北京交通大學

数字信号处理

Digital Signal Processing

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

频率取样法设计线性相位FIR滤波器

- 设计原理
- 设计方法
- 方法改进

频率取样法设计线性相位FIR滤波器

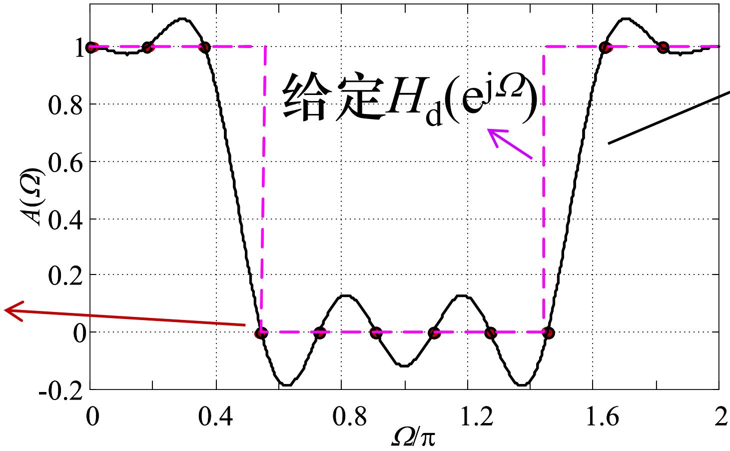
- 设计原理
- 设计方法
- 方法改进

设计原理

窗函数法：　基于时域的逼近

频率取样法：基于频域的逼近

使所设计的M阶FIR滤波器的频率响应$H(e^{j\Omega})$在M+1个取样点$\{\Omega_m;\ m=0,1,\dots,M\}$上与所给定数字滤波器的频率响应$H_d(e^{j\Omega})$相等。



M+1个取样点

设计所得M阶FIR DF 的$H(e^{j\Omega})$

$$H(e^{j\Omega_m}) = H_d(e^{j\Omega_m})$$

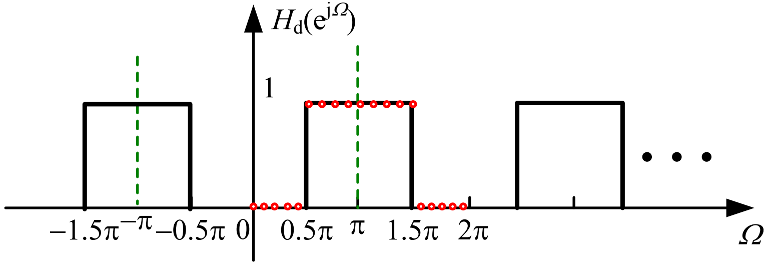
$$\Omega_m = \frac{2\pi}{M+1}m, \quad m=0,1,\cdots$$

设计原理

FIR数字滤波器设计的目标是求出其单位脉冲响应$h[k]$

如何求出满足$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_m}) = H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_m})$，且具有线性相位滤波器的$h[k]$?

因为 $H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{k=0}^{M} h[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega}$



若 $\Omega_m = \dfrac{2\pi}{M+1}m, \quad m = 0,1,\cdots$

则有 $H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_m}) = H_{\mathrm{d}}[m] = \sum_{k=0}^{M} h[k]W_{M+1}^{mk}$

M+1点DFT

$$W_{M+1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{M+1}}$$

设计原理

如何求出满足 $H(e^{j\Omega_m}) = H_d(e^{j\Omega_m})$，且具有线性相位滤波器的$h[k]$?

$$H_d[m] = \sum_{k=0}^{M} h[k] W_{M+1}^{mk} = \mathrm{DFT}\{h[k]\} \Longrightarrow \boxed{h[k] = \mathrm{IDFT}\{H_d[m]\}}$$

若要保证所设计的滤波器具有线性相位，则

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{j(-0.5M\Omega+\beta)} A_d(\Omega) \qquad (\beta = 0\text{或}\pi/2)$$

