微积分总结 Summary of Calculus

Hujiawei, 逸夫图书馆, 2014/4/26

第零部分 碎碎念

到了研究生阶段才意识到本科的数学原来作用这么大，不论是在数据挖掘，还是机器学习，亦或是模式识别，数学都是基础中的基础。于是乎，我在逸夫图书馆泡了几天看了些微积分、线代和数理统计的书籍，写下三份总结，记录下重要的知识，以备后忘。本人才疏学浅，若有错误之处还请指出，让我“增长”，若有不足也请指出，使我“完备”，谢谢！:-)

[注：这些总结不会详细地讲解所有概念，只是挑选一些我个人感觉比较有用的知识点进行总结，很多时候可能只是列举知识点，并无解释，忘记了的可以自行Wiki或者翻书，另外，为了节省写作时间，对于多重积分的计算和应用以及二阶的微分方程的求解我略过了，这部分暂时对我作用不大。另外，对于一些定理我并没有给出详细的表达，忽略了些前提条件，请不要较真，我希望的是给自己一个感性的理解就行，具体理性的分析需要的时候再查，还有就是我还剪切粘贴了很多图片...嗯，就是这样...强迫症者慎入...]

PS：本总结的大纲是按照参考书籍高等数学 中国环境出版社的目录结构来整理的，章节顺序有调整，我将无穷级数提前了，原书将这部分放在最后一章节，私以为不妥，每个小节标题下面一行的内容都是原书中的各个细分的小节内容。所有截图都来自参考书籍同济大学 高等数学 高等教育出版社。

参考书籍：

1.同济大学 高等数学 高等教育出版社

2.高等数学 中国环境出版社

它山之石：

1.武汉大学 黄正华老师写的微积分复习总结 上和下

第一部分 函数与极限

第一节 函数

集合、区间与邻域，函数的概念与性质，反函数与复合函数，初等函数

关于初等函数 wiki，初等函数在其定义域内都是连续的。

幂函数：$y=x^{\mu}$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数），

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$），

对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=e$[①]时，记为 $y=\ln x$），

三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等，

反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 例如

$$y=\sqrt{1-x^{2}}, \qquad y=\sin^{2}x, \qquad y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

关于指数函数：
对于相等间隔的自变量x的取值，指数函数对应值的比例为常数。由指数运算法则可知，对任意的x，只要给定$x_0>0$，则$a^{x+x_0}/a^{x}=a^{x_0}$恒成立。此性质可以作为判断两个变量之间的关系是否为指数函数关系的主要依据。此外，这个性质导出了数理统计中的指数分布，在数理统计中我们会看到。

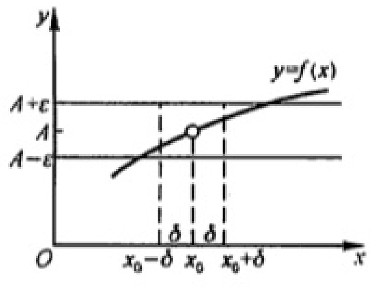
第二节 函数的极限

数列极限及性质，函数极限及性质，无穷小与无穷大，极限运算法则，极限存在准则和两个重要极限，无穷小的比较

关于收敛数列(极限存在)有两个性质：唯一性和有界性

关于函数极限，注意，$x\to x_0$的极限是否存在与函数在x_0是否有定义无关。函数极限的定义

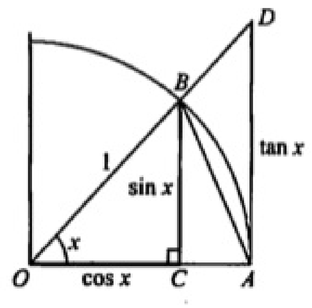
函数极限的几何意义是，当x在领域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内时，函数值y落在下图中$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内。



关于无穷小和无穷大：无穷小并不是指负无穷，而是函数在$x\to x_0$时的极限为0，无穷小与有解变量的乘积还是无穷小，但是这个性质放在无穷大上面就不成立了！例如，$\lim_{x\to+\infty}\frac{sinx}{x}=0$是无穷小，但是$\lim_{x\to+\infty}xcosx$不是无穷小，它不符合无穷小的定义，关于这个问题的讨论，上面仅代表我的理解，不知对否，若有错误请指出。

两个重要的极限：$\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}=1$ 和 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

关于极限$\lim_{x\to0}\frac{sinx}{x}=1$可用下图来解释，圆的边长是1，$BC=sinx,AD=tanx,\widehat{AB}=x$，在角度很小很小，即$x\to0$时，三者近似相等。



关于极限$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ (注意，不论是$\lim_{x\to+\infty}$还是$\lim_{x\to-\infty}$都成立)它道出了自然对数e到底是什么！当然还有其他的方式表示出e，比如按照级数展开的方式，我认为e是数学界最美丽的符号！$e\approx 2.71828$

这两个重要极限一般用于求复杂的函数的极限值。

第三节 函数的连续性与间断点

函数的连续性，函数的间断点

函数的间断点分为两类：
第一类是函数在$x=x_0$处间断，但是左右极限都存在，如果左右极限相等的话该间断点称为可去间断点，如果不相等称为跳跃间断点；
其他情况下的间断点都属于第二类间断点。

第四节 初等函数的连续性

连续函数四则运算的连续性，反函数与复合函数的连续性，初等函数的连续性

只要记住初等函数在它们的定义域内是连续就行了。

第五节 闭区间上连续函数的性质

最大值和最小值定理，介值定理与零点定理

最大值和最小值定理就是说在闭区间上的连续函数f(x)一定是有上下界的；

介值定理就是说在闭区间上的连续函数f(x)，如果左右端点的取值不同，例如$f(a)=A,f(b)=B$，那么区间中肯定有一点的函数值能够取到$[A,B]$之间的任何一个值；

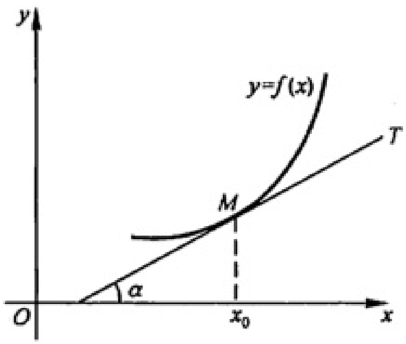
零点定理就是说在闭区间上的连续函数f(x)，如果左右端点的取值异号，例如$f(a)=A>0,f(b)=B<0$，那么区间中肯定有一点的函数值为0！

第二部分 导数与微分

第一节 导数概念

引例，导数的定义，导数的几何意义，可导与连续的关系

导数的几何意义就是曲线在某点的切线的斜率，反应了变化的快慢，理解这个很重要，后面的偏导数的理解也类似。如果用物体的运动来解释的话，导数就是物体在那个时刻的加速度了。



第二节 函数的求导法则

函数的和、差、积、商的求导法则，反函数的求导法则，复合函数的求导法则，基本求导法则与导数公式

关于反函数的求导法则：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

关于复合函数的求导法则：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

关于基本初等函数求导法则

1．常数和基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$，　　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，

(3) $(\sin x)'=\cos x$，　　(4) $(\cos x)'=-\sin x$，

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$，　　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$，

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$，　　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$，　　(10) $(e^x)'=e^x$，

(11) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，　　(12) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，

(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

2．函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$都可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$，　　(2) $(Cu)'=Cu'$（C 是常数），

(3) $(uv)'=u'v+uv'$，　　(4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq0)$.

第三节 高阶导数

二阶及二阶以上的导数称为高阶导数

第四节 隐函数及其参数方程所确定的函数的导数

隐函数的导数，由参数方程所确定的函数的导数

如果方程$F(x, y) = 0$确定了y是x的函数，那么这样的函数就叫做隐函数。
一般它的求导分为两种方法：
(1)如果能够解出$y = f(x)$关系式的话(即隐函数显化)，就先解出然后求导；
(2)如果不能解出，那么就利用复合函数求导方式进行求导，例如两边同时对x求导，遇到复杂的还可以两边先取对数然后求导。

第五节 函数的微分

微分的定义，微分的几何意义，基本微分公式与微分法则，微分形式的不变性，微分的应用

先看看微分是怎么引入的？

先分析一个具体问题.一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由x_0变到$x_0 + \Delta x$（图 2 - 10)，问此薄片的面积改变了多少？

设此薄片的边长为x，面积为A，则A与x存在函数关系：$A = x^2$.薄片受温度变化的影响时面积的改变量，可以看成是当自变量x自x_0取得增量Δx时，函数$A = x^2$相应的增量ΔA，即

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

从上式可以看出，ΔA分成两部分，第一部分$2x_0\Delta x$是Δx的线性函数，即图中带有斜线的两个矩形面积之和，而第二部分$(\Delta x)^2$在图中是带有交叉斜线的小正方形的面积，当$\Delta x \to 0$时，第二部分$(\Delta x)^2$是比Δx高阶的无穷小，即$(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$.由此可见，如果边长改变很微小，即$|\Delta x|$很小时，面积的改变量$\Delta A$可近似地用第一部分来代替.

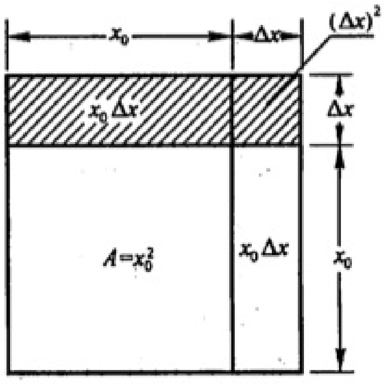


图 2 - 10

一般的，如果函数$y = f(x)$满足一定条件，则增量Δy可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中A是不依赖于Δx的常数，因此$A\Delta x$是Δx的线性函数，且它与Δy之差

$$\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$$

是比Δx高阶的无穷小.所以，当$A \neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，我们就可以用Δx的线性函数$A\Delta x$来近似代替Δy.

