数字信号处理

Digital Signal Processing

主讲人：陈后金

电子信息工程学院

窗函数法设计线性相位FIR滤波器

- 设计原理
- 设计方法
- 窗口选择
- 设计举例

窗函数法设计线性相位FIR滤波器举例

1．由$H_d(e^{j\Omega})$确定FIR DF的类型和幅度函数$A_d(\Omega)$

2．根据类型确定线性相位FIR滤波器的相位$\varphi_d(\Omega)$

$$\varphi_d(\Omega) = -0.5M\Omega + \beta \qquad (\beta = 0\text{或}\pi/2)$$

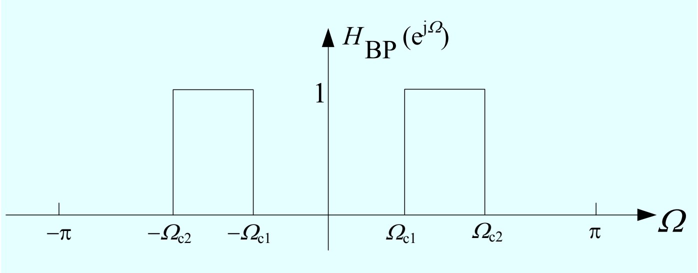
3．根据$A_d(\Omega)$和$\varphi_d(\Omega)$通过IDTFT求解$h_d[k]$

$$h_d[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}e^{jk\Omega}d\Omega$$

4．加窗截短$h_d[k]$，得到有限长因果序列$h[k]$

$$h[k] = h_d[k]w_N[k]$$

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。$\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现



解：(1) 确定线性相位FIR滤波器类型，

选用I型

确定理想滤波器的幅度函数$A_d(\Omega)$

$$A_d(\Omega)=\begin{cases}1 & \Omega_{c1}\le|\Omega|\le\Omega_{c2}\le\pi \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 根据类型确定理想滤波器的相位$\varphi_d(\Omega)$

$\varphi_d(\Omega)=-0.5M\Omega$　M为偶数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。$\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现

解：(3) 计算IDTFT得$h_d[k]$

$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}e^{jk\Omega}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega$$

$$=\frac{\Omega_{c2}}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_{c2}(k-0.5M)]-\frac{\Omega_{c1}}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_{c1}(k-0.5M)]$$

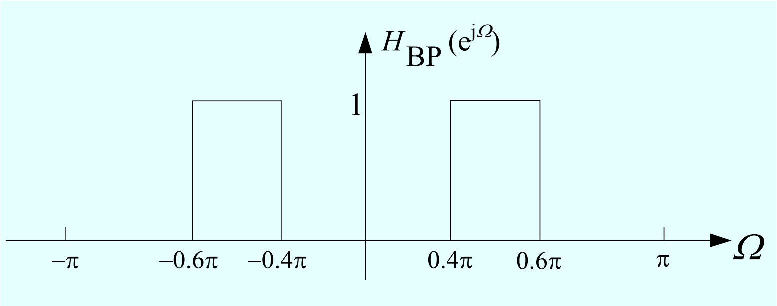
(4) 加窗截短$h_d[k]$得$h[k]=h_d[k]w_N[k]$

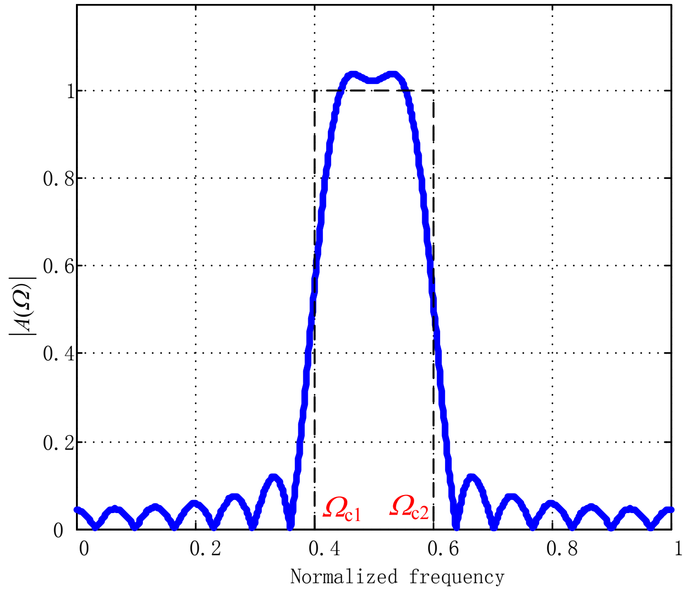
长度为N的窗函数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。$\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现

