数 字 信 号 处 理

Digital Signal Processing

主讲人：陈后金
电子信息工程学院

有限字长效应

- 问题的提出
- 截尾和舍入量化效应
- 输入信号量化误差
- 滤波器系数量化误差
- 乘积运算量化误差

滤波器系数量化误差

因字长有限，滤波器系数a_n、b_m量化后将产生误差，导致：

- 系统的实际频响与所要求的系统频响出现偏差；
- 严重时，系统函数极点的改变，可能使IIR系统失去稳定。

※ FIR滤波器系数量化效应

※ IIR滤波器系数量化效应

FIR滤波器系数量化误差

$$H(z)=\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}$$

系数量化只影响零点，不涉及稳定性问题，但会影响频率响应。

量化后的系统函数变为：

$$\hat{H}(z)=\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}+\sum_{m=0}^{M} \Delta b_m z^{-m}=H(z)+E(z)$$

造成的频率响应误差$E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 为

$$\left|E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|=\left|\sum_{m=0}^{M} \Delta b_m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\Omega}\right| \le \sum_{m=0}^{M} \left|\Delta b_m\right|\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\Omega}\right| \le \sum_{m=0}^{M} \left|\Delta b_m\right|$$

FIR滤波器系数量化误差

采用舍入量化时，$|\Delta b_m| \le \dfrac{q}{2}$，因此

$$\left|E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right| \le \sum_{m=0}^{M} |\Delta b_m| \le \frac{(M+1)q}{2} = (M+1)2^{-(b+1)}$$

若限定了频响误差$E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$，则FIR数字滤波器的阶数$M$越大时，需要的字长$b$越大。工程实际中，在根据上式估计字长的基础上增加3~4位。

FIR滤波器系数量化误差

[例] 已知某FIR数字滤波器阶数M=28，要求其系数量化误差造成的频响误差不超过0.01，试确定所需的字长。

解： 根据 $\left|E(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right| \le (M+1)2^{-(b+1)}$

代入已知条件，得：

$$(28+1)2^{-(b+1)} \le 0.01$$

$$b \ge 10.50$$

因此所需字长至少为b=11位。

FIR滤波器系数量化误差

[例] 已知某线性相位FIR带通滤波器满足下列指标：

Ω_{s1}=0.2π rad, Ω_{p1}=0.3π rad, Ω_{p2}=0.6π rad, Ω_{s2}=0.7π rad, δ_p=0.1, δ_s=0.01

分别采用4位和10位量化滤波器系数，观察系统频率响应的变化。

```
Fs1=0.2;Fp1=0.3;Fp2=0.6;Fs2=0.7;
f=[Fs1 Fp1 Fp2 Fs2];a=[0 1 0];
Rp=0.1;Rs=0.01;dev=[Rs Rp Rs];
[M,fo,ao,w] = firpmord(f,a,dev);
h = firpm(M,fo,ao,w);
w=linspace(0.01,pi-0.01,1000);
mag=freqz(h,1,w);
plot(w/pi,20*log10(abs(mag)),'r');
```

```
% 系数量化
num_q1 = qt(h,4);
H = freqz(num_q1, 1, w);
hold on; plot(w/pi,20*log10(abs(H)),'g');
num_q2 = qt(h,10);
H = freqz(num_q2, 1, w);
hold on;
plot(w/pi,20*log10(abs(H)), 'b');
```

FIR滤波器系数量化误差

[例] 已知某线性相位FIR带通滤波器满足下列指标：

Ω_{s1}=0.2π rad, Ω_{p1}=0.3π rad, Ω_{p2}=0.6π rad, Ω_{s2}=0.7π rad, δ_p=0.1, δ_s=0.01

