北京交通大學

数字信号处理

Digital Signal Processing

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

线性相位FIR滤波器的优化设计

- 线性相位 FIR DF优化设计的基本原理
- 利用积分加权平方误差准则设计FIR DF
- 利用最大最小误差准则设计FIR DF

优化设计的基本原理

优化设计的概念：

在一定的误差准则下，使得所设计的FIR滤波器的频率响应$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$与给定滤波器的频率响应$H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$的误差$\varepsilon$ 最小。

优化设计的基本原理

常用误差准则：

1. 最大最小误差准则(Minimax Criterion/Chebyshev准则)

$$\varepsilon = \max_{\Omega \subset I} \left| \boxed{W(\Omega)[A(\Omega) - D(\Omega)]} \right|$$

加权误差函数可用$E(\Omega)$表示

$W(\Omega)\geq 0$，是由设计者定义的加权函数

$A(\Omega)$：设计所得滤波器的幅度函数

$D(\Omega)$：给定滤波器的幅度函数

$A(\Omega)$ 应具有I型或II型或III型或IV型线性相位滤波器的幅度函数形式

I：滤波器在$0\leq\Omega\leq\pi$范围内各频带区间的集合。如低通滤波器

$I=[0,\Omega_p]\cup[\Omega_s, \pi]$。

优化设计的基本原理

常用误差准则：

2. 积分加权平方误差准则

$$\varepsilon = \int_I \left[W(\Omega)[A(\Omega) - D(\Omega)] \right]^2 \mathrm{d}\Omega$$

加权误差函数可用$E(\Omega)$表示

$W(\Omega)\geq 0$，是由设计者定义的加权函数

设计所得滤波器的幅度函数

给定滤波器的幅度函数

$A(\Omega)$ 应具有I型或II型或III型或IV型线性相位滤波器的幅度函数形式

I：滤波器在$0\leq\Omega\leq\pi$范围内各频带区间的集合。如低通滤波器

$I=[0,\Omega_p]\cup[\Omega_s, \pi]$。

优化设计的基本原理

四种类型线性相位滤波器的幅度函数形式

I型 $$A(\Omega)=h[M/2]+\sum_{k=0}^{M/2}2h[M/2-k]\cos(k\Omega)$$

II型 $$A(\Omega)=\sum_{k=0}^{(M-1)/2}2h[M/2-k]\cos[(k+0.5)\Omega]$$

III型 $$A(\Omega)=\sum_{k=0}^{M/2}2h[M/2-k]\sin(k\Omega)$$

IV型 $$A(\Omega)=\sum_{k=0}^{(M-1)/2}2h[(M-1)/2-k]\sin[(k+0.5)\Omega]$$

优化设计的基本原理

基本原理:

根据一定的误差准则，计算FIR滤波器的系数$h[k]$，使得该误差准则定义的误差ε在$0 \le \Omega \le \pi$最小。

对于积分加权平方误差准则，就是计算FIR滤波器的系数$h[k]$，使得误差 $\varepsilon = \int_I [E(\Omega)]^2 \,\mathrm{d}\Omega$最小。

对于最大最小误差准则，就是计算FIR滤波器的系数$h[k]$，使得误差 $\varepsilon = \max_{\Omega \subset I} |E(\Omega)|$ 最小。

其中 $E(\Omega)=W(\Omega)[A(\Omega)-D(\Omega)]$

利用积分加权平方误差准则设计FIR DF

根据积分加权平方误差准则设计滤波器就是计算FIR滤波器的系数$h[k]$，使得误差 $\varepsilon = \int_I [\, W(\Omega)[A(\Omega) - D(\Omega)]\,]^2 \mathrm{d}\Omega$ 最小。

$A(\Omega)$ 具有I型或II型或III型或IV型线性相位滤波器的幅度函数形式：

$$\mathrm{I}: h[M/2] + \sum_{k=0}^{M/2} 2h[M/2-k]\cos(k\Omega)$$

$$\mathrm{III}: \sum_{k=0}^{M/2} 2h[M/2-k]\sin(k\Omega)$$

$$\mathrm{II}: \sum_{k=0}^{(M-1)/2} 2h[(M-1)/2-k]\cos[(k+0.5)\Omega]$$

$$\mathrm{IV}: \sum_{k=0}^{(M-1)/2} 2h[(M-1)/2-k]\sin[(k+0.5)\Omega]$$

令ε对$h[k]$的导数为0，即可求得误差最小的$h[k]$

该方法可利用MATLAB提供的函数firls实现。

利用积分加权平方误差准则设计FIR DF

MATLAB实现 $h = \mathrm{firls}(M,f,a,w)$

M: 滤波器的阶数

f: 归一化频带值。如FIR滤波器的B个频带为

$\pi f_1 \le \Omega \le \pi f_2$， $\pi f_3 \le \Omega \le \pi f_4$， …， $\pi f_{2B-1} \le \Omega \le \pi f_{2B}$

