Métodos Numéricos - DEBER 02 - Error Absoluto y Error Relativo

Alicia Pereira

Tabla de Contenidos

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p*

Con el objetivo de calcular el error absoluto y el error relativo de los ejercicios planteados, se proponen dos funciones en Python que retornan los valores correspondientes haciendo uso de las ecuaciones definidas.

$Error\ Absoluto = |p - p^*|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|}$

```
import math

def errorAbsoluto(vReal,vAprox):
    return abs(vReal-vAprox)

def errorRelativo(vReal, vAprox):
    return (abs(vReal-vAprox))/abs(vReal)
```

a. $p = \pi, p* = \frac{22}{7}$

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |\pi - \frac{22}{7}|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - \frac{22}{7}|}{|\pi|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi,22/7))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi,22/7)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi,22/7))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi,22/7)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.0012644892673496777
El porcentaje de Error Absoluto es:  0.12644892673496777 %
Error Relativo =  0.0004024994347707008
El porcentaje de Error Relativo es:  0.04024994347707008 %
```

b. $p = \pi, p* = 3.1416$

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |\pi - 3.1416|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1416|}{|\pi|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi,3.1416))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi,3.1416)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi,3.1416))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi,3.1416)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  7.346410206832132e-06
El porcentaje de Error Absoluto es:  0.0007346410206832132 %
Error Relativo =  2.3384349967961744e-06
El porcentaje de Error Relativo es:  0.00023384349967961744 %
```

c. $p = e, p* = 2.718$

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |e - 2.718|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|e - 2.718|}{|e|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.e, 2.718))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.e,2.718)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.e,2.718))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.e,2.718)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.0002818284590451192
El porcentaje de Error Absoluto es:  0.02818284590451192 %
Error Relativo =  0.00010367889601972718
El porcentaje de Error Relativo es:  0.010367889601972718 %
```

d. $p = \sqrt{2}, p* = 1.414$

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |\sqrt{2} - 1.414|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|\sqrt{2}-1.414|}{|\sqrt{2}|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.sqrt(2), 1.414))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.sqrt(2),1.414)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.sqrt(2),1.414))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.sqrt(2),1.414)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.00021356237309522186
El porcentaje de Error Absoluto es:  0.021356237309522186 %
Error Relativo =  0.00015101140222192286
El porcentaje de Error Relativo es:  0.015101140222192286 %
```

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por $p*$

a. $p = e^{10}, p* = 22000$

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |e^{10} - 22000|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|e^{10}-22000|}{|e^{10}|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pow(math.e,10),22000))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pow(math.e,10),22000)*100, "

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pow(math.e,10),22000))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pow(math.e,10),22000)*100, "
```

```
Error Absoluto =  26.465794806703343
El porcentaje de Error Absoluto es:  2646.5794806703343 %
Error Relativo =  0.0012015452253326688
El porcentaje de Error Relativo es:  0.12015452253326687 %
```

b. $p = 10^{\pi}, p* = 1400$

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |10^{\pi} - 1400|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|10^{\pi}-1400|}{|10^{\pi}|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pow(10,math.pi),1400))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pow(10,math.pi),1400)*100, "

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pow(10,math.pi),1400))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pow(10,math.pi),1400)*100, "
```

```
Error Absoluto =  14.544268632989315
El porcentaje de Error Absoluto es:  1454.4268632989315 %
Error Relativo =  0.010497822704619136
El porcentaje de Error Relativo es:  1.0497822704619135 %
```

c. $p = 8!, p* = 39900$

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |p - p^{*}| = |8! - 39900|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|8!-39900|}{|8!|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.factorial(8),39900))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.factorial(8),39900)*100, "%"
```

```
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.factorial(8),39900))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.factorial(8),39900)*100, "%
```

```
Error Absoluto =  420
El porcentaje de Error Absoluto es:  42000 %
Error Relativo =  0.010416666666666666
El porcentaje de Error Relativo es:  1.0416666666666665 %
```

d. $p = 9!, p* = \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9$

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |9! - \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e}^9|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|9!-\sqrt{18\pi}(\frac{9}{e}^9|}{|9!|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.factorial(9),(math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.factorial(9),(math.sqrt(18*m

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.factorial(9),(math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.factorial(9),(math.sqrt(18*m
```

```
Error Absoluto =  3343.1271580516477
El porcentaje de Error Absoluto es:  334312.7158051648 %
Error Relativo =  0.009212762230080598
El porcentaje de Error Relativo es:  0.9212762230080598 %
```

3. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p.

Se plantea la siguiente inecuación para calcular el intervalo adecuado.

