Lab nr 6

Badanie stabilności URA

Program zajęć:

1. **Stabilność URA.**

   URA jest stabilny wtedy, gdy potrafi wrócić do stanu równowagi stałej po ustaniu działania wymuszenia, które wytrąciło układ z tego stanu, lub potrafi osiągną nowy stan równowagi stałej, jeśli wymuszenie postało na stałym poziomie.
   Stabilność charakteryzuje właściwości dynamiczne układu, które są warunkiem jego prawidłowej pracy.

2. **Metody badania stabilności.**
   a. Badanie stabilności linowych układów sterowania poprzez analizę równania charakterystycznego.
   b. Kryterium Hurwitza.
   c. Kryterium Nyquista.

3. **Badanie stabilności liniowych układów sterowania poprzez analizę równania charakterystycznego.**

   Układ zamknięty liniowy i stacjonarny opisany równaniem (1) jest **stabilny**, jeżeli dla skończonej wartości zakłócenia przy dowolnych wartościach początkowych jego odpowiedź ustalona przyjmuje skończone wartości.

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_o x(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_o u(t) \quad (1)$$

Transmitancja operatorowa tego układu ma postać:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (2)$$

Stąd jego równanie charakterystyczne:

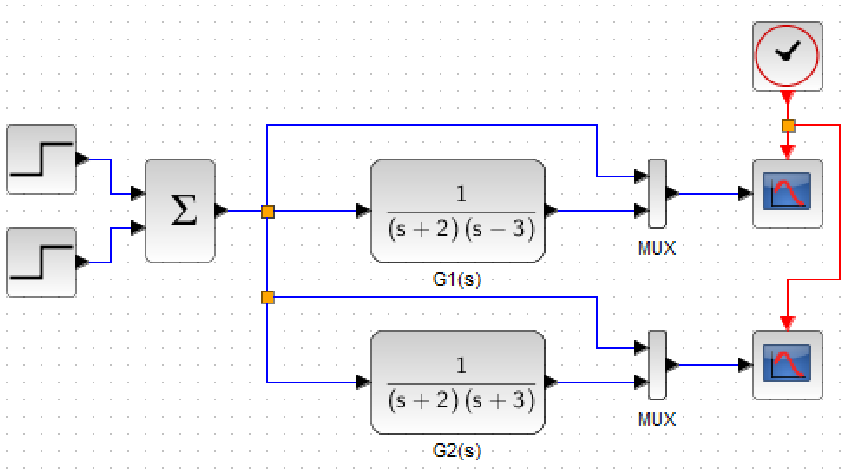
$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby **układ zamknięty był stabilny** jest, aby pierwiastki równania charakterystycznego (3) miały ujemne części rzeczywiste. Rozwiązanie tego równania wystarczy, więc dla stwierdzenia czy dany układ liniowy jest stabilny. Jednak w praktyce ta metoda nie zawsze jest dogodna i wystarczająca.

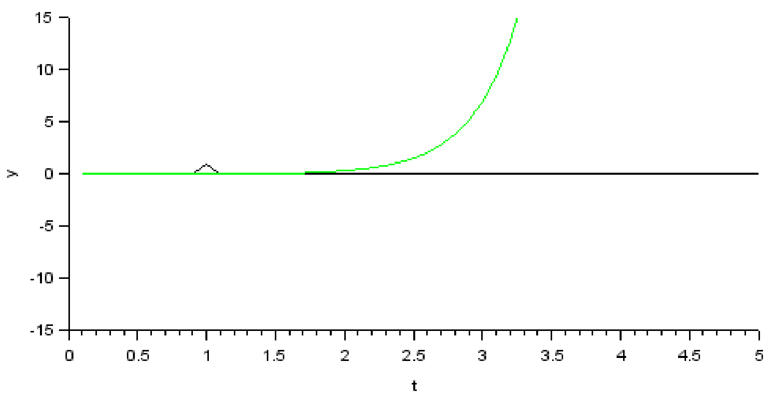
*Z tego względu zostały opracowane metody pozwalające na badanie stabilności bez rozwiązywania równania charakterystycznego. Są to tzw. kryteria stabilności. Kryteria te dzielą się na: algebraiczne, do których należą kryteria **Routha** i **Hurwitza** oraz częstotliwościowe **Michajłowa** i **Nyquista**. Wybrane kryteria zostaną przedstawione w dalszej części opracowania.*

Mariusz Nowak, Instytut Informatyki, PP, e-mail: Mariusz.Nowak@put.poznan.pl, http://www.cs.put.poznan.pl/mnowak

