数 字 信 号 处 理

Digital Signal Processing

主讲人：陈后金
电子信息工程学院

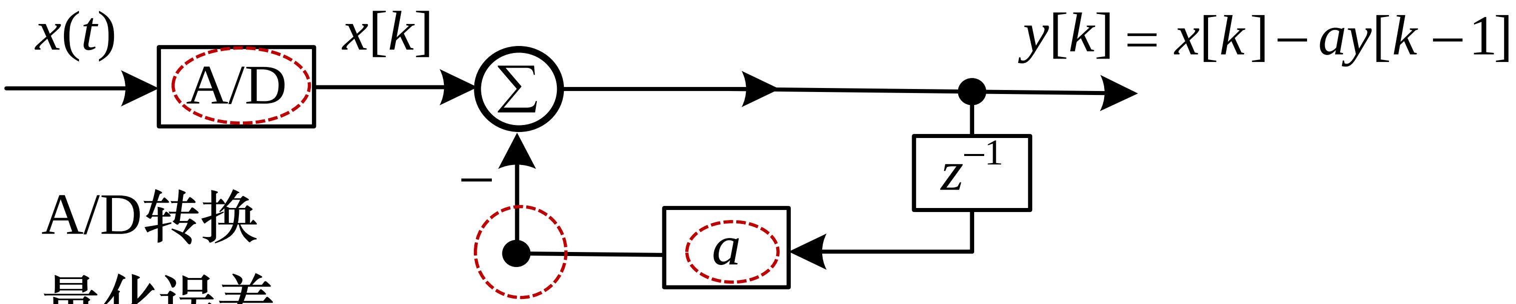
有限字长效应

- 问题的提出
- 截尾和舍入量化效应
- 输入信号量化误差
- 滤波器系数量化误差
- 乘积运算量化误差

问题的提出

数字系统，存储单元的字长有限。

$$H(z)=\frac{1}{1+az^{-1}}$$



A/D转换
量化误差

乘积运算
量化误差

数字滤波器的
系数量化误差

截尾和舍入量化效应

※ 定点二进制数的表示

※ 数值量化及量化误差

定点二进制数的表示

定点二进制数x有三种表示形式，

若$-1<x<1$，则其原码、反码和补码分别定义为：

$$[x]_{原}=\begin{cases}0.X_1X_2\cdots X_b & 0\le x<1\\ 1.X_1X_2\cdots X_b & -1\le x<0\end{cases}$$

$$[x]_{反}=\begin{cases}0.X_1X_2\cdots X_b & 0\le x<1\\ 1.\overline{X}_1\overline{X}_2\cdots\overline{X}_b & -1\le x<0\end{cases}$$

$$[x]_{补}=\begin{cases}0.X_1X_2\cdots X_b & 0\le x<1\\ 1.(\overline{X}_1\overline{X}_2\cdots\overline{X}_b+\underbrace{00\cdots01}_{b-1}) & -1\le x<0\end{cases}$$

正数的原码、反码和补码都相同。

数值量化及量化误差

理论上，任意十进制数x $(-1<x<1)$都可用无限位二进制数表示

$$x = \boxed{\beta_0}\,{}_{\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{\beta_n}2^{-n}$$

