北京交通大學

数 字 信 号 处 理

Digital Signal Processing

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

有限字长效应

- 问题的提出
- 截尾和舍入量化效应
- 输入信号量化误差
- 滤波器系数量化误差
- 乘积运算量化误差

乘积运算量化误差

- FIR系统乘积量化误差的统计分析
- IIR系统乘积量化误差的统计分析
- IIR系统极限环振荡现象

乘积运算量化误差

乘积量化误差用噪声源$e_i[k]$表示，对其做如下假设：

（1）各噪声源均为白噪声序列；

（2）各噪声源统计独立，互不相关；

（3）在量化噪声范围内，各噪声源都视为等概率密度分布。

乘积量化噪声源方差：$$\sigma^2=\frac{q^2}{12}=\frac{2^{-2b}}{12}$$

FIR系统乘积量化误差的统计分析

M阶FIR系统的差分方程为：

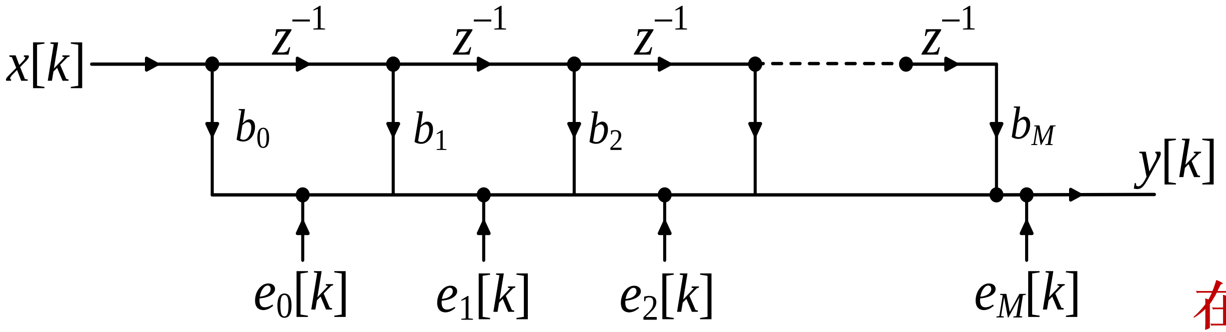
$$y[k]=\sum_{m=0}^{M}b_m x[k-m]$$

对FIR系统中M+1个乘积项进行量化处理

$$\hat{y}[k]=\sum_{m=0}^{M}\{b_m x[k-m]+e_m[k]\}=y[k]+\sum_{m=0}^{M}e_m[k]$$

FIR系统乘积量化误差的统计分析

FIR直接型结构乘积量化误差噪声源模型



在直接型FIR结构中，所有的噪声直接加在输出端

由乘积量化噪声产生的输出噪声方差

$$\sigma_o^2 = (M+1)\sigma^2 = \frac{(M+1)}{12} q^2$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

IIR DF的差分方程为

$$y[k]=\sum_{m=0}^{M} b_m x[k-m]-\sum_{n=1}^{N} a_n y[k-n]$$

对上式M+1+N个乘积项作量化处理

$$\hat{y}[k]=\sum_{m=0}^{M}\{b_m x[k-m]+e_m[k]\}-\sum_{n=1}^{N}\{a_n y[k-n]+e_n[k]\}$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

[例] 已知某IIR 数字滤波器的系统函数为

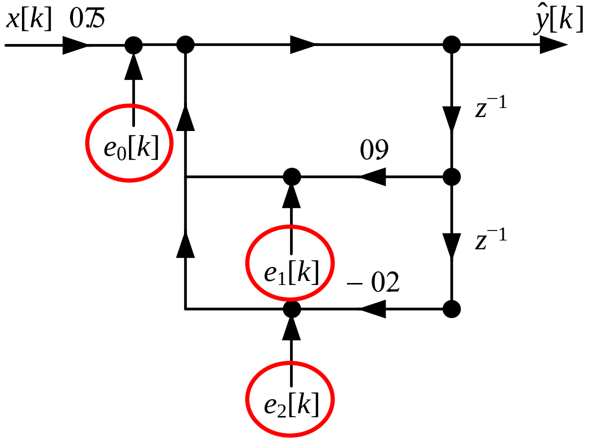
$$H(z)=\frac{0.75}{(1-0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})}$$