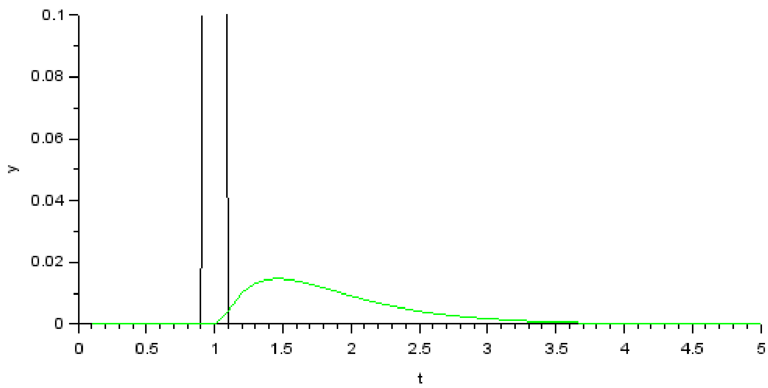
a. **Przykład z Xcos – analiza układów zamkniętych G1(s) oraz G2(s)**



Rys. 1. Badanie reakcji dwóch układów zamkniętych G1(s) i G2(s) na impuls.



Rys. 2. Reakcja układu zamkniętego G1(s) na impuls.



Rys. 3. Reakcja układu zamkniętego G2(s) na impuls.

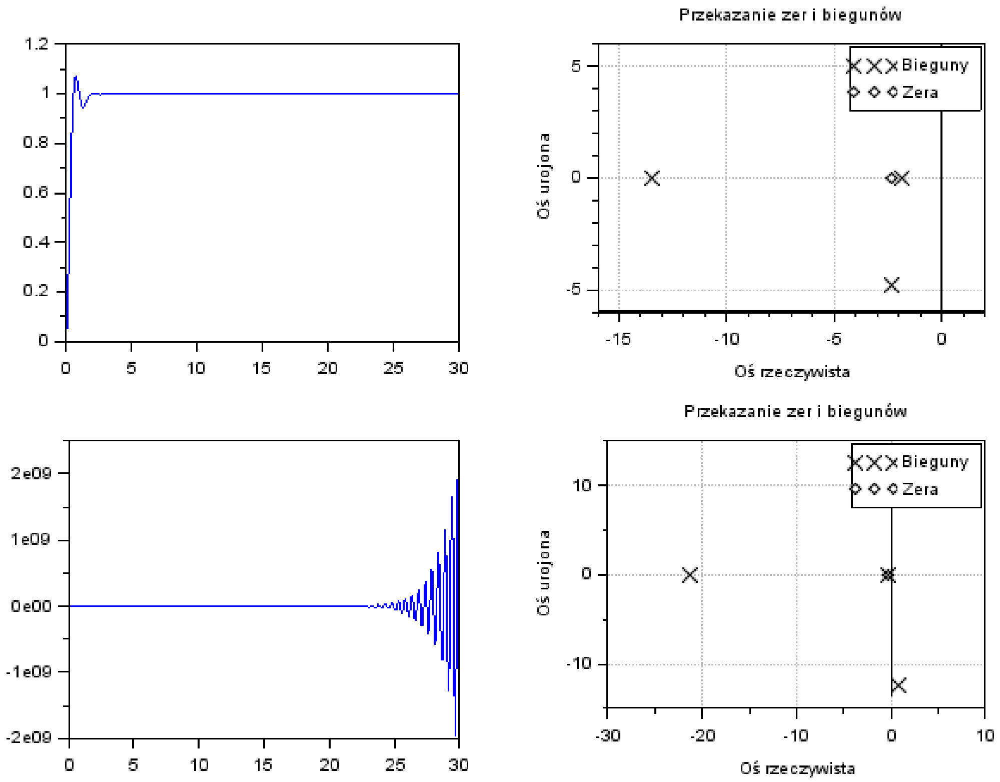
b. Polecenia wprowadzające (skrypt w Scilab)

```
//Polecenia wprowadzające
//Punkt 3b
s=poly(0,'s');
G=syslin('c',100/(s^3+20*s^2+125*s+250)); //wygenerowanie transmitancji operatorowej G
disp(G); //wyświetlenie transmitancji operatorowej G
t=0:0.05:10;
subplot(3,1,1);
plot(t,csim('step',t,G));
subplot(3,1,2);
plot(t,csim('impulse',t,G));
w=[1 20 125 250]; //deklaracja współczynników wielomianu mianownika (wielomianu
charakterystycznego)
x=roots(w); //wyznaczenie pierwiastków wielomianu mianownika (biegunów)
disp(x); //wyświetlenie wartości biegunów
subplot(3,1,3);
plzr(G) //wykreśla zera i bieguny transmitancji G
```