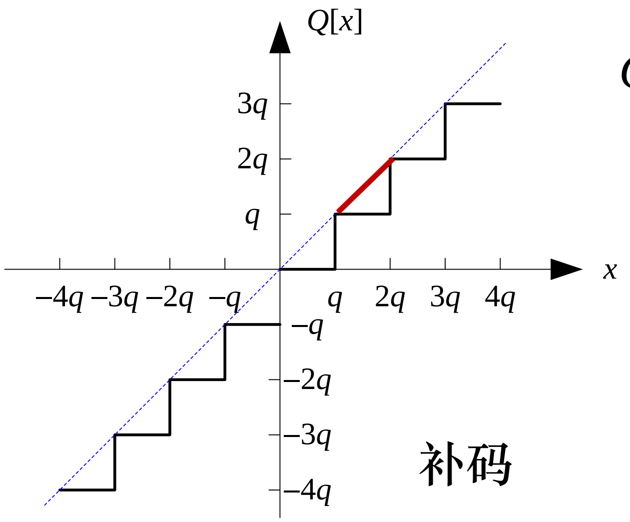
符号位　　　　　　　　　　有效数字位

实际中，只能用 $(b+1)$位有限位近似表示x，此过程称为量化。

当利用有限位二进制数近似表示需无限位二进制表示的数时，将会产生误差，此误差称为量化误差。

数值量化

两种数值量化方式：截尾量化和舍入量化

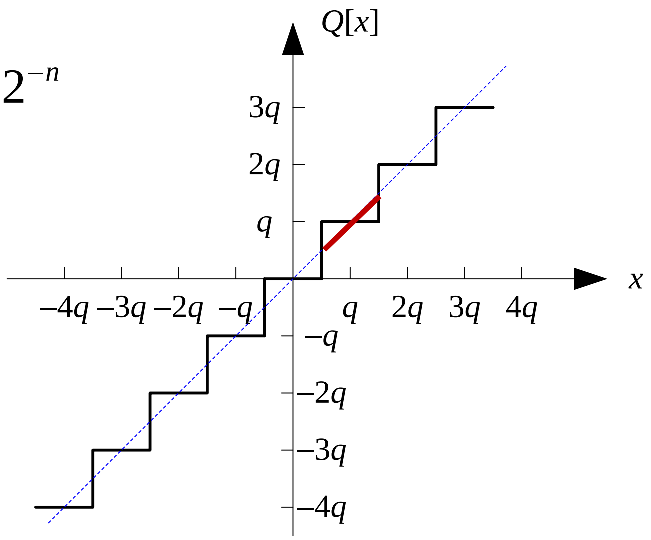


补码

截尾量化

$$Q[x] = \beta_0 \triangleq \sum_{n=1}^{b} \beta_n 2^{-n}$$

$$q = 2^{-b}$$



舍入量化

数值量化

如下十进制数序列:

d=[0.625　0.573　–0.872　0.268　–0.326]

按照5bit截尾序列:　$q = 2^{-5} = 0.03125$

0.62500	0.56250	–0.84375	0.25000	–0.31250
$[0.10100]_b$	$[0.10010]_b$	$[1.11011]_b$	$[0.01000]_b$	$[1.01010]_b$

按照5bit舍入序列:　$q = 2^{-5} = 0.03125$

0.62500	0.56250	–0.87500	0.28125	–0.31250
$[0.10100]_b$	$[0.10010]_b$	$[1.11100]_b$	$[0.01001]_b$	$[1.01010]_b$

