \frac{4}{49} + 1 \cdot \frac{20}{49} + 2 \cdot \frac{25}{49} = \frac{70}{49} = \frac{10}{7}$$
$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = \frac{58}{49} - \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{7} = -\frac{2}{49}$$

g) Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y.

Odpowiedź:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{16}{49} + 1^2 \cdot \frac{24}{49} + 2^2 \cdot \frac{9}{49} = \frac{60}{49}$$
$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{4}{49} + 1^2 \cdot \frac{20}{49} + 2^2 \cdot \frac{25}{49} = \frac{120}{49}$$
$$DX = \sqrt{E(X^2) - (EX)^2} = \sqrt{\frac{60}{49} - \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$
$$DY = \sqrt{E(Y^2) - (EY)^2} = \sqrt{\frac{120}{49} - \left(\frac{10}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{49}} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$$
$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX \cdot DY} = \frac{-\frac{2}{49}}{\frac{2\sqrt{6}}{7} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{7}} = \frac{-2}{4\sqrt{30}} = -\frac{1}{2\sqrt{30}} \approx -0{,}0912$$

5. Hobbici w skórzanym woreczku mają 7 kartek zapisanych atramentami w dwóch różnych kolorach: czerwonym i zielonym. Na każdej z kartek jest inna cyfra od 1 do 7, przy czym cyfry 1, 2, 3, 6, 7 są zapisane kolorem czerwonym, a cyfry 4, 5 kolorem zielonym. Pippin losuje ze zwracaniem z woreczka dwie kartki. Niech X będzie zmienną losową odpowiadającą reszcie z dzielenia przez 3 sumy liczb na wylosowanych kartkach, natomiast Y zmienną losową odpowiadającą liczbie wylosowanych kartek zapisanych czerwonym atramentem.
   a) Podaj rozkład brzegowy zmiennej X. (2 punkt)
   b) Podaj rozkład brzegowy zmiennej Y. (2 punkt)
   c) Podaj łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y). (3 punkty)
   d) Zbadaj, czy zmienne losowej X oraz Y są niezależne. (2 punkty)
   e) Oblicz moment zwykły mieszany rzędu 1+1 zmiennej losowej (X, Y). (1 punkt)

6. Pippin rzucił trzykrotnie sześciościenną, uczciwą kostką do gry. Niech zmienna X odpowiada liczbie rzutów, w których udało mu się wyrzucić mniej niż pięć oczek, natomiast zmienna Y liczbie rzutów, w których udało mu się wyrzucić przynajmniej dwa oczka.
   a) Podaj brzegowe rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych X oraz Y.
   b) Podaj łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y).
   c) Zbadaj, czy zmienne losowe X oraz Y są zależne.
   d) Oblicz moment zwykły mieszany rzędu 1+1 zmiennej losowej (X, Y).
   e) Oblicz kowariancję zmiennych losowych X i Y.
   f) Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y.

7. Dana jest funkcja $f(x, y)$ określona poniższym wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 \leqslant x \leqslant 4 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

a) Wyznacz stałą c taką, żeby $f(x, y)$ była funkcją gęstości prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej (X, Y).

Odpowiedź: $c = \frac{1}{16}$

b) Wyznacz gęstości prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych.

Odpowiedź: $f_X(u) = \frac{u}{8} f_Y(v) = \frac{v}{2}$

c) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej (X, Y).

Odpowiedź:

$$F(u,v) = \begin{cases} 0 & u \leqslant 0 \vee v \leqslant 0 \\ \frac{u^2v^2}{64} & 0 < u \leqslant 4 \wedge 0 < v \leqslant 2 \\ \frac{u^2}{16} & 0 < u \leqslant 4 \wedge v > 2 \\ \frac{v^2}{4} & u > 4 \wedge 0 < v \leqslant 2 \\ 1 & u > 4 \wedge v > 2 \end{cases}$$

d) Wiadomo, że realizacja zmiennej losowej Y zawiera się w przedziale $(1, 2)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wtedy realizacja zmiennej losowej X zawiera się w przedziale $(0, 2)$?