即 $$H_d[m] = H_d(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{M+1}m} = e^{j\beta} e^{-j\frac{M}{M+1}m\pi} A_d\left(\frac{2\pi m}{M+1}\right)$$

$A_d[m]$

频率取样法设计线性相位FIR滤波器

- 设计原理
- 设计方法
- 方法改进

设计方法

1．由$H_\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$确定FIR DF的类型和幅度函数$A_\mathrm{d}(\Omega)$

2．根据类型确定线性相位FIR滤波器的相位$\varphi_\mathrm{d}(\Omega)$

$$\varphi_\mathrm{d}(\Omega)=-0.5M\Omega+\beta \qquad (\beta=0 \text{ 或 } \pi/2)$$

3．确定$A_\mathrm{d}(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{d}(\Omega)}$在$\Omega\in[0,2\pi)$区间上的$M+1$个取样点的值$H_\mathrm{d}[m]$

$$H_\mathrm{d}[m]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{M\pi}{M+1}m}A_\mathrm{d}\left(\frac{2\pi}{M+1}m\right)$$

4．对$H_\mathrm{d}[m]$做$M+1$点IDFT，得到有限长因果序列$h[k]$

$$h[k]=\mathrm{IDFT}(H_\mathrm{d}[m])$$

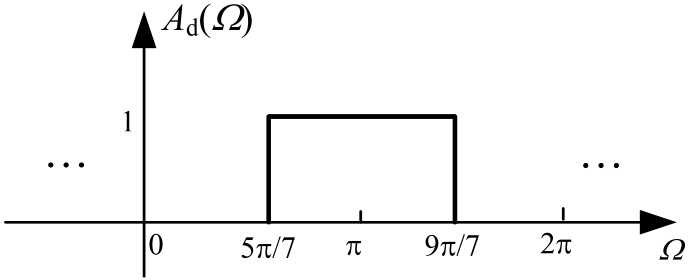
例：利用频率取样法设计幅度响应能逼近截止频率$\Omega_c=5\pi/7$ rad的高通滤波器$H_d(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器，阶数M=6。

解： (1) 由$H_d(e^{j\Omega})$确定线性相位FIR滤波器类型：

高通滤波器可用I型或IV型，本题选用I型

由$H_d(e^{j\Omega})$确定幅度函数$A_d(\Omega)$：

$$A_d(\Omega)=\begin{cases}1, & 5\pi/7\le|\Omega|\le\pi \\ 0 & \text{others}\end{cases}$$



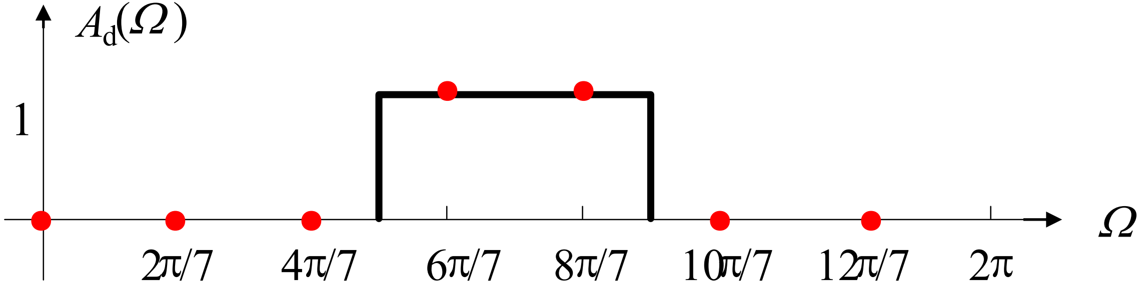
(2) 根据类型确定线性相位FIR滤波器的相位$\varphi_d(\Omega)$：

I型线性相位的$\varphi_d(\Omega)$为 $\varphi_d(\Omega)=-0.5M\Omega=-3\Omega$

例：利用频率取样法设计幅度响应能逼近截止频率$\Omega_c=5\pi/7$ rad的高通滤波器$H_d(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器，阶数M=6。

(3) 确定$H_d(e^{j\Omega})$在$\Omega\in[0,2\pi)$区间上的6+1=7个取样点的值$H_d[m]$

$$H_d[m]=e^{-j3\Omega}A_d(\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{7}m}=e^{-j\frac{6\pi}{7}m}A_d[m]=[0,\ 0,\ 0,\ e^{-j18\pi/7},e^{-j24\pi/7},0,\ 0]$$

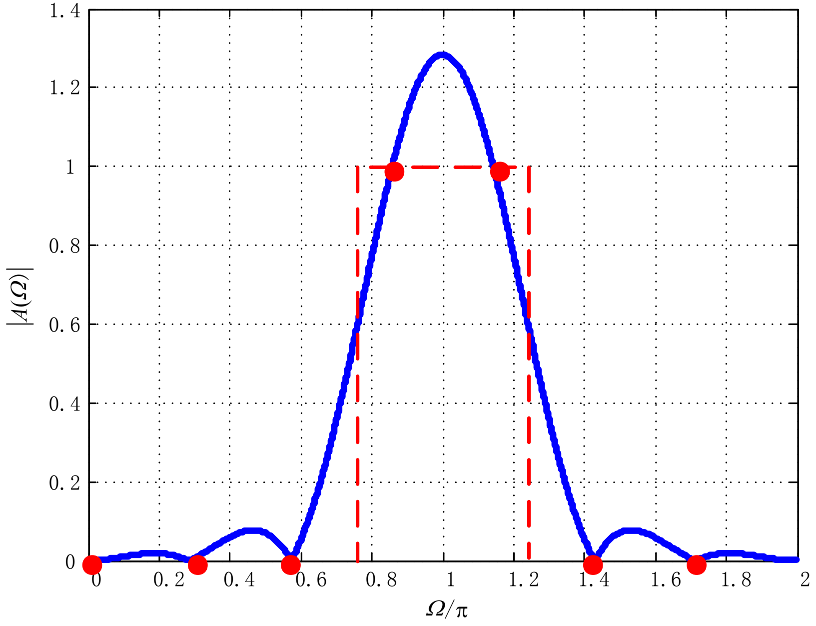


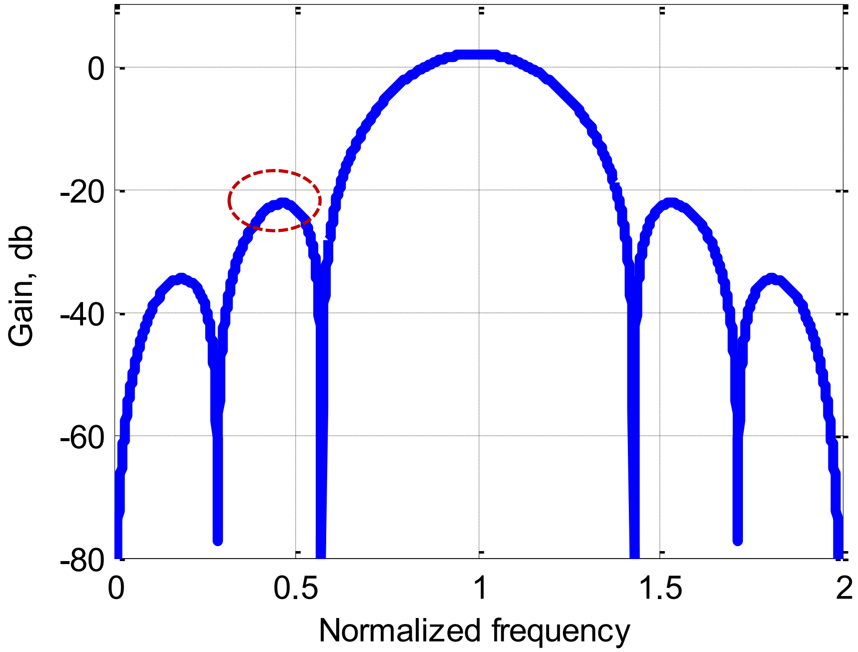
(4) 求出单位脉冲序列： $h[k]=\text{IDFT}(H_d[m])=\dfrac{2}{7}\cos\left[\dfrac{6\pi}{7}[k-3]\right]$

