数字信号处理

Digital Signal Processing

主讲人：李艳凤

电子信息工程学院

试用矩形窗函数法设计线性相位FIR低通数字滤波器，其在$\Omega\in[0,2\pi)$内的幅度响应逼近

$$\left|H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right| = \begin{cases} 0 & \Omega_{\mathrm{c}} \le \Omega < 2\pi - \Omega_{\mathrm{c}} \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

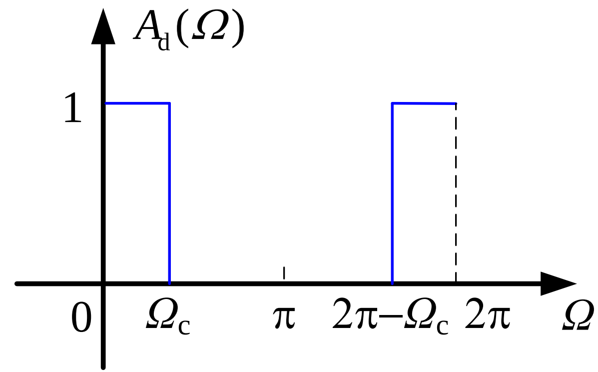
(1) 若选用I型线性相位系统，试确定$h[k]$；

(2) 若选用II型线性相位系统，试确定$h[k]$。

(1) 若选用I型线性相位系统，试确定$h[k]$

解：I型线性相位系统的幅度函数$A(\Omega)$关于$\Omega=\pi$偶对称

$$\left|H_d(e^{j\Omega})\right| = \begin{cases} 0 & \Omega_c \le \Omega < 2\pi - \Omega_c \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$



$$A_d(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le \Omega < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c \le \Omega < 2\pi - \Omega_c \\ 1 & 2\pi - \Omega_c \le \Omega < 2\pi \end{cases}$$

$$\varphi_d(\Omega) = -\frac{M}{2}\Omega$$

(1) 若选用I型线性相位系统，试确定$h[k]$

解：根据$A_{\mathrm{d}}(\Omega)$和$\varphi_{\mathrm{d}}(\Omega)$构建$H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$，通过IDTFT求解$h_{\mathrm{d}}[k]$

$$h_{\mathrm{d}}[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\boxed{A_{\mathrm{d}}(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{d}}(\Omega)}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega}\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2\pi}\{\int_{0}^{\Omega_{\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5M\Omega}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega}\mathrm{d}\Omega+\int_{2\pi-\Omega_{\mathrm{c}}}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5M\Omega}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega}\mathrm{d}\Omega\}$$

当$k\neq0.5M$时

$$h_{\mathrm{d}}[k]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}(k-0.5M)}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-0.5M)\Omega_{\mathrm{c}}}-1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-0.5M)2\pi}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-0.5M)(2\pi-\Omega_{\mathrm{c}})}]$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}(k-0.5M)}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-0.5M)\Omega_{\mathrm{c}}}-1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kM\pi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kM\pi}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k-0.5M)\Omega_{\mathrm{c}}}]$$

M为偶数

$$=\frac{\Omega_{\mathrm{c}}}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_{\mathrm{c}}(k-0.5M)]$$

(1) 若选用I型线性相位系统，试确定$h[k]$

解：
$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\{\int_0^{\Omega_c} e^{-j0.5M\Omega}\cdot e^{jk\Omega}d\Omega+\int_{2\pi-\Omega_c}^{2\pi} e^{-j0.5M\Omega}\cdot e^{jk\Omega}d\Omega\}$$

当$k\neq 0.5M$时
$$h_d[k]=\frac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_c(k-0.5M)]$$

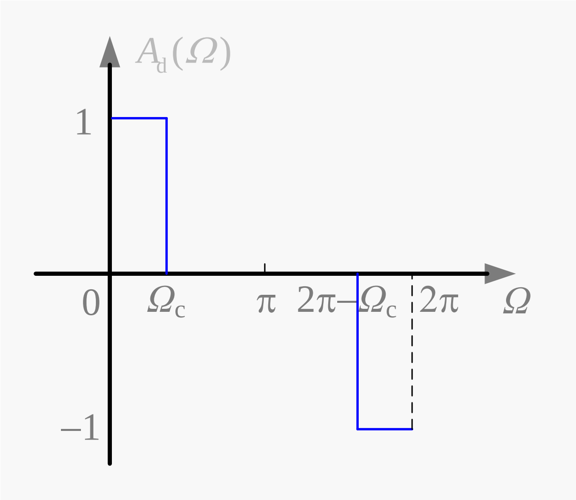
当$k=0.5M$时
$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\{\int_0^{\Omega_c} e^{-j0.5M\Omega}\cdot e^{j0.5M\Omega}d\Omega+\int_{2\pi-\Omega_c}^{2\pi} e^{-j0.5M\Omega}\cdot e^{j0.5M\Omega}d\Omega\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\{\int_0^{\Omega_c} 1\cdot d\Omega+\int_{2\pi-\Omega_c}^{2\pi} 1\cdot d\Omega\}=\frac{\Omega_c}{\pi}$$