Odpowiedź: $P(0 < X < 2|1 < Y < 2) = \frac{P(0<X<2,1<Y<2)}{P(1<Y<2)} = \frac{F(2,2)-F(2,1)-F(0,2)+F(0,1)}{F_Y(2)-F_Y(1)} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-0+0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{16}\frac{4}{3} = \frac{1}{4}$

1. Zmienne losowe jednowymiarowe typu ciągłego

1. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & x \in \langle 0,3 \rangle \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

a) Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej?

Odpowiedź: Żeby funkcja była funkcją gęstości prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej muszą być jednocześnie spełnione dwa warunki:

i. Całka oznaczona od $-\infty$ do ∞ z tej funkcji jest równa 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

ii. Funkcja jest nieujemna dla dowolnego argumentu:

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) \geqslant 0$$

Zaczniemy od pierwszego warunku i będziemy szukali wartości a, dla której jest on spełniony:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} ax^2\,dx + \int_{3}^{\infty} 0\,dx = \int_{0}^{3} ax^2\,dx$$

Obliczymy całkę nieoznaczoną z ax^2:

$$\int ax^2\,dx = a\int x^2\,dx = \frac{a}{3}x^3 + C$$

Podstawiamy do całki oznaczonej:

$$\int_{0}^{3} ax^2\,dx = \frac{a}{3}x^3\Big|_0^3 = \frac{a}{3}(3^3 - 0^3) = 9a$$

W takim razie zostajemy z równaniem

$$9a = 1$$

I dochodzimy do

$$a = \frac{1}{9}$$

Drugi warunek jest spełniony, bo $x^2 9 \geqslant 0$ dla dowolnej wartości $x \in \langle 0,3\rangle$, a $0 \geqslant 0$. W takim razie odpowiedź brzmi: $a = \frac{1}{9}$.

b) Ile wynosi wartość średnia tej zmiennej losowej?

Odpowiedź: Posługujemy się definicją wartości średniej:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

Podstawiamy funkcję gęstości prawdopodobieństwa z treści zadania:

$$EX = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_{0}^{3} x\cdot\frac{x^2}{9}\,dx + \int_{3}^{\infty} x\cdot 0\,dx = \int_{0}^{3}\frac{x^3}{9}\,dx$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną z x^3:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Wracamy do całki oznaczonej:

$$\int_{0}^{3}\frac{x^3}{9}\,dx = \frac{1}{9}\int_{0}^{3} x^3\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{3^4 - 0^4}{9\cdot 4} = \frac{9}{4}$$

Zatem wartość średnia EX zmiennej losowej X wynosi $\frac{9}{4}$

c) Ile wynosi wariancja tej zmiennej losowej?

Odpowiedź: Rozwiążemy zadanie na dwa sposoby. Sposób 1, bezpośrednio z definicji wariancji D^2X:

$$D^2X = E\left[(X - EX)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\,dx$$

Z poprzedniego podpunktu wiemy, że $EX = \frac{9}{4}$. Dodatkowo, ponieważ funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest niezerowa tylko w przedziale $(0, 3\rangle$, iloczyn pod całką również tylko wtedy może być niezerowy. Zatem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{9}\,dx$$

Wyciągamy stałą $\frac{1}{9}$ przed całkę, a pod całką wykonujemy mnożenie:

$$\int_0^3 \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 \left[x^4 - 2\cdot\frac{9}{4}\cdot x^3 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 x^2\right] dx$$

Posługujemy się rodziną całek nieoznaczonych dla jednomianów o wykładniku $a > 0$:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

i uzyskujemy:

$$\frac{1}{9}\int_0^3 \left[x^4 - 2\cdot\frac{9}{4}\cdot x^3 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 x^2\right] dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{9}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{3^4}{4^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{1}{9}\left[\frac{3^5}{5} - \frac{3^6}{8} + \frac{3^6}{16}\right] = \frac{3^3}{5} - \frac{3^4}{16} = \frac{27}{80}$$

