Métodos Numéricos - DEBER 02 - Error Absoluto y Error Relativo

Alicia Pereira

Tabla de Contenidos

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*

Con el objetivo de calcular el error absoluto y el error relativo de los ejercicios planteados, se proponen dos funciones en Python que retornan los valores correspondientes haciendo uso de las ecuaciones definidas.

```
\begin{split} &Error\ Absoluto = |p-p^*| \\ &Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} \end{split}
```

```
import math

def errorAbsoluto(vReal,vAprox):
    return abs(vReal-vAprox)

def errorRelativo(vReal, vAprox):
    return (abs(vReal-vAprox))/abs(vReal)
```

a.
$$p = \pi, p* = \frac{22}{7}$$

 $Error\ Absoluto = |p - p*| = |\pi - \frac{22}{7}|$
 $Error\ Relativo = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - \frac{22}{7}|}{|\pi|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi,22/7))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi,22/7)*100, "%")
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi,22/7))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi,22/7)*100, "%")
Error Absoluto = 0.0012644892673496777
El porcentaje de Error Absoluto es: 0.12644892673496777 %
Error Relativo = 0.0004024994347707008
El porcentaje de Error Relativo es: 0.04024994347707008 %
  b. p = \pi, p* = 3.1416
Error Absoluto = |p - p^*| = |\pi - 3.1416|
Error Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi-3.1416|}{|\pi|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi,3.1416))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi,3.1416)*100, "%")
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi,3.1416))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi,3.1416)*100, "%")
Error Absoluto = 7.346410206832132e-06
El porcentaje de Error Absoluto es: 0.0007346410206832132 %
Error Relativo = 2.3384349967961744e-06
El porcentaje de Error Relativo es: 0.00023384349967961744 %
  c. p = e, p* = 2.718
Error Absoluto = |p - p^*| = |e - 2.718|
Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|e-2.718|}{|e|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.e, 2.718))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.e,2.718)*100, "%")
```

```
Error Absoluto = 0.0002818284590451192
El porcentaje de Error Absoluto es: 0.02818284590451192 %
Error Relativo = 0.00010367889601972718
El porcentaje de Error Relativo es: 0.010367889601972718 %
  d. p = \sqrt{2}, p* = 1.414
Error Absoluto = |p - p^*| = |\sqrt{2} - 1.414|
Error Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\sqrt{2}-1.414|}{|\sqrt{2}|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.sqrt(2), 1.414))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.sqrt(2),1.414)*100, "%")
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.sqrt(2),1.414))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.sqrt(2),1.414)*100, "%")
Error Absoluto = 0.00021356237309522186
El porcentaje de Error Absoluto es: 0.021356237309522186 %
Error Relativo = 0.00015101140222192286
El porcentaje de Error Relativo es: 0.015101140222192286 %
2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*
  a. p = e^{10}, p* = 22000
Error Absoluto = |p - p^*| = |e^{10} - 22000|
Error Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|e^{10}-22000|}{|e^{10}|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pow(math.e,10),22000))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", error Absoluto (math.pow(math.e, 10), 22000) *100,
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pow(math.e,10),22000))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pow(math.e, 10), 22000)*100,
```

print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.e,2.718)*100, "%")

print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.e,2.718))