解：采用I型，矩形窗实现：

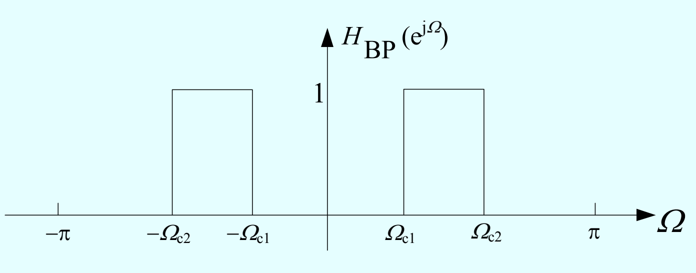
$M=30 \quad \varphi_d(\Omega)=-15\Omega$





例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。 $\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad， $\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现

解：(1) 确定线性相位FIR滤波器类型，
选用II型



确定理想滤波器的幅度函数$A_d(\Omega)$

$$A_d(\Omega)=\begin{cases}1 & \Omega_{c1}\le|\Omega|\le\Omega_{c2}\le\pi \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 根据类型确定理想滤波器的相位$\varphi_d(\Omega)$

$\varphi_d(\Omega)=-0.5M\Omega$ M为奇数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。$\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现

解：(3) 计算IDTFT得$h_d[k]$

$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}e^{jk\Omega}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega$$

$$=\frac{\Omega_{c2}}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_{c2}(k-0.5M)]-\frac{\Omega_{c1}}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_{c1}(k-0.5M)]$$

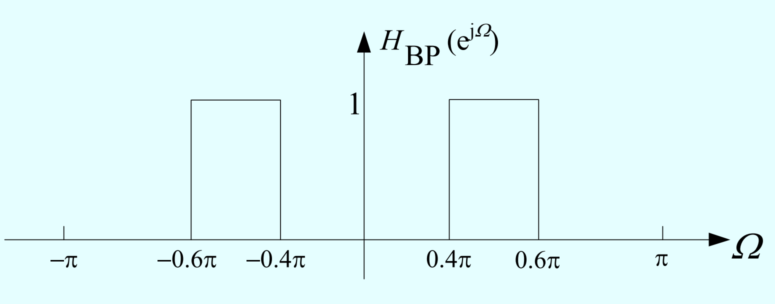
(4) 加窗截短$h_d[k]$得$h[k]=h_d[k]w_N[k]$

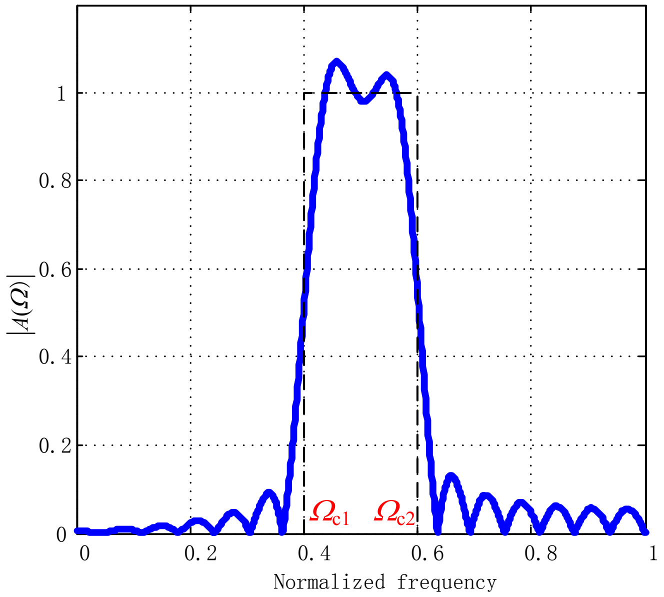
长度为N的窗函数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。 Ω_{c1}=0.4π rad， Ω_{c2}=0.6π rad, 矩形窗实现

