第一章 行列式

1.1 行列式定义

- 二阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}$
- 三阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}$
  - 对角线法则：主对角线三组三个元素的乘积相加，副对角线三组元素的乘积相减，最后相加。
- n阶行列式$(n\times n)$的表达式如下，通常简记为$det(a_{ij})$。其中a_{ij}为行列式D的$(i\,,\,j)$元。
  $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$
  - 相关概念
    - 全排列：n个不同的元素排成一列。所有排列的种数用$P_n=n\,!$表示。
    - 逆序数：对于排列 $p_1p_2\dots p_n$，如果排在p_i元素前面且比p_i大的元素个数有t_i个，则p_i这个元素的逆序数为t_i。整个排列的逆序数就是所有元素的逆序数之和，为$t=\sum_{i=1}^n t_i$。
    - 奇排列：逆序数为奇数的排列。
    - 偶排列：逆序数为偶数的排列。
    - n个元素的所有排列中，奇偶各占一半，即$\frac{n!}{2}$
    - 对换：一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。（证明：p5）
  - 相关行列式
    - 对角行列式$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$
    - 副对角行列式 $D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \text{\iddots} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$ 。由于当$i\neq j$时$a_{ij}=0$，所以$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{np_n}$中可能不为0的只有一项$\sum(-1)^t a_{1n}a_{2n-1}\dots a_{n1}$所以这个式子的中$n,n-1,\dots 1$的逆序$t$为$0+1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$。

1.2 行列式的运算及性质

- 行列式的性质

1. 行列式与它的转置行列式相等.（转置：行变列，列变行）
2. 互换行列式的两行（列），行列式变号。 推论：两行（列）相同的行列式值为零。 互换两行
    1. 行列式的某一行（列）中的所有元素都乘以同一个数k，等于用数 k乘此行列式。第i行乘k： 推论：行列式中某一行（列）的公因子可以提到行列式符号外面
3. 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于0
4. 若行列式的某一列（行）的元素都是两个元素和，则此行列式等于两个行列式之和。
5. 把行列式的某行（列）的各元素同一倍数后加到另一行（列）的对应元素上去，行列式的值不变。
6. **重要性质**：利用行列式的性质 $r_i + kr_j$或$c_i + kc_j$，可以把行列式化为上（下）三角行列式，从而计算n阶 行列式的值。（P11页例7）注意：不能$kr_i + r_j$或$kc_i + c_j$，因为这样会把原本的数值扩大k倍。

- 行列式按行（列）展开法则（重要）
    - **重要概念**：
        - 余子式：在n 阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去, 剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成的 $n-1$阶行列式 叫做a_{ij}的余子式，记为M_{ij}。
        - 代数余子式：记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$为元素 a_{ij}的代数余子式。
    - **重要性质，定理**：
        - 第i行各元素的余子式，代数余子式与第i行元素的取值无关。
        - 行列式按行（列）展开法则：行列式等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即按行 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$或按列 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$
            - 推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零 。 $i \neq j$即 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$或按列 $a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni} = 0$(证明：P19)
            - 使用该法则计算行列式的值：先选取存在最多0的行（列），从该行选取一个非0元素a_{ij}，并将该行其他元素通过性质化为0，则$D = a_{ij}A_{ij}$
- 利用Cramer法则求解n个n元线性方程组：
    - 若非齐次线性方程组的系数行列式不等于零，则方程组有唯一解。等于0，则无解。 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$其中 $D_j(j = 1, 2 \ldots n)$ 是把系数行列式中的第j列的元素用方程组右边的常数项代替后

所得到的n阶行列式$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- 对于齐次线性方程组，如果系数行列式$D \neq 0$，则该方程组只有零解，若$D = 0$，则无法使用。（这时候b_n就是都为0，那$D_j = 0$。