```
Error Absoluto = 26.465794806703343
El porcentaje de Error Absoluto es: 2646.5794806703343 %
Error Relativo = 0.0012015452253326688
El porcentaje de Error Relativo es: 0.12015452253326687 %
  b. p = 10^{\pi}, p* = 1400
Error Absoluto = |p - p^*| = |10^{\pi} - 1400|
Error Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|10^\pi - 1400|}{|10^\pi|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pow(10,math.pi),1400))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", error Absoluto (math.pow(10, math.pi), 1400) *100,
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pow(10,math.pi),1400))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pow(10,math.pi),1400)*100,
Error Absoluto = 14.544268632989315
El porcentaje de Error Absoluto es: 1454.4268632989315 %
Error Relativo = 0.010497822704619136
El porcentaje de Error Relativo es: 1.0497822704619135 %
  c. p = 8!, p* = 39900
Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |8! - 39900|
Error Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|8!-39900|}{|8!|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.factorial(8),39900))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.factorial(8),39900)*100, "%
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.factorial(8),39900))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.factorial(8),39900)*100, "%
Error Absoluto = 420
El porcentaje de Error Absoluto es: 42000 %
El porcentaje de Error Relativo es: 1.0416666666666666 %
```

d.
$$p = 9!, p* = \sqrt{18\pi} (\frac{9}{e})^9$$

 $Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |9! - \sqrt{18\pi} (\frac{9}{e}^9)$
 $Error\ Relativo = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|9! - \sqrt{18\pi} (\frac{9}{e}^9)|}{|9!|}$

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.factorial(9),(math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((9), print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.factorial(9), (math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((9), print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.factorial(9), (math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((9), print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.factorial(9), (math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((9), print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.factorial(9), (math.sqrt(18*math.pi)*math.pow((9), print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.factorial(9), print("El porcentaje de Error Relativo es: ")
```

Error Absoluto = 3343.1271580516477
El porcentaje de Error Absoluto es: 334312.7158051648 %
Error Relativo = 0.009212762230080598
El porcentaje de Error Relativo es: 0.9212762230080598 %

3. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p.

Se plantea la siguiente inecuación para calcular el intervalo adecuado.

$$\begin{split} &\frac{|p^*-p|}{|p|} \leq 10^{-4} \\ &p - (10^{-4} \cdot p) \leq p^* \leq p + (10^{-4} \cdot p) \\ &\text{a. } \pi \\ &p = \pi \\ &\pi - 10^{-4} \cdot \pi \leq p^* \leq \pi + 10^{-4} \cdot \pi \\ &\pi - 3.1415926536 \cdot 10^{-4} \leq p^* \leq \pi + 3.1415926536 \cdot 10^{-4} \\ &3.1412784943 \leq p^* \leq 3.1419068129 \\ &\text{b. } e \\ &p = e \\ &e - (10^{-4} \cdot e) \leq p^* \leq e + (10^{-4} \cdot e) \\ &2.7182818285 - 2.7182818285 \cdot 10^{-4} \leq p^* \leq 2.7182818285 + 2.7182818285 \cdot 10^{-4} \\ &2.7180090000 \leq p^* \leq 2.7185546567 \end{split}$$

```
c. \sqrt{2} p = \sqrt{2} \sqrt{2} - 10^{-4} \cdot \sqrt{2} \le p^* \le \sqrt{2} + 10^{-4} \cdot \sqrt{2} 1.4142135624 - 1.4142135624 \cdot 10^{-4} \le p^* \le 1.4142135624 + 1.4142135624 \cdot 10^{-4} 1.4140721411 \le p^* \le 1.4143549836 d. \sqrt[3]{7} p = \sqrt[3]{7} 2.6457513111 - 2.6457513111 \cdot 10^{-4} \le p^* \le 2.6457513111 + 2.6457513111 \cdot 10^{-4} 2.6454867360 \le p^* \le 2.6460158862
```

4. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

```
Error Absoluto = 0.0007594936999995028
El porcentaje de Error Absoluto es: 0.07594936999995028 %
Error Relativo = 0.00012958963779624767
El porcentaje de Error Relativo es: 0.012958963779624766 %
  b. -10\pi + 6e - \frac{3}{61}
-10\pi = -10 \times 3.1415926536 = -31.4159265360
6e = 6 \times 2.7182818285 = 16.3096909710
\frac{3}{61} = 0.0491803279
-31.4159265360 + 16.3096909710 - 0.0491803279 = -15.1554158929
El valor redondeado es: -15.2
Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |-15.1554158929 - (-15.2)|
Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|-15.1554158929 - (-15.2)|}{|-15.1554158929|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(-15.1554158929 , -15.2))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(-15.1554158929 , -15.2)*100, "%"
print("Error Relativo = ", errorRelativo(-15.1554158929 , -15.2))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(-15.1554158929 , -15.2)*100, "%"
Error Absoluto = 0.044584107099998604
El porcentaje de Error Absoluto es: 4.45841070999986 %
Error Relativo = 0.0029417937069536534
El porcentaje de Error Relativo es: 0.29417937069536537 %
  c. (\frac{2}{9})(\frac{9}{11})
\frac{2}{9} = 0.222222222
\frac{9}{11} = 0.8181818182
0.222222222 \times 0.8181818182 = 0.1818181818
El valor redondeado es: 0.182
Error\ Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |0.1818181818 - 0.182|
Error Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|0.1818181818-0.182|}{|0.1818181818|}
```

```
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(0.1818181818 , 0.182))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(0.1818181818 , 0.182)*100, "%")
print("Error Relativo = ", errorRelativo(0.1818181818 , 0.182))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(0.1818181818 , 0.182)*100, "%")
Error Absoluto = 0.00018181819999998905
El porcentaje de Error Absoluto es: 0.018181819999998905 %
Error Relativo = 0.0010000001000999396
El porcentaje de Error Relativo es: 0.10000001000999396 %
  d. \frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}
\sqrt{13} = 3.6055512755
\sqrt{11} = 3.3166247904
3.6055512755 + 3.3166247904 = 6.9221760659
\frac{6.9221760659}{0.2889264851} = 23.9600672727
El valor redondeado es: 24.0
Error Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |23.9600672727 - 24.0|
Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|23.9600672727-24.0|}{|23.9600672727|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(23.9600672727 , 24.0))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(23.9600672727, 24.0)*100, "%")
print("Error Relativo = ", errorRelativo(23.9600672727 , 24.0))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(23.9600672727 , 24.0)*100, "%")
Error Absoluto = 0.039932727299998305
El porcentaje de Error Absoluto es: 3.9932727299998305 %
Error Relativo = 0.0016666366936914857
El porcentaje de Error Relativo es: 0.1666636693691486 %
```

5. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son:

$$x - (\frac{1}{3})x^3 + (\frac{1}{5})x^5$$

Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

```
a. 4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]
\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots
\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5
\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\approx 0.50000000000 - 0.0416666667 + 0.0062500000 = 0.4645833333
\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5
\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.3333333333 - 0.0123456790 + 0.0008230453 = 0.3218106996
\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0.4645833333 + 0.3218106996 = 0.7863940329
4 \times 0.7863940329 = 3.1455761316
Error Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |\pi - 3.1455761316|
Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1455761316|}{|\pi|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1455761316))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1455761316)*100, "%"
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi , 3.1455761316))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi , 3.1455761316)*100, "%"
Error Absoluto = 0.00398347801020682
El porcentaje de Error Absoluto es: 0.398347801020682 %
Error Relativo = 0.0012679804320445659
El porcentaje de Error Relativo es: 0.1267980432044566 %
   b. 16acrtan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{230})
```

```
\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5
\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.2000000000 - 0.0013333333 + 0.0000320000 = 0.1986986667
\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5
\arctan\left(\tfrac{1}{239}\right)\approx 0.0041841004 - 1.0310096\times 10^{-7} + 2.4373424\times 10^{-12} = 0.0041840003
16 \times 0.1986986667 = 3.1791786667
4 \times 0.0041840003 = 0.0167360012
3.1791786667 - 0.0167360012 = 3.1624426655
Error Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |\pi - 3.1624426655|
Error\ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1624426655|}{|\pi|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1624426655))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(math.pi , 3.1624426655)*100, "%"
print("Error Relativo = ", errorRelativo(math.pi , 3.1624426655))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(math.pi , 3.1624426655)*100, "%"
Error Absoluto = 0.020850011910206856
El porcentaje de Error Absoluto es: 2.0850011910206856 %
Error Relativo = 0.0066367649180686245
El porcentaje de Error Relativo es: 0.6636764918068625 %
   6. El número e se puede definir por medio de \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!}), donde n!nn(n-1)\cdots 2 1 pan y0!
       = 1. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:
   a. \sum_{n=0}^{3} (\frac{1}{n!})
e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}
\frac{1}{0!} = 1
\frac{1}{11} = 1
```

