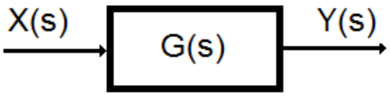
Lab nr 2

Charakterystyki czasowe

Program zajęć:

1. Analityczna metoda wyznaczania transmitancji operatorowej (funkcji przejścia) obiektu z równania różniczkowego (modelu różniczkowego obiektu) z wykorzystaniem przekształcenia Laplace'a $\mathcal{L}$.

   Def. ***Transmitancja operatorowa*** *(funkcja przejścia, G(s)) – stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego układu przy zerowych warunkach początkowych.*

   $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

   Transmitancja operatorowa jest jedną z form opisu dynamiki obiektów automatyki, szczególnie wykorzystywaną w analizie i syntezie układów sterowania. Transmitancja operatorowa pozwala uzyskać dane o obiekcie oraz daje informacje o zachowaniu się obiektu po podaniu na jego wejście różnych sygnałów wymuszających. Do określenia zachowania się obiektu niezbędne są charakterystyki czasowe.

2. Wyznaczenie transmitancji operatorowej G(s) czwórnika RC (analizowanego na Lab nr 1)

Dziedzina czasu	*Dziedzina operatorowa*
$\frac{d}{dt}$	s
$\int$	$\frac{1}{s}$

$$RC\frac{du_{wy}(t)}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t) \; / \, \mathcal{L}$$

$$RCsU_{wy}(s) + U_{wy}(s) = U_{we}(s)$$

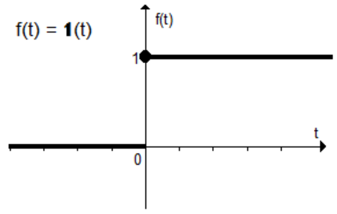
$$U_{wy}(s)[RCs + 1] = U_{we}(s)$$

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \boldsymbol{\frac{1}{RCs+1}} = \boldsymbol{G(s)} = \boldsymbol{\frac{1}{Ts+1}}$$

3. Definicje standardowych sygnałów stosowanych w automatyce, podawanych na wejście układów (sygnały wymuszające):

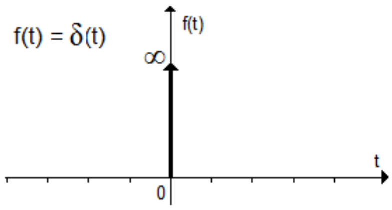
    a. skok jednostkowy **1**(t) (funkcja skokowa Heaviside'a), (skok jednostkowy jest wynikiem całkowania impulsu Diraca), (wykorzystywany do reprezentowania sygnału włączającego się w danej chwili),

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 \; dla \; t < 0 \\ 1 \; dla \; t \geq 0 \end{cases}$$



    b. impuls Diraca δ(t) (impuls jednostkowy, funkcja Diraca, delta Diraca), (impuls Diraca jest wynikiem różniczkowania skoku jednostkowego), (wykorzystywany do przedstawienia bardzo krótkiego impulsu o jednostkowym polu),

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \; dla \; t \neq 0 \\ \infty \; dla \; t = 0 \end{cases}$$

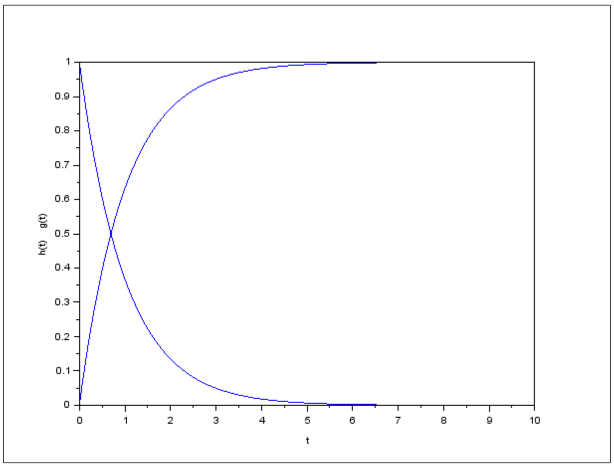


4. Modelowanie czwórnika RC w Scilab, gdzie R·C=1=T (T - stała czasowa). Generowanie odpowiedzi skokowej (odpowiedzi na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego) oraz odpowiedzi impulsowej czwórnika (odpowiedzi na wymuszenie w postaci impulsu Diraca). (Charakterystyki czasowe = charakterystyka skokowa + charakterystyka impulsowa)