Sposób 2, posługując się przekształconym wzorem na wariancję:

$$D^2X = E\left(X^2\right) - (EX)^2$$

Obliczamy EX^2:

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

Wiemy, że iloczny pod całką jest niezerowy tylko tam, gdzie funkcja gęstości jest niezerowa, a zatem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\cdot\frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^4\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{3^5 - 0^5}{5} = \frac{3^3}{5}$$

Wracam do wzoru na wariancję pamiętając, że $EX = \frac{9}{4}$ z poprzedniego podpunktu w zadaniu:

$$D^2X = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = \frac{3^3}{5} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{3^3}{5} - \frac{3^4}{16} = \frac{27}{80}$$

Czyli otrzymaliśmy dokładnie to samo co sposobem 1, ale szybciej.

2. Autobusy linii 164 przyjeżdżają punktualnie co 20 minut na przystanek. Olga nie zna ich rozkładu jazdy, przychodzi więc na przystanek w całkowicie losowym momencie: jak jej się wyjdzie z domu. Niech T oznacza czas oczekiwania Olgi na autobus.

a) Podaj rozkład zmiennej losowej T.

Odpowiedź: Z tego, że Olga nie zna rozkładu jazdy wnioskujemy, że czas oczekiwania można modelować jako zmienną losową typu ciągłego o *jednostajnym* rozkładzie prawdopodobieństwa, to znaczy o funkcji gęstości prawdopodobieństwa danej poniższym wzorem dla pewnych parametrów $a < b$:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqslant t \leqslant b \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wiemy, że Olga może czekać co najmniej 0 minut (przychodzi równo z autobusem), a co najwyżej 20 minut (autobus jeździ punktualnie i co 20 minut), wnioskujemy zatem, że $a = 0$, $b = 20$. W takim razie możemy zapisać kompletną funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej T:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{20} & 0 \leqslant t \leqslant 20 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że Olga będzie czekała mniej niż 5 minut.

Odpowiedź: Podejdziemy do problemu na dwa sposoby.

Sposób 1 posłużymy się wzorem, który pozwala obliczyć prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmie wartość z przedziału $\langle c, d\rangle$ korzystając z funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

Z treści zadania wynika, że szukamy $P(X < 5)$, czyli: $c = -\infty$, a $d = 5$. Różnicę pomiędzy nierównością nieostrą $\leqslant$, a ostrą $<$ można zaniedbać w przypadku zmiennych losowych typu ciągłego, ponieważ prawdopodobieństwa w punkcie są równe 0. W takim razie:

$$P(X < 5) = P(-\infty \leqslant X \leqslant 5) = \int_{-\infty}^5 f(x)\,dx$$

Ale wiemy, że $f(x)$ jest niezerowe tylko w przedziale $\langle 0, 20\rangle$, zatem możemy zacząć całkowanie w 0:

$$P(X < 5) = P(0 \leqslant X \leqslant 5) = \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 \frac{1}{20}\,dx = \frac{x}{20}\Big|_0^5 = \frac{1}{4}$$

Sposób 2 Zaczniemy od obliczenia *dystrybuanty*, czyli funkcji F zmiennej rzeczywistej u danej poniższym wzorem:

$$F(u) = P(X \leqslant u) = \int_{-\infty}^u f(x)\,dx$$

Dla $u < 0$ sprawa jest prosta: pod całką jest 0, zatem dystrybuanta też jest 0. Dla $u > 20$ sprawa też jest prosta: na pewno Olga czeka nie więcej niż u minut (bo $u > 20$, a Olga czeka najwyżej 20 minut), zatem dystrybuanta musi wynosić 1. Pozostaje obszar $u \in \langle 0, 20\rangle$:

$$F(u) = \int_{-\infty}^0 0\,dx + \int_0^u \frac{1}{20}\,dx = \frac{u}{20}$$

Podsumowując, otrzymujemy następującą funkcję sklejaną:

$$F(u) = P(T \leqslant u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{u}{20} & u \in \langle 0, 20\rangle \\ 1 & u > 20 \end{cases}$$

W takim razie podstawiając $u = 5$ otrzymujemy:

$$F(5) = P(T \leqslant 5) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

c) Oblicz średni czas oczekiwania na autobus.