 $\frac{1}{2!} = 0.5$

 $\frac{1}{3!} = 0.1666666667$

```
1+1+0.5+0.1666666667+0.0416666667+0.0083333333=2.7183333333
e = 2.7182818285
Error\ Absoluto = |p-p^*| = |p-p^*| = |-2.7182818285|
Error \ Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|2.7183333333 - 2.7182818285|}{|\pi|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto(2.71833333333 , 2.7182818285))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto(2.71833333333 , 2.7182818285)*10
print("Error Relativo = ", errorRelativo(2.71833333333 , 2.7182818285))
print("El porcentaje de Error Relativo es: ", errorRelativo(2.7183333333 ,2.7182818285)*100
Error Absoluto = 0.42331082508979323
El porcentaje de Error Absoluto es: 42.33108250897932 %
Error Relativo = 0.1347440205546986
El porcentaje de Error Relativo es: 13.474402055469861 %
 b. \sum_{n=0}^{10} (\frac{1}{n!})
\frac{1}{6!} = 0.0013888889
\frac{1}{7!} = 0.0001984127
\frac{1}{8!} = 0.0000248016
\frac{1}{9!} = 0.0000027557
\frac{1}{10!} = 0.000002756
2.7182818011
Error Absoluto = |p - p^*| = |p - p^*| = |2.7182818011 - 2.7182818285|
Error Relativo = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \frac{|2.7182818011 - 2.7182818285|}{|\pi|}
print("Error Absoluto = ", errorAbsoluto( 2.7182818011, 2.7182818285))
print("El porcentaje de Error Absoluto es: ", errorAbsoluto( 2.7182818011, 2.7182818285 )*10
print("Error Relativo = ", errorRelativo( 2.7182818011, 2.7182818285))
```

Error Absoluto = 2.7400000046640116e-08

El porcentaje de Error Absoluto es: 2.7400000046640116e-06 %

Error Relativo = 1.007989680670791e-08

El porcentaje de Error Relativo es: 1.007989680670791e-06 %

7. Suponga que dos puntos (x_0,y_0) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$$
y
 $x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$

a. Use los datos (x_0, y_0) =(1.31,3.24) y (x_1, y_1) = (1.93,5.76) y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas manera ¿Cuál método es mejor y por qué?

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$$

$$x_0 y_1 = 1.31 \times 5.76 = 7.5456$$
 (redondeado: 7.55)

$$x_1y_0 = 1.93 \times 3.24 = 6.2532$$
 (redondeado: 6.25)

$$x_0y_1 - x_1y_0 = 7.55 - 6.25 = 1.30$$

$$y_1 - y_0 = 5.76 - 3.24 = 2.52$$

$$x = \frac{1.30}{2.52} = 0.5159$$

El valor redondeado es: 0.516

$$x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}$$

$$0.62 \times 3.24 = 2.0088$$
 (redondeado: 2.01)

$$\frac{2.01}{2.52} = 0.7976$$
 (redondeado: 0.798)

$$x = 1.31 - 0.798 = 0.512$$

• ¿Cuál método es mejor y por qué?

Se considera que el primer método aplicado es el mejor dado que existe un menor número de operaciones intermedias y por tanto hay un menor porcentaje de error provocado por la acumulación del redondeo.

GitHub: git@github.com: dayapt04

GitHub Métodos Númericos - Repositorio