试分别计算直接型、级联型和并联型结构下，由乘法量化产生的输出噪声方差。

IIR系统乘积量化误差的统计分析

解：直接型结构

$$H(z)=\frac{0.75}{(1-0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})}=\frac{0.75}{1-0.9z^{-1}+0.2z^{-2}}$$



量化误差e[k]通过的系统为

$$H_\mathrm{e}(z)=\frac{1}{1-0.9z^{-1}+0.2z^{-2}}=\frac{5}{1-0.5z^{-1}}-\frac{4}{1-0.4z^{-1}}$$

$$h_\mathrm{e}[k]=\mathscr{Z}^{-1}\{H_\mathrm{e}(z)\}=[5(0.5)^k-4(0.4)^k]u[k]$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

量化误差$e[k]$($e_0[k]$、$e_1[k]$和$e_2[k]$)的方差为

$$\sigma_{\mathrm{e}}^2 = 3 \times \frac{q^2}{12} = \frac{q^2}{4}$$

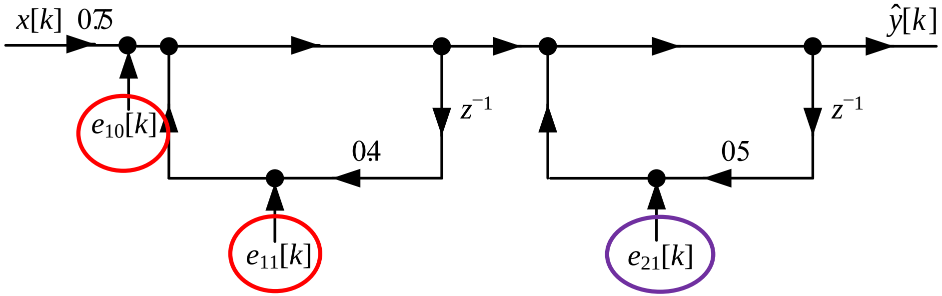
乘法量化产生的输出噪声方差

$$\sigma_{\mathrm{o}}^2 = \sigma_{\mathrm{e}}^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_{\mathrm{e}}^2[k] = \frac{q^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} [5(0.5)^k - 4(0.4)^k]^2 = 0.5952 q^2$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

级联型结构

$$H(z)=0.75\times(\frac{1}{1-0.4z^{-1}})(\frac{1}{1-0.5z^{-1}})$$



$e_1[k](e_{10}[k]$和$e_{11}[k])$通过的系统

$$H_{e_1}(z)=(\frac{1}{1-0.4z^{-1}})(\frac{1}{1-0.5z^{-1}})$$

$e_2[k](e_{21}[k])$通过的系统

$$H_{e_2}(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

$e_1[k]$ ($e_{10}[k]$和$e_{11}[k]$)通过的系统 $h_{e_1}[k]=[5(0.5)^k-4(0.4)^k]u[k]$

$e_2[k]$ ($e_{21}[k]$)通过的系统 $h_{e_2}[k]=(0.5)^k u[k]$

乘法量化产生的输出噪声方差

$$\sigma_o^2=\sigma_{e_1}^2\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_1}^2[k]+\sigma_{e_2}^2\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_2}^2[k]$$

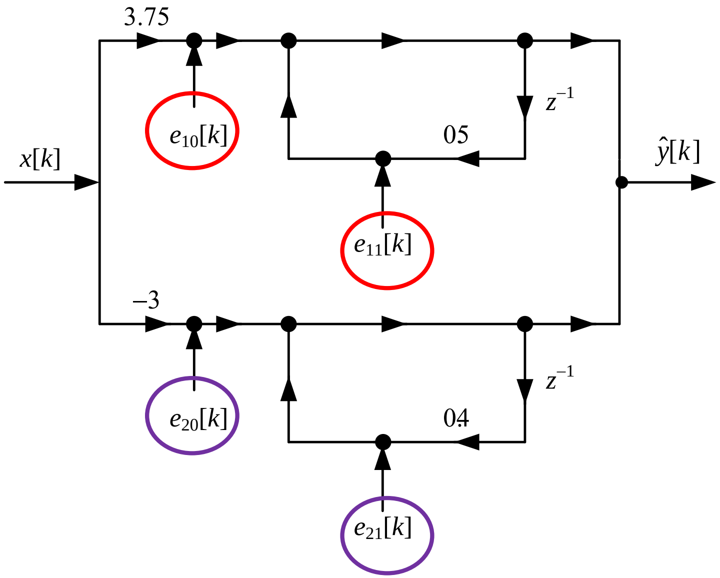
$$\sigma_{e_1}^2=2\frac{q^2}{12},\ \sigma_{e_2}^2=\frac{q^2}{12}$$

$$=2\frac{q^2}{12}\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_1}^2[k]+\frac{q^2}{12}\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_2}^2[k]=0.3968q^2+0.1111q^2=0.5079q^2$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