简言之，在实际应用中，常常需要知道当自变量x有细微变化的时候，函数y的变化量Δy是多少？为了方便计算，我们需要将增量表达式线性化处理，从而计算出Δy的近似值。如上面所示，我们只需要用$A \Delta x$来近似代替Δy。

微分的几何意义，这其实是数学中常用的非线性函数的局部线性化，这里是利用曲线的切线段(MP)来近似代替曲线段(MN)。

线上另一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. 从图 2－11 可知：

$$MQ=\Delta x,$$
$$QN=\Delta y.$$

过点 M 作曲线的切线 MT，它的倾角为 α，则

$$QP=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0),$$

即
$$\mathrm{d}y=QP.$$

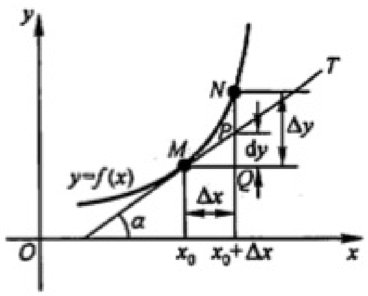


图 2－11

由此可见，对于可微函数 $y=f(x)$ 而言，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的点的纵坐标的增量时，$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此在点 M 的邻近，我们可以用切线段来近似代替曲线段. 在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数，在几何上就是局部用切线段近似代替曲线段，这在数学上称为非线性函数的局部线性化，这是微分学的基本思想方法之一. 这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中是经常采用的.

微分最大的应用就是求近似值，利用$\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x$。例如，求$\sqrt[3]{1.02}$的近似值，取函数$f(x)=\sqrt[3]{x}, x_0=1, \Delta x=0.02$即可。

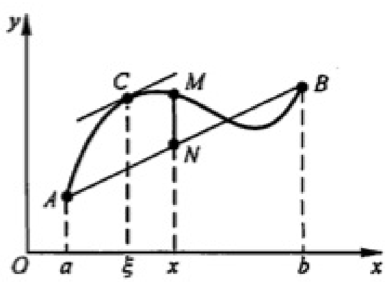
第三部分 微分中值定理与导数的应用

第一节 微分中值定理

罗尔中值定理，拉格朗日中值定理，泰勒中值定理，柯西中值定理

罗尔中值定理就是说对于在区间(a,b)上的连续可导函数f(x)，若左右端点的函数值相等，那么区间内至少有一个点满足它的导数为0，即$f'(\varepsilon)=0, \varepsilon\in(a,b)$；

拉格朗日中值定理就是说对于在区间(a,b)上的连续可导函数f(x)，区间内至少有一个点满足$f'(\varepsilon)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}, \varepsilon\in(a,b)$，该定理就没有罗尔中值定理的条件那么严格了，所以后者是前者的一个特殊情况。拉格朗日中值定理的几何意义如下，曲线在C点处的切线平行于弦AB；



柯西中值定理就扩展到区间(a,b)上的两个连续可导函数f(x)和F(x)，区间内至少有一个点满足$\frac{f'(\varepsilon)}{F'(\varepsilon)}=\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}, \varepsilon\in(a,b)$。

当$F(x)=x$时，$F(a)=a, F(b)=b$，即有$f(a)-f(b)=f'(\varepsilon)(a-b), \varepsilon \in (a,b)$，这个式子是不是就是拉格朗日中值定理的内容？

泰勒中值定理略过，和后面泰勒展开式差不多。

第二节 洛必达法则

0/0型未定式，∞/∞型未定式，其他类型未定式

洛必达法则很重要，因为很多时候我们总是会遇到各种不同特殊形式的未定式，它们的极限可以试试使用洛必达法则来求。

条件略过，简言之就是$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$，也就是说我们可以先对分子分母求导然后求极限。

第三节 函数单调增减性及曲线的凸凹性

函数的单调性，曲线的凹凸性及拐点

驻点：函数f(x)一阶导数为0的点，根据它的正负可以判断函数的单调性，大于0为单调递增；
拐点：函数f(x)二阶导数为0的点，根据它的正负可以判断函数的凹凸性，大于0为凹的；

第四节 函数的极值与最大值、最小值

极值的定义，极值存在的条件，最大值、最小值

极值存在的条件就是判断该点和该点两边的一阶导数的正负情况。

第五节 函数图形的描绘

要根据函数的极值和最值以及渐近线来近似绘图

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下：

第一步 确定函数 $y=f(x)$的定义域及函数所具有的某些特性(如奇偶性、周期性等)，并求出函数的一阶导数 $f'(x)$和二阶导数 $f''(x)$；

第二步 求出一阶导数 $f'(x)$和二阶导数 $f''(x)$在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$的间断点及 $f'(x)$和 $f''(x)$不存在的点，用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间；

第三步 确定在这些部分区间内 $f'(x)$和 $f''(x)$的符号，并由此确定函数图形的升降和凹凸，极值点和拐点；

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；

第五步 算出 $f'(x)$和 $f''(x)$的零点以及不存在的点所对应的函数值，定出图形上相应的点；为了把图形描绘得准确些，有时还需要补充一些点；然后结合第三、四步中得到的结果，联结这些点画出函数 $y=f(x)$的图形.

第四部分 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

原函数与不定积分的概念，基本积分表，不定积分的性质

连续函数一定有原函数，而且原函数肯定是无穷多个的，它们组成了一个原函数族，这就是不定积分的概念，函数f(x)的不定积分$\int f(x)dx$在几何上就表示$f(x)$积分曲线族。

积分基本上就是微分的逆运算，所以积分表只要参照常用函数的微分表即可。

第二节 换元积分法

第一类换元积分法（凑微分法），第二类积分换元法，分部积分法

很多时候被积函数不都是常见的初等函数，遇到复杂的情况我们需要使用其他的方法来计算积分。假设我们要求不定积分$\int g(x)dx$

(1)如果我们有一个函数关系$u=h(x), g=f(u)$，也就是说，被积函数g(x)是关于u的函数，而u又是关于x的函数，为什么要这么复杂呢？因为g(x)直接积分比较难，但是可以将它看成$g(x)=f(u)\cdot u'=f[h(x)]\cdot h'(x)$，那么就有

$$\int g(x)dx=\int f[h(x)]\cdot h'(x)dx=\int f[h(x)]d(h(x))=[\int f(u)du]_{u=h(x)}=F(u)+C$$

这样我们就将对g(x)求积分变成了对$u=h(x)$求积分，这就是第一类换元积分法。例如，求$\int \frac{1}{1+2x}\,dx$，令$u=1+2x$即可。

(2)如果我们有一个函数关系$x=h(t)$，也就是说，第一类换元积分是找一个函数$u=h(x)$，利用du和dx的关系将dx替换掉，而第二类是直接找到x关于t的函数，这样$dx=h'(t)dt$就可以将dx替换掉了，那么$\int g(x)dx=[\int g[h(t)]h'(t)dt]_{t=h^{-1}(x)}$，这种换元积分法就是第二类换元积分法。例如，求$\int \frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$，令$t=\sqrt{x-3}$，即$x=t^2+3$即可。

分部积分法，如果函数u=u(x)和函数v=v(x)具有连续导数，则有$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$，通常还简写为$\int udv=uv-\int vdu$，这种方法自然常用求两个函数乘积的积分，例如，求$\int xcosxdx$。

第四节 有理函数的积分

有理函数的积分，可化为有理函数的积分举例

有理函数是指两个多项式的商，即形如$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m}$，若有$m>n$则为真分式，否则为假分式。利用多项式的除法，总可以将一个假分式分解成一个多项式和一个真分式的和的形式。任何一个有理真分式都可以分解为以下四类最简分式之和：

$$\frac{A}{x-a},\frac{A}{(x-a)^n},\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\qquad(n\geq 2,p^2-4q<0)$$

若有理真分式的分母中含有因式$(x-a)^n$，那么分式中含有：

$$\frac{A1}{x-a}+\frac{A2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{An}{(x-a)^n}$$

若有理真分式的分母中含有因式$(x+px+q)^n$，那么分式中含有：

$$\frac{A1}{x+px+q}+\frac{A2}{(x+px+q)^2}+\cdots+\frac{An}{(x+px+q)^n}$$

对于系数，可以在确定了最简分式的组合之后利用待定系数就可求出来。

第五部分 定积分及其应用

第一节 定积分的概念

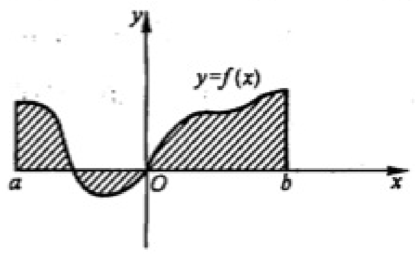
引例，定积分的概念，定积分的几何意义，定积分的基本性质

为什么会有定积分？定积分最开始是为了解决平面内不规则图形的面积或者不规则物体的体积而提出的实际问题。但是，这个问题直到17世纪牛顿和莱布尼茨发现了微分和积分之间的内在联系之后，提出了计算定积分的基本方法。需要注意的是，定积分并不是直接就建立在不定积分之上的，不是有了不定积分才有了定积分，两者是不同的概念，但是又有内在联系！这个联系就是牛顿-莱布尼茨公式！

不定积分是微分的逆运算，它是函数f(x)的原函数，是由无穷多个函数组成的函数族；而定积分是一个确定的数值，是一种特殊的和的极限(定积分常常使用**分割-近似代替-求和-取极限**的方式来解释)，该数值与积分变量使用的字母无关，即$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$。

如果函数f(x)在区间(a,b)上连续或者在[a,b]上有界且只有有限个间断点，则函数f(x)在[a,b]上可积。

定积分的几何意义自然就是曲线与坐标轴和代表积分区间的直线围成的曲边梯形的面积。这个面积可正可负，定积分是这些面积的代数和(即有加有减)，如下便有$\int_a^b =S1-S2+S3$。



定积分的性质：$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx,(a>b)$

定积分中值定理：函数f(x)在区间[a,b]上连续，则在[a,b]上至少有一点满则
$\int_a^b f(x)dx=f(\varepsilon)(b-a),a\le\varepsilon\le b$，这个中值定理(又叫中值公式)和微分中的拉格朗日中值定理的结构很相似，但是几何意义完全不同了，**拉格朗日中值定理指的是微分也就是斜率相等，而定积分中值定理的几何意义指的其实就是面积相等！**如果用物体运动来解释的话，那就是$f(\varepsilon)$其实就是物体在a到b的时间段内的平均速度，平均速度乘以运动时间就是总位移了。

不论 $a<b$ 或 $a>b$ 都是成立的.

积分中值公式有如下的几何解释：在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得以区间 $[a,b]$ 为底边、以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积（图 5－5）.

按积分中值公式所得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值. 例

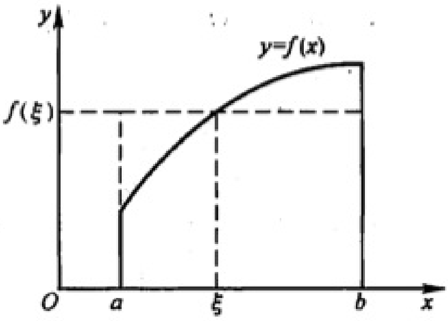


图 5－5

第二节 微积分的基本定理

变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系，积分上限函数及其导数，牛顿一莱布尼兹公式

如果我们用物体的运动来解释定积分的话，那么定积分 $\int_a^b vdt$ 表示的就是物体从时刻a到时刻b内运动的位移。

积分上限函数，这个函数很重要，而且来源有些巧妙，正是这个函数引出了后面的牛顿-莱布尼茨公式。

假设x是区间[a,b]上的任意一点，那么对于区间[a,x]上的定积分 $\int_a^x f(x)dx$，因为定积分与积分变量的字母无关，即 $\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(t)dt$，如果积分上限x在区间[a,b]上任意变动的话，那么对于任意一个x，定积分都有一个值对应，所以它在区间[a,b]上定义了一个函数！假设这个函数记为 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,(a\le x\le b)$，该函数不仅是连续的，而且可导，导数就是f(x)。由此联想下原函数的定义，我们发现一个结论，**一个连续函数f(x)的原函数是存在的，而且这个原函数之一就是它对应的积分上限函数**！这就表明了积分学中的定积分和原函数之间的联系！

在上面的基础之上，便有了牛顿-莱布尼茨公式！它就更加巧妙地找到了定积分的计算和原函数之间的联系，即 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，**这个公式的意义就是一个连续函数在区间[a,b]上的定积分等于它的任一原函数在该区间上的增量！**

第三节 定积分的换元法和分部积分法

定积分的换元法，定积分的分部积分法

求定积分方法其实和求不定积分的方法差不多，找到了原函数然后使用牛顿-莱布尼茨公式即可。

第四节 反常积分

无穷限的反常积分，无界函数的反常积分

反常积分有两类：
一类是指函数是无穷限的，也就是积分区间是从[−∞,b]或者从[a,+∞]或者从[−∞,+∞]，即区间包含了无穷，这一类要考虑函数f(x)在无穷限时极限是否存在，如果存在则根据牛顿-莱布尼茨公式即可求解，如果不存在那么反常积分发散；
一类是指函数是无界的，也就是函数f(x)在a的领域内是无界的，也就是趋近±∞，此时a称为瑕

点(无界间断点)，如果极限$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx,(t>a)$存在则根据牛顿-莱布尼茨公式即可求解，否则它就是发散的。

第五节 定积分的应用

定积分的元素法，定积分的几何应用，定积分的物理应用

定积分的应用自然是和定积分概念引入时一样，主要是为了计算面积和体积。元素法是定积分计算的老办法，也就是四部曲(**分割-近似代替-求和-取极限)**。

面积的计算包括直角坐标和极坐标下两种情况，定积分还可以用来计算旋转体的体积

例 2 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解 这个图形如图 6－3 所示.为了定出这图形所在的范围,先求出所给抛物线和直线的交点.解方程组

$$\begin{cases} y^2=2x, \\ y=x-4, \end{cases}$$

得交点(2,－2)和(8,4),从而知道这图形在直线 $y=-2$ 及 $y=4$ 之间.

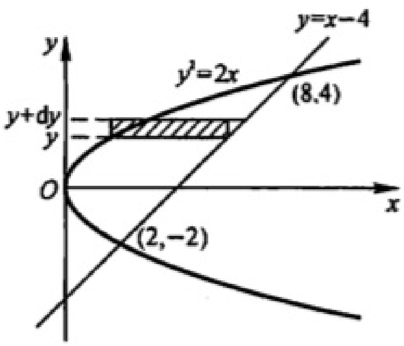


图 6－3

现在,选取纵坐标 y 为积分变量,它的变化区间为$[-2,4]$(读者可以思考一下,取横坐标 x 为积分变量,有什么不方便的地方).相应于$[-2,4]$上任一小区间$[y,y+dy]$的窄条面积近似于高为 dy、底为$(y+4)-\frac{1}{2}y^2$ 的窄矩形的面积,从而得到面积元素

$$dA=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy.$$

以$\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy$ 为被积表达式,在闭区间$[-2,4]$上作定积分,便得所求的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4} \\ &= 18. \end{aligned}$$

1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体.这直线叫做旋转轴.圆柱、圆锥、圆台、球体可以分别看成是由矩形绕它的一条边、直角三角形绕它的直角边、直角梯形绕它的直角腰、半圆绕它的直径旋转一周而成的立体,所以它们都是旋转体.

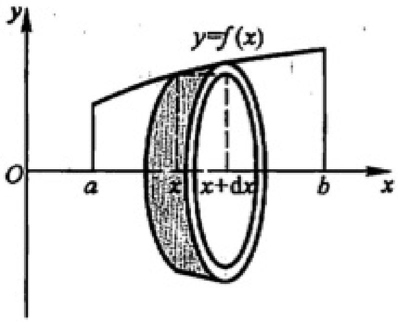


图 6-8

上述旋转体都可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体.现在我们考虑用定积分来计算这种旋转体的体积.

取横坐标 x 为积分变量,它的变化区间为 $[a,b]$.相应于 $[a,b]$ 上的任一小区间 $[x,x+dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径、dx 为高的扁圆柱体的体积(图 6-8),即体积元素

$$dV=\pi[f(x)]^2dx.$$

以 $\pi[f(x)]^2dx$ 为被积表达式,在闭区间 $[a,b]$ 上作定积分,便得所求旋转体体积为

$$V=\int_a^b\pi[f(x)]^2dx.$$

定积分还可以用来求平面曲线的弧长，例子略过。

第六部分 无穷级数

第一节 常数项级数的概念与基本性质

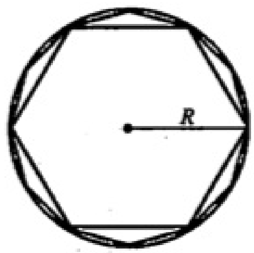
常数项级数的概念，常数项级数的基本性质

无穷级数的思想来源于近似计算圆面积这个问题，考虑用内接正方形来近似计算。

例如计算半径为 R 的圆面积 A，具体做法如下：作圆的内接正六边形，算出这六边形的面积 a_1，它是圆面积 A 的一个粗糙的近似值．为了比较准确地计算出 A 的值，我们以这个正六边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形(图 12－1)，算出这六个等腰三角形的面积之和 a_2．那么 a_1+a_2 （即内接正十二边形的面积）就是 A 的一个较好的近似值．同样地，在这正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这十二个等腰三角形的面积之和 a_3．那么 $a_1+a_2+a_3$ （即内接正二十四边形的面积）是 A 的一个更好的近似值．如此继续下去，内接正 3×2^n 边形的面积就逐步逼近圆面积：

$$A\approx a_1, A\approx a_1+a_2, A\approx a_1+a_2+a_3, \cdots,$$

$$A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n.$$



如果内接正多边形的边数无限增多，即 n 无限增大，则和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的极限就是所要求的圆面积 A．这时和式中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子．

数列$\{u_n\}$的元素之和得到的表达式$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$就叫做(常数项)(无穷)级数，其前n项之和又可以组成一个新的数列$\{s_n\}$，即$s_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$，一般项s_n称为部分和。

如果部分和数列$\{s_n\}$有极限，那么这个无穷级数$u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$就是收敛的，极限s就叫做这个无穷级数的和。

级数收敛的必要条件是它的一般项u_n趋近于0，但不是充分条件！比如，调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$的一般项$u_n=\frac{1}{n}$也是趋近于0的，但是调和级数是发散的，采用反证法即可证明得到，证明如下，$s_{2n}-sn>\frac{1}{2}$并不趋近于0，所以不收敛。

注意　级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件．有些级数虽然一般项趋于零，但仍然是发散的．例如，调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{5}$$

虽然它的一般项 $u_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，但是它是发散的．现在我们用反证法证明如下：

假若级数(5)收敛，设它的部分和为 s_n，且 $s_n\to s\ (n\to\infty)$．显然，对级数(5)的部分和 s_{2n}，也有 $s_{2n}\to s\ (n\to\infty)$．于是

$$s_{2n}-s_n\to s-s=0 \quad (n\to\infty).$$

但另一方面

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}=\frac{1}{2},$$

第二节 常数项级数敛散性的判别方法

正项级数及其敛散性的判别方法，交错级数及其敛散性的判别方法，绝对收敛与条件收敛

正项级数$u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{s_n\}$有界。

比值审敛法，对于正项级数$u_n = \Sigma_{i=1}^{n} u_i$，若$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta$，当$\beta > 1$时级数发散，当$\beta < 1$时级数收敛，当$\beta = 1$时级数可能发散可能收敛。

还有其他的一些判断级数收敛的方法，略过。

第三节 幂级数

函数项级数的基本概念，幂级数及其敛散性，幂级数的运算，函数展开成幂级数，幂级数在近似计算中的应用

函数项级数就是定义在某个区间上的函数族之和，表达式类似$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$，对于某个确定的值$x = x_0$，函数项级数$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$就变成常数项级数，如果该常数项级数收敛的话，那么点x_0就是函数项级数在定义区间上的一个收敛点，所有收敛点就组成了收敛域。

幂级数就是最常用的一类函数项级数，它的形式如下：

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

一种判断幂级数收敛的办法是阿贝尔定理，如果级数$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$当$x = x_0 (x_0 \neq 0)$时收敛，那么对于开区间$(-|x_0|, |x_0|)$内的任何x都有幂级数收敛，反之，如果当$x = x_0 (x_0 \neq 0)$时发散，那么对于闭区间$[-|x_0|, |x_0|]$外的任何x都有幂级数发散。其实就是对于幂级数的收敛半径R内部任意x都收敛，外部都发散！

许多应用中，我们都希望知道如何将一个给定的函数f(x)展开成幂级数的形式，这样相当于对函数进行近似了，可以大大简化计算量，于是便有了泰勒级数！

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内能展开成幂级数，即有

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots, x\in U(x_0), \tag{1}$$

那么，根据和函数的性质，可知 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内应具有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(x)=n!\,a_n+(n+1)!\,a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}(x-x_0)^2+\cdots,$$

由此可得 $$f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n,$$

于是 $$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{2}$$

这就表明，如果函数 $f(x)$ 有幂级数展开式(1)，那么该幂级数的系数 a_n 由公式(2)确定，即该幂级数必为

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \tag{3}$$

而展开式必为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, x\in U(x_0). \tag{4}$$

幂级数(3)叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数．展开式(4)叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒展开式．

由以上讨论可知，函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内能展开成幂级数的充分必要条件是泰勒展开式(4)成立，也就是泰勒级数(3)在 $U(x_0)$ 内收敛，且收敛到 $f(x)$．

特别地，当 $x_0=0$ 时泰勒级数又叫麦克劳林级数，展开式称为麦克劳林展开式

$$f(x)=\Sigma_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}f^{n}(0)x^n$$

将函数展开成幂级数的步骤：

要把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，可以按照下列步骤进行：

第一步　求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$，如果在 $x=0$ 处某阶导数不存在，就停止进行，例如在 $x=0$ 处，$f(x)=x^{7/3}$ 的三阶导数不存在，它就不能展开为 x 的幂级数．

第二步　求出函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值：

$$f(0),f'(0),f''(0),\cdots,f^{(n)}(0),\cdots.$$

第三步　写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

并求出收敛半径 R．

第四步 利用余项 $R_n(x)$ 的表达式 $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$ $(0<\theta<1)$，考察当 x 在区间 $(-R,R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限是否为零. 如果为零，则函数 $f(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内的幂级数展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\ (-R<x<R).$$

例如，对于函数e^x幂级数展开

例 1 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 所给函数的各阶导数为 $f^{(n)}(x)=e^x\ (n=1,2,\cdots)$，因此 $f^{(n)}(0)=1$ $(n=0,1,2,\cdots)$，这里 $f^{(0)}(0)=f(0)$. 于是得级数

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

它的收敛半径 $R=+\infty$.

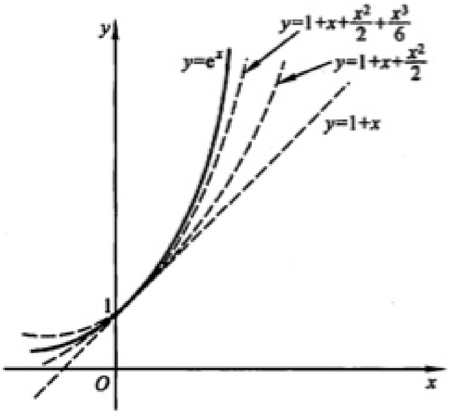
对于任何有限的数 x、ξ（ξ 在 0 与 x 之间），余项的绝对值为

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因 $e^{|x|}$ 有限，而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项，所以当 $n\to\infty$ 时，$e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$，即当 $n\to\infty$ 时，有 $|R_n(x)|\to 0$. 于是得展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty). \tag{7}$$

如果在 $x=0$ 处附近，用级数的部分和（即多项式）来近似代替 e^x，那么随着项数的增加，它们就越来越接近于 e^x，如图 12－4 所示.



常用的幂级数：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{7}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{8}$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\quad(-1<x<1).\tag{9}$$

利用这三个展开式,可以求得许多函数的幂级数展开式.例如

对(9)式两边从 0 到 x 积分,可得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(-1<x\leqslant 1);\tag{10}$$

对(8)式两边求导,即得

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad(-\infty<x<+\infty);\tag{11}$$

第七部分 向量代数与空间解析几何

本部分是多元微分学的基础，而且涉及到了很多的空间知识，图形比较多，所以这部分的图片比较多，如若不清晰请Wiki或者翻书查看。

第一节 空间直角坐标系

空间点的直角坐标，空间两点的距离

第二节 向量代数

向量的概念，向量的线性运算，向量的坐标，向量的模、方向角、投影，向量的数量积与向量积

方向角和方向余弦的概念：

2. 方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.从图 8－15 可见,设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,由于 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值,$MP\perp OP$,故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},$$

类似可知

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

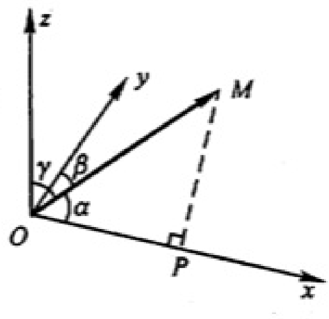


图 8－15

从而 $$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e}_r.$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦. 上式表明,以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$. 并由此可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

投影的概念，投影是一个数值，当投影是指是一个向量 $\vec{r}$ 在另一个向量 $\vec{u}$ 上的投影时，投影就是投影到目标向量上得到的向量的模与目标向量的单位向量的模的比值。

3. 向量在轴上的投影

如果撇开 y 轴和 z 轴,单独考虑 x 轴与向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 的关系,那么从图 8-15可见,过点 M 作与 x 轴垂直的平面,此平面与 x 轴的交点即是点 P. 作出点 P,即得向量 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴上的分向量 $\overrightarrow{OP}$,进而由 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,便得向量在 x 轴上的坐标 x,且 $x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha$.

一般的,设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴(图 8-16). 任给向量 $\boldsymbol{r}$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M' (点 M' 叫做点 M 在 u 轴上的投影),则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

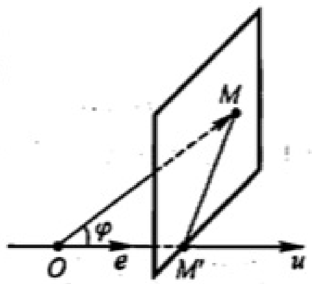


图 8-16

按此定义,向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x、a_y、a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},\ a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},\ a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a},$$

或记作 $$a_x=(\boldsymbol{a})_x,a_y=(\boldsymbol{a})_y,a_z=(\boldsymbol{a})_z.$$

由此可知,向量的投影具有与坐标相同的性质:

性质 1 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ (即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$),

其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角;

性质 2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$);

性质 3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$ (即 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$).

向量的数量积的概念，即$ab=|a||b|\cos\theta$，在物理中就是指力F做的功W。数量积又叫内积，是很重要的概念，在线代中同样有矩阵内积的概念，在数据挖掘中有一种很常用的度量相似度的方式，即余弦相似度，一般用于文本类似的数据求相似度。向量的向量积是$ab=|a||b|\sin\theta$。

设一物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 8－18).

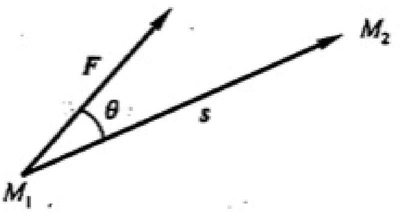


图 8－18

从这个问题看出，我们有时要对两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 作这样的运算，运算的结果是一个数，它等于 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积. 我们把它叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (图 8－19)，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

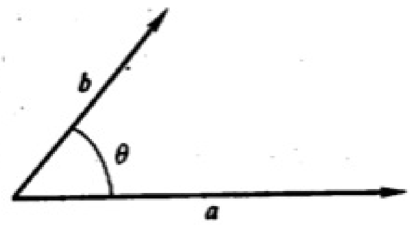


图 8－19

根据这个定义，上述问题中力所作的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，即

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，用 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 来表示这个投影，便有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b},$$

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

这就是说，两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

第三节 平面及其方程

平面的点法式方程，平面的一般方程，两平面的夹角

已知一个平面内的一点和这个平面的法向量便可以确定一个平面了；其实，任何一个三元一次方程$Ax+By+Cz+D=0$都可以确定一个平面，其法向量就是(A,B,C)。

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量．容易知道，平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直．

因为过空间一点可以作而且只能作一平面垂直于一已知直线，所以当平面 Π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为已知时，平面 Π 的位置就完全确定了．下面我们来建立平面 Π 的方程．

设 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上的任一点（图 8－51）．那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法线向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即它们的数量积等于零

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

由于　$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 x,y,z 所满足的方程．

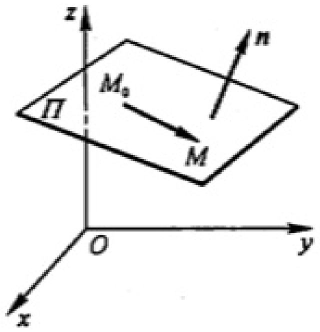


图 8－51

反过来，如果 $M(x,y,z)$ 不在平面 Π 上，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直，从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq 0$，即不在平面 Π 上的点 M 的坐标 x,y,z 不满足方程(1)．

由此可知，平面 Π 上的任一点的坐标 x,y,z 都满足方程(1)；不在平面 Π 上的点的坐标都不满足方程(1)．这样，方程(1)就是平面 Π 的方程，而平面 Π 就是方程(1)的图形．由于方程(1)是由平面 Π 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 确定的，所以方程(1)叫做平面的点法式方程．

由于平面的点法式方程(1)是 x、y、z 的一次方程，而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定，所以任一平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来，设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{2}$$

我们任取满足该方程的一组数 x_0,y_0,z_0，即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3}$$

把上述两等式相减，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{4}$$

把它和平面的点法式方程(1)作比较，可以知道方程(4)是通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法线向量的平面方程. 但方程(2)与方程(4)同解，这是因为由(2)减去(3)即得(4)，又由(4)加上(3)就得(2). 由此可知，任一三元一次方程(2)的图形总是一个平面. 方程(2)称为平面的一般方程，其中 x、y、z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

例如，方程

$$3x-4y+z-9=0.$$

表示一个平面，$\boldsymbol{n}=(3,-4,1)$是这平面的一个法线向量.