c. Badanie stabilności układu zamkniętego dla obiektu i dwóch różnych regulatorów PI

```
// Punkt 3c
s=%s;
//Gob=zpk([],[-5 -5 -10],100,"c"); //tworzy obiekt (podajemy zera, bieguny, wzmocnienie oraz typ
ciągły
Gob=syslin('c',100/((s+5)*(s+5)*(s+10))); // tworzy transmitancję obiektu
disp('transmitancja obiektu:');
disp(Gob);
t=0:0.1:30;
Gcz=syslin('c',1,1); // tworzy transmitancję czujnika w torze pętli sprzężenia zwrotnego
disp('transmitancja czunika:');
disp(Gcz);
kp1=2.9; // współczynnik wzmocnienia regulatora1 - PI
ki1=7 // czas zdwojenia regulatora1 - PI
Gr1=syslin('c',(kp1*s+ki1)/(s));  //tworzy transmitancję regulatora1 UWAGA: Gr(s)=kp+(ki/s)
disp('transmitancja regulatora 1:');
disp(Gr1);
Gz1=(Gr1*Gob)/.Gcz; // tworzy transmitancję układu zamkniętego (URA1)
disp('transmitancja URA1:');
disp(Gz1);
y1=csim('step',t,Gz1); // generuje odpowiedz skokową URA1
subplot(2,2,1);
plot(t,y1);
subplot(2,2,2);
plzr(Gz1); // wykreślan zera i bieguny URA1
kp2=30; //
ki2=7
Gr2=syslin('c',(kp2*s+ki2)/(s));  //tworzy transmitancję regulatora2 UWAGA: Gr(s)=kp+(ki/s)
disp('transmitancja regulatora 2:');
disp(Gr2);
Gz2=(Gr2*Gob)/.Gcz;
disp('transmitancja URA2:');
disp(Gz2);
```

```
y2=csim('step',t,Gz2);
subplot(2,2,3);
plot(t,y2);
subplot(2,2,4);
plzr(Gz2);
m1=[7 140 875 3850]; //deklaracja współczynników wielomianu mianownika URA1 (wielomianu charakterystycznego)
x1=roots(m1); //wyznaczenie pierwiastków mianownika (biegunów) URA1
disp('bieguny URA1:');
disp(x1); //wyświetlenie wartości biegunów URA1
m2=[7 140 875 22750];
x2=roots(m2);
disp('bieguny URA2:');
disp(x2);
```



Rys. 4. Odpowiedzi skokowe i położenie biegunów układów URA1 i URA2.

Wszystkie bieguny URA1 znajdują się w lewej półpłaszczyźnie –> układ zamknięty (URA1) jest stabilny.

Część biegunów URA2 znajduje się w prawej półpłaszczyźnie –> układ zamknięty (URA2) jest niestabilny.

4. Kryterium Hurwitza

Warunkiem koniecznym i dostatecznym **stabilności układu liniowego i stacjonarnego** jest, aby wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego transmitancji tego układu istniały i były dodatnie a ponadto, ażeby wyznacznik Δn zwany wyznacznikiem Hurwitza oraz jego podwyznaczniki Δ_2, Δ_3, …, Δ_{n-1} były dodatnie.

Jeżeli którykolwiek współczynnik jest ujemny lub równy zeru albo którykolwiek podwyznacznik jest ujemny to **układ jest niestabilny**.

Jeśli dowolny z podwyznaczników jest równy zeru to oznacza, że równanie charakterystyczne układu ma między innymi pierwiastki urojone i wtedy układ jest **na granicy stabilności**. Na jego wyjściu występują drgania o ustalonej amplitudzie.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

a. **Zbadać stabilność układu zamkniętego, którego równanie charakterystyczne ma postać: $M(s)=s^5+6s^4+4s^3+7s^2+11s+2=0$**

Warunek konieczny jest spełniony, ponieważ wszystkie współczynniki równania charakterystycznego są > 0.

Warunek dostateczny – sprawdzamy wartość wyznacznika Hurwitza, który ma postać:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

```
D_5=([6 7 2 0 0;1 4 11 0 0;0 6 7 2 0;0 1 4 11 0;0 0 6 7 2]); // deklaruje elementy wyznacznika Hurwitza (D_5)
disp(D_5);
Delta_5=det(D_5); // oblicza wartość wyznacznika Hurwitza = -5846
disp(Delta_5);
```

Ujemna wartość wyznacznika Hurwitza wskazuje na to, że badany układ jest **niestabilny**. Nie jest potrzebne badanie pozostałych wyznaczników.

b. **Określić stabilność układu regulacji, jeżeli transmitancja układu otwartego ma postać $G_o(s) = \frac{2s^2+1}{s^3+s+2}$**

$$G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{L_o(s)}{M_o(s)}}{1+\frac{L_o(s)}{M_o(s)}} = \frac{\frac{L_o(s)}{M_o(s)}}{\frac{L_o(s)+M_o(s)}{M_o(s)}} = \frac{L_o(s)}{L_o(s)+M_o(s)}$$

```
s=%s;
Go=syslin('c',(2*s^2+1)/(s^3+s+2)); //deklaruje transmitancję układu otwartego
disp(Go);
Num=[0 2 0 1]; //deklaruje współczynniki wielomianu licznika Lo
disp('współczynniki wielomianu licznika Lo:',Num);
Den=[1 0 1 2]; //deklaruje współczynniki wielomianu mianownika Mo
disp('współczynniki wielomianu mianownika Mo:',Den);
M=Num+Den; //wylicza współczynniki wielomianu charakterystycznego
// M(s)=Lo(s)+Mo(s) -> M = 1 2 1 3 (M = a3  a2  a1  a0)
disp('współczynniki wielomianu mianownika M, układu zamkniętego:',M);
```