则f是一个有2B个元素的向量，其值为

$f=[f_1, f_2, \ldots, f_{2B-1}, f_{2B}]$

a: 幅度值，表示滤波器在上述各频带边界的幅度。

w: 各频带的加权值，在不同频带设置不同频段的最小化误差值。

例：根据积分加权平方误差准则设计M=63 (II型)，Ω_p=0.5π rad，Ω_s=0.6π rad的线性相位FIR低通数字滤波器。

分析：　利用MATLAB函数firls实现，调用形式为

h = firls(M,f,a,w)

调用参数：

M=63；%阶数

f=[0 Fp Fs 1]；%低通滤波器频带(其中通带频率Fp=0.5,阻带频率Fs=0.6)

a=[1 1 0 0]；　% 滤波器在 f 中各频带边界频率处的幅度

w为各频带的加权值相同，可缺省。

即　h=firls(M,[0 Fp Fs 1],[1 1 0 0]);

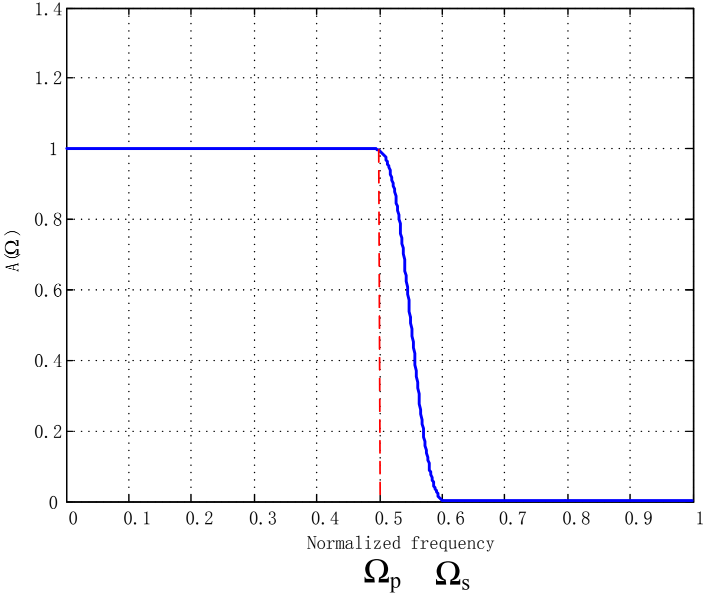
例：根据积分加权平方误差准则设计M=63 (II型)，Ω_p=0.5π rad，Ω_s=0.6π rad的线性相位FIR低通数字滤波器。

解：MATLAB程序如下

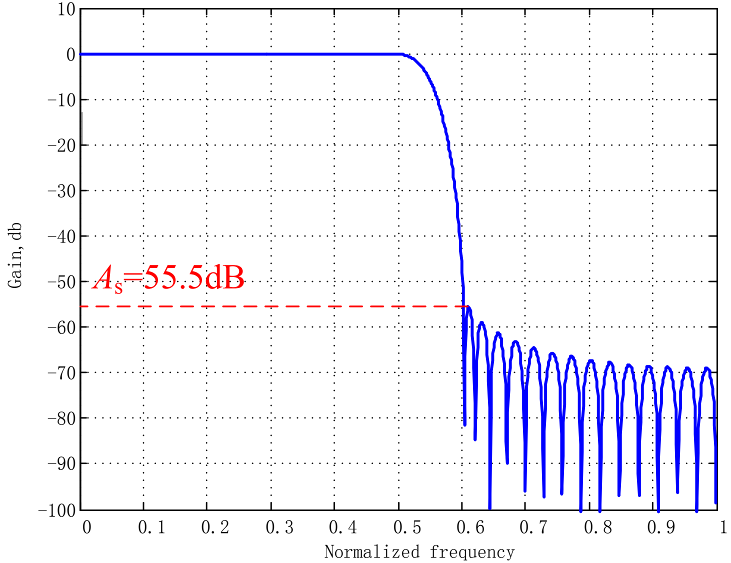
```
%根据积分加权平方误差准则设计FIR滤波器
M=63;Fp=0.5;Fs=0.6;  %定义滤波器参数
h=firls(M,[0 Fp Fs 1],[1 1 0 0]);  %低通滤波
w=linspace(0,pi,1000);
mag=freqz(h,[1],w);    %求频率响应
plot(w/pi,abs(mag), 'LineWidth',2);grid on;  %画幅度响应
xlabel('Normalized frequency');ylabel('A(\Omega)');
figure;
plot(w/pi,20*log10(abs(mag)), 'LineWidth',2);grid on;  %画增益响应
xlabel('Normalized frequency');ylabel('Gain,db');
axis([0 1 -100 10]);
```

例：根据积分加权平方误差准则设计M=63 (II型)，Ω_p=0.5π rad，Ω_s=0.6π rad的线性相位FIR低通数字滤波器。

解：设计结果　　M =63, A_s=55.5dB



滤波器幅度响应



滤波器增益

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！