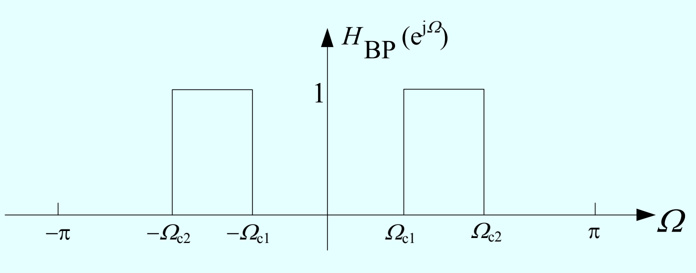
解： 采用II型，矩形窗实现：

M=31 $\varphi_d(\Omega)= -15.5\Omega$





例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。$\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现



解：(1) 确定线性相位FIR滤波器类型，选用III型

确定理想滤波器的幅度函数$A_d(\Omega)$

$$A_d(\Omega)=\begin{cases} 1 & 0<\Omega_{c1}\le\Omega\le\Omega_{c2}\le\pi \\ -1 & -\pi\le-\Omega_{c2}\le\Omega\le-\Omega_{c1}<0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 根据类型确定理想滤波器的相位$\varphi_d(\Omega)$

$\varphi_d(\Omega)=-0.5M\Omega+\pi/2$ M为偶数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。 $\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现

解：(3) 计算IDTFT得$h_d[k]$

$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}e^{jk\Omega}d\Omega$$

$$=\frac{-j}{2\pi}\int_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega+\frac{j}{2\pi}\int_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(k-0.5M)}\{\cos[\Omega_{c2}(k-0.5M)]-\cos[\Omega_{c1}(k-0.5M)]\}, & k\neq 0.5M\\ 0, & k=0.5M\end{cases}$$

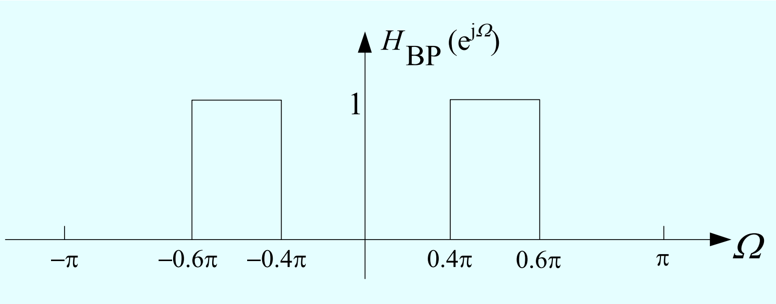
(4) 加窗截短$h_d[k]$得$h[k]=h_d[k]w_N[k]$

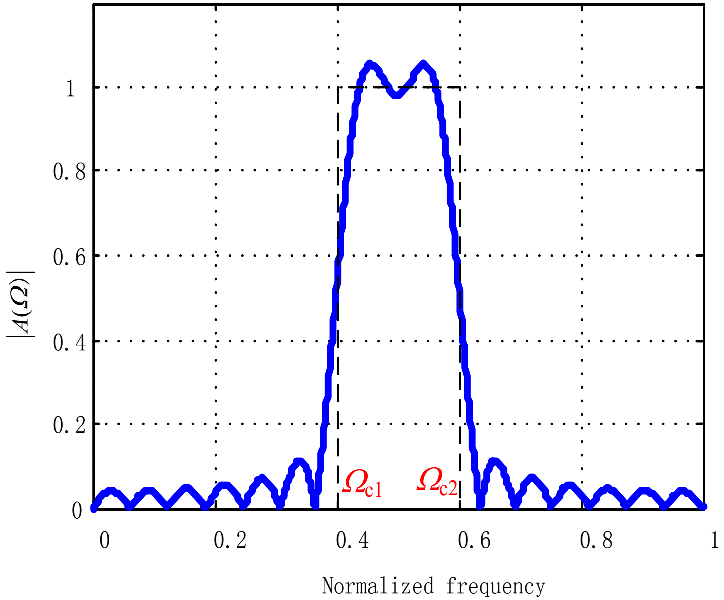
长度为N的窗函数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。 Ω_{c1}=0.4π rad， Ω_{c2}=0.6π rad, 矩形窗实现