分别采用4位和10位量化滤波器系数，观察系统频率响应的变化。

- 未量化的滤波器系数(前10个数据)：

0.0009 0.0070 0.0194 –0.0361 –0.0617 0.0288 0.0573 –0.0013 0.0611 0.0360

- 采用4位量化后的滤波器系数(前10个数据)：

–0.0061 –0.0061 –0.0061 –0.0381 –0.0700 0.0258 0.0258 –0.0061 0.0578 0.0258

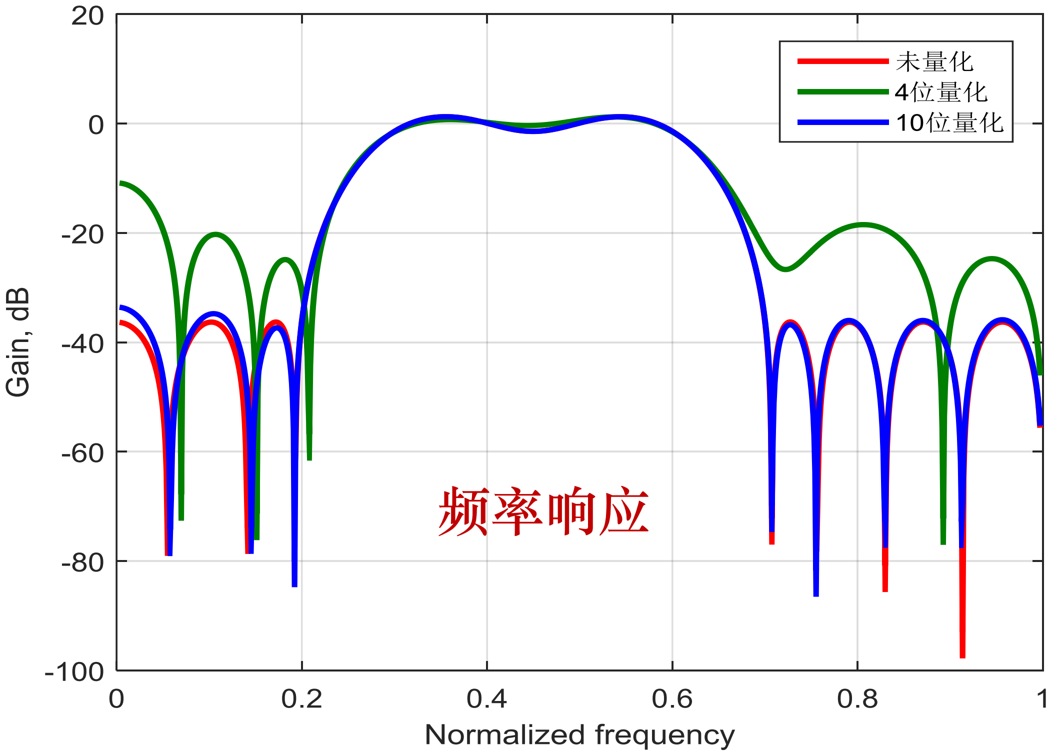
- 采用10位量化后的滤波器系数(前10个数据)：

0.0009 0.0069 0.0194 –0.0366 –0.0620 0.0283 0.0568 –0.0016 0.0608 0.0358

FIR滤波器系数量化误差

$\Omega_{p1}=0.3\pi$ rad
$\Omega_{p2}=0.6\pi$ rad
$\delta_p=0.1$

$\Omega_{s1}=0.2\pi$ rad
$\Omega_{s2}=0.7\pi$ rad
$\delta_s=0.01$



IIR滤波器系数量化误差

IIR滤波器系数量化误差对极点位置的影响

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1+\sum_{n=1}^{N}a_n z^{-n}}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{\prod_{r=1}^{N}(1-p_r z^{-1})}$$

系数a_n量化后的值： $\hat{a}_n=a_n+\Delta a_n,\quad n=1,\cdots,N$

极点p_r量化后的值： $\hat{p}_r=p_r+\Delta p_r,\quad r=1,\cdots,N$

IIR滤波器系数量化误差

IIR滤波器系数量化误差对极点位置的影响

极点p_r量化后的值：$\hat{p}_r = p_r + \Delta p_r,\quad r = 1,\cdots,N$

极点量化误差

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial p_r}{\partial a_n} \Delta a_n$$