并联型结构

$$H(z)=\frac{3.75}{1-0.5z^{-1}}+\frac{-3}{1-0.4z^{-1}}$$



$e_1[k](e_{10}[k]$和$e_{11}[k])$通过的系统

$$H_{e_1}(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$e_2[k](e_{20}[k]$和$e_{21}[k])$通过的系统

$$H_{e_2}(z)=\frac{1}{1-0.4z^{-1}}$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

$e_1[k]$ ($e_{10}[k]$和$e_{11}[k]$)通过的系统 $h_{e_1}[k]=(0.5)^k u[k]$

$e_2[k]$ ($e_{20}[k]$和$e_{21}[k]$)通过的系统 $h_{e_2}[k]=(0.4)^k u[k]$

乘法量化产生的输出噪声方差

$$\sigma_{o}^2=\sigma_{e_1}^2\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_1}^2[k]+\sigma_{e_2}^2\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_2}^2[k]$$

$$\sigma_{e_1}^2=2\frac{q^2}{12},\sigma_{e_2}^2=2\frac{q^2}{12}$$

$$=2\frac{q^2}{12}\{\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_1}^2[k]+\sigma_{e_2}^2\sum_{k=0}^{\infty}h_{e_2}^2[k]\}=0.4206q^2$$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

乘法量化产生的输出噪声方差

直接型结构： $\sigma_o^2 = 0.5952q^2$

级联型结构： $\sigma_o^2 = 0.5079q^2$

并联型结构： $\boxed{\sigma_o^2 = 0.4206q^2}$

IIR系统乘积量化误差的统计分析

不同结构乘积量化误差比较分析:

- 直接型结构所有乘积量化误差都要经过整个反馈环节;
- 级联结构中，每个误差仅通过其后面的反馈环节，而不通过其前面的反馈环节，但其误差与级联的顺序相关;
- 并联型结构中，每个并联网络的误差仅与本通路的反馈环节相关，与其他并联网络无关。

IIR系统极限环振荡现象

对于一个稳定的IIR数字滤波器，若运算精度为无限时，当$n>n_0$时输入停止，则滤波器的输出在$n>n_0$时将逐渐衰减趋于零。若以有限字长进行运算，则滤波器的输出当$n>n_0$后，可能衰减到某一非零的幅度范围，然后呈现振荡特性，此称为零输入极限环振荡。

IIR系统极限环振荡现象

以一阶差分方程为例：

$$y[k]-\alpha y[k-1]=x[k]$$

假设$y[-1]=0$，字长位数$b=3$，$\alpha=1/2=[0.100]_b$，$x[k]=(7/8)\delta[k]=[0.111]_b\,\delta[k]$

无限精度运算时，IIR系统输出为：

$$y[k]=\frac{7}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]$$

乘积量化后对应的差分方程为

$$\hat{y}[k]=x[k]+Q\{\alpha\,\hat{y}[k-1]\}$$

IIR系统极限环振荡现象

当$y[-1]=0$，字长位数$b=3$，$\alpha=1/2=[0.100]_b$，$x[k]=(7/8)\delta[k]=[0.111]_b\,\delta[k]$

$$\hat{y}[0]=x[0]+Q\{\alpha\,\hat{y}[-1]\}=[0.111]_b=7/8$$

$$\hat{y}[1]=Q\{\alpha\,\hat{y}[0]\}=Q[0.0111]=[0.100]_b=4/8$$

$$\hat{y}[2]=Q\{\alpha\,\hat{y}[1]\}=Q[0.010]=[0.010]_b=2/8$$

$$\hat{y}[3]=Q\{\alpha\,\hat{y}[2]\}=Q[0.001]=[0.001]_b=1/8$$

$$\hat{y}[4]=Q\{\alpha\,\hat{y}[3]\}=Q[0.0001]=[0.001]_b=1/8$$

……

有限字长运算时，IIR系统输出为：

$$\hat{y}[k]=\{\frac{7}{8},\frac{4}{8},\frac{2}{8},\underbrace{\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}}_{\text{极限环振荡}},\ldots\}$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！