    Poniższy kod można edytować z poziomu konsoli (Console) lub w edytorze skryptów (SciNotes).

```
--> s=poly(0,'s'); //deklaruje operator Laplace'a (definicja zmiennej wielomianu)
--> R=1; //deklaracja wartości rezystancji
--> C=1; //deklaracja wartości pojemności
--> T=R*C; //deklaracja stałej czasowej
--> G=syslin('c', 1/(T*s+1)); //tworzy transmitancję operatorową (funkcja
generująca model w przestrzeni roboczej – linear system definition)
--> t=0:0.05:10; //deklaruje wektor czasu od 0 do 10 z krokiem 0,05 –> 200 próbek
--> skokowa=csim('step', t, G)) //wyznacza odpowiedz skokową dla obiektu G
(funkcja csim generuje konkretne odpowiedzi czasowe)
--> plot(t,skokowa) //wykreśla charakterystykę skokową obiektu o transmitancji G
--> impulsowa=csim('impulse', t, G))//wyznacza odpowiedz impulsową dla G
--> plot(t,impulsowa) //wykreśla charakterystykę impulsową obiektu o transmitancji G
```

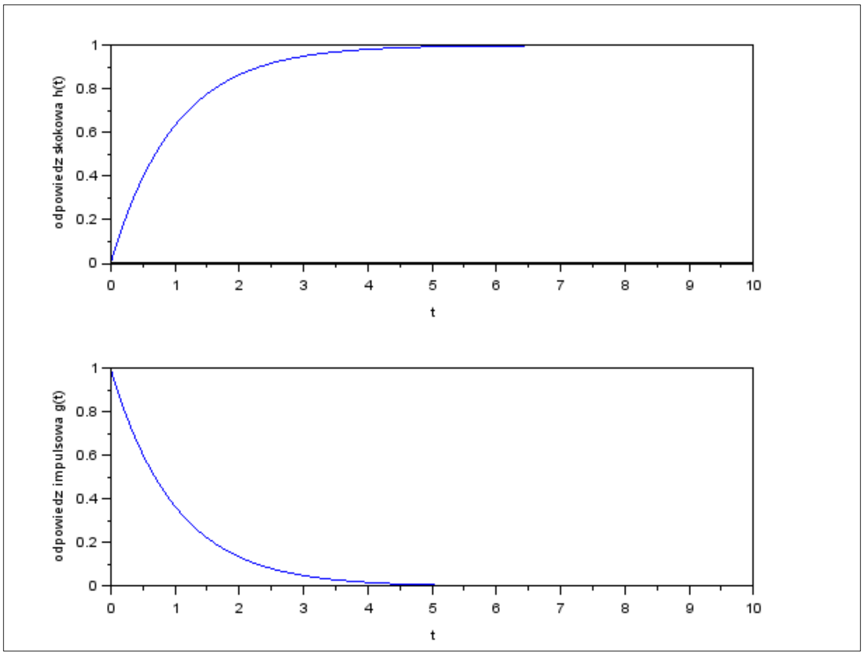
Mariusz Nowak, Instytut Informatyki, PP, e-mail: Mariusz.Nowak@put.poznan.pl, http://www.cs.put.poznan.pl/mnowak



Rys. 1. Odpowiedzi skokowa i impulsowa dla czwórnika RC

Jeżeli chcemy wyświetlić odpowiedzi w dwóch osobnych układach współrzędnych – należy użyć *subplot* (przykład skryptu z SciNotes):

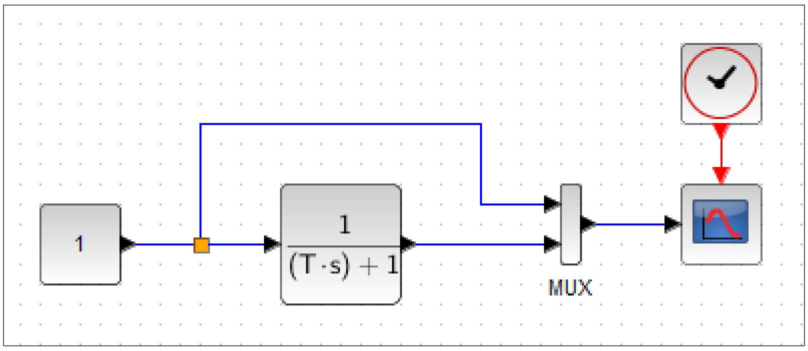
```
s=poly(0,'s');
R=1;
C=1;
T=R*C;
G=syslin('c',1/(T*s+1));
t=0:0.05:10;
subplot(2,1,1);
plot(t,csim('step',t,G));
subplot(2,1,2);
plot(t,csim('impulse',t,G));
```