Odpowiedź: Oszukamy i zajrzymy do Wikipedii: `https://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Rozk%C5%82ad_jednostajny_ci%C4%85g%C5%82y&oldid=56001777` gdzie znajdziemy gotowy wzór na wartość średnią (oczekiwaną):

$$ET = \frac{a+b}{2}$$

W takim razie:

$$ET = \frac{0+20}{2} = 10$$

Możemy też wzór wyprowadzić podobnie jak w zadaniu 1:

$$ET = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Wiemy, że iloczyn pod całką będzie zerowy dla $x \notin \langle a, b\rangle$, zatem:

$$ET = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

Ze wzoru skróconego mnożenia:

$$ET = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

Co kończy wyprowadzenie.

d) Oblicz odchylenie standardowe zmiennej losowej T.

Odpowiedź: Korzystamy z takiego samego oszustwa jak poprzednio i odkrywamy, że wariancja D^2T dana jest wzorem:

$$D^2T = \frac{(b-a)^2}{12}$$

a zatem odchylenie standardowe wynosi:

$$DT = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{20}{\sqrt{12}} \approx 5{,}77$$

Żeby wyprowadzić wzór skorzystamy z przekształconego wzoru jak w poprzednim zadaniu:

$$D^2T = E\left(T^2\right) - (ET)^2$$

Odjemnik znamy z poprzedniego punktu, zatem potrzebujemy obliczyć odjemną:

$$E\left(T^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt$$

Iloczyn pod całką jest niezerowy najwyżej dla $t \in \langle a, b\rangle$, zatem:

$$E\left(T^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_a^b \frac{t^2}{b-a} = \left.\frac{t^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

Ze wzoru skróconego mnożenia:

$$E\left(T^2\right) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Wracamy do wzoru na wariancję:

$$D^2T = E\left(T^2\right) - (ET)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

3. Prawdopodobieństwo, że aparat fotograficzny nie zepsuje się w ciągu pierwszych pięciu miesięcy użytkowania wynosi 0,9. Niech X oznacza liczbę miesięcy bezawaryjnej pracy aparatu. Zakładamy, że zmienna X ma rozkład wykładniczy.

a) Oblicz parametry tego rozkładu.

Odpowiedź: Zaczniemy od analizy zadania. Wiemy, że zmienna losowa reprezentująca czas *bezawaryjnej pracy* ma rozkład wykładniczy. Czas bezawaryjnej pracy, to innymi słowy czas do pierwszej awarii, czyli do zepsucia się aparatu. W takim razie *Prawdopodobieństwo, że aparat fotograficzny nie zepsuje się w ciągu pierwszych pięciu miesięcy* możemy rozumieć jako *Prawdopodobieństwo, że do pierwszej awarii upłynie więcej niż pięć miesięcy.* W takim razie uzyskujemy: $P(X > 5) = 0{,}9$. Z treści zadania wiemy, że zmienna losowa ma rozkład wykładniczy, czyli opisana jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie λ jest poszukiwanym parametrem.
Wyprowadzić wzór na dystrybuantę jest prosto (patrz niżej), ale na razie oszukamy i zajrzymy do Wikipedii: `https://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Rozk%C5%82ad_wyk%C5%82adniczy&oldid=59056371`

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Skorzystamy ze zdarzenia przeciwnego do $X > 5$:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot 5}\right) = e^{-5\lambda} = 0{,}9$$

Rozwiązujemy równanie ze względu na zmienną λ zaczynając od logarytmowania stronami:

$$\lambda = -\frac{\ln(0{,}9)}{5} \approx 0{,}021$$

Wyprowadzenie dystrybuanty (dla $u \geqslant 0$):