第二章 矩阵及其运算

2.1 矩阵相关概念

矩阵：由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$排成的 m行 n 列的数表(是一组数)。

- 行（列）矩阵：只有一行（列）的矩阵，又称为行（列）向量。
- 同型矩阵：行数，列数均相等的两个矩阵。
- $\mathbf{A} = \mathbf{B}$： 矩阵$\mathbf{A}$和矩阵$\mathbf{B}$为同型矩阵，且对应的元素相等。
- 零矩阵：所有元素为0的矩阵，记为$\mathbf{O}$，不同型的零矩阵是不相等的。
- 对角矩阵：对角线元素为$\lambda_\mathbf{1}, \lambda_\mathbf{2}, \ldots, \lambda_\mathbf{n}$，其余元素为0的方阵。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_\mathbf{1}, \lambda_\mathbf{2}, \ldots, \lambda_\mathbf{n}) \tag{1}$$

- 单位矩阵：对角线元素为 1 ，其余元素为0的方阵。

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2.1 矩阵的运算

- 加法：只有两个矩阵为同型矩阵时，才能进行加法运算。$\mathbf{A} + \mathbf{B}$等于对应元素相加起来。满足交换律和结合律。
- 乘法
  - 数与矩阵相乘
    - $\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$
    - $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$
    - $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$

        - $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$
    - 矩阵与矩阵相乘: 要求前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数: $\mathbf{A}_{m\times s}\times\mathbf{B}_{s\times n}$。乘积矩阵的行数为前一个矩阵的行数，列数为后一个矩阵的列数: $\mathbf{C}_{m\times n}$。注意：一般情况下：$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$。 但是满足结合律和分配律。但是对于单位矩阵 $\mathbf{EA}=\mathbf{AE}=\mathbf{A}$。
        - 如果$\mathbf{A}$和 $\mathbf{B}$都是方阵， 且 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ 则称$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$可交换。
        - $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$
        - $\lambda(\mathbf{AB})=(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$
        - $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$, $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{BC}$
- 矩阵的幂： 设$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$为n阶方阵（只有方阵才有意义）
    - $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^l=\mathbf{A}^{k+l}$, $(\mathbf{A}^k)^l=\mathbf{A}^{kl}$
    - $\mathbf{AB}^k=\mathbf{A}^k+\mathbf{B}^k$
    - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$
    - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$
- 矩阵的转置：把矩阵 $\mathbf{A}$ 的行换成同序数的列得到的新矩阵，记作$\mathbf{A}^T$
    - $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$
    - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$
    - $(\lambda\mathbf{A})^T=\lambda\mathbf{A}^T$
    - $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- 方阵的行列式: 由n 阶**方阵**的元素所构成的行列式，叫做方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式，记作$|\mathbf{A}|$或$det\mathbf{A}$.
    - $|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|$
    - $|\lambda\mathbf{A}|=\lambda^n|\mathbf{A}|$ 注意：系数乘到了每个元素上面。
    - $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$
    - $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|$
- 伴随矩阵：其中A_{ij}是元素a_{ij}的代数余子式，$\mathbf{A}^*$称为$\mathbf{A}$的伴随矩阵。（特别注意符号）注意：元素a_{ij}的代数余子式A_{ij}是位于的第j行第i列（类似于转置），因为这样可以便于矩阵相乘。代数余子式和对应的元素相乘加在一起就是$|\mathbf{A}|$， 不对应的就为零（证明p19和引理p16，矩阵分块法）。
    - $\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

- 逆矩阵：对于n 阶方阵$\mathbf{A}$，如果有 n 阶方阵 $\mathbf{B}$，使得$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{E}$，则称$\mathbf{A}$可逆，$\mathbf{B}$为$\mathbf{A}$的逆矩阵，记为$\mathbf{A}^{-1}$。且$\mathbf{A}$的逆矩阵是唯一的。（注：只有方阵才有逆矩阵，又是也称为n阶矩阵）
  - 判断方阵$\mathbf{A}$是否可逆：$|\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 可逆， 由 $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 可推导出。且逆矩阵为 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$
  - 推论：若 $|\mathbf{A}| \neq 0$，此时称$\mathbf{A}$为非奇异矩阵，反之则称为奇异矩阵。
  - 单位矩阵$\mathbf{E}$是可逆的 。
  - 零矩阵是不可逆的。
  - 对角矩阵的逆矩阵：对角线上每个元素取倒数。
  - 推论：如果 n 阶方阵$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$可逆，那么$\mathbf{A}^{-1}$ 、$\mathbf{A}^T$ 、$\lambda\mathbf{A}(\lambda \neq 0)$、$\mathbf{AB}$也可逆
    - $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
    - $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
    - $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$
    - $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
    - $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$
- 用逆矩阵求解线性方程组:
  - 已知$\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$ ，若$\mathbf{AB}$可逆，则$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$ 。
- 矩阵分块法：用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作称为对矩阵进行分块；每一个小块称为矩阵的子块；矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。
  - 分块矩阵的运算：（其运算与矩阵运算基本一致）
    - 加法：要求矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$是同型矩阵，且采用相同的分块法(即相对应的两个子块也是同型的),
    - 分块矩阵$\mathbf{A}$的转置：除了$\mathbf{A}$整体上需转置外，每一个子块也必须得转置。
  - 判定矩阵为0或向量为0的条件： $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=0$，其中$\mathbf{A}$按列分块，当$\boldsymbol{a}$为列向量时，$\boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}} = 0$。

