1 Números

Os dois principais objetos de estudo da Matemática são os números e as figuras geométricas.

> **Grandeza**: algo que pode ser medido.

Quando comparamos uma **grandeza** e uma unidade obtemos um número. Se a grandeza é discreta, a comparação é uma **contagem** e o resultado, um número natural. Desse modo, quando contamos o número de selos de uma coleção, a unidade é 1 selo e dizemos que a coleção tem, por exemplo, 200 selos (número seguido da unidade).

Se a grandeza é contínua, a comparação é uma **medição** e o resultado é um número real. Assim, quando medimos a distância em quilômetros (km) entre duas cidades, a unidade é 1 quilômetro e dizemos que a distância entre essas cidades é, por exemplo, de 150 km (número seguido da unidade).

- *Os números estão presentes em muitos momentos do nosso dia a dia. Junte-se a um colega, analisem e resolvam as seguintes situações envolvendo números que vocês já estudaram no Ensino Fundamental.*

a)

ZoranKrstic/Shutterstock/Glow Images

Detalhe de calendário, destacando os meses de julho a outubro.

Quantas semanas completas temos de 27/7 a 15/10 do mesmo ano, incluídos esses dois dias?

11 semanas completas.

b)

Diego Minotto/<http://www.meusroteirosdeviagem.com>

Termômetro de rua em Urubici (SC). Fotografia de 2013.

Na cidade de Urubici, a temperatura às 7h era −3 °C.

Das 7h às 10h houve uma variação de +3 °C.

Das 10h às 13h a variação foi de +4 °C.

Das 13h às 16h a variação foi de −2 °C.

Qual foi a temperatura registrada às 16h nessa cidade? +2 °C

c)

Maksym Holovinov/Shutterstock/Glow Images

Prato com 12 biscoitos.

Em uma receita para 12 biscoitos são necessários 2 copos de leite.

Se Laura pretende fazer 36 biscoitos, que quantidade de leite vai usar? 6 copos.

d)

10 m

10 m  10 m

10 m

andrea crisante/Shutterstock/Glow Images

Terreno de forma quadrada.

Qual é a área, em m^2, desse terreno?

100 m^2

Em cada uma dessas situações usamos os números para contar ou medir. Neste capítulo, vamos recordar e aprofundar o que você já estudou sobre os importantes conjuntos numéricos: o dos números naturais ($\mathbb{N}$), o dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), o dos números racionais ($\mathbb{Q}$) e o dos números reais ($\mathbb{R}$). Você também conhecerá um pouco sobre a linguagem dos conjuntos.

> **Para refletir**
> Em quais outras situações você usa números? Troque ideias com seu colega.

2 A noção de conjunto

A noção de conjunto é simples e fundamental na Matemática, pois a partir dela podem ser expressos todos os conceitos matemáticos.

Um **conjunto** é uma coleção qualquer de objetos, chamados **elementos**. Podemos representar um conjunto colocando seus elementos entre chaves, separados por vírgula. Por exemplo:

a) conjunto C das unidades federativas da região Centro-Oeste do Brasil: C = {Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Goiás e Distrito Federal};

b) conjunto B dos números primos: $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$;

c) conjunto Q dos quadriláteros: Q = {quadriláteros}.

Comente com os alunos que se os elementos do conjunto são números decimais, podemos separá-los com ponto e vírgula para não haver confusão com a vírgula do número decimal.

Um objeto a qualquer pode ser elemento de determinado conjunto A.

- Nesse caso, dizemos que a pertence a A e escrevemos $a \in A$.
- Caso contrário, dizemos que a não pertence a A e escrevemos $a \notin A$.

Nos exemplos acima, temos:

a) Mato Grosso $\in C$ e Paraná $\notin C$;

b) $2 \in B$ e $9 \notin B$;

c) retângulo $\in Q$ e triângulo $\notin Q$.

Outra maneira de representar um conjunto é por meio de uma **propriedade** ou **condição**.

Por exemplo, consideremos a propriedade:

p: x é um número natural ímpar.

Essa propriedade pode ser expressa pelo conjunto $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$. Assim, é indiferente dizer que x possui a propriedade p ou que x pertence a I ($x \in I$).

Você sabia?
Para indicar que 2 não pertence a I, escrevemos $2 \notin I$.

Consideremos agora a condição c:

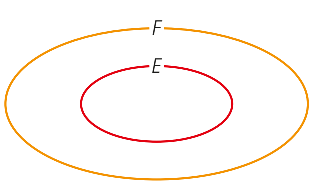
c: x é um número natural que satisfaz a condição $x > 5$.

Essa condição pode ser expressa pelo conjunto $A = \{6, 7, 8, 9, 10, ...\}$. Nesse caso, também é indiferente dizer que x satisfaz a condição c ou que $x \in A$.

Agora, consideremos dois conjuntos, E e F. Se todos os elementos de E forem também elementos de F, dizemos que E é um **subconjunto** de F ou que E **está contido** em F ou, ainda, que E **é parte** de F. Indicamos esse fato por $E \subset F$, que pode ser lido das seguintes maneiras:

- E é subconjunto de F;
- E está contido em F;
- E é parte de F.

Podemos representar esse subconjunto em um diagrama:



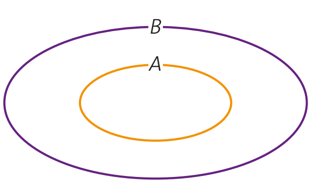
Banco de imagens/Arquivo da editora

Se E não for subconjunto de F, escrevemos $E \not\subset F$. Nesse caso, existe pelo menos um elemento de E que não pertence a F.

Exemplos:

a) Se A é o conjunto dos retângulos e B é o conjunto dos quadriláteros, então $A \subset B$, pois todo retângulo é um quadrilátero.

b) Se $C = \{1, 2, 3\}$ e $D = \{1, 2, 4\}$, então $C \not\subset D$, pois $3 \in C$ e $3 \notin D$. Nesse caso, também $D \not\subset C$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

O primeiro elemento desse conjunto é o zero. O **sucessor** do zero é o 1, o sucessor do 1 é o 2, e assim por diante. Representa-se o sucessor de um número natural qualquer n por $n + 1$. Como sempre podemos obter o sucessor de um número natural, dizemos que o conjunto dos números naturais é **infinito**. Tal fato é representado pelas reticências (...) no final.