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)\, dx$$

Wiemy, że dla $x \in (-\infty, 0)$ pod całką jest 0, zatem:

$$F(u) = \int_{0}^{u} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

Obliczamy całkę nieoznaczoną stosując podstawienie $z = -x\lambda$, wtedy $dz = -\lambda dx$, a zatem $dx = \frac{-dz}{\lambda}$

$$\int \lambda e^{-x\lambda}\, dx = \int \lambda e^{z} \cdot \frac{-dz}{\lambda} = -\int e^{z}\, dz = -e^{z} + C = -e^{-x\lambda} + C$$

Wracamy do całki nieoznaczonej:

$$F(u) = \int_{0}^{u} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-x\lambda}\Big|_{0}^{u} = -e^{-u\lambda} - \left(-e^{0\lambda}\right) = 1 - e^{-u\lambda}$$

Co kończy wyprowadzenie.

b) Oblicz prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy aparatu w ciągu 24 miesięcy.

Odpowiedź: X to liczba miesięcy bezawaryjnej pracy, a zatem pytanie jest o $P(X > 24)$. Korzystamy znowu ze zdarzenia przeciwnego i wzoru na dystrybuantę:

$$P(X > 24) = 1 - P(X \leqslant 24) = 1 - F(24) = e^{-\lambda \cdot 24} = e^{-\lambda = -\frac{\ln(0,9)}{5} \cdot 24}$$

Korzystając z własności logarytmu naturalnego: $e^{\ln(x)} = x$ otrzymujemy:

$$P(X > 24) = (0{,}9)^{\frac{24}{5}} \approx 0{,}603$$

c) Oblicz prawdopodobieństwo awarii aparatu w ciągu 36 miesięcy, jeżeli wiadomo, że przepracował bez awarii już 12 miesięcy.

Odpowiedź: Skoro pojawia się słowo *jeżeli*, to mamy do czynienia z prawdopodobieństwem warunkowym $P(X \leqslant 36|X > 12)$. Korzystamy ze zdarzenia przeciwnego i definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(X \leqslant 36|X > 12) = 1 - P(X > 36|X > 12) = 1 - \frac{P(X > 36 \wedge X > 12)}{P(X > 12)} = 1 - \frac{P(X > 36)}{P(X > 12)} = 1 - \frac{1 - F(36)}{1 - F(12)}$$

Korzystając z definicji dystrybuanty i własności potęgowania:

$$1 - \frac{1 - F(36)}{1 - F(12)} = 1 - \frac{e^{-36\lambda}}{e^{-12\lambda}} = 1 - e^{-36\lambda - (-12\lambda)} = 1 - e^{-24\lambda} = F(24) \approx 0{,}397$$

Powyższe można uogólnić do *własności braku pamięci* (dla rozkładów typu ciągłego działa tylko w rozkładzie wykładniczym!):

$$\forall a, b > 0 \colon P(X > a + b|X > b) = P(X > a)$$

W naszym przypadku $a = 24$, a $b = 12$ i już od $1 - P(X > 36|X > 12)$ mogliśmy przejść do $1 - P(X > 24) = F(24)$.

4. W Minas Tirith gromadzą zapasy na wypadek oblężenia. Losowo wybrany worek zawiera X kg mąki, gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie $N(20, 2^2)$.

a) Utwórz zmienną losową Y będącą standaryzowaną postacią zmiennej losowej X.

Odpowiedź: $N(20, 2^2)$ należy rozumieć jako *rozkład normalny o wartości średniej* $\mu = 20$ *i wariancji* $\sigma^2 = 2^2$. Standaryzacja zawsze polega na odjęciu wartości średniej i podzieleniu przez odchylenie standardowe. Zatem zmienna Y będąca standaryzowaną postacią zmiennej losowej X:

$$Y = \frac{X - 20}{2}$$

b) Wyraź dystrybuantę zmiennej X w zależności od dystrybuanty zmiennej Y.