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

矩阵初等变换

- 定义与记号
  - 初等行变换：（互换两行 $r_i \Leftrightarrow r_j$，第i行乘以非0常数k $r_i \times k$，第j行的k倍加到第i行上 $r_i + kr_i$），矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$行等价，记作$\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$
  - 初等列变换：（互换两列 $c_i \Leftrightarrow c_j$，第i列乘以非0常数k $c_i \times k$，第j列的k倍加到第i列上 $c_i + kc_i$），矩阵$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$列等价，记作$\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$
  - 若矩阵$\mathbf{A}$经过有限次初等变换成矩阵$\mathbf{B}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$等价，记做$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$

- 行阶梯型矩阵：其特点是阶梯线下方的数全为0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零的行数，阶梯线的竖线(每段竖线的均为一行)后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的首非零元.
- 行最简型矩阵(也可以叫做行最简阶梯型矩阵,或者行简化阶梯型矩阵)：其特点是非零行的首非零元为1，且这些非零元所在的列的其它元素都为0。
- 标准形矩阵，其特点是，该矩阵的左上角是一个单位矩阵，其它的元素全为零。

- $\mathbf{A}_{m\times n}$~$\mathbf{B_{m\times n}}$等价 $\Leftrightarrow$ 是存在m阶可逆矩阵$\mathbf{P}$和n可逆矩阵$\mathbf{Q}$，使得$\mathbf{PAQ}=\mathbf{B}$

- 初等矩阵：由单位矩阵$\mathbf{E}$经过一次初等变换得到的矩阵。（是可逆的）
  - 单位矩阵对换i，j行，记作$\mathbf{E}_m(i,j)$，$\mathbf{E}_m^{-1}=\mathbf{E}_m(i,j)$
  - 以常数$k\neq 0$乘单位矩阵第i 行（列）， 记作$\mathbf{E}(i(k))$，$\mathbf{E}_m(i(k))^{-1}=\mathbf{E}_m(i(\frac{1}{k}))$
  - 以 k 乘单位矩阵第 j行加到第 i行，记作$\mathbf{E}_m(i,j(k))$，$\mathbf{E}_m(i,j(k))^{-1}=\mathbf{E}_m(i,j(-k))$
  - 性质1：左行右列。设$\mathbf{A}$是一个 $m\times n$ 矩阵，对$\mathbf{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\mathbf{A}$ 的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对$\mathbf{A}$施行一次初等列变换，相当于在 $\mathbf{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。
  - 性质2：方阵$\mathbf{A}$可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\ldots,\mathbf{P}_l$，使$\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots,\mathbf{P}_l$ 。
  - 推论：方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件$\mathbf{A}\overset{r}{\sim}\mathbf{B}$
- 初等矩阵的性质及应用
  - 定理1：

    $\mathbf{A}\overset{r}{\sim}\mathbf{B}\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使$\mathbf{PA}=\mathbf{B}$

    $\mathbf{A}\overset{c}{\sim}\mathbf{B}\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$\mathbf{Q}$，使$\mathbf{AQ}=\mathbf{B}$