例：利用频率取样法设计幅度响应能逼近截止频率$\Omega_c=5\pi/7$ rad的高通滤波器$H_d(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器，阶数$M=6$。

设计结果

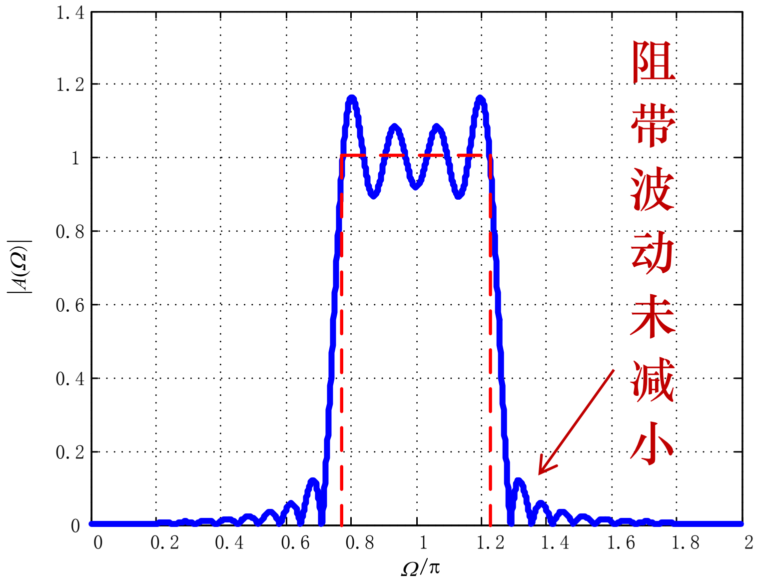
$M=6,\ A_s=22.2\text{dB}$

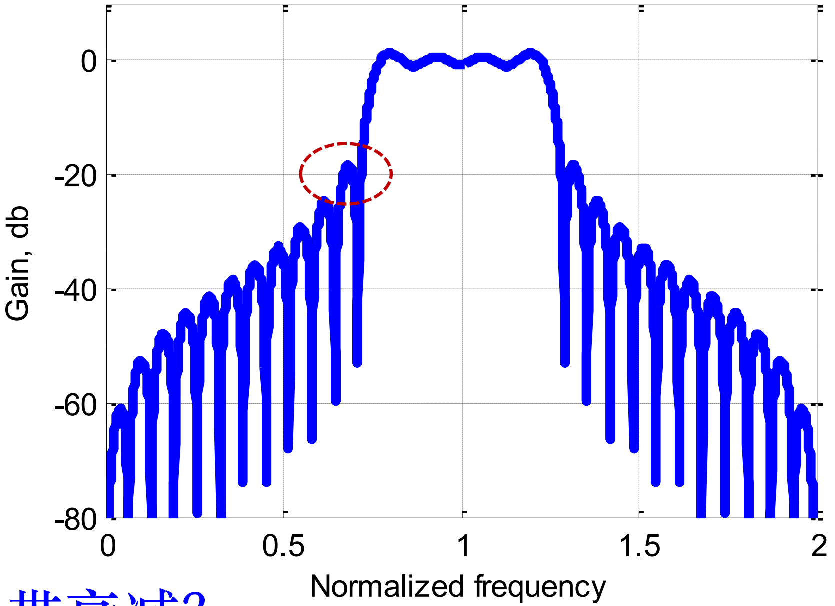




例：利用频率取样法设计幅度响应能逼近截止频率$\Omega_c=5\pi/7$ rad的高通滤波器$H_d(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器，阶数$M=6$。

设计结果　增加滤波器的阶数，取$M=30$，　$A_s=18.3$dB，阻带衰减并未提高





如何提高阻带衰减?