对于一些特殊的三元一次方程，应该熟悉它们的图形的特点.

当 $D=0$ 时，方程(2)成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个通过原点的平面.

当 $A=0$ 时，方程(2)成为 $By+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$垂直于 x 轴，方程表示一个平行于 x 轴的平面.

两个平面的夹角可用两个平面的法向量之间的夹角来得到。

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ（图 8－53）应是 $(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 和 $(\widehat{-\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})=\pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 两者中的锐角，因此，$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式，平面 Π_1 和平面 Π_2 的夹角 θ 可由

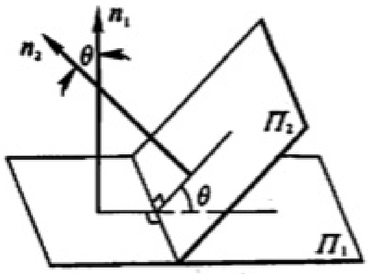


图 8－53

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{6}$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论：

Π_1、Π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

Π_1、Π_2 互相平行或重合相当于 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

第四节 空间直线及其方程

空间直线的一般方程，空间直线的对称式方程与参数方程，两直线的夹角，直线与平面的夹角

两个平面的交线就可以确定一条空间直线；已知直线上一点和直线的方向向量也可以确定一条直线。

空间直线 L 可以看做是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线（图 8－55）. 如果两个相交的平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，那么直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程，即应满足方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases} \tag{1}$$

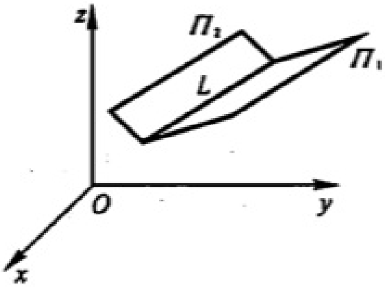


图 8－55

反过来，如果点 M 不在直线 L 上，那么它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上，所以它的坐标不满足方程组(1). 因此，直线 L 可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，把它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线 L.

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线，所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一方向向量 $s=(m,n,p)$ 为已知时，直线 L 的位置就完全确定了．下面我们来建立这直线的方程．

设点 $M(x,y,z)$ 是直线 L 上的任一点，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 L 的方向向量 s 平行（图 8－56）．所以两向量的对应坐标成比例，由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$s=(m,n,p)$，从而有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.\text{①} \tag{2}$$

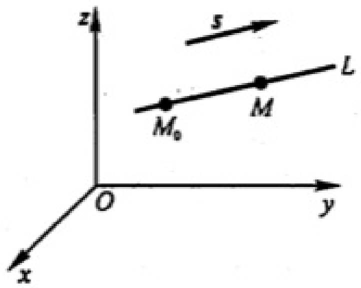


图 8－56

反过来，如果点 M 不在直线 L 上，那么由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 s 不平行，这两向量的对应坐标就不成比例．因此方程组(2)就是直线 L 的方程，叫做直线的对称式方程或点向式方程．

直线的任一方向向量 s 的坐标 m、n、p 叫做这直线的一组方向数，而向量 s 的方向余弦叫做该直线的方向余弦．

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程．如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

那么

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \tag{3}$$

方程组(3)就是直线的参数方程．

两条直线之间的夹角可用两条直线的方向向量之间的夹角来得到

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $s_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $s_2=(m_2,n_2,p_2)$，那么 L_1 和 L_2 的夹角 φ 应是 $(\widehat{s_1,s_2})$ 和 $(\widehat{-s_1,s_2})=\pi-(\widehat{s_1,s_2})$ 两者中的锐角，因此 $\cos\varphi=|\cos(\widehat{s_1,s_2})|$. 按两向量的夹角的余弦公式，直线 L_1 和直线 L_2 的夹角 φ 可由

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{5}$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论：

两直线 L_1、L_2 互相垂直相当于 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

两直线 L_1、L_2 互相平行或重合相当于 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

直线与平面之间的夹角可用直线的方向向量和平面的法向量之间的夹角来得到。

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\ \left(0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 称为直线与平面的夹角(图 8－57)，当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

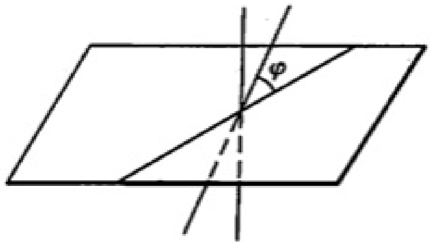


图 8－57

设直线的方向向量为 $s=(m,n,p)$，平面的法线向量为 $n=(A,B,C)$，直线与平面的夹角为 φ，那么 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-(\widehat{s,n})\right|$，因此 $\sin\varphi=|\cos(\widehat{s,n})|$.

按两向量夹角余弦的坐标表示式，有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{6}$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法线向量平行，所以，直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{7}$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法线向量垂直，所以，直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{8}$$

第五节 曲面及其方程

曲面方程的概念，旋转曲面，柱面，二次曲面

曲面方程

像在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样，在空间解析几何中，任何曲面都看做点的几何轨迹．在这样的意义下，如果曲面 S 与三元方程

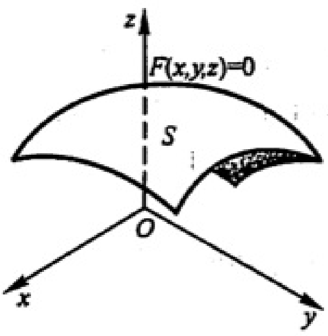
$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

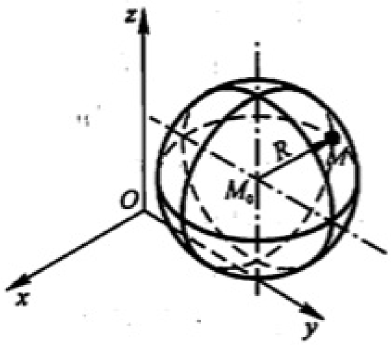
有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1)；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(1)，

那么，方程(1)就叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫做方程(1)的图形(图 8-28)．





旋转曲面：平面内一条曲线绕着平面上的一条直线旋转一周得到的曲面叫做旋转曲面。

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C,它的方程为

$$f(y,z)=0,$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(图 8-30).它的方程可以求得如下:

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 C 上的任一点,那么有

$$f(y_1,z_1)=0. \tag{3}$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时,点 M_1 绕 z 轴转到另一点 $M(x,y,z)$,这时 $z=z_1$ 保持不变,且点 M 到 z 轴的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|.$$

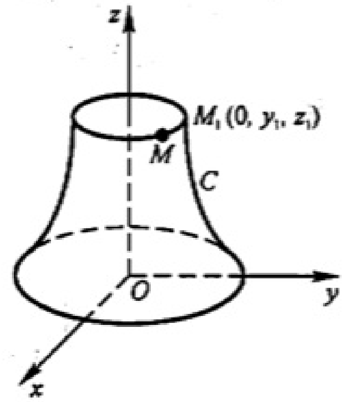


图 8-30

将 $z_1=z,y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入(3)式,就有

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0, \tag{4}$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可知,在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

同理,曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0. \tag{5}$$

柱面：一条直线绕着一条定曲线平行移动得到的轨迹称为柱面。

凡是通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x,y,0)$，且平行于 z 轴的直线 l 都在这曲面上，因此，这曲面可以看做是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的．这曲面叫做圆柱面（图 8－34），xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 叫做它的准线，这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线．

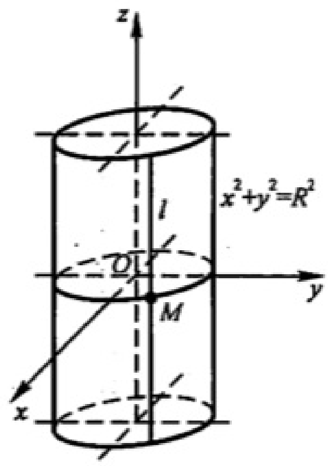


图 8－34

一般的，直线 L 沿定曲线 C 平行移动形成的轨迹叫做柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线．

上面我们看到，不含 z 的方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示圆柱面，它的母线平行于 z 轴，它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$．

类似地，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$，该柱面叫做抛物柱面（图 8－35）．

二次曲面on wiki，与平面解析几何中定义二次曲线类似，三元二次方程$F(x,y,z)=0$所表示的曲面称为二次曲面，而平面是一次曲面。Wikipedia上显示了各种二次曲面的方程和二次曲面的图形。

第六节 空间曲线及其方程

空间曲线的一般方程，空间曲线的参数方程，空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线可以看做两个曲面的交线．设

$$F(x,y,z)=0 \quad 和 \quad G(x,y,z)=0$$

是两个曲面的方程，它们的交线为 C（图 8－44）．因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程，所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1}$$

反过来，如果点 M 不在曲线 C 上，那么它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不满足方程组(1)．因此，曲线 C 可以用方程组(1)来表示．方程组(1)叫做空间曲线 C 的一般方程．

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外，也可以用参数形式表示，只要将 C 上动点的坐标 x、y、z 表示为参数 t 的函数：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{2}$$

当给定 $t = t_1$ 时，就得到 C 上的一个点 (x_1, y_1, z_1)；随着 t 的变动便可得曲线 C 上的全部点．方程组(2)叫做空间曲线的参数方程．

第八部分 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念

平面点集、n维空间，多元函数的概念，二元函数的极限，二元函数的连续

将前面的一元函数的知识扩展下就知道了。

二元函数的极限称为二重极限，二重极限的存在是指$P(x,y)$以任何方式趋近$P_0(x_0,y_0)$(有别于在一元函数中只有从左边或者从右边趋近两种方式)，如果不同方式趋近时的极限值不同的话，说明二重极限不存在！