Os números naturais são usados:

- nas contagens – por exemplo, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) estima que a população brasileira em 2020 será de aproximadamente 212 milhões de habitantes;
- nos códigos – por exemplo, o Código de Endereçamento Postal (CEP) da cidade de Bujari, no Acre, é 69926-000;
- nas ordenações – por exemplo, segundo o IBGE, o 1º estado brasileiro em superfície é o Amazonas e o 2º é o Pará.
- e também para expressar medidas de grandezas – por exemplo, 8 horas, 10 centímetros, 3 litros, 50 kg, 100 km/h, 1 570 745 km^2, etc.

Você sabia?

- $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais, pois a letra **N** é a inicial das palavras 'número' e 'natural'.
- Os números naturais constituem o modelo matemático para a contagem.

Para refletir

- Qualquer número natural tem um único sucessor? Sim.
- Números naturais diferentes têm sucessores diferentes? Sim.
- O zero é o único número natural que não é sucessor de nenhum outro? Sim.
- Existe um número natural que é maior do que todos os outros? Não.

Um subconjunto importante de $\mathbb{N}$ é o conjunto $\mathbb{N}^*$, obtido excluindo-se o zero de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Fique atento!

Sempre que queremos excluir o zero de um conjunto, colocamos o asterisco (*) no símbolo que o representa, por exemplo, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^*$, etc.

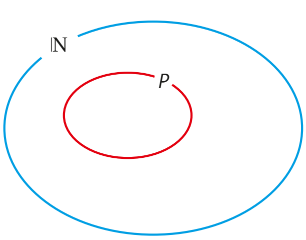
Um subconjunto de $\mathbb{N}$ ou parte de $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais pares (P):

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$$

ou

$$P = \{2n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

Indicamos assim: $P \subset \mathbb{N}$. (Lê-se "P é um subconjunto de $\mathbb{N}$", ou "P está contido em $\mathbb{N}$", ou "P é parte de $\mathbb{N}$".)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Você sabia?

- Todo número par p pode ser escrito na forma $p = 2n$, em que n é natural.
- Se m e n são naturais, então $m + n$ e $m \cdot n$ também serão sempre naturais.

Em $\mathbb{N}$ é sempre possível efetuar a adição e a multiplicação, ou seja, a soma e o produto de dois números naturais sempre resultam em um número natural. Já a subtração $3 - 4$, por exemplo, não é possível em $\mathbb{N}$. Daí a necessidade de ampliar o conjunto $\mathbb{N}$ introduzindo-se os números negativos.

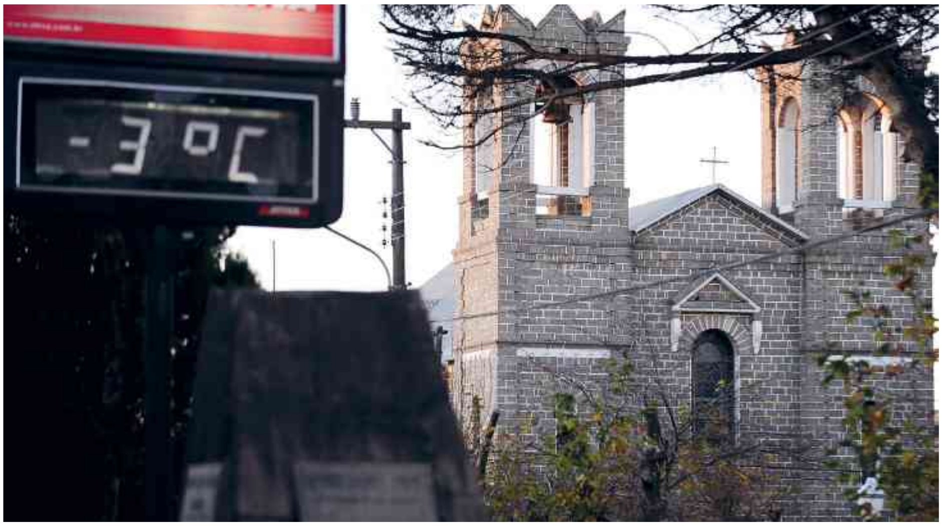
4 Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Reunindo os números naturais e os números inteiros negativos, obtemos o conjunto dos **números inteiros**, que é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Você sabia?
A letra *Z* é inicial da palavra '*Zahl*', que significa 'número' em alemão.

As medidas de algumas grandezas, como a temperatura, são indicadas por números inteiros.

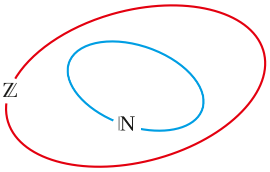


Junior Lago/UOL/Folhapress

Termômetro de rua na cidade de São Joaquim (SC) indicando temperatura negativa. Fotografia de 2014.

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

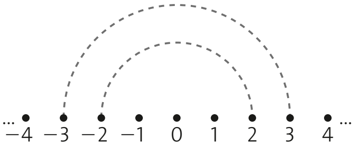
- $\mathbb{N}$, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Veja a representação no diagrama.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ou $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Observe que na figura a seguir há uma simetria em relação ao zero.



O oposto ou simétrico de 3 é -3, bem como o oposto de -3 é 3, valendo:

$$3 + (-3) = -3 + 3 = 0$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ é sempre possível efetuar a adição, a multiplicação e a subtração, ou seja, a soma, o produto e a diferença de dois números inteiros resultam sempre em um número inteiro. E todas as propriedades das operações em $\mathbb{N}$ continuam válidas em $\mathbb{Z}$.