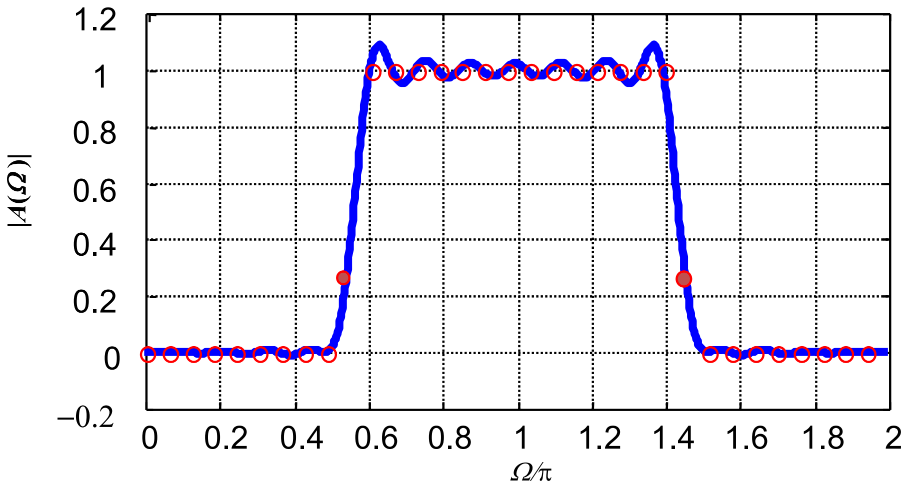
频率取样法设计线性相位FIR滤波器

- 设计原理
- 设计方法
- 方法改进

方法改进

原因分析： 增加滤波器的阶数不能提高所设计滤波器的阻带衰减的原因是，从通带到阻带所给定的样本点发生了从0到1的跳变。

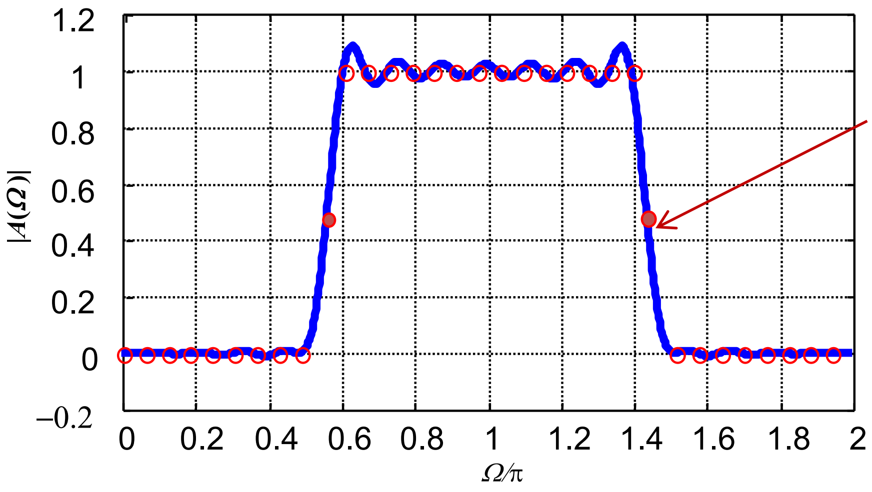
改进方法： 为改善滤波器的幅度特性，提高阻带衰减，可在过渡带[Ω_p，Ω_s]之间设置幅度在0和1之间的过渡点 。



方法改进

例：利用频率取样法设计幅度响应能逼近截止频率$\Omega_c=5\pi/7$rad的高通滤波器$H_d(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器，阶数M=30。试通过在过渡带[Ω_p，Ω_s]之间设置幅度在0和1之间的过渡点 提高阻带衰减。