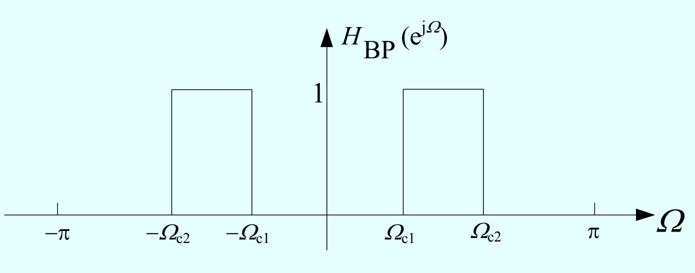
解：采用III型，矩形窗实现：

M=30 $\varphi_d(\Omega) = -15\Omega + \pi/2$





例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。$\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现



解：(1) 确定线性相位FIR滤波器类型，选用IV型

确定理想滤波器的幅度函数$A_d(\Omega)$

$$A_d(\Omega)=\begin{cases}1 & 0<\Omega_{c1}\le\Omega\le\Omega_{c2}\le\pi \\ -1 & -\pi\le-\Omega_{c2}\le\Omega\le-\Omega_{c1}<0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 根据类型确定理想滤波器的相位$\varphi_d(\Omega)$

$\varphi_d(\Omega)=-0.5M\Omega+\pi/2$　　M为奇数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。 $\Omega_{c1}=0.4\pi$ rad，$\Omega_{c2}=0.6\pi$ rad, 矩形窗实现

解：(3) 计算IDTFT得$h_d[k]$

$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}e^{jk\Omega}d\Omega$$

$$=\frac{-j}{2\pi}\int_{-\Omega_{c2}}^{-\Omega_{c1}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega+\frac{j}{2\pi}\int_{\Omega_{c1}}^{\Omega_{c2}} e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega$$

$$=\frac{1}{\pi(k-0.5M)}\{\cos[\Omega_{c2}(k-0.5M)]-\cos[\Omega_{c1}(k-0.5M)]\}$$

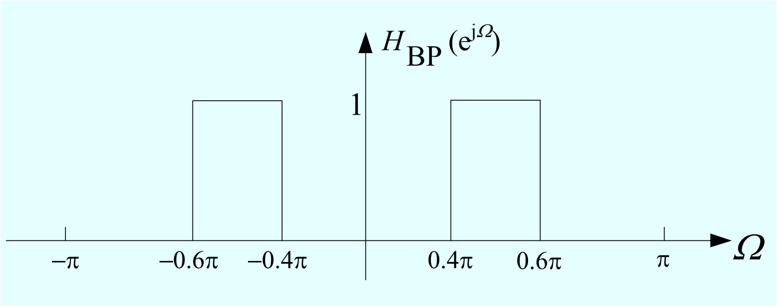
(4) 加窗截短$h_d[k]$得$h[k]=h_d[k]w_N[k]$

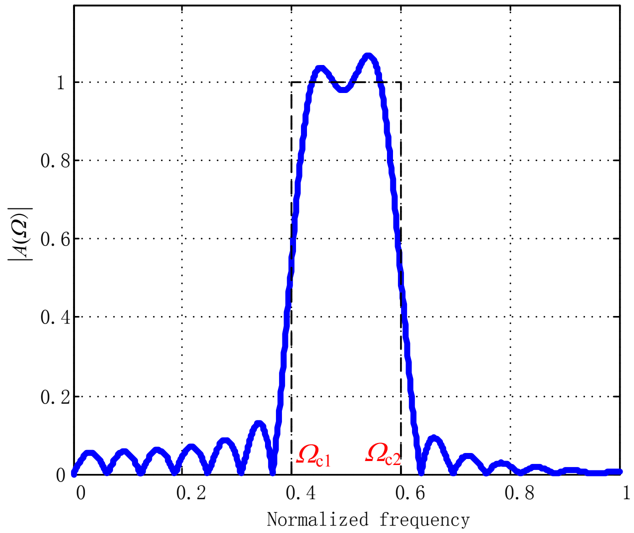
长度为N的窗函数

例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。Ω_{c1}=0.4π rad，Ω_{c2}=0.6π rad, 矩形窗实现