Warunek konieczny jest spełniony, ponieważ wszystkie współczynniki równania charakterystycznego M(s) są >0: $a_0=3>0$, $a_1=1>0$, $a_2=2>0$, $a_3=1>0$.

Sprawdzenie warunku dostatecznego:

$\Delta_1=|a_2|=2>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3=-1<0$

```
D_2=([2 3;1 1]); // deklaruje elementy wyznacznika D_2
disp(D_2);
Delta_2=det(D_2); // oblicza wartość wyznacznika = -1
disp(Delta_2);
```

$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\ldots= -3 < 0$

```
D_3=[2 3 0;1 1 0;0 2 3] //deklaruje elementy wyznacznika D_3
disp('wyznacznik D_2:',D_3);
Delta_3=det(D_3) //oblicza wartość wyznacznika = -3
disp('wartość delta_3:',Delta_3);
```

Ponieważ wartość wyznacznika drugiego stopnia jest ujemna to układ regulacji jest niestabilny (dodatkowo została jeszcze wyznaczona wartość wyznacznika trzeciego stopnia – chociaż nie jest to konieczne).

5. Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista pozwala na badanie stabilności jednowymiarowego układu zamkniętego na podstawie przebiegu wykresu funkcji $G_o(j\omega)$ układu otwartego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Sformułowane przez Nyquista kryterium stabilności przedstawia się następująco:

A) Jeżeli układ otwarty jest stabilny to układ zamknięty jest też stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki $G_o(j\omega)$ przy wzroście ω od 0 do ∞, nie obejmuje punktu o współrzędnych (-1, j0).

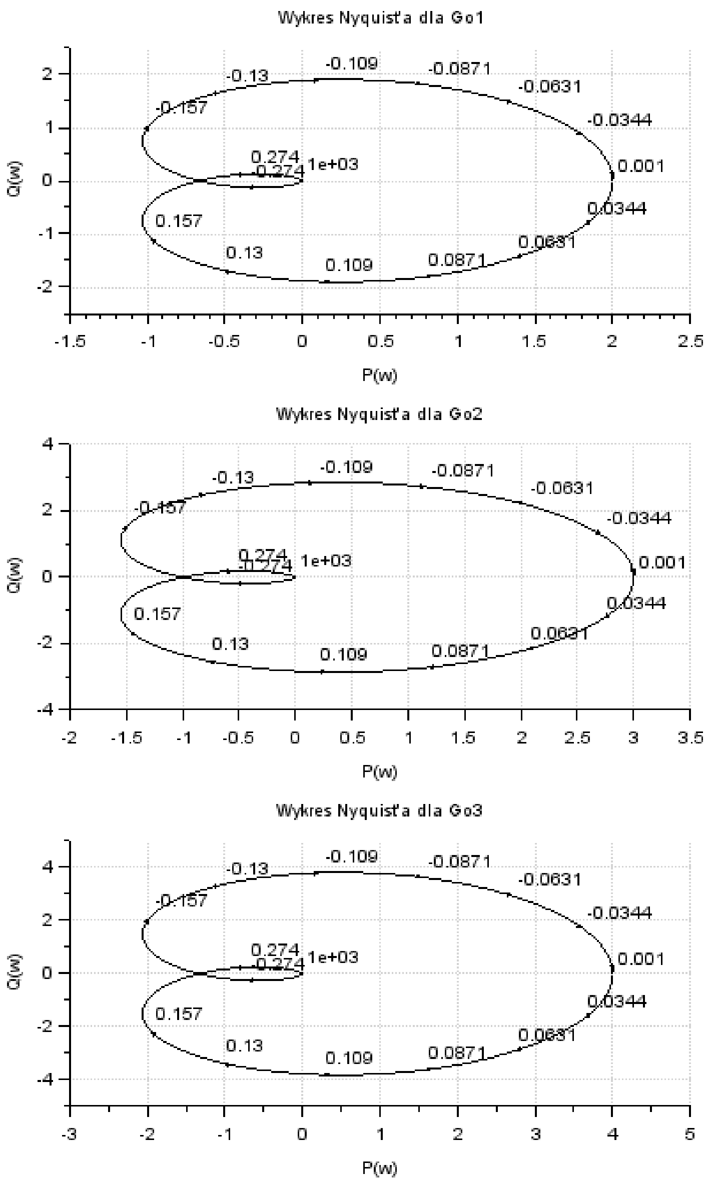
B) Jeżeli układ otwarty nie jest stabilny i jego transmitancja ma r biegunów w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej to układ zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki $G_o(j\omega)$ przy wzroście ω od 0 do ∞, obejmuje punkt (-1,j0) r/2 razy.