第r个极点对第n个系数a_n量化的敏感度

$\partial p_r / \partial a_n$越大，$\Delta a_n$对$\Delta p_r$的影响越大，反之亦然。

IIR滤波器系数量化误差

极点位置敏感度的表达式为

$$D(z)=1+\sum_{n=1}^{N}a_n z^{-n}=\prod_{r=1}^{N}(1-p_r z^{-1})$$

$$\left.\frac{\partial p_r}{\partial a_n}\right|_{z=p_r}=\frac{\left.\dfrac{\partial D(z)}{\partial a_n}\right|_{z=p_r}}{\left.\dfrac{\partial D(z)}{\partial p_r}\right|_{z=p_r}}\frac{p_r^{-n}}{-p_r^{-1}\prod\limits_{\substack{l=1\\l\neq r}}^{N}(1-p_l p_r^{-1})}=\frac{-p_r^{N-n}}{\prod\limits_{\substack{l=1\\l\neq r}}^{N}(p_r-p_l)}$$

- 极点彼此间距离越远，极点位置敏感度就越低；极点彼此越密集，极点位置敏感度就越高。
- 在并联结构和级联结构中，每个子系统最多只有两个共轭极点，故量化影响较小。

IIR滤波器系数量化误差

[例] 设计满足如下指标的BW型带阻滤波器，并采用直接型结构实现，试分别采用4位、8位和12位对系数进行量化，观察滤波器的频率响应和零极点的变化。

$$\Omega_{p1}=0.45\pi\ \text{rad},\quad \Omega_{p2}=0.72\pi\ \text{rad},\quad A_p\le 1\text{dB}\ ,$$

$$\Omega_{s1}=0.52\pi\ \text{rad},\quad \Omega_{s2}=0.62\pi\ \text{rad},\quad A_s\ge 20\text{dB}$$

IIR滤波器系数量化误差

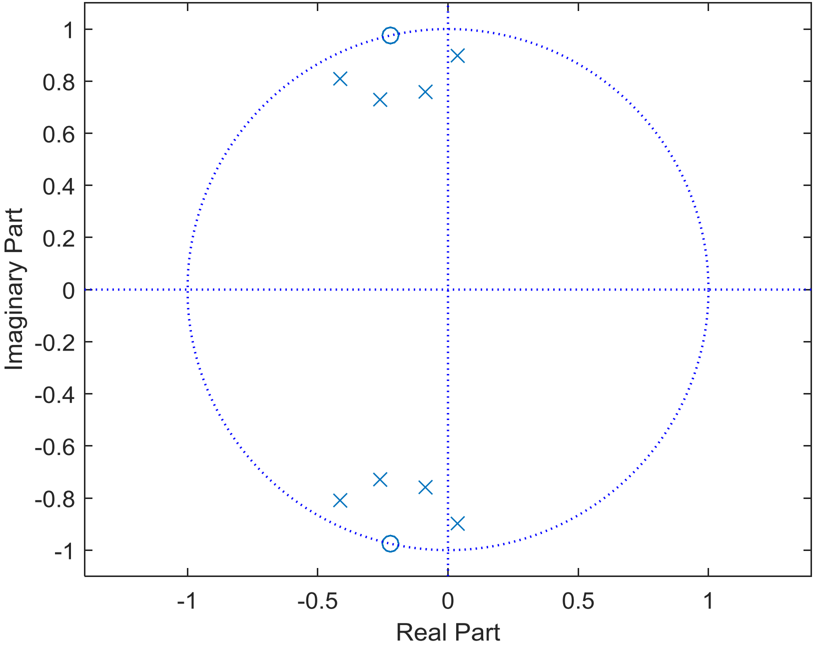
未量化的滤波器系数：

0.4832	0.8537	2.4983	2.7277	4.0487	2.7277	2.4983	0.8537	0.4832	分子b_i
1.4521	3.3737	3.0764	3.7549	2.1484	1.6497	0.4860	0.2335		分母a_i