解：采用IV型，矩形窗实现：

M=31　　$\varphi_d(\Omega) = -15.5\Omega + \pi/2$

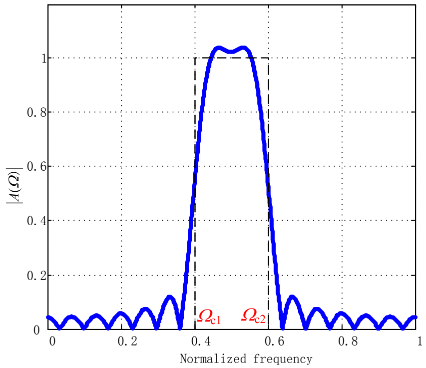




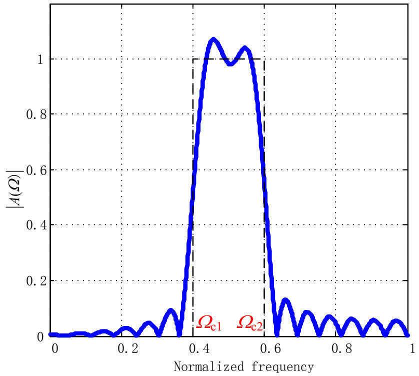
例：利用窗口法设计一个幅度响应能逼近给定带通滤波器$H_{BP}(e^{j\Omega})$的线性相位FIR滤波器。Ω_{c1}=0.4π rad，Ω_{c2}=0.6π rad, 矩形窗实现

解：

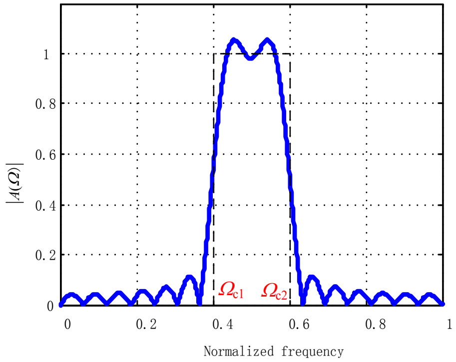
I型



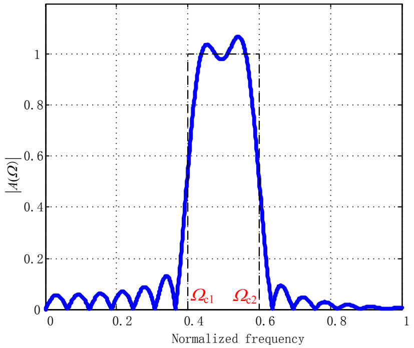
II型



III型



IV型



例：设计指标为Ω_p=0.6π rad, Ω_s=0.4π rad，A_p=0.3dB, A_s=40dB的FIR高通数字滤波器。

解：1. 由高通数字滤波器决定采用I型设计，再由A_s确定窗函数类型：满足A_s=40dB有Hann、Hamming、Blackman窗等，Hann窗的阻带衰耗为44dB，最接近40dB，故选择Hann窗 $\mathrm{hann}_N[k]$

2. 由Ω_p, Ω_s确定N

$$N \geq \frac{6.2\pi}{|\Omega_s - \Omega_p|} = \frac{6.2\pi}{0.2\pi} = 31, M = 30$$

3. $$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\frac{M}{2}\Omega} & |\Omega| > \Omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