    方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件$\mathbf{A}\overset{r}{\sim}\mathbf{B}$
  - 若$(\mathbf{A},\mathbf{E})\overset{r}{\sim}(\mathbf{B},\mathbf{P})$，则$\mathbf{P}$ 可逆， 且$\mathbf{PA}=\mathbf{B}$
  - 若$(\mathbf{A},\mathbf{E})\overset{r}{\sim}(\mathbf{E},\mathbf{P})$，则$\mathbf{A}$ 可逆， 且$\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}$
  - 若$(\mathbf{A},\mathbf{B})\overset{r}{\sim}(\mathbf{E},\mathbf{X})$，则$\mathbf{A}$ 可逆， 且$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

矩阵的秩

- k阶子式：k阶子式：在 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 中，任取 k 行 k 列($k\leq m$，$k\leq n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在$\mathbf{A}$中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 k 阶子式。

- 矩阵的秩：设矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个不等于零的 r 阶子式 $\mathbf{D}$，且所有r +1 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 $\mathbf{D}$ 称为矩阵$\mathbf{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(\mathbf{A})$。**零矩阵的秩等于0。对于行阶梯矩阵，矩阵的秩等于非零行个数，对于行最简矩阵则等于非零行或非零列个数，但是我们一般只求行阶梯矩阵即可不用求解到最简形式。这也是为什么证明下面定理时需要把矩阵或增管矩阵转置的原因。**

- 定理2: 初等变换不改变矩阵的秩

- 矩阵秩的性质：
  - $0\leq R(\mathbf{A}_{m\times n})\leq min\{m,n\}$
  - $R(\mathbf{A}^T)=R(\mathbf{A})$
  - 若$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$则 $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})$, 若$\mathbf{PQ}$可逆，$\mathbf{PAQ}=\mathbf{B}$，$R(\mathbf{PAQ})=R(\mathbf{B})$

- 对于n阶方阵$\mathbf{A}$，$R(\mathbf{A})$ = n (称$\mathbf{A}$满秩) ⇔$|\mathbf{A}| \neq 0$ ⇔ $\mathbf{A}$可逆（如果方阵$\mathbf{A}$的秩小于阶数n，那么其行列式比为0）
- $max\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\} \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$ 当$\mathbf{B}$ = ***b***为非零列向量时，$R(\mathbf{A}) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) +$ 1
- $R(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$
- $R(\mathbf{AB}) \leq min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\}$
- 其它定理详见p71

线性方程的解

- 定理3: n元线性方程的解 $\mathbf{A}$***x***=***b***
  - 无解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}) < R(\mathbf{A}$, ***b***) （证明p72）
  - 有唯一解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}$, ***b***) = ***n***
  - 有无限多解的充分必要条件是 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}$, ***b***) < ***n***
- 定理4: n元齐次线性方程的解 $\mathbf{A}$***x***=***0*** ⇔ 有非零解 $R(\mathbf{A})$ < ***n***
- 定理5: 线性方程$\mathbf{A}$***x***$=$ $\mathbf{B}$有解的充要条件是（证明p77）$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}$，***x***)
- 定理6: 矩阵方程$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$有解的充要条件是（证明p77）$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
- 定理7: 设$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$，则$R(\mathbf{C}) \leq min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\}$（证明p77）
- 注明：（**线性方程**也称一次方程式。指[未知数]都是一次的方程。其一般的形式是ax+by+...+cz+d=0。线性方程的本质是等式两边乘以任何相同的非零数，方程的本质都不受影响）
  - 齐次线性方程 - 一定有解（0解或非0解）
  - 非齐次线性方程 - 不一定有解

第四章 向量组线性相关

- 向量***b***能由向量组A线形表示（线性方程组表示）

  ⇔ 方程$\mathbf{A}$***x*** = ***b***有解

  ⇔ R($\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,...,$\boldsymbol{a}_n$) = $\mathbf{R}$($\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,...,$\boldsymbol{a}_n$,***b***)
- 向量组B:$\boldsymbol{b}_1$,$\boldsymbol{b}_2$,...,$\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组A:$\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,...,$\boldsymbol{a}_m$ 线形表示 （线性方程组表示）