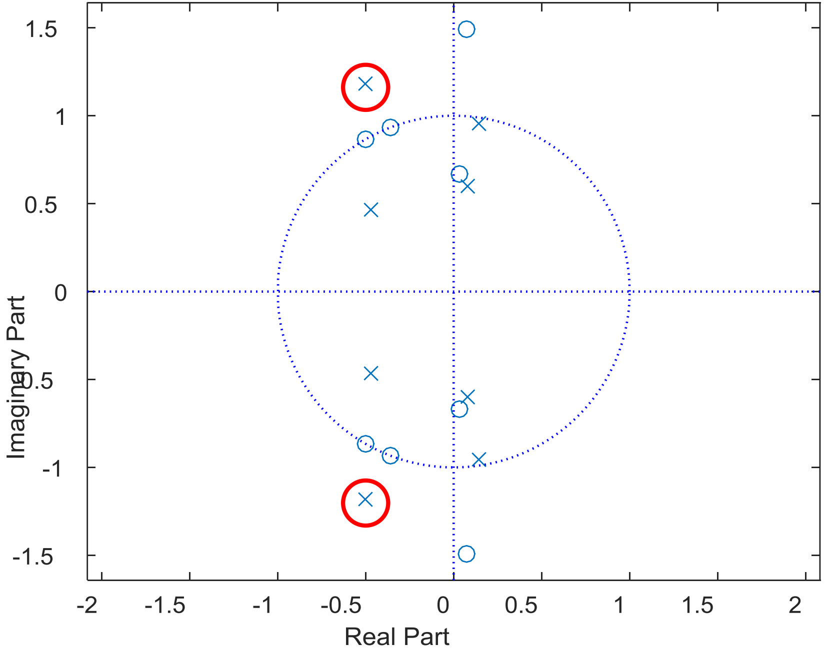
采用4位量化后的滤波器系数：

0.4719	0.7104	2.3796	2.6180	4.0487	2.6180	2.3796	0.7104	0.4719	分子b_i
1.4257	3.3334	2.8565	3.5718	2.1411	1.4257	0.4719	0.2335		分母a_i

IIR滤波器系数量化误差



未量化



4位量化 不稳定系统

IIR滤波器系数量化误差

未量化的滤波器系数：

0.4832	0.8537	2.4983	2.7277	4.0487	2.7277	2.4983	0.8537	0.4832	分子b_i
1.4521	3.3737	3.0764	3.7549	2.1484	1.6497	0.4860	0.2335		分母a_i