Odpowiedź: $F_X(x) = F_Y(\frac{x-20}{2})$

c) Oblicz wartość średnią i odchylenie standardowe zmiennej losowej Y.

Odpowiedź: Jeżeli mamy do czynienia ze standaryzowaną zmienną losową to zawsze $EY = 0$ i $DY = 1$. Dlaczego?

$$EY = E\left[\frac{X - 20}{2}\right] = \frac{E(X - 20)}{2} = \frac{EX - 20}{2} = \frac{20 - 20}{2} = 0$$

$$D^2Y = D^2\left[\frac{X - 20}{2}\right] = \frac{D^2(X - 20)}{2^2} = \frac{D^2X}{2^2} = \frac{2^2}{2^2} = 1$$

Posłużyliśmy się przy tym następującymi własnościami wartości średniej i wariancji, prawdziwymi dla dowolnej wartości $a \in \mathbb{R}$:

$$E(aX) = aEX$$
$$D^2(aX) = a^2D^2X$$
$$E(X - a) = EX - a$$
$$D^2(X - a) = D^2X$$

d) Oblicz prawdopodobieństwo, że w worku jest mniej niż 18 kg mąki.

Odpowiedź: Do obliczania prawdopodobieństw będziemy posługiwać się tablicą zawierającą wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego. Taka tablica jest dostępna na odwrocie kartki z ćwiczeniami, na egzaminie, jest też łatwa do znalezienia w Internecie. Zaczynamy od sprowadzenia polecenia do dystrybuanty zmiennej losowej Y o standaryzowanym rozkładzie normalnym $N(0,1)$:

$$P(X < 18) = F_X(18) = F_Y\left(\frac{18-20}{2}\right) = F_Y(-1)$$

Następnie korzystamy z własności dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego:

$$F_Y(u) = 1 - F_Y(-u)$$

I w takim razie:

$$P(X < 18) = F_Y(-1) = 1 - F_Y(1)$$

1 możemy zapisać jako 1,00 – w tabeli odnajdujemy wiersz podpisany 1,0 i kolumnę odpowiadającą cyfrze setek, więc 0, a następnie odczytujemy wartość na przecięciu:

$$F_Y(1) = 0{,}8413$$

W takim razie:

$$P(X < 18) = F_X(18) = F_Y(-1) = 1 - F_Y(1) = 1 - 0{,}8413 \approx 0{,}16$$

e) Oblicz prawdopodobieństwo, że w worku jest więcej niż 21,5 kg mąki.

Odpowiedź: Korzystamy ze zdarzenia przeciwnego, żeby przejść do dystrybuanty i sprowadzamy do dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego:

$$P(X > 21{,}5) = 1 - F_X(21{,}5) = 1 - F_Y\left(\frac{21{,}5-20}{2}\right) = 1 - F_Y(0{,}75)$$

W tabeli odnajdujemy wiersz podpisany 0,7 i kolumnę podpisaną 0,05:

$$F_Y(0{,}75) = 0{,}7734$$

Wracamy do poprzedniej równości:

$$P(X > 21{,}5) = 1 - F_Y(0{,}75) = 1 - 0{,}7734 \approx 0{,}23$$

f) Oblicz prawdopodobieństwo, że ilość mąki w worku różni się od wartości oczekiwanej o nie więcej niż 1 kg.