解： 在过渡带[Ω_p，Ω_s]之间设置1个过渡点

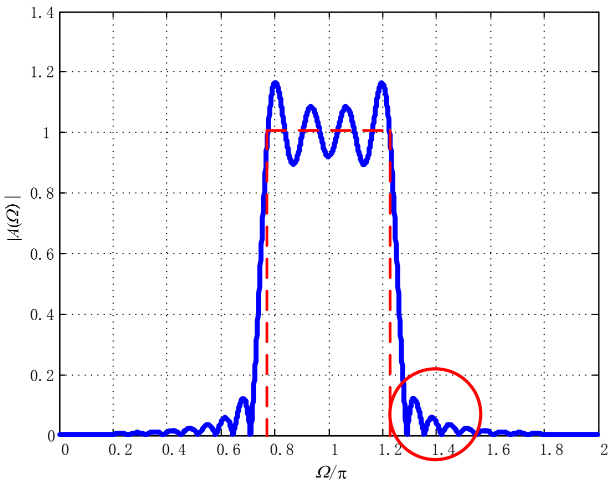


幅度值分别取

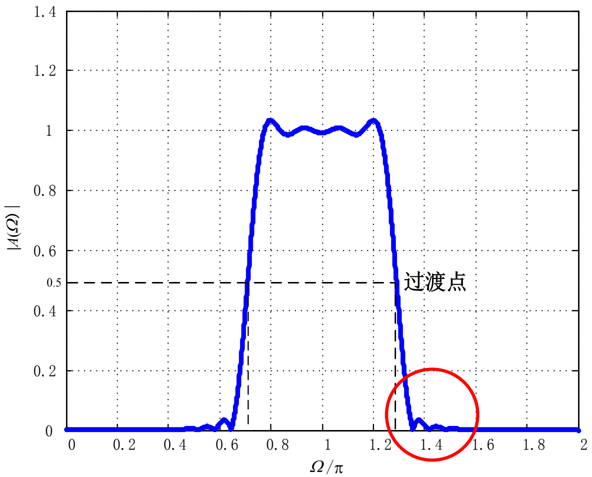
0.5, 0.38, 0.28, 0.18

方法改进

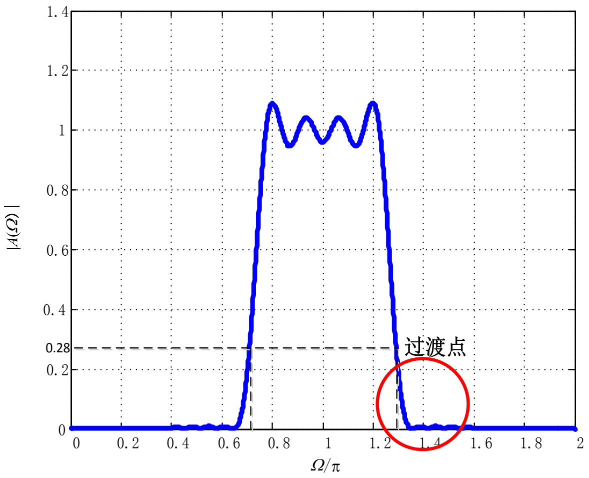
结果比较



无过渡点



过渡点值 0.5

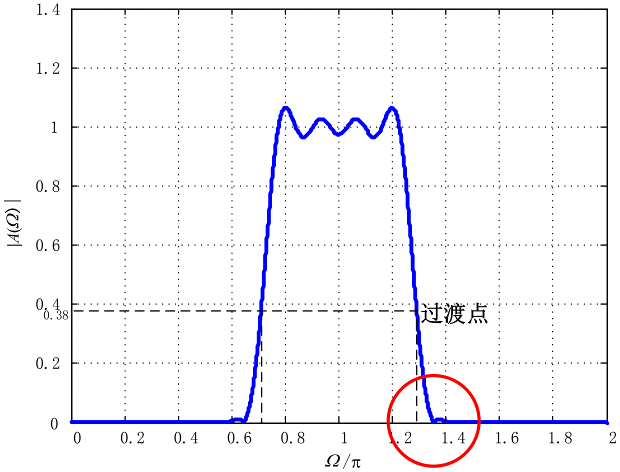


过渡点值 0.28

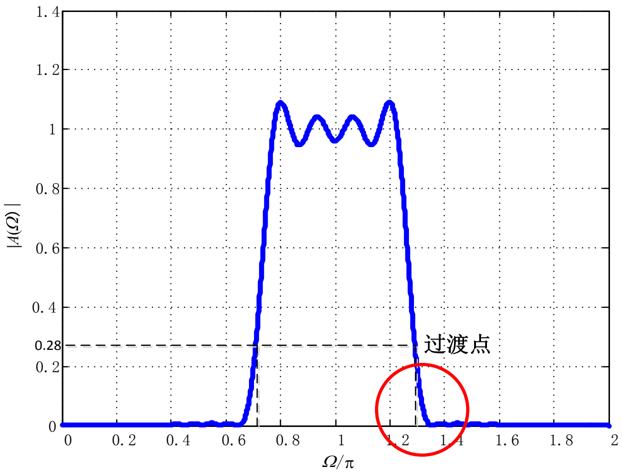
增加过渡点可减小旁瓣波动，过渡点值为0.28时旁瓣波动较小

方法改进

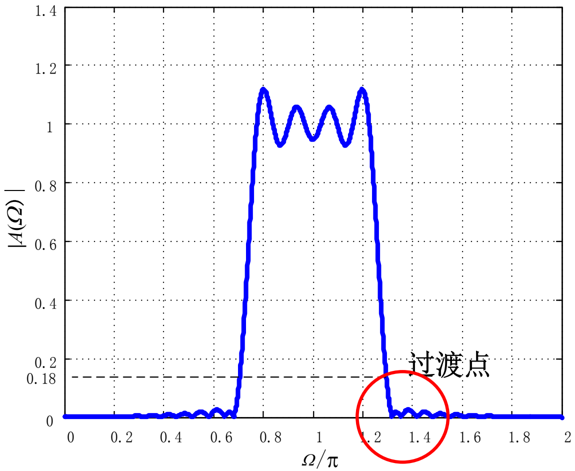