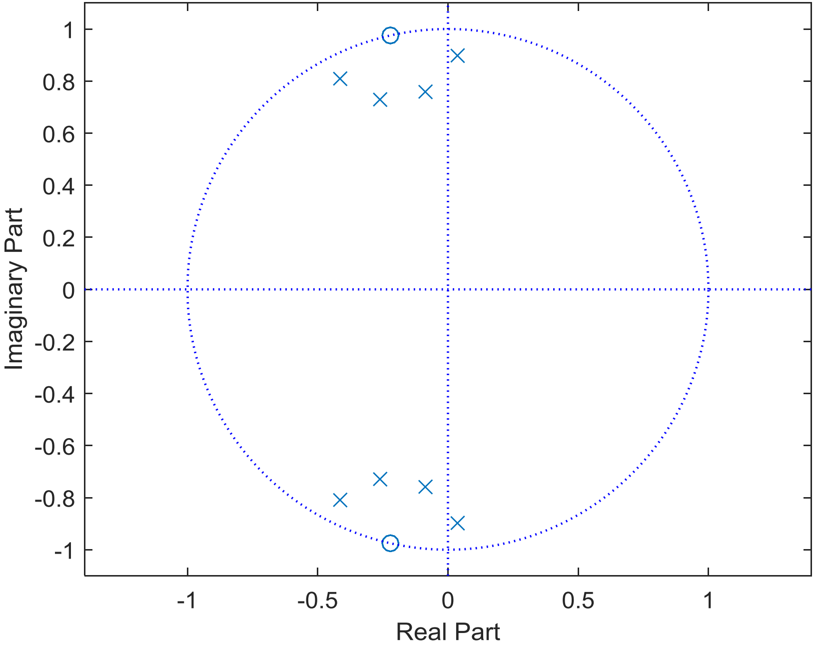
采用8位量化后的滤波器系数：

0.4719	0.8445	2.4839	2.7223	4.0487	2.7223	2.4839	0.8445	0.4719	分子b_i
1.4406	3.3632	3.0651	3.7507	2.1411	1.6493	0.4719	0.2335		分母a_i

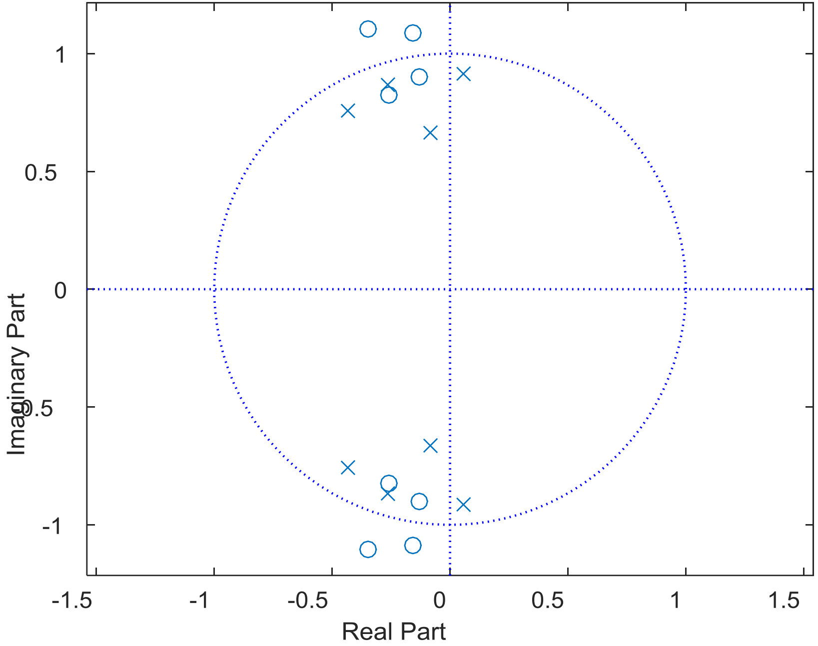
采用12位量化后的滤波器系数：

0.4831	0.8529	2.4979	2.7270	4.0487	2.7270	2.4979	0.8529	0.4831	分子b_i
1.4518	3.3734	3.0763	3.7544	2.1476	1.6493	0.4859	0.2335		分母a_i