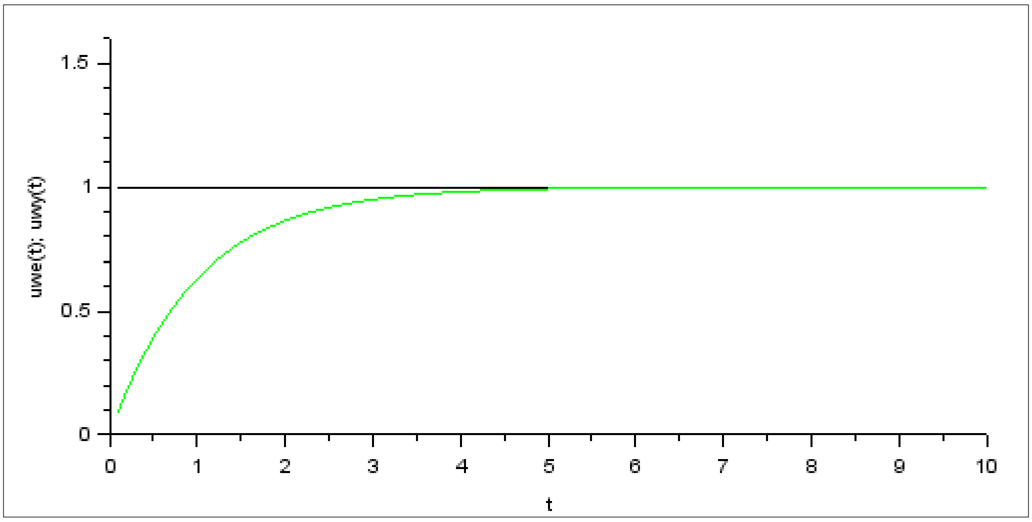
Rys. 2. Odpowiedz skokowa i odpowiedz impulsowa dla czwórnika RC

5. Modelowanie czwórnika RC w Xcos z wykorzystaniem bloków CLR – model transmitancyjny.

   Blok CLR modelujący transmitancję obiektu znajdziemy w przeglądarce palet – jako element grupy „systemy czasu ciągłego".

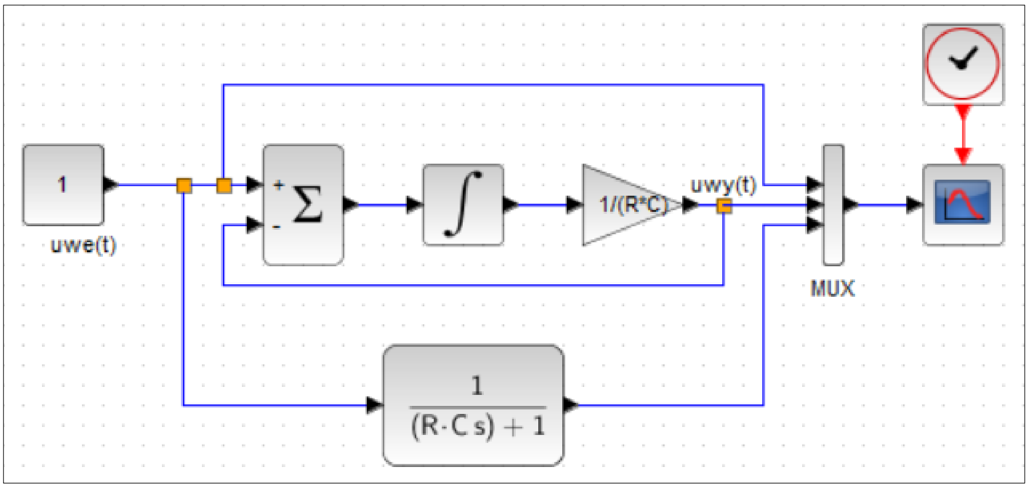


Rys. 3. Model czwórnika RC w Xcos z wykorzystaniem bloku CLR, (R·C=T)