$\frac{|p^*-p|}{|p|} \leq 10^{-4}$

$p - (10^{-4} \cdot p) \leq p^* \leq p + (10^{-4} \cdot p)$

a. π

$p = \pi$

$\pi - 10^{-4} \cdot \pi \leq p^* \leq \pi + 10^{-4} \cdot \pi$

$\pi - 3.1415926536 \cdot 10^{-4} \leq p^* \leq \pi + 3.1415926536 \cdot 10^{-4}$

$3.1412784943 \leq p^* \leq 3.1419068129$

b. e

$p = e$

$e - (10^{-4} \cdot e) \leq p^* \leq e + (10^{-4} \cdot e)$

$2.7182818285 - 2.7182818285 \cdot 10^{-4} \leq p^* \leq 2.7182818285 + 2.7182818285 \cdot 10^{-4}$

$2.7180090000 \leq p^* \leq 2.7185546567$

c. $\sqrt{2}$

$p = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} - 10^{-4} \cdot \sqrt{2} \leq p^* \leq \sqrt{2} + 10^{-4} \cdot \sqrt{2}$

$1.4142135624 - 1.4142135624 \cdot 10^{-4} \leq p^* \leq 1.4142135624 + 1.4142135624 \cdot 10^{-4}$

$1.4140721411 \leq p^* \leq 1.4143549836$

d. $\sqrt[3]{7}$

$p = \sqrt[3]{7}$

$2.6457513111 - 2.6457513111 \cdot 10^{-4} \leq p^* \leq 2.6457513111 + 2.6457513111 \cdot 10^{-4}$

$2.6454867360 \leq p^* \leq 2.6460158862$

4. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a. $\frac{\frac{13}{14} - \frac{5}{7}}{2e - 5.4}$

$\frac{13}{14} = 0.9285714286$

$\frac{5}{7} = 0.7142857143$

$\frac{13}{14} - \frac{5}{7} = 0.2142857143$

\$ e = 2 2.7182818285 = 5.4365636570\$

$2e - 5.4 = 5.4365636570 - 5.4 = 0.0365636570$

$\frac{0.2142857143}{0.0365636570} = 5.8607594937$

El valor redondeado es: 5.86

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |5.8607594937 - 5.86|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|5.8607594937 - 5.86|}{|5.8607594937|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(5.8607594937, 5.86))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(5.8607594937 , 5.86)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(5.8607594937, 5.86))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(5.8607594937, 5.86)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.0007594936999995028
El porcentaje de Error Absoluto es:  0.07594936999995028 %
Error Relativo =  0.00012958963779624767
El porcentaje de Error Relativo es:  0.012958963779624766 %
```

b. $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

$-10\pi = -10 \times 3.1415926536 = -31.4159265360$

$6e = 6 \times 2.7182818285 = 16.3096909710$

$\frac{3}{61} = 0.0491803279$

$-31.4159265360 + 16.3096909710 - 0.0491803279 = -15.1554158929$

El valor redondeado es: -15.2

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |-15.1554158929 - (-15.2)|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|-15.1554158929-(-15.2)|}{|-15.1554158929|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(-15.1554158929 , -15.2))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(-15.1554158929 , -15.2)*100, "%"

print("Error Relativo = ", errorRelativo(-15.1554158929 , -15.2))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(-15.1554158929 , -15.2)*100, "%"
```

```
Error Absoluto =  0.044584107099998604
El porcentaje de Error Absoluto es:  4.45841070999986 %
Error Relativo =  0.0029417937069536534
El porcentaje de Error Relativo es:  0.29417937069536537 %
```

c. $(\frac{2}{9})(\frac{9}{11})$

$\frac{2}{9} = 0.2222222222$

$\frac{9}{11} = 0.8181818182$

$0.2222222222 \times 0.8181818182 = 0.1818181818$

El valor redondeado es: 0.182

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |p - p^{*}| = |0.1818181818 - 0.182|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|0.1818181818-0.182|}{|0.1818181818|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(0.1818181818 , 0.182))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(0.1818181818 , 0.182)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(0.1818181818 , 0.182))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(0.1818181818 , 0.182)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.00018181819999998905
El porcentaje de Error Absoluto es:  0.018181819999998905 %
Error Relativo =  0.0010000001000999396
El porcentaje de Error Relativo es:  0.10000001000999396 %
```

d. $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

$\sqrt{13} = 3.6055512755$

$\sqrt{11} = 3.3166247904$

$3.6055512755 + 3.3166247904 = 6.9221760659$

$\frac{6.9221760659}{0.2889264851} = 23.9600672727$

El valor redondeado es: 24.0

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |p - p^{*}| = |23.9600672727 - 24.0|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|23.9600672727-24.0|}{|23.9600672727|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(23.9600672727 , 24.0))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(23.9600672727 , 24.0)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(23.9600672727 , 24.0))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(23.9600672727 , 24.0)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.039932727299998305
El porcentaje de Error Absoluto es:  3.9932727299998305 %
Error Relativo =  0.0016666366936914857
El porcentaje de Error Relativo es:  0.1666636693691486 %
```

5. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son:

$x - (\frac{1}{3})x^3 + (\frac{1}{5})x^5$

Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a. $4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})]$

$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + ...$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.5000000000 - 0.0416666667 + 0.0062500000 = 0.4645833333$

$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.3333333333 - 0.0123456790 + 0.0008230453 = 0.3218106996$

$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0.4645833333 + 0.3218106996 = 0.7863940329$