结果比较



过渡点值 0.38



过渡点值0.28

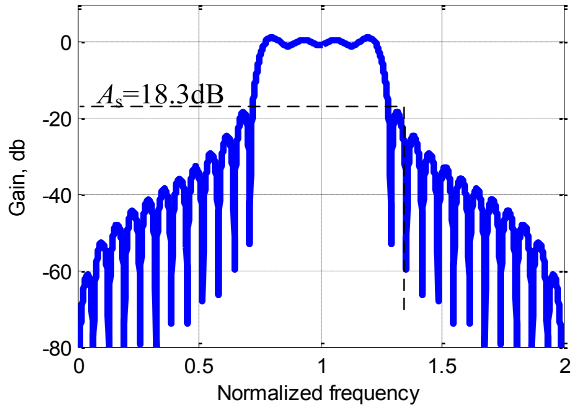


过渡点值 0.18

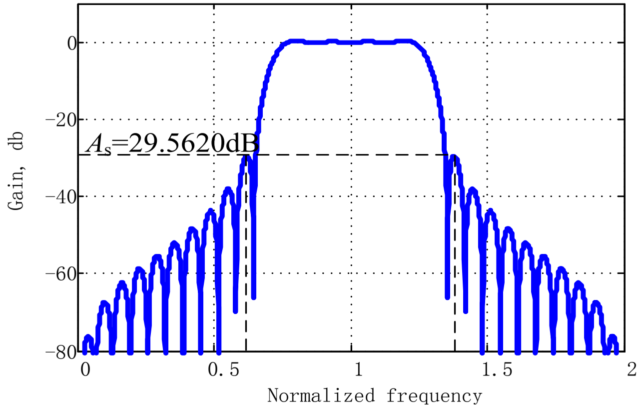
增加过渡点可减小旁瓣波动，过渡点值为0.28时旁瓣波动较小

方法改进

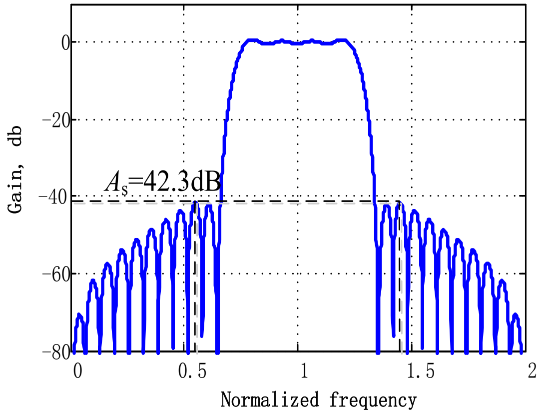
结果比较



无过渡点



过渡点值 0.5

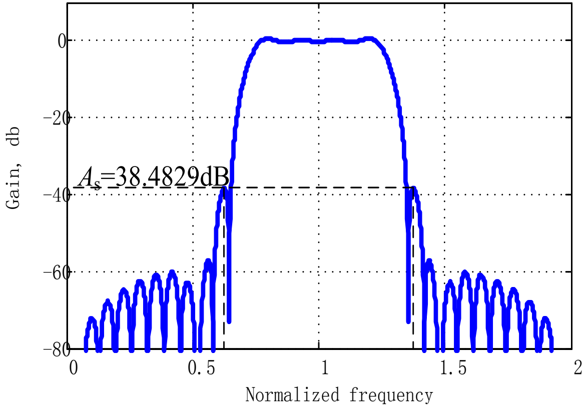


过渡点值0.28

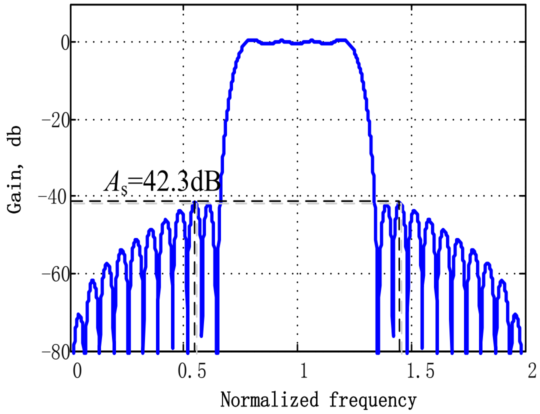
增加过渡点可提高阻带衰减，过渡点值为0.28时阻带衰减较大

方法改进