  ⇔ 方程$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解

  ⇔ $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

  ⇔ $R(\mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A})$

  ⇔ 存在矩阵$\mathbf{K}_{m \times l}$ 使$\mathbf{B} = \mathbf{AK}$
- 向量组等价（能相互线性表示）：

  ⇔ $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$
- 线性相关与线性无关

  向量组A:$\boldsymbol{a}_1$,$\boldsymbol{a}_2$,...,$\boldsymbol{a}_m$ 线形相关

  ⇔ 对于齐次线性方程，如果存在不全为0的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得 $k_1$$\boldsymbol{a}_1$ + $k_2$$\boldsymbol{a}_2$ + ... $k_m$$\boldsymbol{a}_m$ = 0（方程$\mathbf{A}$***x*** = ***0***有解）

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m) < m$

"线性无关"就是这个齐次线性方程组（1.1）只有零解（

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0}$$

）。

> ***线性相关***：在线性代数里，矢量空间的一组元素中，若没有矢量可用有限个其他矢量的线性组合所表示，则称为线性无关或线性独立 (linearly independent)，反之称为线性相关(linearly dependent)。例如在三维欧几里得空间R的三个矢量(1, 0, 0)，(0, 1, 0)和(0, 0, 1)线性无关；但(2, −1, 1)，(1, 0, 1)和(3, −1, 2)线性相关，因为第三个是前两个的和。

- 线性相关与线性表示的关系
    - 向量组A:$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$（$m \geq 2$） 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某个向量$\boldsymbol{a}_j$能由其余$m-1$个向量线性表示
    - 向量组A:$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关（R = m），向量组B:$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ (R<m+1 - R=m)线形相关，则向量$\boldsymbol{b}$能能由向量组A线性表示，且表示唯一。
- 向量组线性相关性的其它结论
    - 整体线性无关则部分也无关，整体线性相关则部分也相关
    - 向量个数比向量维数大的向量组线性相关（（0，1）（1，0）（1，1））证明：P90
- 向量组的最大无关组与向量组的秩：
    - 定义与等价定义

      向量组A，在A中选取r个向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_r$
        - 向量组A_0 ：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关。
        - 向量组A中任意$r+1$ 个向量（若存在）都线性相关，则称向量组A_0为A的一个最大线性无关向量组，简称最大无关组，向量组A的秩为$R_A = r$。0 组成向量组无最大无关组，秩为0。
    - 最大无关组的等价定义
        - 向量组A_0 ：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关。
        - 向量组A中任一向量都能由向量组A_0线性表示。
- 矩阵的秩等于它的***列向量组的秩***，也等于它的***行向量组的秩***。
- 线性方程组解的结构（齐次线性方程）
    - 性质1: 若$x = \xi_1, x = \xi_2$ 为向量方程$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解，则$x = \xi_1 + \xi_2$也是此向量方程的解。
    - 性质2: 若$x = \xi_1$是向量方程$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解，$k$为实数，则$\boldsymbol{x} = k\xi_1$也是此向量方程的解。
    - 齐次线性方程组的解集的***最大无关组***称为该其次线性方程的基础解系。（p91 定义5，最大无关组与秩）
- 线性方程组解的结构（非齐次线性方程组）
    - 设 $m \times n$ 矩阵$\mathbf{A}$的秩$R(\mathbf{A}) = r$，则n元其次线性方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解集$\mathbf{S}$的秩$R_s = n - r$ （*证明p97中已经化为了行最简形式*）
- 若$x = \eta_1, x = \eta_2$ 为向量方程$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解，则$x = \eta_1 - \eta_2$为对应的齐次线性方程组$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$的解。

- 设$x=\eta$是向量方程$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解,$x=\xi$是向量方程$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，则$x=\eta+\xi$仍是方程$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解。