IIR滤波器系数量化误差

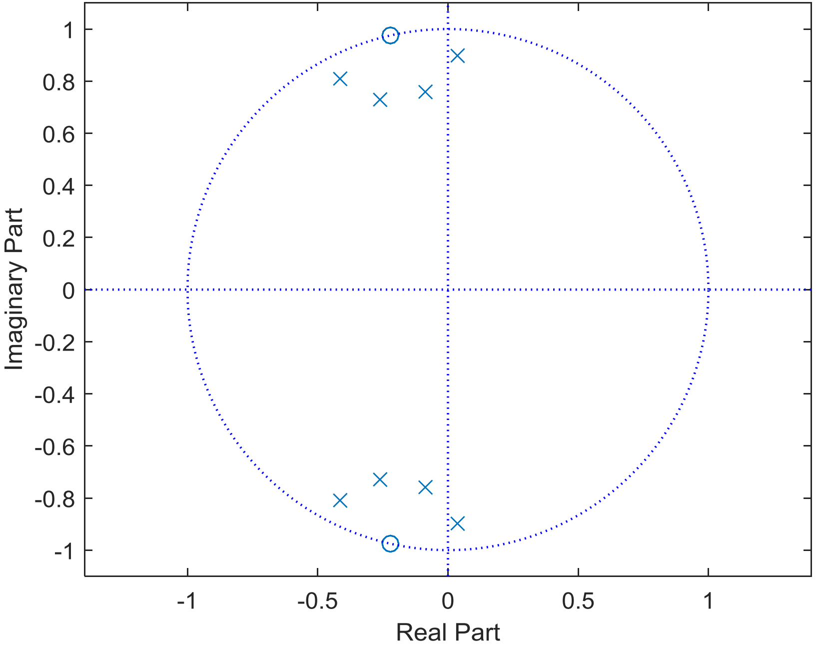


未量化

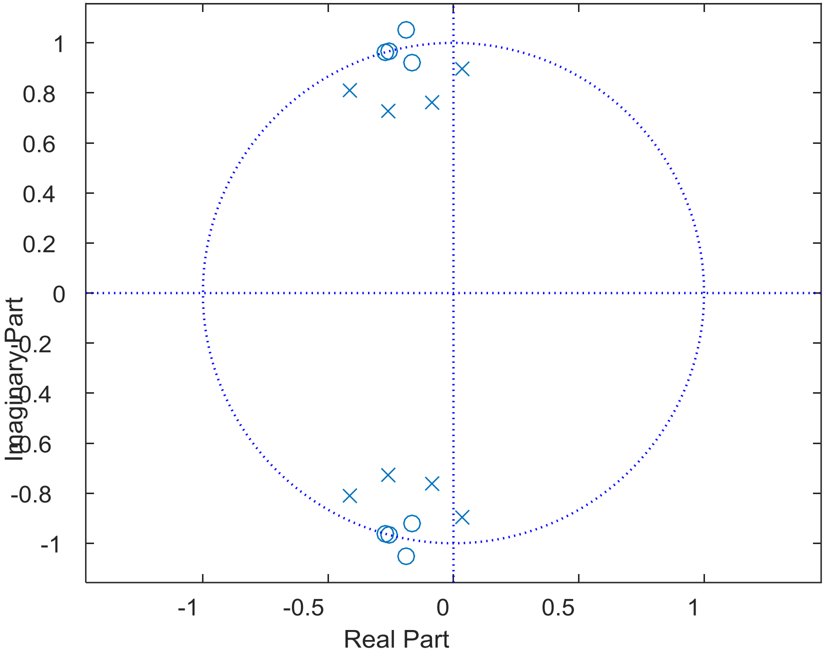


8位量化

IIR滤波器系数量化误差



未量化

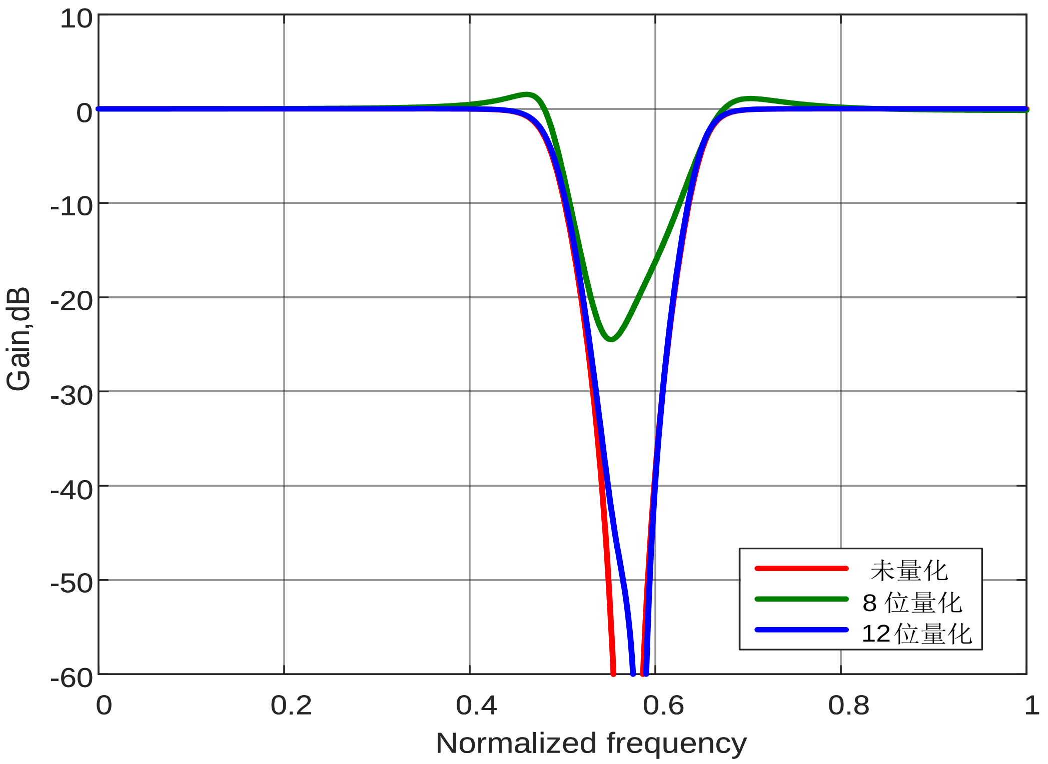


12位量化

IIR滤波器系数量化误差

Ω_{p1} =0.45π rad
Ω_{p2} =0.72π rad
A_p≤1dB

Ω_{s1} =0.52π rad
Ω_{s2} =0.62π rad
A_s ≥20dB



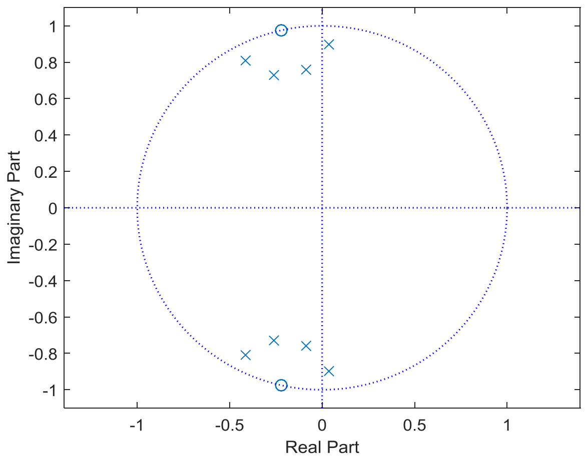
IIR滤波器系数量化误差