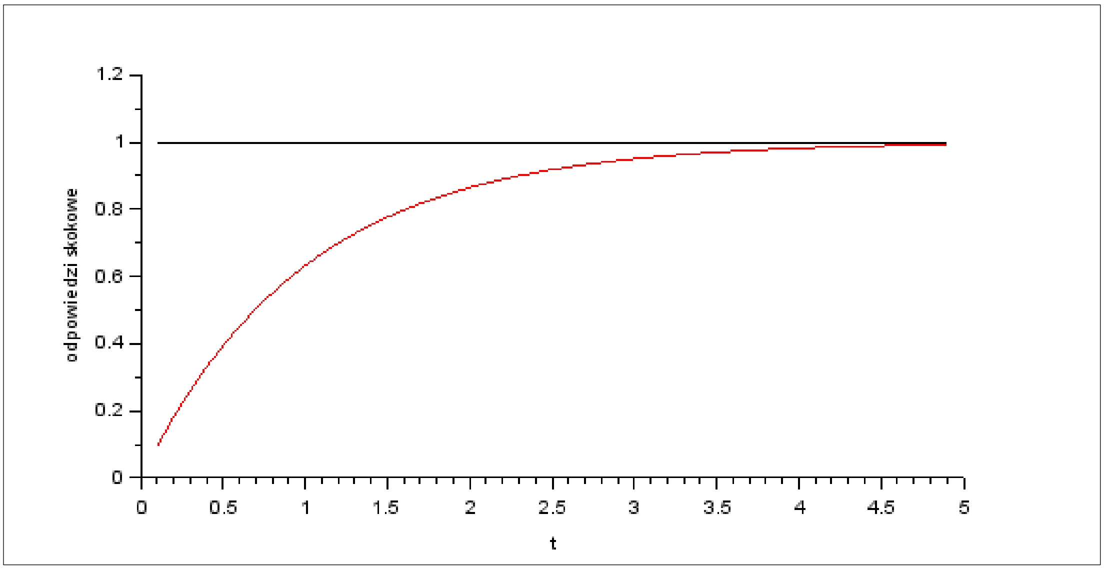


Rys. 4. Charakterystyka skokowa czwórnika RC dla R=1 i C=1

6. Porównanie modelu różniczkowego czwórnika RC z modelem transmitancyjnym czwórnika RC (porównanie odpowiedzi czwórników na wymuszenie $u_{we}(t)$=1V).

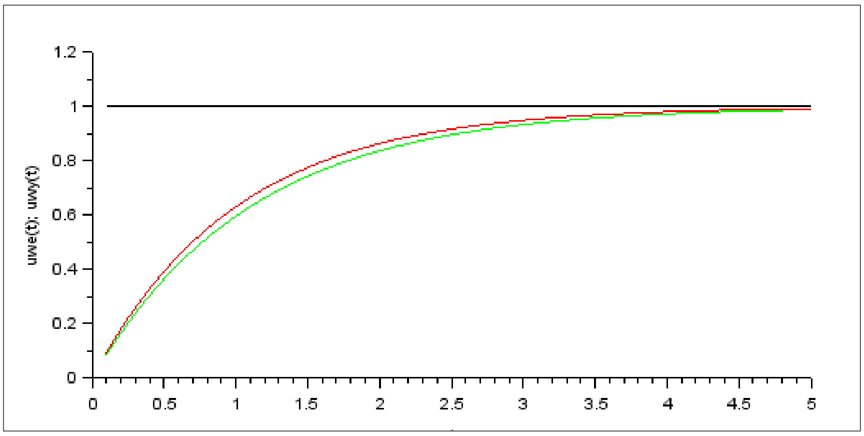


Rys. 5. Porównanie modelu różniczkowego z modelem transmitancyjnym czwórnika RC.



Rys. 6. Odpowiedzi skokowe czwórników RC (widoczna tylko odpowiedz w kolorze czerwonym)