Já da divisão de dois números inteiros nem sempre resulta um número inteiro. Veja exemplos:

a) $(-8) : (+2) = -4 \rightarrow$ é possível em $\mathbb{Z}$

b) $(-7) : (+2) = ? \rightarrow$ não é possível em $\mathbb{Z}$

Assim, foi necessário ampliar o conjunto $\mathbb{Z}$.

Para refletir
- Existe número natural que não é inteiro?
- Existe número inteiro que não é natural?

- Não, todo número natural é inteiro.
- Sim, os números inteiros negativos.

5 Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Ao acrescentarmos as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$, obtemos o **conjunto dos números racionais** ($\mathbb{Q}$). Assim, por exemplo, são números racionais:

$$-2,\quad -\frac{3}{2},\quad -1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{4},\quad 0,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{3}{4},\quad 1,\quad \frac{5}{3},\quad 2,\ \text{etc.}$$

Você sabia?
Fração aparente é aquela que indica um número inteiro:
$\frac{12}{4} = 3;\ -\frac{8}{2} = -4$; etc.
A aparência é de fração, mas representa um número inteiro.

Observe que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Por exemplo,

$$-2 = -\frac{6}{3},\quad 1 = \frac{2}{2},\quad 2 = \frac{10}{5},\quad -\frac{3}{4},\quad \frac{2}{3},\quad 0 = \frac{0}{2},\ \text{etc.}$$

Podemos, então, escrever:

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

Simbolicamente, indicamos assim:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \underbrace{|}_{\text{lê-se "tal que"}} x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

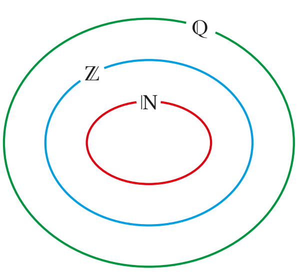
Estimule os alunos a relacionar a linguagem usual com a linguagem simbólica. Por exemplo, $a \in \mathbb{Z}$ significa 'a é um número inteiro'.

Você sabia?
A designação "racional" surgiu porque $\frac{a}{b}$ pode ser vista como uma razão entre os inteiros a e b. A letra $\mathbb{Q}$, que representa o conjunto dos números racionais, é a primeira letra da palavra 'quociente'.

A restrição $b \neq 0$ é necessária, pois $\frac{a}{b}$, divisão de a por b, só tem significado se b não for zero.

Se $b = 1$, temos $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a$, o que implica que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Verifique se os alunos compreenderam a linguagem matemática: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, então $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ou seja, "se $\mathbb{N}$ é parte de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é parte de $\mathbb{Q}$, então $\mathbb{N}$ é parte de $\mathbb{Q}$". O diagrama ao lado ajuda a visualizar essa sentença.

Agora, com os números racionais, podemos efetuar divisões que eram impossíveis só com números inteiros. Exemplos:

a) $17 : 9 = \frac{17}{9}$, ou $1\frac{8}{9}$, ou 1,8888...

b) $(-7) : (+2) = \frac{-7}{+2} = \frac{-35}{+10} = -3{,}5$

Representação decimal dos números racionais

> **Fique atento!**
> A representação decimal tem um grande valor prático comparado com a representação em forma de fração. Foi o matemático holandês do século XVI Simon Stevin (1548-1620) quem a sistematizou em seu livro *A dízima*, publicado em 1585.

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, sua representação decimal é obtida dividindo-se a por b, podendo resultar em:

- decimais exatos, finitos, quando o denominador contiver apenas os fatores primos de 10 (2 e/ou 5). Exemplos:

a) $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

b) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{25}{100} = 0{,}25$

c) $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

d) $\frac{13}{20} = \frac{13}{2^2 \times 5} = \frac{13 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{65}{100} = 0{,}65$

- decimais periódicos ou dízimas periódicas, infinitas, quando o denominador da fração na forma irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5. Exemplos:

a) Dízimas periódicas simples: o período apresenta-se logo após a vírgula. Exemplos:

i) $\frac{5}{9} = \frac{5}{3 \cdot 3} = 0{,}5555... = 0{,}\overline{5}$ (período igual a 5)

ii) $\frac{7}{3} = 2{,}33333... = 2{,}\overline{3}$ (período igual a 3)

iii) $\frac{4}{33} = \frac{4}{3 \cdot 11} = 0{,}12121212... = 0{,}\overline{12}$ (período igual a 12)

b) Dízimas periódicas compostas: entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica. Exemplos:

i) $\frac{1}{45} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} = 0{,}022222... = 0{,}\overline{2}$ (período igual a 2 e parte não periódica igual a 0)

ii) $\frac{61}{90} = \frac{61}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = 0{,}677777... = 0{,}6\overline{7}$ (período igual a 7 e parte não periódica igual a 6)

Um número decimal exato pode ser representado na forma $\frac{a}{b}$; essa fração é chamada **fração geratriz de um decimal exato**. Analogamente, um decimal periódico pode ser representado pela fração $\frac{a}{b}$, e esta se chamará **fração geratriz de um decimal periódico**.

> **Para refletir**
> Por que o nome "fração geratriz"?

Porque é a fração que gera, dá origem ao número decimal.

Obtenção da fração geratriz de um decimal exato

Exemplo:

$2{,}12 = \frac{212}{100} = \frac{53}{25} \rightarrow$ fração geratriz

> **Fique atento!**
> A fração geratriz de um decimal exato será uma fração em que o numerador é o decimal sem a vírgula e o denominador é o algarismo 1 acompanhado de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte decimal.

Obtenção da fração geratriz de um decimal periódico

Dízima periódica simples

Exemplos:

a) $0{,}222... \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}222... \\ 10x = 2{,}222... \\ 10x = 2 + 0{,}222... \\ 10x = 2 + x \\ 9x = 2 \\ x = \dfrac{2}{9} \rightarrow \text{fração geratriz} \end{cases}$

b) $0{,}414141... \Rightarrow \begin{cases} N = 0{,}414141... \\ 100N = 41{,}414141... \\ 100N = 41 + 0{,}414141... \\ 100N = 41 + N \\ 99N = 41 \\ N = \dfrac{41}{99} \rightarrow \text{fração geratriz} \end{cases}$

Fique atento!
A fração geratriz de uma dízima periódica simples sem parte inteira será uma fração em que o numerador é o período e o denominador é formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período.