[例] 设计满足如下指标的BW型带阻滤波器，若采用二阶节级联型结构实现该滤波器，其系数量化仍采用8位字长，比较其与直接型结构对滤波器的频率响应和零极点的影响。

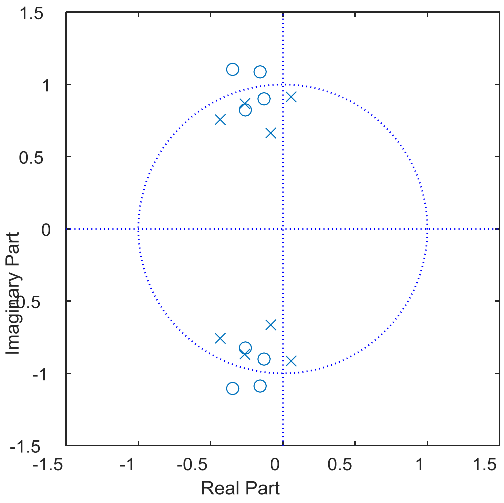
$$\Omega_{p1} = 0.45\pi \text{ rad}, \quad \Omega_{p2} = 0.72\pi \text{ rad}, \quad A_p \le 1\text{dB},$$

$$\Omega_{s1} = 0.52\pi \text{ rad}, \quad \Omega_{s2} = 0.62\pi \text{ rad}, \quad A_s \ge 20\text{dB}$$