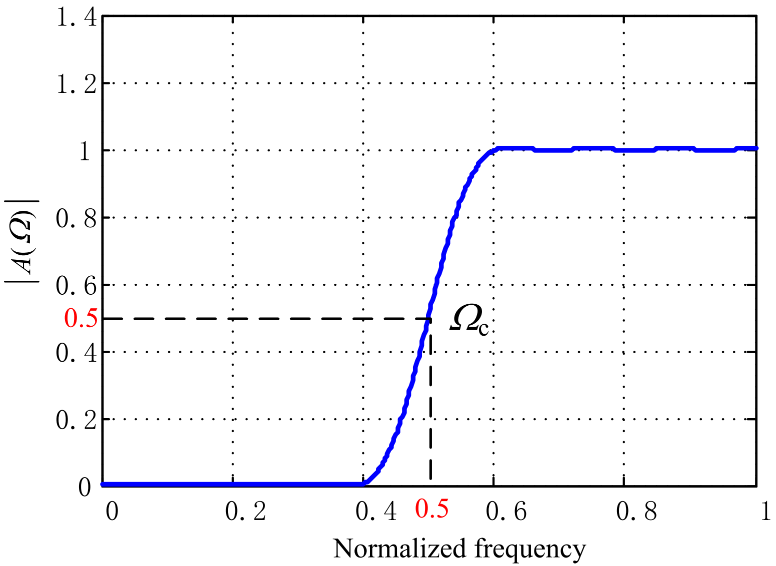
通常$\Omega_c = \frac{1}{2}(\Omega_p + \Omega_s) = 0.5\pi \ \mathrm{rad}$

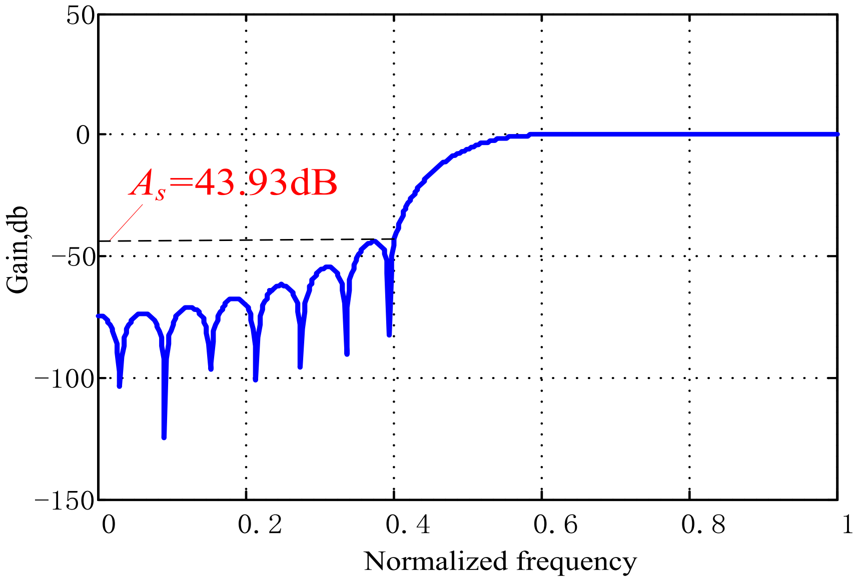
4. $$h_d[k] = \delta[k - 0.5M] - \frac{\Omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\Omega_c(k - 0.5M)] = \delta[k - 15] - 0.5\mathrm{Sa}[0.5\pi(k - 15)]$$

$$h[k] = h_d[k] \cdot \mathrm{hann}_N[k]$$

例：设计指标为Ω_p=0.6π rad, Ω_s=0.4π rad，A_p=0.3dB，A_s=40dB的FIR高通数字滤波器。

解：





例：已知数字微分器的频率响应为$H_d(e^{j\Omega})=j\Omega$，$|\Omega|\le\pi$。试用窗口法设计 M=9的线性相位FIR滤波器，使其幅度响应逼近理想数字微分器。

解：1. 根据设计指标确定线性相位FIR数字滤波器的类型：

由于$H_d(e^{j\Omega})=j\Omega$，幅度函数奇对称，M为奇数，故选用IV型

确定理想数字微分器的幅度函数$A_d(\Omega)$

$$A_d(\Omega)=\begin{cases}\Omega & |\Omega|\le\pi \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

2. 确定理想数字微分器的相位$\varphi_d(\Omega)$

$$\varphi_d(\Omega)=-0.5M\Omega+\pi/2$$

例：已知数字微分器的频率响应为$H_d(e^{j\Omega})=j\Omega$，$|\Omega|\le\pi$。试用窗口法设计M=9的线性相位FIR滤波器，使其幅度响应逼近理想数字微分器。