$4 \times 0.7863940329 = 3.1455761316$

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |\pi - 3.1455761316|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1455761316|}{|\pi|}$

```python
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1455761316))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1455761316)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi , 3.1455761316))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi , 3.1455761316)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.00398347801020682
El porcentaje de Error Absoluto es:  0.398347801020682 %
Error Relativo =  0.0012679804320445659
El porcentaje de Error Relativo es:  0.1267980432044566 %
```

b. $16acrtan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239})$

$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.2000000000 - 0.0013333333 + 0.0000320000 = 0.1986986667$

$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5$

$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx 0.0041841004 - 1.0310096 \times 10^{-7} + 2.4373424 \times 10^{-12} = 0.0041840003$

$16 \times 0.1986986667 = 3.1791786667$

$4 \times 0.0041840003 = 0.0167360012$

$3.1791786667 - 0.0167360012 = 3.1624426655$

$Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |\pi - 3.1624426655|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1624426655|}{|\pi|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1624426655))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1624426655)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi , 3.1624426655))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi , 3.1624426655)*100, "%")
```

```
Error Absoluto =  0.020850011910206856
El porcentaje de Error Absoluto es:  2.0850011910206856 %
Error Relativo =  0.006636764918068625
El porcentaje de Error Relativo es:  0.6636764918068625 %
```

6. El número e se puede definir por medio de $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!})$, donde $n!nn(n-1)\cdots 2\ \ 1$ pa$n\ \ y0!$ $= 1$. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

a. $\sum_{n=0}^{5}(\frac{1}{n!})$

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$\frac{1}{0!} = 1$

$\frac{1}{1!} = 1$

$\frac{1}{2!} = 0.5$

$\frac{1}{3!} = 0.1666666667$

$1 + 1 + 0.5 + 0.1666666667 + 0.0416666667 + 0.0083333333 = 2.7183333333$

$e = 2.7182818285$

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |p - p^{*}| = | - 2.7182818285|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|2.7183333333-2.7182818285|}{|\pi|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(2.7183333333 , 2.7182818285))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(2.7183333333 , 2.7182818285 )*10

print("Error Relativo = ", errorRelativo(2.7183333333 , 2.7182818285))

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(2.7183333333 ,2.7182818285 )*100
```

```
Error Absoluto =  0.42331082508979323
El porcentaje de Error Absoluto es:  42.33108250897932 %
Error Relativo =  0.1347440205546986
El porcentaje de Error Relativo es:  13.474402055469861 %
```

b. $\sum_{n=0}^{10}(\frac{1}{n!})$

$\frac{1}{6!} = 0.0013888889$

$\frac{1}{7!} = 0.0001984127$

$\frac{1}{8!} = 0.0000248016$

$\frac{1}{9!} = 0.0000027557$

$\frac{1}{10!} = 0.0000002756$

$2.7183333333 + 0.0013888889 + 0.0001984127 + 0.0000248016 + 0.0000027557 + 0.0000002756 = 2.7182818011$

$Error\ Absoluto = |p - p^{*}| = |p - p^{*}| = |2.7182818011 - 2.7182818285|$

$Error\ Relativo = \frac{|p-p^{*}|}{|p|} = \frac{|2.7182818011-2.7182818285|}{|\pi|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto( 2.7182818011, 2.7182818285))

print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto( 2.7182818011, 2.7182818285 )*10

print("Error Relativo = ", errorRelativo( 2.7182818011, 2.7182818285))
```

```python
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo( 2.7182818011,2.7182818285 )*100
```

```
Error Absoluto =  2.7400000046640116e-08
El porcentaje de Error Absoluto es:  2.7400000046640116e-06 %
Error Relativo =  1.007989680670791e-08
El porcentaje de Error Relativo es:  1.007989680670791e-06 %
```

7. Suponga que dos puntos (x_0,y_0) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$ y $x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

a. Use los datos (x_0, y_0)=(1.31,3.24) y (x_1, y_1) = (1.93,5.76) y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas manera ¿Cuál método es mejor y por qué?

$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$

$x_0 y_1 = 1.31 \times 5.76 = 7.5456 \quad \text{(redondeado: 7.55)}$

$x_1 y_0 = 1.93 \times 3.24 = 6.2532 \quad \text{(redondeado: 6.25)}$

$x_0 y_1 - x_1 y_0 = 7.55 - 6.25 = 1.30$

$y_1 - y_0 = 5.76 - 3.24 = 2.52$

$x = \frac{1.30}{2.52} = 0.5159$

El valor redondeado es: 0.516

$x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

$0.62 \times 3.24 = 2.0088 \quad \text{(redondeado: 2.01)}$

$\frac{2.01}{2.52} = 0.7976 \quad \text{(redondeado: 0.798)}$

$x = 1.31 - 0.798 = 0.512$

- ¿Cuál método es mejor y por qué?

Se considera que el primer método aplicado es el mejor dado que existe un menor número de operaciones intermedias y por tanto hay un menor porcentaje de error provocado por la acumulación del redondeo.