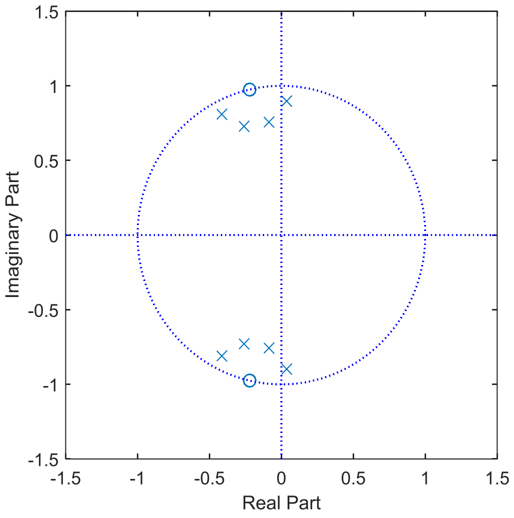
IIR滤波器系数量化误差



直接型（未量化）



直接型（8位量化）



级联型（8位量化）

IIR滤波器系数量化误差

Ω_{p1} =0.45π rad

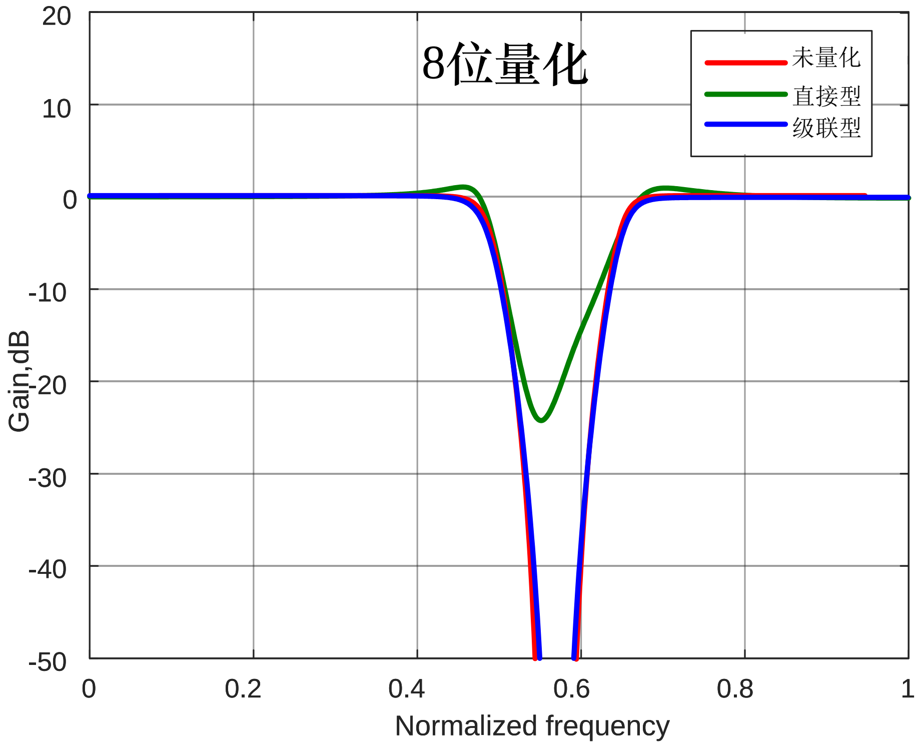
Ω_{p2} =0.72π rad

$A_p \leq 1$dB

Ω_{s1} =0.52π rad

Ω_{s2} =0.62π rad

$A_s \geq 20$dB



谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！