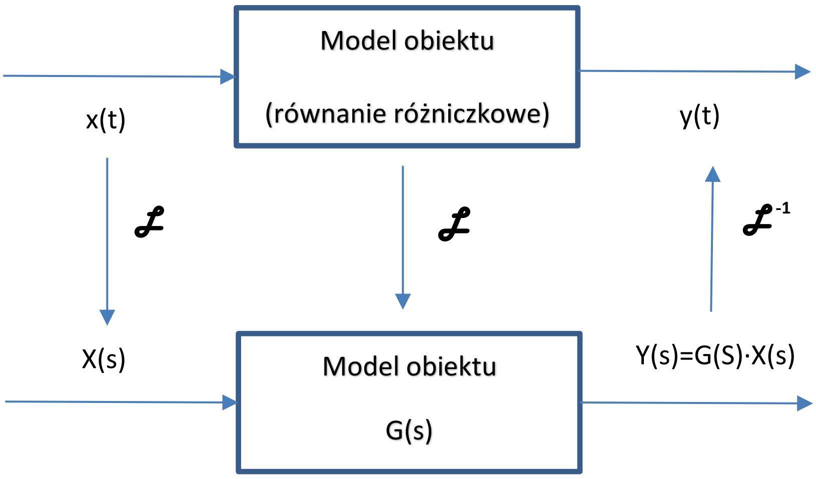
W wyniku przeprowadzonej symulacji otrzymamy widoczny jeden przebieg wyjściowy (przebieg w kolorze czerwonym, przykrył przebieg w kolorze zielonym) – udowodniliśmy zatem, że oba modele przedstawiają ten sam obiekt. W celu sprawdzenia (czy rzeczywiście przebiegi „nałożyły się na siebie") można „poróżnić" modele przez zmianę wartości rezystancji w jednym z modeli, np. R_1=1.1 w pierwszym modelu i R=1 w drugim modelu.



Rys. 7. Odpowiedzi skokowe dla dwóch modeli czwórników R_1C i RC (R_1=1.1, R=1)

7. Analityczne wyznaczenie odpowiedzi skokowej (charakterystyki skokowej) i odpowiedzi impulsowej (charakterystyki impulsowej) czwórnika RC.

Ogólny schemat metody operatorowej



a. Na obiekt podamy sygnał wejściowy u(t)=**1**(t) i zakładamy, że uzyskamy odpowiedz skokową oznaczaną jako h(t). Skoro transmitancja operatorowa to stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego to: $G(s) = \frac{H(S)}{U(s)}$. Stąd wynika, że odpowiedz skokowa w dziedzinie operatorowej ma postać: $H(S) = G(s) \cdot U(s)$. Chcąc poznać postać odpowiedzi skokowej w dziedzinie czasu należy dokonać odwrotnego przekształcenia Laplace'a: h(t)=$\mathcal{L}^{-1}${G(s)·U(s)}, gdzie U(s)=$\frac{1}{s}$, (h(t) – charakterystyka skokowa, $\frac{1}{s}$ to postać transformaty skoku jednostkowego – patrz tablice transformat).

b. Wyznaczenie oryginału transformaty metodą residuów (patrz pomocnik):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{Ts\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right\} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\left(\frac{1}{Ts\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right)(s-0)e^{st}\right) + \lim_{s\to -\frac{1}{T}}\left(\left(\frac{1}{Ts\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right)\left(s-\left(-\frac{1}{T}\right)\right)e^{st}\right) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\left(\frac{1}{T\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right)e^{st}\right) + \lim_{s\to -\frac{1}{T}}\left(\left(\frac{1}{Ts}\right)e^{st}\right) = 1 - e^{\frac{-t}{T}}.$$

Dla T=R·C=1, $h(t) = 1 - e^{-t} = 1 - \frac{1}{e^t}$, gdzie t – czas.

c. $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot U(s)\}$, gdzie U(s)=1 (g(t) – charakterystyka impulsowa, 1 – postać transformaty impulsu Diraca).

d. Wyznaczenie oryginału transformaty metodą residuum.

Metoda wyznaczania odpowiedzi impulsowej identyczna jak w podpunkcie b dla odpowiedzi skokowej. (Powinno być $g(t) = \frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}}$).

Pomocnik

Oryginał transformaty F(s) - jest równy sumie residuów funkcji $F(s)e^{st}$ w biegunach $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (dla stopnia n mianownika większego od stopnia m licznika), czyli:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{L(s)}{M(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{s=s_k} F(s)e^{st}$$