第二节 偏导数

偏导数的定义及其计算方法，二元函数偏导数的几何意义，高阶偏导数

在多元微分学中，自变量多了，所以导数变成偏导数了。对于二元函数偏导数的几何意义如下，也是斜率，但是要看如何过该点确定曲面的切线以及切线是对哪个轴的斜率！

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的偏导数有下述几何意义．

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y = y_0$，截此曲面得一曲线，此曲线在平面 $y = y_0$ 上的方程为 $z = f(x, y_0)$，则导数 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$，即偏导数 $f_x(x_0, y_0)$，就是这曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率(见图 9－5)．同样，偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率．

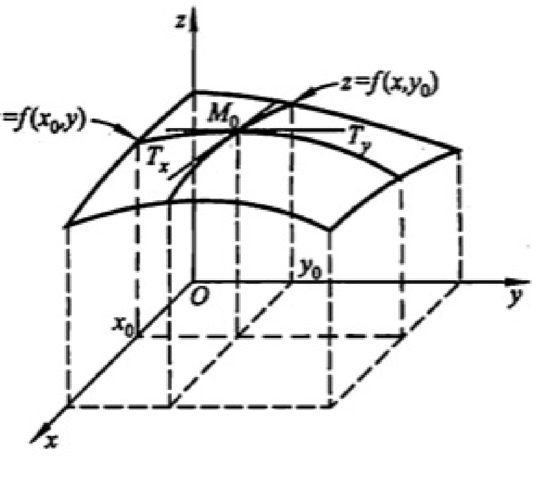


图 9－5

高阶偏导数和前面的高阶导数类似，但是因为自变量多了，也就多了个混合偏导数，对于连续函数$z=f(x,y)$，在其连续区域内，两个二阶混合偏导数相等！

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y),$$

那么在 D 内 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 都是 x,y 的函数.如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数.按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数.同样可得三阶、四阶、…以及 n 阶偏导数.二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

第三节 全微分

全微分的定义，可微、偏导数及连续之间的关系，全微分在近似计算中的应用

在多元微分学中对于某一个变量的微分叫做偏微分，对全部变量的微分就扩展成了全微分的概念，同样，多元函数微分学中微分的意义也是希望使用自变量的线性函数来近似代替函数的全增量Δ z。

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义,如果函数在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \tag{2}$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy 而仅与 x、y 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分,而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分,记作 $\mathrm{d}z$,即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分,那么称这函数在 D 内可微分.

全微分同样可以用于近似计算。

第四节 多元复合函数和隐函数的求导法则

多元复合函数的求导法则，隐函数求导法则

多元复合函数的求导可以使用“链式法则”，即**“分段相乘，分叉相加，单路全导，叉路偏导”**！

多元复合函数求导法则 [编辑]

考虑函数$z = f(x, y)$，其中$x = g(t)$，$y = h(t)$，$g(t)$和$h(t)$是可微函数，那么：

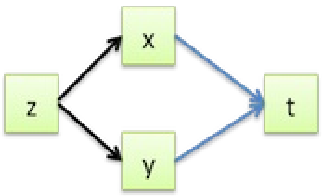
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

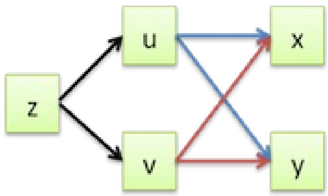
假设$z = f(u, v)$的每一个自变量都是二元函数，也就是说，$u = h(x, y)$，$v = g(x, y)$，且这些函数都是可微的。那么，z的偏导数为：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

对应上面两种情况下的“链式图”如下，第一种情况，z到x和y是分叉，分叉相加，z到x到t是分段，分段相乘，x到t是单路，单路全导；第二种情况，z到u和v是分叉，分叉相加，z到u到x是分段，分段相乘，u到t是叉路，叉路偏导！





隐函数求导是很重要的一部分，因为在实际应用中，很多时候得到的都是一个隐函数，并没有具体的函数表达式，对于它的求导有下面三个存在定理。

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足

条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}. \tag{2}$$

公式(2)就是隐函数的求导公式.

这个定理我们不证.现仅就公式(2)作如下推导.

将方程(1)所确定的函数 $y=f(x)$ 代入(1)，得恒等式

$$F(x,f(x))\equiv 0,$$

其左端可以看做是 x 的一个复合函数，求这个函数的全导数，由于恒等式两端求导后仍然恒等，即得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

由于 F_y 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在 (x_0,y_0) 的一个邻域，在这个邻域内 $F_y\neq 0$，于是得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

如果 $F(x,y)$ 的二阶偏导数也都连续，我们可以把等式(2)的两端看做 x 的复合函数而再一次求导，即得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\&=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\\&=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.\end{aligned}$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数.既然一个二元方程(1)可以确定一个一元隐函数,那么一个三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

就有可能确定一个二元隐函数.

与定理1一样,我们同样可以由三元函数 $F(x,y,z)$ 的性质来断定由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的二元函数 $z=f(x,y)$ 的存在以及这个函数的性质.这就是下面的定理.

隐函数存在定理2 **设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数,且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$,它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$,并有**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}. \tag{4}$$

这个定理我们不证.与定理1类似,仅就公式(4)作如下推导.

由于
$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0,$$
将上式两端分别对 x 和 y 求导,应用复合函数求导法则得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

因为 F_z 连续,且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,所以存在点 (x_0,y_0,z_0) 的一个邻域,在这个邻域内 $F_z\neq 0$,于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

隐函数存在定理3 设 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比(Jacobi)式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\end{aligned}\tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

这个定理我们不证.与前两个定理类似,下面仅就公式(6)作如下推导.

由于 $$F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0,$$
$$G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0,$$

将恒等式两边分别对 x 求导,应用复合函数求导法则得

$$\begin{cases} F_x + F_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G_x + G_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

这是关于$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$的线性方程组,由假设可知在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$的一个邻域内,系数行列式

$$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

从而可解出$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$,得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}.$$

同理,可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

最后的雅可比式比较重要，在数值分析中有相应的应用。[TODO]

第五节 偏导数的几何应用

空间曲线的切线与法平面，曲面切平面与法线

空间曲线的切线需要得到该点的各个方向的偏导数，法平面是过该点并垂直于切线的平面。

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \\ z = \omega(t), \end{cases} \tag{7}$$

这里假定(7)式的三个函数都在$[\alpha,\beta]$上可导，且三个导数不同时为零.

现在要求曲线 Γ 在其上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切线及法平面方程.

设与点 M 对应的参数为 t_0，记 $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$，$t \in [\alpha, \beta]$. 由向量值函数的导向量的几何意义知，向量 $T = f'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$就是曲线 Γ 在点 M 处的一个切向量，从而曲线 Γ 在点 M 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}. \tag{8}$$

通过点 M 且与切线垂直的平面称为曲线 Γ 在点 M 处的法平面，它是通过点 $M(x_0, y_0, z_0)$且以 $T = f'(t_0)$为法向量的平面，因此法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0. \tag{9}$$

曲面的切平面与法线略过。

第六节 多元函数的极值及其最值

极值的定义，极值存在的条件，最大值与最小值，拉格朗日乘数法

条件极值问题转化成无条件极值问题，使用拉格朗日乘数法，这是一个非常重要的解决条件极值问题的方法，在机器学习的很多算法中使用这种方法，比如Fisher判别等等。

拉格朗日乘数法　要找函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点,可以先作拉格朗日函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 为参数.求其对 x 与 y 的一阶偏导数,并使之为零,然后与方程(2)联立起来:

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{8}$$

由这方程组解出 x,y 及 λ,这样得到的 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

这方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形.例如,要求函数

$$u=f(x,y,z,t)$$

在附加条件

$$\varphi(x,y,z,t)=0,\quad \psi(x,y,z,t)=0 \tag{9}$$

下的极值,可以先作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\psi(x,y,z,t),$$

其中 λ,μ 均为参数,求其一阶偏导数,并使之为零,然后与(9)中的两个方程联立起来求解,这样得出的 (x,y,z,t) 就是函数 $f(x,y,z,t)$ 在附加条件(9)下的可能极值点.

至于如何确定所求得的点是否极值点,在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定.

例 7 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

解 设长方体的三棱长为 x,y,z,则问题就是在条件

$$\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0 \tag{10}$$

下,求函数

$$V=xyz \qquad (x>0,y>0,z>0)$$

的最大值.作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2),$$

求其对 x,y,z 的偏导数,并使之为零,得到

$$\begin{aligned} &yz+2\lambda(y+z)=0,\\ &xz+2\lambda(x+z)=0,\\ &xy+2\lambda(y+x)=0. \end{aligned} \tag{11}$$

再与(10)联立求解.

因 x,y,z 都不等于零,所以由(11)可得

$$\frac{x}{y}=\frac{x+z}{y+z}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{x+y}{x+z}.$$

由以上两式解得

$$x=y=z.$$

将此代入(10)式,便得

$$x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

这是唯一可能的极值点.因为由问题本身可知最大值一定存在,所以最大值就在这个可能的极值点处取得.也就是说,表面积为 a^2 的长方体中,以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的正方体的体积为最大,最大体积 $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$.

补充节 方向导数和梯度

方向导数：很多时候我们想知道函数沿着某个方向的变化率，这个方向不一定是坐标轴方向。

偏导数反映的是函数沿坐标轴方向的变化率.但许多物理现象告诉我们,只考虑函数沿坐标轴方向的变化率是不够的.例如,热空气要向冷的地方流动,气象学中就要确定大气温度、气压沿着某些方向的变化率.因此我们有必要来讨论函数沿任一指定方向的变化率问题.