- 定义6: 向量空间：设V为n维向量的集合，如果集合V非空。且集合V对于向量的加法以及数乘两种运算封闭，那么就成集合V为向量空间。所谓封闭，是指在集合V中可以进行向量的加法以及数乘两种运算，具体的说就是$a \in V, b \in V \rightarrow a+b \in V$；$a \in V, \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow a+b \in V$。
- 定义7：设有向量空间V_1及V_2，若$V_1 \subseteq V_2$，就称V_1是V_2的子空间。
- 定义8: 设V为向量空间，如果r个向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r \in V$，且满足
  - $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ 线性无关
  - V中任一向量都可由$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ 线性表示
  - 那么向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ 就称为向量空间V的一个基，r称为向量空间的维度，并称V为r维向量空间。
    - V维数为0，则只包含零向量
    - 把V看作向量组，则组大无关组就是r等于基
- 定义9: 如果在向量空间V中取定一个基$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$，那么$V$中任一向量$\boldsymbol{x}$ 可唯一地表示为$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+ ... +\lambda_r\boldsymbol{a}_r$，数组$\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_r$称为向量$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$，重的坐标，特别的单位坐标向量组称为$\mathbb{R}^n$ 的自然基。

第五章 相似矩阵及二次型

- 向量的内积、长度、正交

  两n维向量

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

  的内积为$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

非负实数$||x||=\sqrt{[x,x]}$ 称为向量$\boldsymbol{x}$的长度。**当$||x||$ = 1时，向量$\boldsymbol{x}$为单位向量。$\boldsymbol{0}$向量长度为0.**

当$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ = 0时，称向量$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$正交。零向量和任何向量都正交。

- 正交向量组

  一组俩俩正交的非零向量称为正交向量组。正交向量组一定线性无关。

  施密特正交化（标准正交化，把基底化为单位向量）：设向量组A： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_r$ 线性无关，令

$$b_1=a_1, b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{||b_1||^2}b_1, ..., b_r=a_r-...-\frac{[a_r,b_{r-1}]}{||b_{r-1}||^2}b_{r-1}, \tag{7}$$

则$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ 为正交向量向量组且与A等价。

- 正交矩阵

  若n阶矩阵$\mathbf{A}$满足$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$

  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$可逆， 且$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$

  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$的行或列向量组是$\mathbb{R}^n$ 的标准正交基

- 特征值和特征向量 设$\mathbf{A}$为n阶矩阵

  若有数λ 以及非零列向量ξ使，$\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$，则称$\lambda$是$\mathbf{A}$的特征值，$\xi$为对应特征值的特征向量。

  $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ = 0称为特征方程（行列式为0，表示不可逆，如果可逆则只有0解），特征方程的根就是$\mathbf{A}$的特征值。在复数范围内n阶矩阵有n个特征值。

  设$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$是$\mathbf{A}$的$n$个特征值则

  - $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a22 + \ldots + ann$
  - $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = det\mathbf{A}$，$\mathbf{A}$可逆 $\Leftrightarrow$特征值全不为0
  - λ 是一个特征值，则$\varphi(\lambda)$是矩阵$\varphi(\mathbf{A})$的特征值

设λ是方阵$\mathbf{A}$的特征值，则齐次方程 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})x = 0$的非零解就是方阵$\mathbf{A}$的对应于特征值$\lambda$的特征向量。不通特征值的特征向量线性无关。

- 相似矩阵 设$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为n阶矩阵

  若存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$，则称两个矩阵相似，若相似，则特征多项式和特征值都相同

  若矩阵$\mathbf{A}$与对角阵相似（$\mathbf{A}$能对角化），即若存在可逆矩阵$\mathbf{P}$使得
  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

  - 则$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$是矩阵$\mathbf{A}$的$n$个特征值
  - $\mathbf{P}$的第i个列向量是$\mathbf{A}$的对应特征值λ 的特征向量
  - 矩阵可以对角化的充要条件是存在n个线性无关的特征向量

- 对称矩阵的对角化

  对称矩阵的性质

  - 特征值都是实数
  - 不同特征值的特征向量正交
  - 对称矩阵$\mathbf{A}$，存在正交矩阵$\mathbf{P}$使得
    $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

- 对称矩阵对角化步骤

  - 求出$\mathbf{A}$的全部互不相等的特征值和它们对应的重根数
  - 对每个重根求$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})x = 0$的基础解系，得到重根个线性无关特征向量，再把它们正交化，单位化
  - 用这n个向量构成正交阵$\mathbf{P}$便有$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

二次型化标准形

- 见书130