W pewnych przypadkach wygodniej jest posługiwać tzw. regułą lewej strony, która mówi, że układ zamknięty jest stabilny, jeżeli przy wzroście ω od 0 do ∞, punkt (-1, j0) znajduje się w obszarze po lewej stronie wykresu $G_o(j\omega)$.

W praktycznych zastosowaniach kryterium Nyquista jest szczególnie przydatne w przypadku, gdy układ otwarty jest stabilny. Można wtedy korzystać z przebiegu charakterystyki $G_o(j\omega)$ układu otwartego zdjętej doświadczalnie, co pozwala na badanie stabilności także układu, którego opis matematyczny nie jest znany.

a. Badanie stabilności układu zamkniętego za pomocą kryterium Nyquista dla obiektu i regulatora P o zmiennej wartości wzmocnienia k_p.

```
s=%s;
Gob=syslin('c',1/(s^3+2*s^2+2*s+1)); //deklaruje transmitancję obiektu
disp(Gob);
kp1=2;
kp2=3;
kp3=4;
Gr1=syslin('c',kp1/(0*s+1));  //deklaruje transmitancję regulatora1
disp('Transmitancja regulatora1:',Gr1);
Gr2=syslin('c',kp2/(0*s+1));  //deklaruje transmitancję regulatora2
disp('Transmitancja regulatora2:',Gr2);
Gr3=syslin('c',kp3/(0*s+1));  //deklaruje transmitancję regulatora3
disp('Transmitancja regulatora3:',Gr3);
Go1=Gr1*Gob; // deklaruje transmitancję układu otwartego z regulatorem1
disp('Transmitancja ukladu otwartego z regulatorem1:',Go1);
Go2=Gr2*Gob; // deklaruje transmitancję układu otwartego z regulatorem2
disp('Transmitancja ukladu otwartego z regulatorem2:',Go2);
Go3=Gr3*Gob; // deklaruje transmitancję układu otwartego z regulatorem3
disp('Transmitancja ukladu otwartego z regulatorem3:',Go3);
nyquist(Go1); // kreśli charakterystykę Nyquista dla układu otwartego z reg1
nyquist(Go2); // kreśli charakterystykę Nyquista dla układu otwartego z reg2
nyquist(Go3); // kreśli charakterystykę Nyquista dla układu otwartego z reg3
```



Rys. 5. Charakterystyki Nyquista dla G_o1, G_o2 i G_o3.

Układ regulacji 1 jest **stabilny**, układ regulacji 2 jest **na granicy stabilności**, układ regulacji 3 jest **niestabilny**.

b. **Sprawdzenie przypadku z punktu a poprzez analizę położenia biegunów.**

Transmitancja układu otwartego: $G_o(s) = G_r(s) \cdot G_{ob}(s) = k_p \cdot \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$

Transmitancja układu zamkniętego: $G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{k_p}{s^3+2s^2+2s+k_p+1}$

Równanie charakterystyczne: $M(s)= s^3+2s^2+2s+kp+1=0$

```
kp1=2;
kp2=3;
kp3=4;
M1=[1 2 2 kp1+1];
x1=roots(M1);
disp('pierwiastki równania charakterystycznego1:' ,x1);
M2=[1 2 2 kp2+1];
x2=roots(M2);
disp('pierwiastki równania charakterystycznego2:' ,x2);
M3=[1 2 2 kp3+1];
x3=roots(M3);
disp('pierwiastki równania charakterystycznego3:' ,x3);
```

```
"pierwiastki równania charakterystycznego1:"
 -1.8105357 + 0.i
 -0.0947321 + 1.2837422i
 -0.0947321 - 1.2837422i
```

Wszystkie trzy pierwiastki równania charakterystycznego dla $k_p=2$ mają części rzeczywiste ujemne – układ zamknięty jest **stabilny**.

```
"pierwiastki równania charakterystycznego2:"
-2.      + 0.i
 0       + 1.4142136i
 0       - 1.4142136i
```

"pierwiastki równania charakterystycznego2:"
-2. + 0.i
0 + 1.4142136i ***tutaj część rzeczywista jest równa zero ($3,6x10^{-16}$≈0)***
0 - 1.4142136i ***tutaj część rzeczywista jest równa zero ($3,6x10^{-16}$≈0)***