Dízima periódica composta

Exemplo:

$x = 0{,}1787878...$

$10x = 1{,}787878...$

$10x = 1 + 0{,}787878...$

$10x = 1 + \dfrac{78}{99}$

$10x = \dfrac{177}{99} \Rightarrow x = \dfrac{177}{990} \rightarrow$ fração geratriz

Fique atento!
Se o decimal periódico apresentar uma parte inteira, o procedimento é o mesmo com a parte decimal (nas dízimas simples ou compostas) e ao final acrescentamos a parte inteira. Exemplo:

$2{,}33333... = 2 + 0{,}\overline{3} = 2 + \dfrac{3}{9} = \dfrac{18+3}{9} = \dfrac{21}{9} \rightarrow$ fração geratriz

Observações:

1ª) O número 0,999... é igual a 1. Vejamos por quê.

$$a = 0{,}999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

Os valores aproximados de a são: 0,9; 0,99; 0,999; etc.

Note que: $1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $1 - 0{,}99 = 0{,}01$; $1 - 0{,}999 = 0{,}001$; etc.

Se tomarmos a com n dígitos após a vírgula: $0{,}\underbrace{999\dots9}_{n \text{ dígitos}}$ para um n suficientemente grande, a diferença:

$1 - 0{,}\underbrace{999\dots9}_{n}$ pode tornar-se tão pequena quanto quisermos.

Assim, a sequência 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ... tem como elementos números cada vez mais próximos de 1, isto é, tem 1 como limite. Logo, 0,9999... = 1.

2ª) Como $0{,}999... = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \dfrac{9}{10^3} + \dots = 1$, temos que:

$0{,}111... = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^3} + \dots = \dfrac{1}{9}$ (dividimos a expressão acima por 9).

$0{,}666... = \dfrac{6}{10} + \dfrac{6}{10^2} + \dfrac{6}{10^3} + \dots = \dfrac{6}{9}$ (multiplicamos a expressão obtida acima por 6).

De modo geral, podemos escrever que:

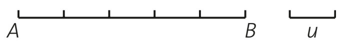
$$0{,}jjj... = \frac{j}{10} + \frac{j}{10^2} + \frac{j}{10^3} + \dots = 0{,}\overline{j}$$

Números racionais e medidas de grandezas

Historicamente, os números racionais estão associados a resultados de medições empíricas de grandezas. Por exemplo, ao medir o comprimento de um **segmento de reta** com uma unidade de medida u, podem ocorrer duas possibilidades:

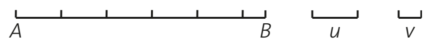
Segmento de reta: parte da reta compreendida entre dois de seus pontos distintos, denominados extremos.

1ª) A unidade u **cabe** um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$:



Vamos supor que u caiba exatamente p vezes em $\overline{AB}$. Então $\overline{AB} = p$ unidades, em que p é um número natural. Na representação acima, a medida de $\overline{AB}$ é $5u$.

2ª) A unidade u **não cabe** um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$:



Nesse caso, procuramos um segmento de reta v que caiba q vezes em u e p vezes em $\overline{AB}$. A medida de v será a fração $\frac{1}{q}$, e, consequentemente, a medida de $\overline{AB}$ será p vezes $\frac{1}{q}$, ou seja, igual a $\frac{p}{q}$. Quando tal segmento de reta v existe, dizemos que os segmentos de reta u e $\overline{AB}$ são **comensuráveis**, e a medida de $\overline{AB}$ é o número racional $\frac{p}{q}$.

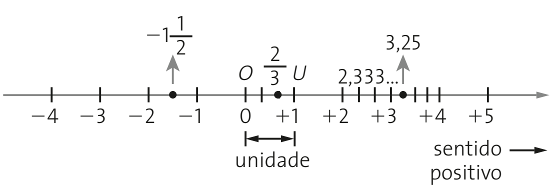
Na segunda possibilidade, temos que $AB = 5\frac{1}{2}u$, ou $5{,}5u$. Se tomássemos a unidade u como sendo 1 centímetro (1 cm), teríamos que $AB = 5{,}5$ cm.

Observação: Nem sempre existe o segmento de reta v nas condições acima, ou seja, nem sempre dois segmentos de reta são comensuráveis. Estudaremos isso ainda neste capítulo.

Os números racionais na reta numerada

Imaginemos uma reta na qual foram fixados um ponto O, chamado de origem, e um ponto U, diferente de O. Tomamos o segmento de reta OU como unidade de comprimento (de medida 1). Escolhemos também um sentido para ser o positivo. Agora, podemos localizar na reta numerada qualquer número racional.

Por exemplo, veja a localização dos números racionais $\frac{2}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; 3,25 e 2,333..., além dos inteiros -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5.



- $\frac{2}{3}$ fica entre 0 e 1: dividimos o intervalo em 3 partes iguais e tomamos duas no sentido de 0 para 1.
- $-1\frac{1}{2}$ fica entre -2 e -1, no ponto médio do intervalo.
- $3{,}25 = 3\frac{25}{100} = 3\frac{1}{4}$ fica entre 3 e 4: dividimos o intervalo em 4 partes iguais e tomamos uma no sentido de 3 para 4.
- $2{,}333... = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$ fica entre 2 e 3: dividimos o intervalo em 3 partes iguais e tomamos uma no sentido de 2 para 3.

Todo número racional tem um ponto correspondente na reta numerada. Mas nem todo ponto da reta numerada corresponde a um número racional. Assim, o conjunto $\mathbb{Q}$ não "preenche" toda a reta numerada. É como se existissem "buracos" a serem completados com outro tipo de número: os **números irracionais**.

Para refletir
- Entre dois números inteiros, sempre há outro número inteiro?
- Entre dois números racionais sempre há outro número racional?

Converse com um colega sobre isso.

Veja as respostas na seção Respostas.