设 l 是 xOy 平面上以 $P_0(x_0,y_0)$ 为始点的一条射线,$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与 l 同方向的单位向量(图 9-9).射线 l 的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\cos\alpha, \\ y &= y_0 + t\cos\beta \end{aligned} \quad (t \geqslant 0).$$

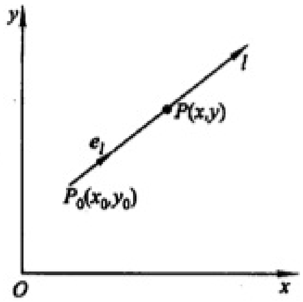


图 9-9

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义,$P(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$ 为 l 上另一点,且 $P\in U(P_0)$.如果函数增量 $f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)$ 与 P 到 P_0 的距离 $|PP_0|=t$ 的比值

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

当 P 沿着 l 趋于 P_0(即 $t\to0^+$)时的极限存在,则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数,记作 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$,即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}. \qquad (1)$$

从方向导数的定义可知,方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 l 的变化率.若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数存在,$\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{i}=(1,0)$,则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t} = f_x(x_0,y_0);$$

又若 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{j}=(0,1)$,则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t} = f_y(x_0,y_0).$$

梯度：梯度就是一个向量，表示曲线上某点沿着曲线的某个方向发生移动的向量。梯度的应用自然是梯度下降法，该方法可以让我们的优化问题的极值函数尽快地趋近问题的最优解。

这里还有等值线和等值面的概念，对于二元函数$f(x,y)$可以得到其对应的等值线$f(x,y)=c$，函数在某一点的梯度方向就是等值线在该点的法线方向。

还要理解梯度和方向导数之间的关系，如果梯度的方向与方向导数取得最大值的方向相同的话，那么该方向就是函数变化最快的方向。

与方向导数有关联的一个概念是函数的梯度.在二元函数的情形,设函数 $f(x,y)$在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数,则对于每一点 $P_0(x_0,y_0)\in D$,都可定出一个向量

$$f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j},$$

这向量称为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度,记作 $\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$,即

$$\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}.$$

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 称为(二维的)向量微分算子或Nabla算子,$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$.

如果函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$可微分,$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与方向 l 同向的单位向量,则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}&=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta\\&=\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l=|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 $\theta=(\mathbf{grad}\ f(x_0,\widehat{y_0),\boldsymbol{e}_l})$.

这一关系式表明了函数在一点的梯度与函数在这点的方向导数间的关系.特别,由这关系可知:

(1) 当 $\theta=0$,即方向 $\boldsymbol{e}_l$ 与梯度 $\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)$的方向相同时,函数 $f(x,y)$增加最快.此时,函数在这个方向的方向导数达到最大值,这个最大值就是梯度 $\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)$的模,即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|.$$

这个结果也表示:函数 $f(x,y)$在一点的梯度 $\mathbf{grad}\ f$ 是这样一个向量,它的方向是函数在这点的方向导数取得最大值的方向,它的模就等于方向导数的最大值.

(2) 当 $\theta=\pi$，即方向 $\boldsymbol{e}_l$ 与梯度 $\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)$ 的方向相反时，函数 $f(x,y)$ 减少最快，函数在这个方向的方向导数达到最小值，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=-|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|.$$

(3) 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即方向 $\boldsymbol{e}_l$ 与梯度 $\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)$ 的方向正交时，函数的变化率为零，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|\cos\theta=0.$$

我们知道，一般说来二元函数 $z=f(x,y)$ 在几何上表示一个曲面，这曲面被平面 $z=c$（c 是常数）所截得的曲线 L 的方程为

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ z=c. \end{cases}$$

这条曲线 L 在 xOy 面上的投影是一条平面曲线 L^*（图 9－10），它在 xOy 平面直角坐标系中的方程为

$$f(x,y)=c.$$

对于曲线 L^* 上的一切点，已给函数的函数值都是 c，所以我们称平面曲线 L^* 为函数 $z=f(x,y)$ 的等值线.

若 f_x,f_y 不同时为零，则等值线 $f(x,y)=c$ 上任一点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的一个单位法向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=\frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\\&=\frac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}.\end{aligned}$$

这表明函数 $f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 的梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$ 的方向就是等值线 $f(x,y)=c$ 在这点的法线方向 $\boldsymbol{n}$，而梯度的模 $|\nabla f(x_0,y_0)|$ 就是沿这个法线方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial n}$，于是有

$$\nabla f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}.$$

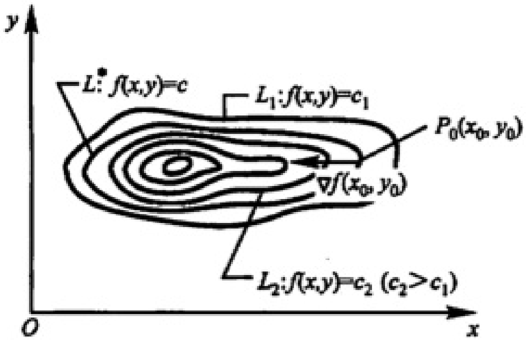


图 9－10

上面讨论的梯度概念可以类似地推广到三元函数的情形. 设函数 $f(x,y,z)$ 在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in G$，都可定出一个向量

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k},$$

这向量称为函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度，将它记作 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$，即

$$\begin{aligned}&\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)\\=&\nabla f(x_0,y_0,z_0)\\=&f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 称为(三维的)向量微分算子或Nabla 算子，$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

经过与二元函数的情形完全类似的讨论可知，三元函数 $f(x,y,z)$ 在一点的梯度 ∇f 是这样一个向量，它的方向是函数 $f(x,y,z)$ 在这点的方向导数取得最大值的方向，它的模就等于方向导数的最大值.

如果我们引进曲面

$$f(x,y,z)=c$$

为函数 $f(x,y,z)$ 的等值面的概念，则可得函数 $f(x,y,z)$ 在一点 (x_0,y_0,z_0) 的梯度 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ 的方向就是等值面 $f(x,y,z)=c$ 在这点的法线方向 $\boldsymbol{n}$，而梯度的模 $|\nabla f(x_0,y_0,z_0)|$ 就是函数沿这个法线方向的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial n}$.

例 3 求 $\mathbf{grad}\,\frac{1}{x^2+y^2}$.

解 这里
$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

因为
$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

所以
$$\mathbf{grad}\,\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\boldsymbol{j}.$$

例 4 设 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$P_0(1,1)$，求

(1) $f(x,y)$ 在 P_0 处增加最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数；

(2) $f(x,y)$ 在 P_0 处减少最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数；

(3) $f(x,y)$ 在 P_0 处的变化率为零的方向.

解 (1) $f(x,y)$在 P_0 处沿$\nabla f(1,1)$的方向增加最快，

$$\nabla f(1,1)=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\big|_{(1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},$$

故所求方向可取为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},$$

方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial n}\bigg|_{(1,1)}=|\nabla f(1,1)|=\sqrt{2}.$$

(2) $f(x,y)$在 P_0 处沿$-\nabla f(1,1)$的方向减少最快，这方向可取为

$$\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},$$

方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial n_1}\bigg|_{(1,1)}=-|\nabla f(1,1)|=-\sqrt{2}.$$

(3) $f(x,y)$在 P_0 处沿垂直于$\nabla f(1,1)$的方向变化率为零，这方向是

$$\boldsymbol{n}_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\quad \text{或}\quad \boldsymbol{n}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}.$$

第八部分 重积分

第一节 二重积分的概念与性质

二重积分的概念，二重积分的性质

将一元函数积分进行扩展，如果是对闭区域D进行积分的话就叫做二重积分，很重要的一类二重积分问题是求曲顶柱体的体积，利用前面的定积分的思想来看，二重积分是取很小的积分面积元素，以它们为底，以函数值为高，然后求对应的曲顶柱体的体积。

一般的，如果 $f(x,y)\geqslant 0$，被积函数 $f(x,y)$可解释为曲顶柱体的顶在点(x,y)处的竖坐标，所以二重积分的几何意义就是柱体的体积．如果 $f(x,y)$是负的，柱体就在 xOy 面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的．如果 $f(x,y)$在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，那么，$f(x,y)$在 D 上的二重积分就等于xOy 面上方的柱体体积减去 xOy 面下方的柱体体积所得之差．

第二节 二重积分的计算方法

直角坐标下二重积分的计算，利用极坐标计算二重积分

直角坐标下的二重积分的计算可以看做是做两次单独的定积分。

设积分区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b$$

来表示(图 10-4),其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 在区间$[a,b]$上连续.

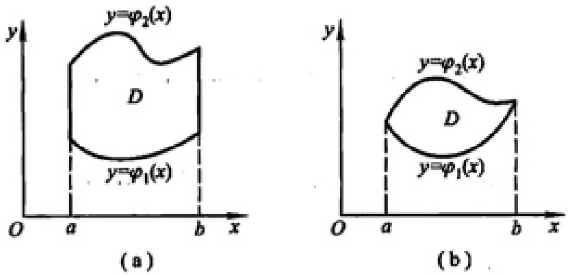


图 10-4

按照二重积分的几何意义,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于以 D 为底,以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体(图 10-5)的体积.下面我们应用第六章中计算"平行截面面积为已知的立体的体积"的方法来计算这个曲顶柱体的体积.

先计算截面面积.为此,在区间$[a,b]$上任意取定一点 x_0,作平行于 yOz 面的平面 $x=x_0$.这平面截曲顶柱体所得的截面是一个以区间$[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$为底、曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形(图 10-5 中阴影部分),所以这截面的面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\mathrm{d}y.$$

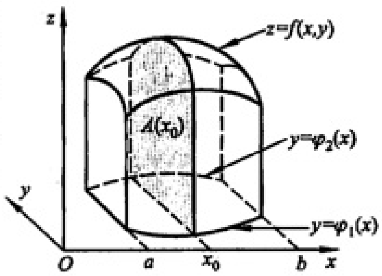


图 10-5

一般的,过区间$[a,b]$上任一点 x 且平行于 yOz 面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

于是,应用计算平行截面面积为已知的立体体积的方法,得曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

这个体积也就是所求二重积分的值,从而有等式

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{1}$$

上式右端的积分叫做先对 y、后对 x 的二次积分.就是说,先把 x 看做常数,把 $f(x,y)$ 只看做 y 的函数,并对 y 计算从 $\varphi_1(x)$ 到 $\varphi_2(x)$ 的定积分;然后把算得的结果(是 x 的函数)再对 x 计算在区间$[a,b]$上的定积分.这个先对 y、后对 x 的二次积分也常记作

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

因此,等式(1)也写成

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y, \tag{1'}$$

这就是把二重积分化为先对 y、后对 x 的二次积分的公式.

有些情况下实际计算时需要根据区域D的情况考虑它属于X型还是Y型，还是需要分段进行考虑。

例 1　计算 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$、$x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域.

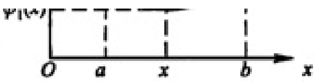


图 10－9

解法 1　首先画出积分区域 D（图 10－10）. D 是 X 型的，D 上的点的横坐标的变动范围是区间 $[1,2]$. 在区间 $[1,2]$ 上任意取定一个 x 值，则 D 上以这个 x 值为横坐标的点在一段直线上，这段直线平行于 y 轴，该线段上点的纵坐标从 $y=1$ 变到 $y=x$. 利用公式(1)得

$$\iint\limits_D xy\,d\sigma = \int_1^2\left[\int_1^x xy\,dy\right]dx = \int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x dx$$
$$= \int_1^2\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

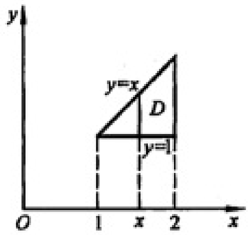


图 10－10

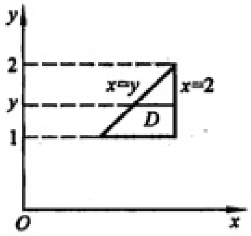


图 10－11

解法 2　如图 10－11，积分区域 D 是 Y 型的，D 上的点的纵坐标的变动范围是区间 $[1,2]$. 在区间 $[1,2]$ 上任意取定一个 y 值，则 D 上以这个 y 值为纵坐标的点在一段直线上，这段直线平行于 x 轴，该线段上点的横坐标从 $x=y$ 变到 $x=2$. 于是，利用公式(2)得

$$\iint\limits_D xy\,d\sigma = \int_1^2\left[\int_y^2 xy\,dx\right]dy = \int_1^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_y^2 dy$$
$$= \int_1^2\left(2y-\frac{y^3}{2}\right)dy = \left[y^2-\frac{y^4}{8}\right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

第三节 三重积分

三重积分的概念，三重积分的计算

三重积分可以看做是求密度不均匀的物体的体积，它取的是很小很小的体积元素。它的计算使用先一后二或者先二后一的方式来计算，此处略过。

第四节 重积分的应用

曲面的面积，质心

略过。

第十部分 微分方程

第一节 微分方程的基本概念

引例，微分方程的基本概念

在许多问题中，我们不总是能够得到函数关系式，而是得到函数和它的导数之间的关系式，这样

的关系式就是微分方程。微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数叫做微分方程的阶。

只要是能够满足微分方程的函数都是它的解，如果解中包含了任意常数，并且任意常数的个数与阶数相同，那么这个解又叫做微分方程的通解。

通常我们会有一些初始条件。确定了通解中的任意常数的话，那么就得到了微分方程的特解。

求微分方程$y' = f(x, y)$满足初始条件$y|_{x=x_0} = y_0$的特解的问题，叫做一阶微分方程的初值问题。

求微分方程 $y'=f(x,y)$满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解这样一个问题，叫做一阶微分方程的初值问题，记作

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y|_{x=x_0}=y_0. \end{cases} \tag{13}$$

微分方程的解的图形是一条曲线，叫做微分方程的积分曲线．初值问题(13)的几何意义，就是求微分方程的通过点(x_0,y_0)的那条积分曲线．二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y'_0 \end{cases}$$

的几何意义，是求微分方程的通过点(x_0,y_0)且在该点处的切线斜率为 y'_0 的那条积分曲线．

第二节 一阶微分方程

可分离变量方程，齐次方程，一阶线性微分方程，伯努利方程

可分离变量方程：利用一阶微分方程的形式，巧妙地分离变量，一边是y的函数，另一边是x的函数，然后左右两边积分即可得到一个关于x和y的隐函数，这个隐函数即为微分方程的解。

一般的,如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

的形式,就是说,能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$,另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$,那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

假定方程(5)中的函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的.设 $y=\varphi(x)$ 是方程(5)的解,将它代入(5)中得到恒等式

$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x.$$

将上式两端积分,并由 $y=\varphi(x)$ 引进变量 y,得

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

设 $G(y)$ 及 $F(x)$ 依次为 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数,于是有

$$G(y)=F(x)+C. \tag{6}$$

因此,方程(5)的解满足关系式(6).反之,如果 $y=\Phi(x)$ 是由关系式(6)所确定的隐函数,那么在 $g(y)\neq0$ 的条件下,$y=\Phi(x)$ 也是方程(5)的解,事实上,由隐函数的求导法可知,当 $g(y)\neq0$ 时,

$$\Phi'(x)=\frac{F'(x)}{G'(y)}=\frac{f(x)}{g(y)},$$

这就表示函数 $y=\Phi(x)$ 满足方程(5).所以,如果已分离变量的方程(5)中,$g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的,且 $g(y)\neq0$,那么(5)式两端积分后得到的关系式(6),就用隐式给出了方程(5)的解,(6)式就叫做微分方程(5)的隐式解.又由于关系式(6)中含有任意常数,因此(6)式所确定的隐函数是方程(5)的通解,所以(6)式叫做微分方程(5)的隐式通解(当 $f(x)\neq0$ 时,(6)式所确定的隐函数 $x=\Psi(y)$ 也可认为是方程(5)的解).

例 1 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy \tag{7}$$

的通解.

解 方程(7)是可分离变量的,分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x,$$

两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

从而

$$y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}.$$

因 $\pm e^{C_1}$ 是任意非零常数,又 $y\equiv0$ 也是方程(7)的解;故得方程(7)的通解

齐次方程:将原微分方程进行调整,左边为一阶导数,右边为关于 $\frac{y}{x}$ 的函数,然后可以利用可分离变量得到微分方程的解。有些非齐次的微分方程可以化为齐次方程。

如果一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

的形式，那么就称这方程为齐次方程，例如

$$(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$$

是齐次方程，因为它可化成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy},$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

在齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

中，引进新的未知函数

$$u=\frac{y}{x}, \tag{2}$$

就可把它化为可分离变量的方程. 因为由(2)有

$$y=ux,\ \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入方程(1)，便得方程

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

即

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.$$

分离变量，得

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

两端积分，得

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}.$$

一阶线性微分方程：对于未知函数和导数都是一次的微分方程。

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

叫做一阶线性微分方程，因为它对于未知函数 y 及其导数是一次方程．如果 $Q(x)\equiv 0$，则方程(1)称为齐次的；如果 $Q(x)\not\equiv 0$，则方程(1)称为非齐次的．

设(1)为非齐次线性方程．为了求出非齐次线性方程(1)的解，我们先把 $Q(x)$ 换成零而写出方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0. \tag{2}$$

方程(2)叫做对应于非齐次线性方程(1)的齐次线性方程．方程(2)是可分离变量的，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两端积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

或

$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\quad (C=\pm e^{C_1}),$$

这是对应的齐次线性方程(2)的通解[①]．

现在我们使用所谓常数变易法来求非齐次线性方程(1)的通解．这方法是把(2)的通解中的 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，即作变换

$$y=ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{3}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

将(3)和(4)代入方程(1)得

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),\ u'=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

两端积分，得

$$u=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C.$$

把上式代入(3)，便得非齐次线性方程(1)的通解

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right). \tag{5}$$

将(5)式改写成两项之和

$$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

上式右端第一项是对应的齐次线性方程(2)的通解，第二项是非齐次线性方程(1)的一个特解(在(1)的通解(5)中取 $C=0$ 便得到这个特解)．由此可知，一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和．

例 1 求方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解.

解 这是一个非齐次线性方程.先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln y=2\ln(x+1)+\ln C,$$

$$y=C(x+1)^2.$$

用常数变易法,把 C 换成 u,即令

$$y=u(x+1)^2, \tag{6}$$

那么

$$\frac{dy}{dx}=u'(x+1)^2+2u(x+1),$$

代入所给非齐次方程,得

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

两端积分,得

$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

再把上式代入(6)式,即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right].$$

伯努利方程：含二阶导数

方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1) \tag{10}$$

叫做伯努利(Bernoulli)方程. 当 $n=0$ 或 $n=1$ 时,这是线性微分方程. 当 $n\neq 0$, $n\neq 1$ 时,这方程不是线性的,但是通过变量的代换,便可把它化为线性的. 事实上,以 y^n 除方程(10)的两端,得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x). \tag{11}$$

容易看出,上式左端第一项与 $\frac{d}{dx}(y^{1-n})$ 只差一个常数因子 $1-n$,因此我们引入新的因变量

$$z=y^{1-n},$$

那么

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

用 $(1-n)$ 乘方程(11)的两端,再通过上述代换便得线性方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

求出这方程的通解后,以 y^{1-n} 代 z 便得到伯努利方程的通解.

例 4 求方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$$

的通解.

解 以 y^2 除方程的两端,得

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x,$$

即

$$-\frac{d(y^{-1})}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=a\ln x,$$

令 $z=y^{-1}$,则上述方程成为

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-a\ln x.$$

这是一个线性方程,它的通解为

$$z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right].$$

以 y^{-1} 代 z,得所求方程的通解为

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1.$$

第三节 可降阶的高阶微分方程

y(n)=f(x)型的微分方程，yn=f(x，y’)型的微分方程，yn=f(Y，y’)型的微分方程

略过。

第四节 二阶常系数微分方程

通解的结构，二阶常系数齐次线性微分方程，二阶常系数非齐次线性微分方程

略过。

第五节 微分方程的应用实例

物体冷却过程的数学模型，动力学问题，人口模型

略过。

Congratuation! Thank you!

恭喜你，看完啦！

http://hujiaweibujidao.github.io/