解： 3. 计算IDTFT得$h_d[k]$

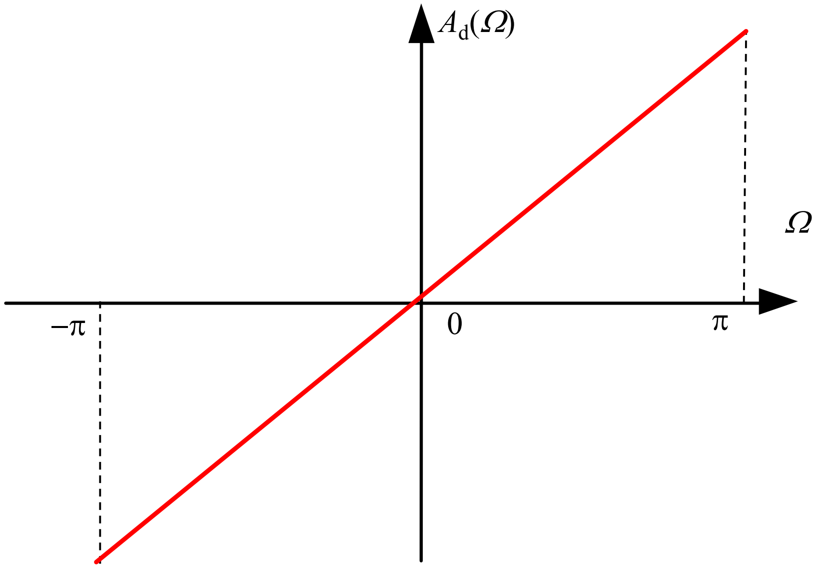
$$h_d[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A_d(\Omega)e^{j\varphi_d(\Omega)}e^{jk\Omega}d\Omega$$

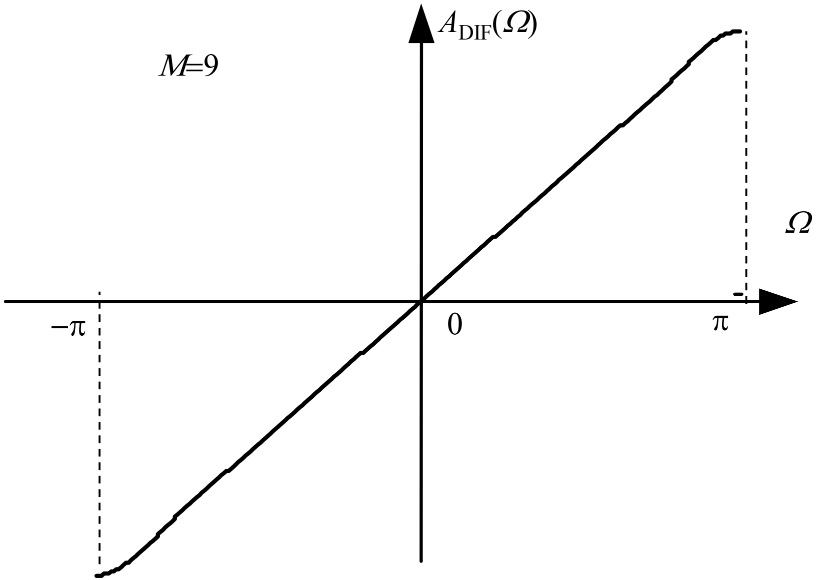
$$=\frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Omega e^{j\Omega(k-0.5M)}d\Omega=\frac{(-1)^{(k-0.5M+0.5)}}{\pi(k-0.5M)^2}$$

4. 利用矩形窗截短$h_d[k]$得 $h_{DIF}[k]=h_d[k]w_N[k]$

例：已知数字微分器的频率响应为$H_d(e^{j\Omega})=j\Omega$，$|\Omega|\le\pi$。试用窗口法设计 $M=9$的线性相位FIR滤波器，使其幅度响应逼近理想数字微分器。

解：





谢 谢

本课程所引用的一些素材为主讲老师多年的教学积累，来源于多种媒体及同事和同行的交流，难以一一注明出处，特此说明并表示感谢！