6 Números irracionais

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para medir todos os segmentos de reta, ou seja, que todos os segmentos de reta eram comensuráveis. Os discípulos de Pitágoras também acreditavam nisso, mas foram eles próprios que descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são **segmentos de reta incomensuráveis** (veja a página 22).

Ao medir a diagonal de um quadrado, que é um polígono convexo, cujo lado mede uma unidade de comprimento, chegamos a um número que **não** é racional. Acompanhe:

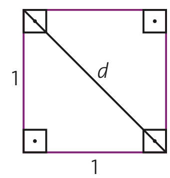
> **Fique atento!**
> Diagonal de um polígono convexo: segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos de um polígono convexo.

Usando a relação de Pitágoras:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$



Estimule os alunos a ler, interpretar e debater o texto da página 22. Se necessário, recorde com eles a relação de Pitágoras.

A pergunta é: que número, elevado ao quadrado, resulta em 2? Com o uso de uma calculadora, podemos obter parte da representação decimal do número fazendo **aproximações sucessivas**.

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} 1^2 = 1 \text{ (menor do que 2)} \\ 2^2 = 4 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1 e 2}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1{,}4)^2 = 1{,}96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}5)^2 = 2{,}25 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,4 e 1,5}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1{,}41)^2 = 1{,}9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,41 e 1,42}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1{,}414)^2 = 1{,}999396 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}415)^2 = 2{,}002225 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,414 e 1,}$$

Se continuarmos esse processo, não chegaremos nem a uma representação decimal exata nem a uma dízima periódica. Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional (veja a demonstração desse fato na página 23).

Os números que não admitem uma representação decimal exata nem uma representação na forma de dízima periódica chamam-se **números irracionais**. Assim, $\sqrt{2}$ é um número irracional, pois a representação decimal de $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas.

O número irracional $\sqrt{2}$ tem por valores aproximados, por falta (ou seja, menores que $\sqrt{2}$), os números racionais:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421$$

Dessa forma, temos a sequência não decrescente de números racionais:

$$1 \leqslant 1{,}4 \leqslant 1{,}41 \leqslant 1{,}414 \leqslant 1{,}4142 \leqslant 1{,}41421 \leqslant \ldots$$

que são valores racionais cada vez mais próximos do número irracional $\sqrt{2}$. Dizemos então que o número irracional $\sqrt{2}$ é o limite dessa sequência de números racionais.

Observação: Para fazer cálculos, usamos valores racionais aproximados de $\sqrt{2}$, como $\sqrt{2} = 1{,}41$ ou $\sqrt{2} = 1{,}4142$.

Há infinitos números irracionais; veja alguns:

a) π, $\pi + 1$, $\pi + 2$, $\pi + 3$, ...

b) A raiz quadrada de um número natural não quadrado perfeito: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{8}$; $-\sqrt{10}$.

c) A raiz cúbica de um número natural não cúbico perfeito: $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[3]{11}$; $-\sqrt[3]{15}$; $-\sqrt[3]{25}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254\ldots$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = 1{,}3416408\ldots$

O **conjunto dos números irracionais** é denotado por $\mathbb{I}$.

π (Pi) é irracional

π é um número que, por definição, é a área de um círculo de raio 1. Quando escrevemos $\pi = 3{,}14159265...$, entendemos que o segundo membro dessa igualdade representa uma sequência infinita de decimais exatos finitos:

3 3,1 3,14 3,141 3,1415 3,14159 3,141592 etc.

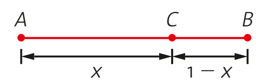
em que cada elemento da sequência representa um valor racional aproximado de π.

Os matemáticos já provaram que π não é um número racional e, portanto, não há periodicidade na sequência acima.

Você sabia?
O número irracional π foi calculado com o auxílio de um computador, obtendo-se 1,2 trilhão de casas decimais sem que tenha surgido uma decimal exata ou uma dízima. A demonstração feita pelos matemáticos é o único modo que temos de saber que nenhum computador vai encontrar periodicidade no cálculo dos algarismos decimais do π, mesmo que se examinem alguns trilhões de dígitos.

O número de ouro dos gregos, Φ (Fi), é irracional

Considere um segmento de reta *AB* cuja medida *AB* é de 1 unidade de comprimento. Nele podemos localizar um ponto *C*, de tal modo que *C* divide $\overline{AB}$ na seguinte proporção: a razão entre o segmento de reta todo e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a parte menor.



Assim, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CB}$, ou seja:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo essa equação, o valor positivo de x é $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Consideremos a razão:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887...$$

Estimule os alunos a pesquisar sobre o número de ouro/número áureo dos gregos.

Esse número irracional, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo **valor aproximado** racional é 1,618034, é conhecido como **número de ouro**, **razão de ouro** ou ainda **razão áurea**.

Para os gregos, o número de ouro representava harmonia, equilíbrio e beleza. Por esse motivo, muitas construções gregas tinham como base esse número. Mas foi no século XIII que o matemático Fibonacci constatou que o número de ouro está presente também na natureza. De acordo com alguns historiadores, no Renascimento, a revalorização dos conceitos estéticos gregos levou grandes pintores, como Leonardo da Vinci (1452-1519), a utilizar o número de ouro em suas pinturas, como na obra *Mona Lisa*. O número de ouro será retomado no Capítulo 7, que aborda sequências.

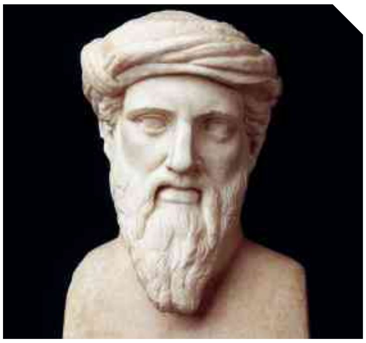
NYT/The New York Times/Latinstock

Mona Lisa, óleo sobre tela de Leonardo da Vinci (entre 1503 e 1505). 76,8 cm × 53 cm. Museu do Louvre, Paris (França).