量化误差

$$e = Q[x] - x$$

※ 截尾误差：

正数、负数补码截尾误差范围为 $-q < e_T \le 0$

负数原码和反码截尾误差范围为 $0 \le e_T < q$

$q = 2^{-b}$

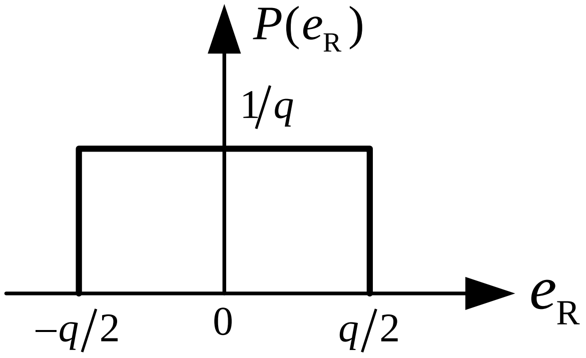
※ 舍入误差： $-q/2 < e_R \le q/2$

舍入误差对称分布，截尾误差单极性分布。

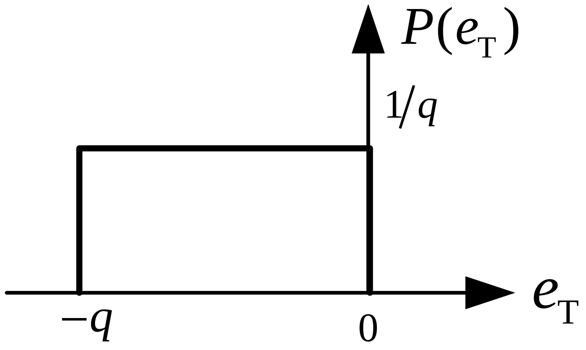
量化误差

量化误差(e_R, e_T)统计分析：均匀分布的随机变量。

舍入误差e_R：$-q/2 < e_R \le q/2$　　截尾误差e_T：$-q < e_T \le 0$

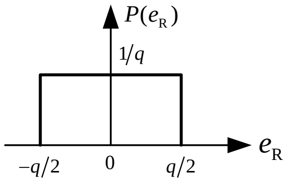


舍入误差概率密度函数曲线



截尾误差概率密度函数曲线

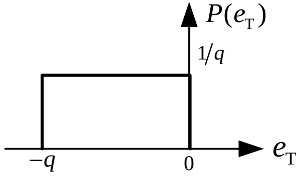
量化误差



均值　　　　方差（平均功率）

舍入误差e_R：　$\mu_R = E\{e_R\} = 0$　　$\sigma_R^2 = E\{(e_R - \mu_R)^2\} = \dfrac{q^2}{12} = \dfrac{2^{-2b}}{12}$

截尾误差e_T：　$\mu_T = E\{e_T\} = -q/2$　　$\sigma_T^2 = E\{(e_R - \mu_T)^2\} = \dfrac{q^2}{12} = \dfrac{2^{-2b}}{12}$



e_R和e_T是任一时刻的量化误差。

输入信号量化误差

模拟信号经过A/D转换为b位数字信号：

$$\hat{x}[k] = \underbrace{x[k]}_{\text{精确抽样值}} + \underbrace{e[k]}_{\text{量化误差}}$$

若输入信号的动态范围可达A/D转换器的满量程，且不断经历不同的量化水平，则量化误差$e[k]$：

※ $e[k]$是平稳、服从均匀分布的白噪声

※ $e[k]$和$x[k]$不相关

量化误差$e[k]$的统计特性与任一时刻量化误差(e_R, e_T)基本相同。

输入信号量化误差

e[k]的均值： $\mu_{e_R} = E\{e[k]\} = 0$

e[k]的方差（平均功率）： $\sigma_e^2 = E\{e^2[k]\} = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12}$

输入信号的信噪比SNR为（信号x[k]的平均功率为σ_x^2）

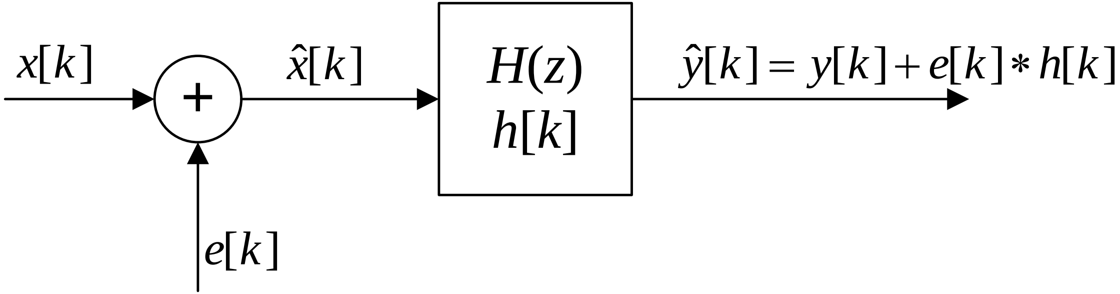
$$\mathrm{SNR} = 10\lg\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) \approx 6.02b + 10.79 + 10\lg(\sigma_x^2)\mathrm{dB}$$

由此可见，字长b增加一位，SNR约增加6dB。

输入信号量化误差通过LTI系统

量化后的输入信号通过离散LTI系统，输入量化误差在输出端产生输出误差。利用卷积公式：

$$\hat{y}[k]=\hat{x}[k]*h[k]=\{x[k]+e[k]\}*h[k]=y[k]+\underbrace{\boxed{e[k]*h[k]}}_{\text{输出误差}}$$



输入信号量化误差通过LTI系统

由输入量化误差产生的输出误差为

$$v[k] = e[k] * h[k]$$

输出误差$v[k]$的方差为

$$\sigma_{\mathrm{v}}^2 = E\{v^2[k]\}$$

推导可得，输出误差$v[k]$的方差为

$$\sigma_{\mathrm{v}}^2 = \sigma_{\mathrm{e}}^2 \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] = \frac{q^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k]$$

输入信号量化误差通过LTI系统

根据Parseval定理

$$\sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \right|^2 \mathrm{d}\Omega$$

因此输出误差$v[k]$的方差也可表示为

$$\sigma_{\mathrm{v}}{}^2 = \sigma_{\mathrm{e}}{}^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \right|^2 \mathrm{d}\Omega$$

谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！