Odpowiedź: Wartość oczekiwana (średnia) zmiennej losowej X to 20, w takim razie pytanie jest o X pomiędzy 19, a 21 kg. Potem postępujemy jak wcześniej:

$$P(|X-20| < 1) = P(19 < X < 21) = F_X(21) - F_X(19) = F_Y\left(\frac{21-20}{2}\right) - F_Y\left(\frac{19-20}{2}\right) =$$
$$F_Y(0{,}5) - F_Y(-0{,}5) = F_Y(0{,}5) - (1 - F_Y(0{,}5)) = 2F_Y(0{,}5) - 1$$

Z tablicy standaryzowanego rozkładu normalnego (wiersz 0,5, kolumna 0) odczytujemy:

$$F_Y(0{,}5) = 0{,}6915$$

Zatem:

$$P(|X-20| < 1) = 2F_Y(0{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}6915 - 1 = 0{,}38$$

5. W hobbickiej wsi Oatbarton znajduje się wielki spichlerz na owies, w którym okoliczni farmerzy gromadzą swoje plony. Masa w tonach X owsa zgromadzonego w spichlerzu bezpośrednio po zbiorach ma rozkład normalny $N(100, 20^2)$. Spichlerz ma pojemność 130 ton, a roczne potrzeby wsi wynoszą 85 ton.
W poniższych zadaniach wyniki podawaj z dokładnością do przynajmniej dwóch miejsc po przecinku.

a) Podaj EX oraz DX.

Odpowiedź: $EX = 100 \quad DX = 20$

b) Niech Y będzie standaryzowaną postacią zmiennej losowej X. Podaj EY oraz DY.

Odpowiedź: $EY = 0 \quad DY = 1$

c) Oblicz prawdopodobieństwo, że hobbici wyprodukują dokładnie 100 ton owsa.

Odpowiedź: $P(X = 100) = 0$, bo dla zmiennych losowych typu ciągłego prawdopodobieństwo w punkcie jest zawsze równe 0

d) Oblicz prawdopodobieństwo, że hobbici wychodują najwyżej tyle owsa ile są w stanie zmagazynować.

Odpowiedź: $P(X < 130) = F_X(130) = F_Y(1{,}5) = 0{,}933$

e) Oblicz prawdopodobieństwo, że hobbici nie wyprodukują dostatecznie dużo owsa i będą musieli go dokupić.

Odpowiedź: $P(X < 85) = F_X(85) = F_Y(-0{,}75) = 1 - F_Y(0{,}75) = 1 - 0{,}773 = 0{,}227$

f) Oblicz prawdopodobieństwo, że masa owsa wyprodukowanego przez hobbitów będzie się różnić od wartości oczekiwanej o nie więcej niż pół odchylenia standardowego.

Odpowiedź:

$$P\left(|X - EX| \leqslant \frac{DX}{2}\right) = P(|X - 100| \leqslant 10) = P(90 \leqslant X \leqslant 110) = F_X(110) - F_X(90) =$$
$$F_Y(0{,}5) - F_Y(-0{,}5) = F_Y(0{,}5) - (1 - F_Y(0{,}5)) = 2F_Y(0{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}6915 - 1 = 0{,}38$$

g) Oblicz prawdopodobieństwo, że masa owsa wyprodukowanego przez hobbitów będzie się różnić od wartości oczekiwanej o nie więcej niż dwie wariancje.

Odpowiedź:

$$P(|X - EX| < 2D^2X) = P(|X - 100| < 800) = P(-700 < X < 900) = F_X(900) - F_X(-700) = 2F_Y(40) - 1 = 1$$

6. W Bucklandzie na jesieni przygotowują sery na zimę. W każdym ze 100 magazynów zgromadzonych jest po 1000 serów. Prawdopodobieństwo zepsucia się pojedynczego krążka sera wynosi $4 \cdot 10^{-3}$ i nie zależy od pozostałych serów. Niech $i = 1, 2, \ldots, 100$ oznacza numer magazynu i niech zmienna losowa X_i oznacza liczbę zepsutych serów składowanych w i-tym magazynie. Ponadto, niech zmienna losowa $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ odpowiada sumarycznej liczbie zepsutych serów we wszystkich magazynach. Załóż, że:
— wszystkie zmienne X_i mają taki sam rozkład;
— zmienne X_i są niezależne;
— zmienna Y ma rozkład normalny o wartości średniej 100 razy większej niż wartość średnia dowolnej ze zmiennych X_i;
— zmienna Y ma rozkład normalny o wariancji 100 razy większej niż wariancja dowolnej ze zmiennych X_i.