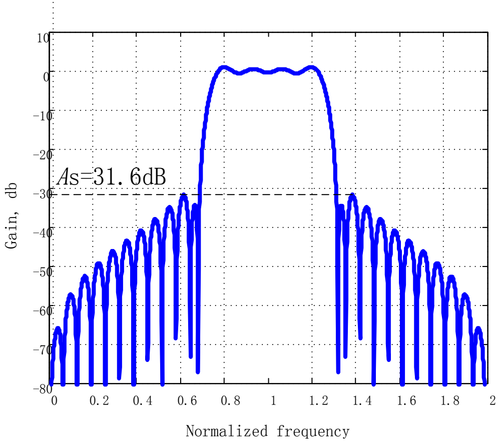
如何获得过渡点的最优值?



过渡点值 0.38



过渡点值0.28



过渡点值 0.18

增加过渡点可提高阻带衰减，过渡点值为0.28时阻带衰减较大

方法改进

可通过以下几个方法寻找过渡点最优值:

1. 遗传算法（Genetic Algorithm, GA）

使用Matlab集成的GA函数, 应用插值函数写出滤波器频域表达式（包含过渡点值），查找阻带最大值，优化目标使其最大值最小。

2. MATLA提供的优化函数：fmincon，fminimax

适用于局部优化，所以当给定的初值不同时，两个函数得到的值也会不同，需要进行校验。

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!