Leitura

Pitágoras

Pitágoras nasceu por volta de 580 a.C. na ilha de Samos, que fica do lado leste do mar Egeu. Conta-se que ele viajou bastante, visitando o Egito e a Babilônia, e que fundou, em Crotona, uma escola dedicada principalmente ao estudo da Matemática e Filosofia. Não era uma escola como as atuais, mas, sim, uma sociedade cujos membros se empenhavam em estudar e descobrir coisas novas.



Araldo de Luca/Corbis/Latinstock

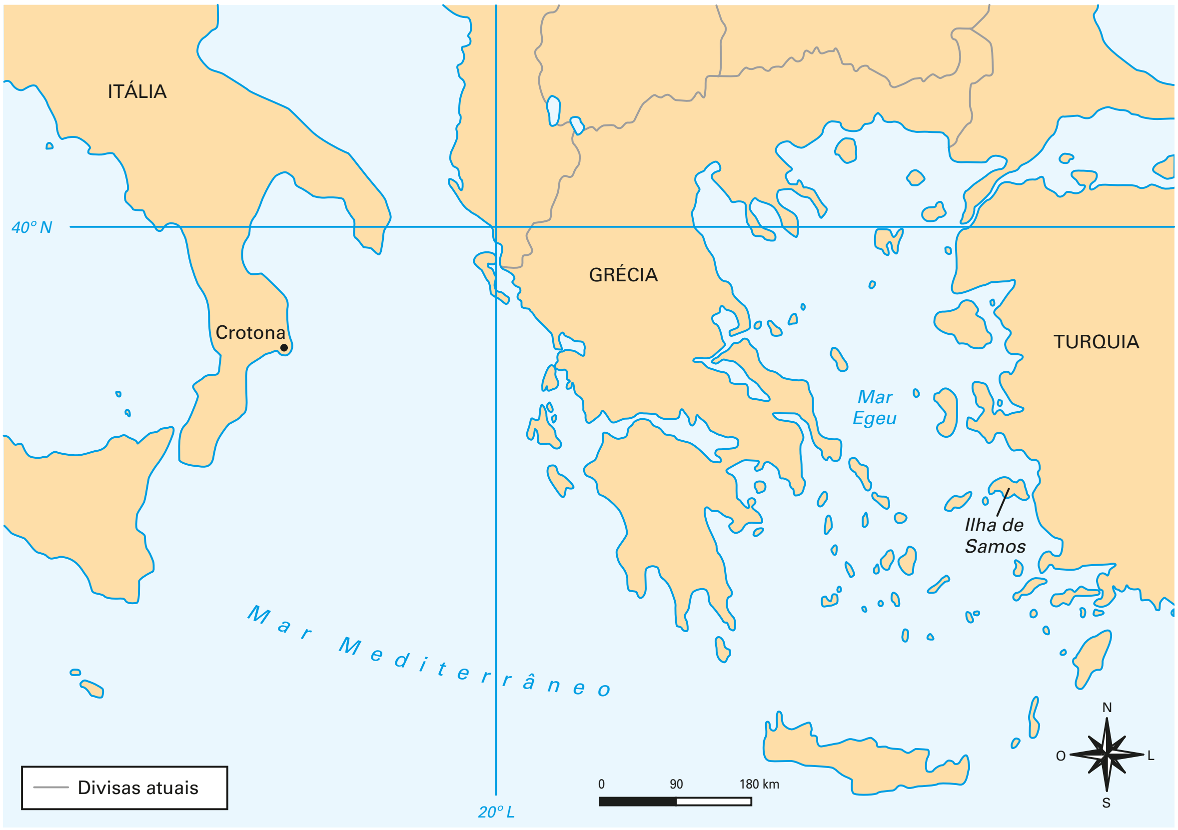
Busto de Pitágoras de Samos (c. 580-500 a.C.). Escultura grega. Mármore, 49,3 cm. Museu Capitolini, Roma (Itália).

Como todos os documentos da época se perderam, tudo o que conhecemos sobre Pitágoras veio de referências séculos depois. Não conhecemos a demonstração original do teorema de Pitágoras nem sabemos se foi ele mesmo que chegou a esse teorema, pois na escola de Crotona as descobertas dos seus membros levavam o nome do “diretor” da escola, ou seja, Pitágoras.

Foi nessa época que surgiu o problema da incomensurabilidade, ou seja, o fato de que dados dois segmentos de reta é possível que nenhuma fração do primeiro segmento de reta caiba um número inteiro de vezes no segundo segmento de reta. O teorema de Pitágoras mostrou concretamente que, dada uma unidade, a medida de um segmento de reta nem sempre pode ser representada por uma fração. Como vimos na página 20, a diagonal de um quadrado não pode ser medida por uma fração tomando-se o lado do quadrado como unidade.

A partir desse fato, os matemáticos perceberam que existiam os números que chamamos de irracionais.

Localização da antiga cidade de Crotona e da Ilha de Samos



Banco de imagens/Arquivo da editora

Adaptado de: SIMIELLI, Maria Elena. *Geoatlas*. 34. ed. São Paulo: Ática, 2013. p. 77.

Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional

Para provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, vamos supor que ele seja um número racional, ou seja, que possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ e chegaremos a um absurdo.

Supomos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Consideramos $\frac{p}{q}$ fração irredutível, ou seja, p e q são primos entre si, isto é, mdc $(p, q) = 1$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \text{I}$$

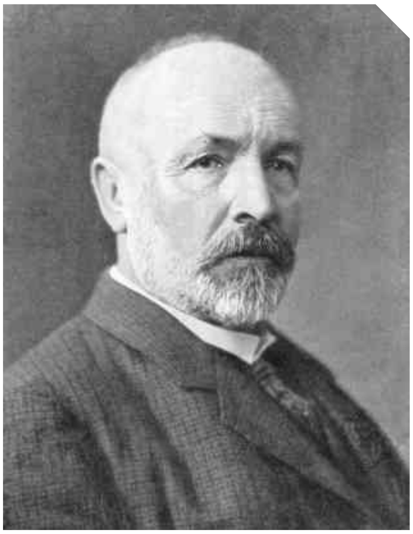
Como todo número par pode ser escrito na forma $2k$, em que $k \in \mathbb{Z}$, temos que $p^2 = 2\underbrace{q^2}_{k}$ é par II.
Assim, p^2 é par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow p = 2m, m \in \mathbb{Z}$ III.
Observe que:

$p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \xrightarrow{\text{I}} 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \xrightarrow{\text{II}} q^2$ é par $\Rightarrow q$ é par IV

As conclusões III, de que "p é par", e IV, de que "q é par", são contraditórias, já que p e q foram supostos primos entre si. Chegamos a um absurdo. Assim, não podemos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Portanto, $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ não é uma decimal exata nem periódica.

George Cantor


Interfoto/Latinstock

Fotografia de George Cantor (1845-1918). Biblioteca do Congresso, Washington, D.C. (EUA).

Em geral, as teorias matemáticas surgem do trabalho de vários matemáticos de uma mesma época, em conjunto ou mesmo separadamente. Não foi o caso da Teoria dos Conjuntos. A criação dessa teoria deve-se a um único homem: George Cantor.

Cantor nasceu em 1845 em São Petersburgo, na Rússia, mas passou a maior parte de sua vida na Alemanha. Quando jovem interessou-se pela Teoria dos Números, e esse foi, inclusive, o tema da sua tese de doutorado obtido em Berlim em 1867.

Em seguida, Cantor investigou séries trigonométricas, mas, ao mesmo tempo, começou a pensar nos conjuntos, nas suas operações e, sobretudo, nos conjuntos com infinitos termos.

Em 1874, publicou um artigo revolucionário no *Jornal de Crelle*, que marcou o nascimento da Teoria dos Conjuntos. Nesse artigo Cantor afirma que os conjuntos infinitos não são todos iguais, e isso causou enorme controvérsia. Muitos matemáticos defenderam as novas ideias, mas outros matemáticos famosos e tradicionais as atacaram fortemente.

Nos 10 anos seguintes, a discussão sobre a moderna Teoria dos Conjuntos foi intensa, e ela acabou por se tornar universalmente aceita. Cantor, mesmo sem ter sido na época muito aclamado pela sua teoria, teve um período de certa tranquilidade. Entretanto, em 1901 essa tranquilidade foi perturbada por uma afirmação de outro grande matemático, chamado Bertrand Russel (1872-1970). Esse matemático enunciou um problema que, aparentemente, colocava em dúvida a Teoria dos Conjuntos. Esse problema foi chamado de "o paradoxo do barbeiro" e conduziu Cantor a um total esgotamento nervoso por não conseguir argumentos para explicá-lo. Cantor morreu em um hospital psiquiátrico em 1918.

As ideias de Cantor possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da Matemática, como a topologia, a teoria da medida e outras que, talvez, um dia você vai estudar.

Saiba mais

1. Os infinitos

O conjunto dos números naturais é infinito, e o conjunto dos números reais também é infinito. Cantor demonstrou que o infinito dos números reais é "maior" que o dos números naturais. Além disso, existem infinitos ainda "maiores" que o dos números reais.

2. O *Jornal de Crelle*

O *Jornal de Crelle,* no qual Cantor publicou seu primeiro trabalho, existe até hoje. Seu fundador foi um alemão chamado August Crelle, e o nome oficial do jornal é *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Jornal para a Matemática Pura e Aplicada).

3. O paradoxo do barbeiro

Em uma pequena cidade há apenas uma barbearia, e a população da cidade pode ser dividida em dois grupos: os que se barbeiam sozinhos e os que são barbeados pelo barbeiro.

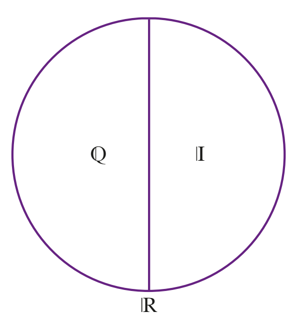
A pergunta é: quem faz a barba do barbeiro?

Reprodução/De Gruyter

Capa do *Jornal de Crelle*. Edição de março de 2016.

7 Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Da reunião do conjunto dos números racionais com os números irracionais obtemos o **conjunto dos números reais** ($\mathbb{R}$). Veja o diagrama.



Banco de imagens/Arquivo da editora

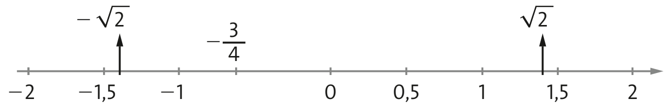
Como constatamos, os números racionais não são suficientes para preencher todos os pontos da reta numerada. O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Por exemplo, os pontos da reta correspondentes aos números $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, etc. não são alcançados com os números racionais. Já os números reais esgotam todos os pontos da reta, ou seja, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta.

Fique atento!
A possibilidade de relacionar pontos e números foi responsável por grandes progressos na Matemática.

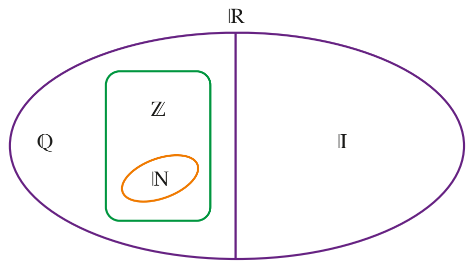
Por isso, dizemos que existe uma **correspondência biunívoca** entre os números reais e os pontos da reta. Temos assim a **reta real orientada**, que é construída desta forma: em uma reta, escolhemos uma origem (e associamos a ela o zero), um sentido de percurso e uma unidade de comprimento, por exemplo:

(unidade de comprimento)

Observe alguns números reais colocados na reta real:



O diagrama abaixo relaciona os conjuntos numéricos estudados até aqui.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- $\mathbb{N}$ é parte de $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ é parte de $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$ é parte de $\mathbb{R}$.
  Indicamos essas relações por:
  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{I}$ é parte de $\mathbb{R}$. Indicamos essa relação assim:
  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não têm elementos comuns.