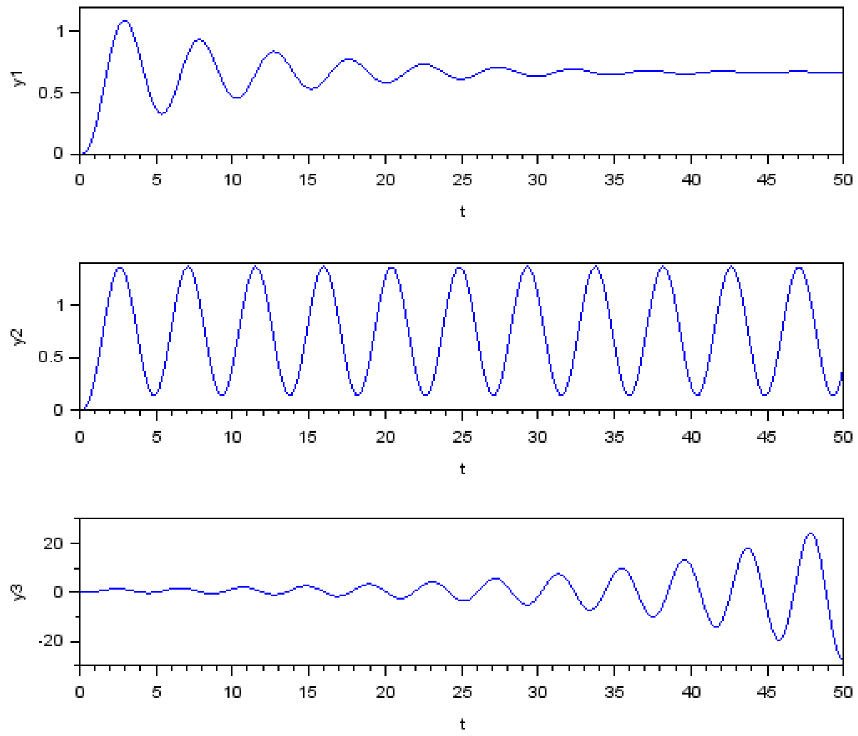
W tym przypadku ($k_p=3$) występują pierwiastki urojone sprzężone, zatem układ zamknięty jest **na granicy stabilności**.

```
"pierwiastki równania charakterystycznego3:"
-2.1509111 + 0.i
 0.0754555 + 1.5227944i
 0.0754555 - 1.5227944i
```

Tym razem ($k_p=4$) występują pierwiastki zespolone sprzężone, których części rzeczywiste są dodatnie, wobec tego układ zamknięty jest dla tego przypadku **niestabilny**.

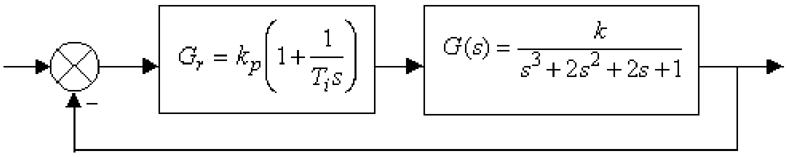
Odpowiedzi skokowe dla trzech analizowanych układów zamkniętych:

```
s=%s;
Gob=syslin('c',1/(s^3+2*s^2+2*s+1));
Gr1=syslin('c',kp1/(0*s+1));
Gr2=syslin('c',kp2/(0*s+1));
Gr3=syslin('c',kp3/(0*s+1));
Gcz=syslin('c',1,1);
Gz1=(Gr1*Gob)/.Gcz;
disp(Gz1);
Gz2=(Gr2*Gob)/.Gcz;
disp(Gz2);
Gz3=(Gr3*Gob)/.Gcz;
disp(Gz3);
t=0:0.1:50;
y1=csim('step',t,Gz1); // generuje odpowiedz skokową URA1
subplot(3,1,1);
plot(t,y1);
y2=csim('step',t,Gz2); // generuje odpowiedz skokową URA2
subplot(3,1,2);
plot(t,y2);
y3=csim('step',t,Gz3); // generuje odpowiedz skokową URA3
subplot(3,1,3);
plot(t,y3);
```