a) Podaj (w formie funkcji prawdopodobieństwa) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X_1.

b) Oblicz (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku) prawdopodobieństwo, że w magazynie nr 10 zepsują się mniej niż trzy sery.

c) Podaj średnią liczbę zepsutych serów w magazynie nr 15.

d) Podaj wartości EY oraz DY.

e) Utwórz zmienną losową Z będącą standaryzowaną postacią zmiennej losowej Y.

f) Oblicz (z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku) prawdopodobieństwo, że w Bucklandzie zepsują się więcej niż 424 sery.

7. Ted Cotton, jeden z pracowników urzędu pocztowego w Hobbitonie, poczynił następującą obserwację: w 48 przypadkach na 50 po wyjściu klienta z urzędu następny klient przyjdzie do urzędu przed upływem 2 minut. Co więcej, jeżeli przez 2 minuty nikt nie przyjdzie, to sytuacja się powtarza: w 48 przypadkach na 50 przez kolejne 2 minuty przyjdzie klient itd. Z urzędu pocztowego właśnie wyszedł klient. Niech T będzie zmienną losową *typu ciągłego* charakteryzującą się *brakiem pamięci*, a oznaczającą czas w minutach oczekiwania na przyjście następnego klienta.

   a) Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej T: jego nazwę, parametry i dystrybuatnę.

   Odpowiedź: Rozkład wykładniczy

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$
$$P(T < 2) = F(2) = \frac{48}{50}$$
$$1 - e^{-2\lambda} = \frac{24}{25}$$
$$e^{-2\lambda} = \frac{1}{25}$$
$$-2\lambda = \ln\frac{1}{25} = -2\ln 5$$
$$\lambda = \ln 5 \approx 1{,}609$$

   b) Podaj średni czas oczekiwania na kolejnego klienta.

   Odpowiedź: $ET = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\ln 5} \approx 0{,}621$

   c) Podaj odchylenie standardowe zmiennej losowej T.

   Odpowiedź: $DT = ET = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\ln 5} \approx 0{,}621$

   d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na klienta będzie pomiędzy 1, a 3 minut?

   Odpowiedź: $P(1 \leqslant T \leqslant 3) = F(3) - F(1) = 1 - e^{-3\lambda} - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda} = 5^{-1} - 5^{-3} = \frac{5^2-1}{5^3} = \frac{24}{125} = 0{,}192$

   e) Ted twierdzi, że kiedyś przez godzinę nikt nie przyszedł do urzędu pocztowego. Jakie jest prawdopodobieństwo takiego zdarzenia? Jakie są jego możliwe przyczyny?

   Odpowiedź: $P(T > 60) = 1 - F(60) = 1 - (1 - e^{-60\lambda}) = 5^{-60} \approx 0$

Rozkład normalny					
	0	**0,05**		**0**	**0,05**
0,0	0,500	0,520	**1,6**	0,945	0,951
0,1	0,540	0,560	**1,7**	0,955	0,960
0,2	0,579	0,599	**1,8**	0,964	0,968
0,3	0,618	0,637	**1,9**	0,971	0,974
0,4	0,655	0,674	**2,0**	0,977	0,980
0,5	0,691	0,709	**2,1**	0,982	0,984
0,6	0,726	0,742	**2,2**	0,986	0,988
0,7	0,758	0,773	**2,3**	0,989	0,991
0,8	0,788	0,802	**2,4**	0,992	0,993
0,9	0,816	0,829	**2,5**	0,994	0,995
1,0	0,841	0,853	**2,6**	0,995	0,996
1,1	0,864	0,875	**2,7**	0,997	0,997
1,2	0,885	0,894	**2,8**	0,997	0,998
1,3	0,903	0,911	**2,9**	0,998	0,998
1,4	0,919	0,926	**3,0**	0,999	0,999
1,5	0,933	0,939	**3,1**	0,999	0,999