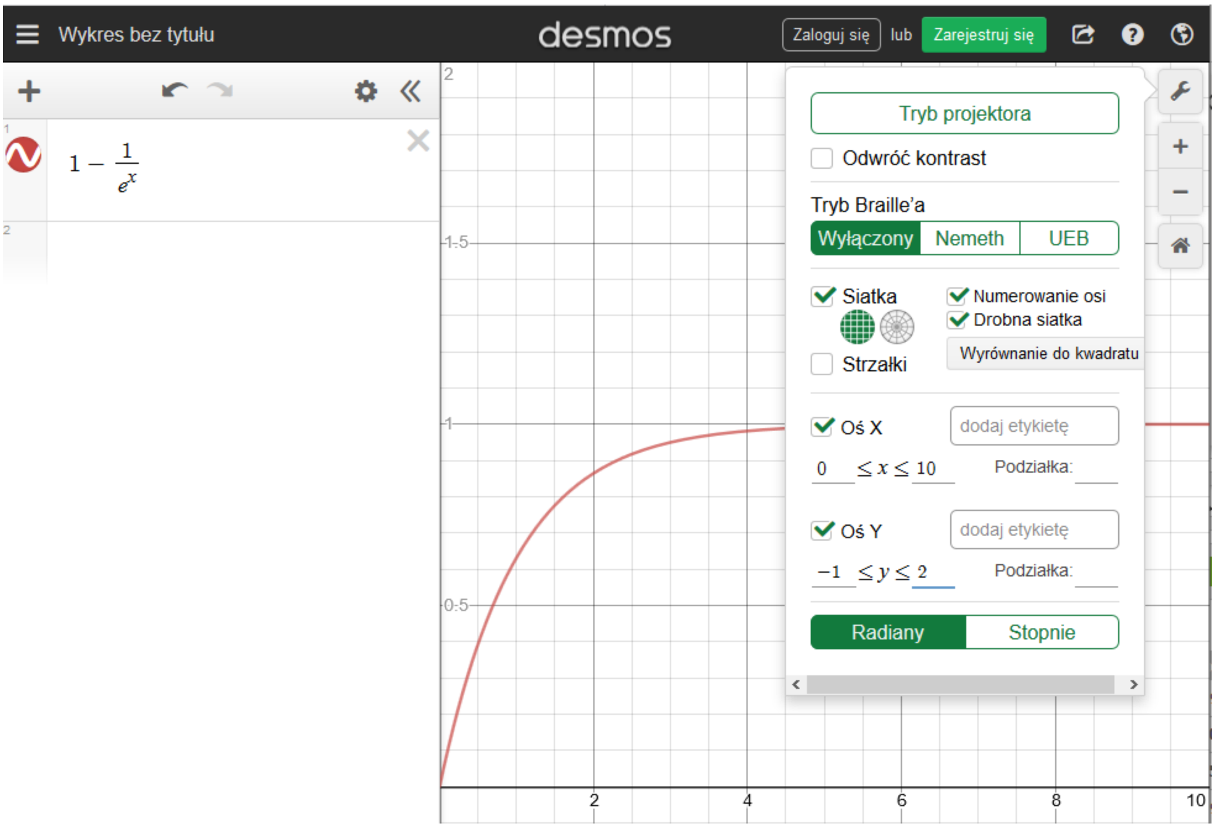
Residuum funkcji $F(s)e^{st}$ w biegunie s_k o krotności i oblicza się ze wzoru:

$$\operatorname*{res}_{s=s_k} F(s)e^{st} = \lim_{s\to s_k}\left(\frac{1}{(i-1)!}\left(\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}\left(F(s)(s-s_k)^i e^{st}\right)\right)\right)$$

dla jednokrotnego bieguna ze wzoru uproszczonego

$$\operatorname*{res}_{s=s_k} F(s)e^{st} = \lim_{s\to s_k}\left(\left(F(s)(s-s_k)e^{st}\right)\right)$$

8. Generowanie odpowiedzi skokowej i odpowiedzi impulsowej np. za pomocą https://www.desmos.com/calculator

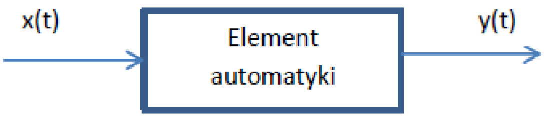


Rys. 8. Przebieg odpowiedzi skokowej h(t) w *calculator*

9. **Do samodzielnego wykonania**:

Analiza odpowiedzi skokowych i odpowiedzi impulsowych (charakterystyk czasowych) podstawowych członów automatyki (proporcjonalny, inercyjny I-rzędu, inercyjny II-rzędu, różniczkujący idealny, różniczkujący rzeczywisty, całkujący idealny, całkujący rzeczywisty, oscylacyjny, opóźniający).

Dla dziewięciu n/w równań różniczkowych znaleźć postaci transmitancji operatorowych. Zamodelować transmitancje w Scilab lub Xcos. Wygenerować odpowiedzi skokowe i odpowiedzi impulsowe dla dziewięciu podstawowych elementów automatyki.



Równania różniczkowe podstawowych elementów automatyki

1. $y(t) = kx(t)$
2. $T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$
3. $T_1T_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$
4. $y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}$
5. $T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}$
6. $\frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$
7. $T\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$
8. $T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$
9. $y(t) = kx(t - T_0)$