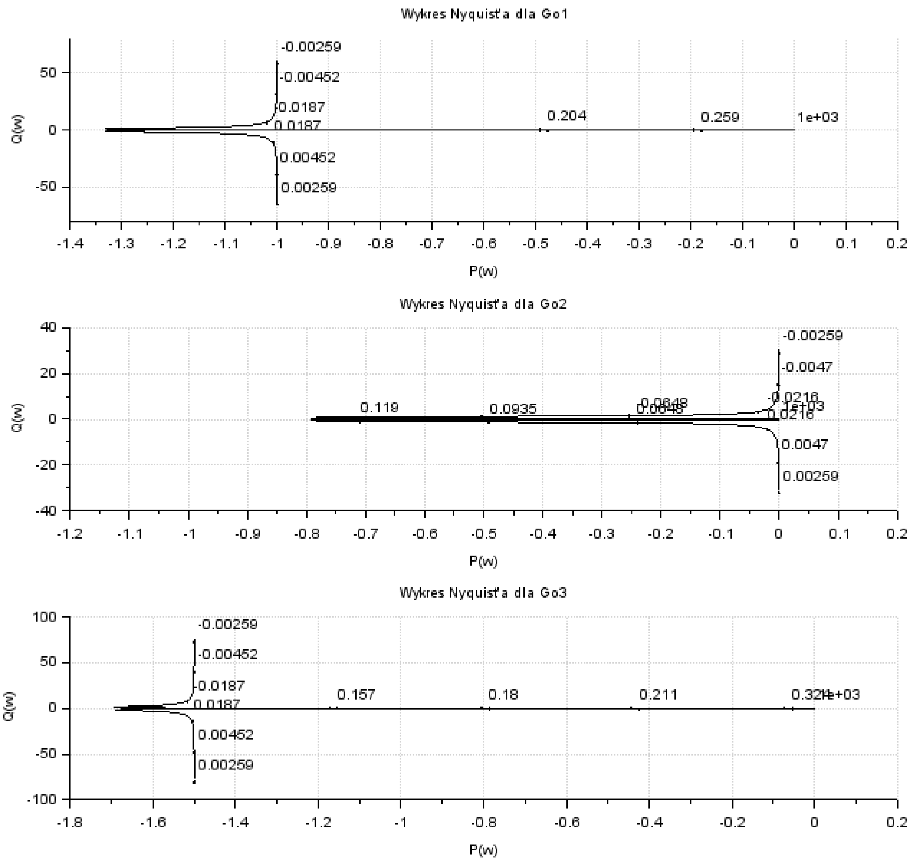
Rys. 6. Odpowiedzi skokowe dla trzech URA.

c. **Badanie stabilności układu zamkniętego za pomocą kryterium Nyquista dla obiektu oraz regulatora PI o stałym wzmocnieniu k_P=1 i zmiennych stałych całkowania T_i. Stałe całkowania T_{i1}=1, T_{i2}=2, T_{i3}=0.8. Transmitancja regulatora $G_r = k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$.**



Rys. 7. Schemat blokowy URA

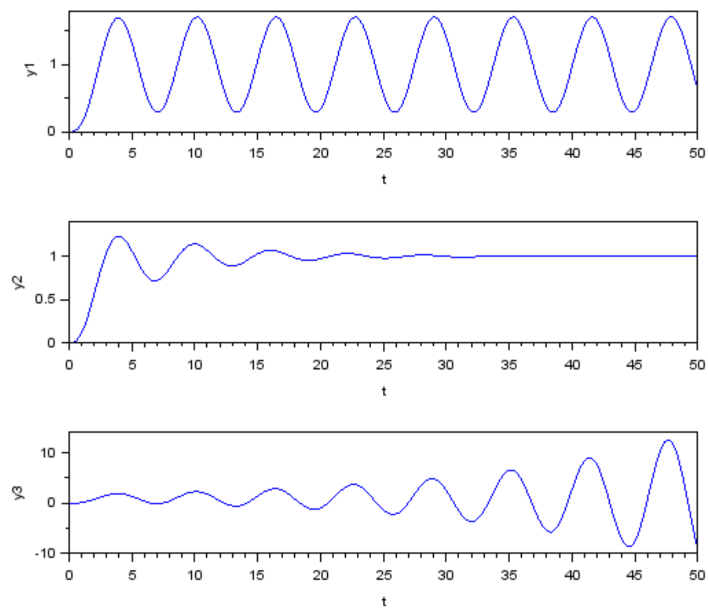
```
s=%s;
Gob=syslin('c',1/(s^3+2*s^2+2*s+1));
kp=1; // współczynnik wzmocnienia regulatora1 - PI
Ti1=1 // czas zdwojenia regulatora1 – PI
Ti2=2 // czas zdwojenia regulatora2 – PI
Ti3=0.8 // czas zdwojenia regulatora3 – PI
Gr1=syslin('c',(kp*Ti1*s+kp)/(Ti1*s)); //tworzy transmitancję regulatora1
Gr1=syslin('c',(kp*Ti2*s+kp)/(Ti2*s)); //tworzy transmitancję regulatora2
Gr1=syslin('c',(kp*Ti2*s+kp)/(Ti2*s)); //tworzy transmitancję regulatora3
Go1=Gr1*Gob; //tworzy transmitancję układu otwartego 1
Go2=Gr2*Gob; //tworzy transmitancję układu otwartego 2
Go3=Gr3*Gob; //tworzy transmitancję układu otwartego 3
subplot(3,1,1)
nyquist(Go1);
subplot(3,1,2)
nyquist(Go2);
subplot(3,1,3)
nyquist(Go3);
```



Rys. 8. Charakterystyki Nyquista dla trzech układów otwartych G_{o1}, G_{o2} i G_{o3}.