$$h_d[k]=\frac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_c(k-0.5M)]$$

加窗截短$h_d[k]$，得到$h[k]=h_d[k]w_N[k]$，N为奇数

(2) 若选用II型线性相位系统，试确定$h[k]$

解：II型线性相位系统的幅度函数$A(\Omega)$关于$\Omega=\pi$奇对称



$$\left|H_d(e^{j\Omega})\right| = \begin{cases} 0 & \Omega_c \le \Omega < 2\pi - \Omega_c \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

$$A_d(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le \Omega < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c \le \Omega < 2\pi - \Omega_c \\ -1 & 2\pi - \Omega_c \le \Omega < 2\pi \end{cases}$$

$$\varphi_d(\Omega) = -\frac{M}{2}\Omega$$

(2) 若选用II型线性相位系统，试确定$h[k]$

解：根据$A_d(\Omega)$和$\varphi_d(\Omega)$构建$H_d(e^{j\Omega})$，通过IDTFT求解$h_d[k]$

$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}\ e^{jk\Omega}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\{\int_0^{\Omega_c}e^{-j0.5M\Omega}\cdot e^{jk\Omega}d\Omega+\int_{2\pi-\Omega_c}^{2\pi}-1\cdot e^{-j0.5M\Omega}\cdot e^{jk\Omega}d\Omega\}$$

$$=\frac{1}{2\pi j(k-0.5M)}[e^{j(k-0.5M)\Omega_c}-1-e^{j(k-0.5M)2\pi}+e^{j(k-0.5M)(2\pi-\Omega_c)}]$$

$$=\frac{1}{2\pi j(k-0.5M)}[e^{j(k-0.5M)\Omega_c}-1-e^{-jkM\pi}+e^{-jkM\pi}\cdot e^{-j(k-0.5M)\Omega_c}]\quad M\text{为奇数}$$

$$h_d[k]=\frac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_c(k-0.5M)]$$

加窗截短$h_d[k]$，得到$h[k]=h_d[k]w_N[k]$，N为偶数

试用矩形窗函数法设计线性相位FIR低通数字滤波器，其在$\Omega\in[0,2\pi)$内的幅度响应逼近

$$\left|H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right|=\begin{cases}0 & \Omega_{\mathrm{c}}\le\Omega<2\pi-\Omega_{\mathrm{c}}\\ 1 & \text{其他}\end{cases}$$

I型：M=62　　II型：M=63

选用I型线性相位系统

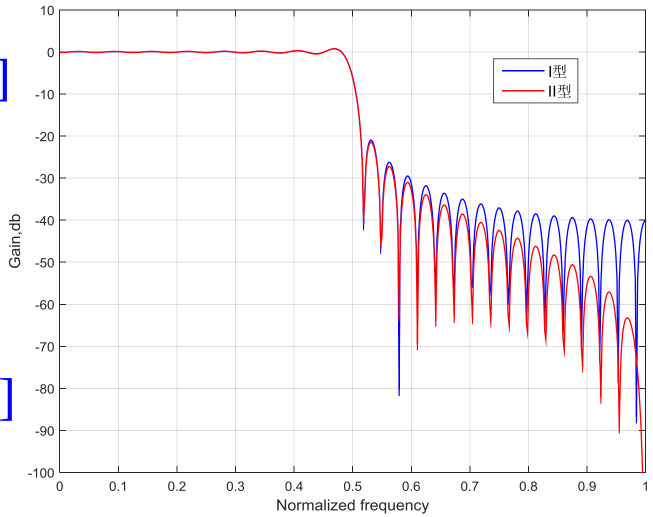
$$A_{\mathrm{d}}(\Omega)=\begin{cases}1 & 0\le\Omega<\Omega_{\mathrm{c}}\\ 0 & \Omega_{\mathrm{c}}\le\Omega<2\pi-\Omega_{\mathrm{c}}\\ 1 & 2\pi-\Omega_{\mathrm{c}}\le\Omega<2\pi\end{cases}$$

$$h_{\mathrm{d}}[k]=\frac{\Omega_{\mathrm{c}}}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_{\mathrm{c}}(k-0.5M)]$$

选用II型线性相位系统

$$A_{\mathrm{d}}(\Omega)=\begin{cases}1 & 0\le\Omega<\Omega_{\mathrm{c}}\\ 0 & \Omega_{\mathrm{c}}\le\Omega<2\pi-\Omega_{\mathrm{c}}\\ -1 & 2\pi-\Omega_{\mathrm{c}}\le\Omega<2\pi\end{cases}$$

$$h_{\mathrm{d}}[k]=\frac{\Omega_{\mathrm{c}}}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_{\mathrm{c}}(k-0.5M)]$$



谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢!