# Rango de $r$

Dayan Bravo Fraga

Abril 2023

## 1 Interrogante

¿Cuál es el rango de $r$ en la transformación de Hough para rectas?

## 2 Desmotración

Tenemos la siguiente ecuación:

$$r = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \tag{1}$$

El dominio de $\theta$ es:

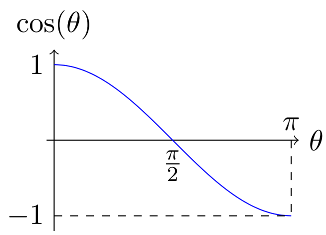
$$\theta \in [0, \pi] \tag{2}$$

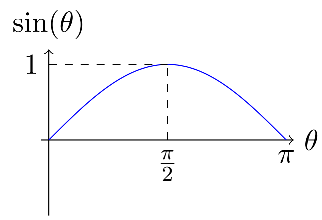
Si tenemos que $m$ y $n$ son el ancho y alto de la imagen respectivamente (cantidad de pixeles), entonces:

$$x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq m - 1, m > 0 \tag{3}$$

$$y \in \mathbb{N}, 1 \leq y \leq n - 1, n > 0 \tag{4}$$

Ahora graficaremos las funciones $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ para $\theta \in [0, \pi]$:

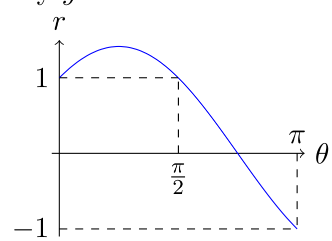


De las gráficas podemos deducir que, si sumamos ambas funciones ($\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$):

- El valor máximo es en $0 < \theta < \pi/2$
- El valor mínimo es en $\theta = \pi$

Ahora graficaremos la Función $r = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$, en $\theta \in [0, \pi]$, para $x = 1$ y $y = 1$:




Como podemos observar, se confirma lo que habíamos deducido anteriormente.

## 2.1 Valor mínimo de $r$

En caso del valor mínimo de $r$, se da cuando $\theta = \pi$, entonces, si sustituimos en la ecuación **??**:

$$\begin{aligned} r &= x\cos(\pi) + y\sin(\pi) \\ r &= x\cancel{\cos(\pi)}^{-1} + \cancel{y\sin(\pi)}^{0} \\ r &= -x \end{aligned}$$

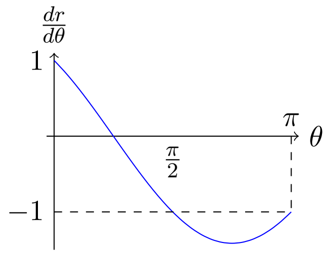
Como $x \in [0, m-1]$, entonces $-x \in [-m+1, 0]$.
Entonces, el valor mínimo de $r$ es $-m+1$.

## 2.2 Valor máximo de $r$

Para calcular el valor máximo de $r$ vamos a derivar la ecuación **??**, para $x = 1$ y $y = 1$:

$$\begin{aligned} r &= \cos(\theta) + \sin(\theta) \\ \frac{dr}{d\theta} &= -\sin(\theta) + \cos(\theta) \end{aligned}$$

Podemos graficar esta nueva funcion para analizar su comportamiento:




Debemos calcular el *cero* de la función, para ello, igualamos a cero la derivada:

$$
\begin{gathered}
-\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0 \\
\sin(\theta) = \cos(\theta) \\
\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 1 \\
\tan(\theta) = 1 \\
\theta = \frac{\pi}{4}
\end{gathered}
$$

Ahora podemos sustituir $\theta = \frac{\pi}{4}$ en la ecuación **??**:

$$
\begin{gathered}
r = x\cos(\frac{\pi}{4}) + y\sin(\frac{\pi}{4}) \\
r = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2} \\
r = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)
\end{gathered}
$$

Lamentablemente este no es el valor máximo absoluto de $r$, es el valor máximo de $r$ cuando $x = 1$ y $y = 1$, aunque se podría generalizar a cuando $x = y$.

Como es una suma de funciones, su valor máximo pudiera ser estimado con los valores máximos de cada función.

$$
\begin{gathered}
r = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\
r = x\cancel{\cos(\theta)}^1 + y\cancel{\sin(\theta)}^1 \\
r = x + y
\end{gathered}
$$

Note que $r$ siempre será menor que este valor, ya que no existe ningún valor de $\theta$ que haga que $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ sean 1 al mismo tiempo.

Como $x \in [0, m-1]$ y $y \in [0, n-1]$, entonces $x + y \in [0, m+n-2]$.
Entonces, el valor máximo de $r$ es $m + n - 2$.

> Nota:
> Si la $x$ es muy grande con respecto a $y$, el valor máximo de $r$ se acercará a $x$, por el ángulo 0, donde el $\cos(\theta) = 1$
> De forma similar, si $y$ es muy grande con respecto a $x$, el valor máximo de $r$ se acercará a $y$, por el ángulo $\pi/2$, donde el $\sin(\theta) = 1$

### 2.3 Rango de $r$

El rango de $r$ es $r \in [-m+1, m+n-2)$.