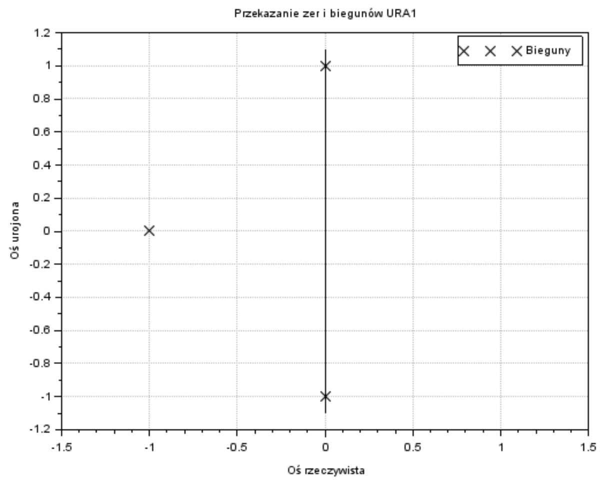
Układ zamknięty 1 jest **na granicy stabilności**, układ zamknięty 2 jest **stabilny**, układ zamknięty 3 jest **niestabilny**.

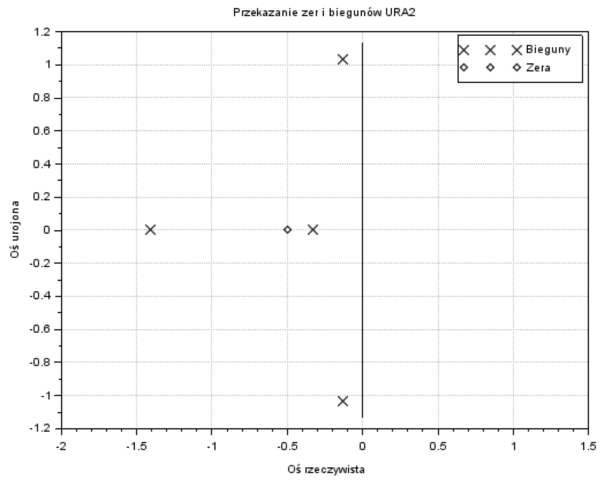
Odpowiedzi skokowe dla trzech układów zamkniętych:

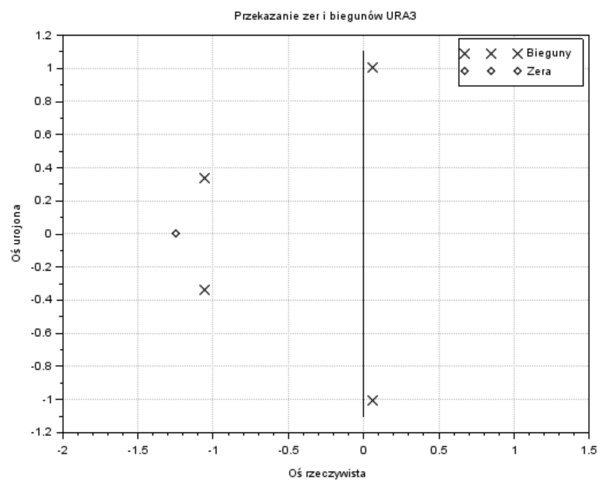


Rys. 9. Odpowiedzi skokowe dla trzech URA.

Położenie zer (o) i biegunów (x) dla trzech układów regulacji (URA1, URA2, URA3):







Rys. 10. Położenie zer i biegunów dla trzech URA.

6. Zadania do samodzielnego wykonania.

a. Dla URA z regulatorem rzeczywistym typu P $\left(G_r(s) = \frac{k_p}{T_1 s+1}\right)$, obiektem całkującym rzeczywistym $\left(G_{ob}(s) = \frac{k}{s(T_2 s+1)}\right)$ oraz idealnym czujnikiem pomiarowym, wyznaczyć zakresy parametrów k_p, k, T_1 i T_2, przy których URA będzie stabilny oraz będzie na granicy stabilności.

Proponowany sposób rozwiązania:

   i. wyznaczyć transmitancję układu otwartego,
   ii. wyznaczyć równanie charakterystyczne,
   iii. n=3, zatem zbadać wyznacznik drugiego stopnia (wg. kryterium Hurwitza) – wzajemna relacja stałych czasowych i współczynników wzmocnień wskaże zakresy parametrów.

b. Sprawdzić rozwiązania z wykorzystaniem Scilab:
   i. sprawdzić położenie biegunów,
   ii. sprawdzić charakterystyki Nyquista dla układów otwartych,
   iii. sprawdzić reakcję URA na pobudzenie impulsowe dla wyznaczonych zakresów parametrów (Scilab lub/i Xcos),
   iv. sprawdzić odpowiedzi skokowe dla URA.

Mariusz Nowak, Instytut Informatyki, PP, e-mail: Mariusz.Nowak@put.poznan.pl, http://www.cs.put.poznan.pl/mnowak