Observação: Com os números reais, toda equação do tipo $x^2 = a$, com $a \in \mathbb{N}$, pode ser resolvida e todos os segmentos de reta podem ser medidos.

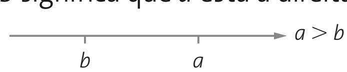
Desigualdades entre números reais

Dados dois números reais quaisquer, a e b, ocorre uma e somente uma das seguintes possibilidades:

$a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$

Geometricamente, a desigualdade $a < b$ significa que a está à esquerda de b na reta real orientada:

A desigualdade $a > b$ significa que a está à direita de b na reta real orientada:



Fique atento!
São reais:
- os números naturais;
- os números inteiros;
- os números racionais;
- os números irracionais.

Os números reais constituem o modelo matemático para as medidas.

Aritmeticamente, vamos analisar alguns exemplos:

a) 2,195... < 3,189..., pois 2 < 3;

b) 4,128... < 4,236..., pois 4 = 4 e 0,1 < 0,2;

c) 3,267... < 3,289..., pois 3 = 3; 0,2 = 0,2 e 0,06 < 0,08;

d) 5,672... < 5,673..., pois 5 = 5; 0,6 = 0,6; 0,07 = 0,07 e 0,002 < 0,003, e assim por diante.

Você sabia?
Ordenar os números reais aritmeticamente é como ordenar as palavras em um dicionário.

Algebricamente, $a < b$ se, e somente se, a diferença $d = b - a$ é um número positivo, ou seja, vale $a < b$ se, e somente se, existe um número real positivo d tal que $b = a + d$.

Uma vez definida essa relação de ordem dos números reais, dizemos que eles estão ordenados. Usamos também a **notação** $a \leqslant b$ para dizer que $a < b$ ou $a = b$. Assim:

$a \leqslant b$ lê-se a é menor do que ou igual a b.
$b \geqslant a$ lê-se b é maior do que ou igual a a.

Notação: conjunto de sinais com que se faz uma representação ou designação convencional.

Módulo ou valor absoluto de um número real

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número real r, que representamos por $|r|$, é considerado igual a r se $r \geqslant 0$ e igual a $-r$ se $r < 0$. Por exemplo:

a) $|2| = 2$, porque, neste caso, $r = 2$ e $2 > 0$

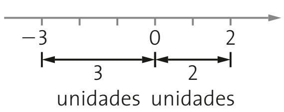
b) $|0| = 0$, porque, neste caso, $r = 0$

c) $|-2| = -(-2) = 2$, porque $r = -2$ e $-2 < 0$

Resumindo, podemos escrever:

$$|r| = r, \text{ se } r \geqslant 0 \quad \text{e} \quad |r| = -r, \text{ se } r < 0$$

Geometricamente, o módulo de um número indica, na reta real orientada, a distância desse número ao zero.



- distância do 2 ao 0: 2 unidades $\rightarrow |2| = 2$
- distância do -3 ao 0: 3 unidades $\rightarrow |-3| = 3$

Veja outros exemplos:

a) $|3| = 3$

b) $|-6| = -(-6) = 6$

c) $\left|-\sqrt{2}\right| = -\left(-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$

d) $|0| = 0$

Observe que o módulo de um número real qualquer nunca é negativo, ou seja, é sempre positivo ou zero.

Exemplos:

a) $2 \cdot |5| = 2 \cdot 5 = 10$

b) $|-7| + |-2| = 7 + 2 = 9$

c) $|-3| - |+8| = 3 - 8 = -5$

d) $|-5 + 3| = |-2| = 2$

e) $|-5| + |3| = 5 + 3 = 8$

f) $|(-5)(-4)| = |20| = 20$

g) $|3 - x|$ quando $x = 7$
$|3 - x| = |3 - 7| = |-4| = 4$

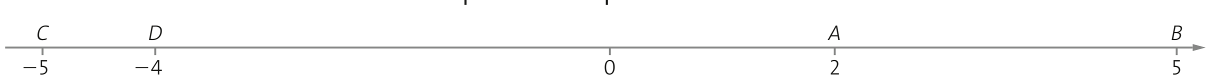
h) $|x^2 - 3x - 10|$ quando $x = 2$
$|x^2 - 3x - 10| = |4 - 6 - 10| = |-12| = 12$

i) $|x^2|$ com $x \in \mathbb{R}$
Como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geqslant 0$ e, pela definição, $|x^2| = x^2$.

j) $|x - 2| = x - 2$ se $x \geqslant 2$ e
$|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ se $x < 2$

Distância entre dois pontos na reta real orientada

Considerando a reta real orientada representada por:



podemos determinar, pelo módulo, a distância entre dois pontos dessa reta orientada fazendo a correspondência entre os pontos da reta e números reais:

- a distância entre A e B é $AB = |5 - 2| = |3| = 3$
- a distância entre C e D é $CD = |(-4) - (-5)| = |1| = 1$
- a distância entre D e A é $DA = |2 - (-4)| = |6| = 6$
- a distância entre B e C é $BC = |(-5) - 5| = |-10| = 10$

Observe que:

- a distância entre A e B é $AB = |5 - 2| = |3| = 3$
- a distância entre B e A é $BA = |2 - 5| = |-3| = 3$

Logo, $AB = BA$.

Verifique outros exemplos e veja que essa desigualdade ocorre sempre.

De modo geral, é possível demonstrar que:

Na reta real orientada, se a é a coordenada do ponto A e b é a coordenada do ponto B, então a distância entre A e B pode ser escrita por $|a - b|$ ou $|b - a|$, que são iguais.

Exercícios

1. Escreva no caderno, usando chaves, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{N}$.

a) $M(6)$: conjunto dos múltiplos de 6.

b) $D(6)$: conjunto dos divisores de 6.

c) A: conjunto dos números primos menores do que 20.

d) C: conjunto dos números naturais quadrados perfeitos.

2. Represente no caderno o conjunto formado pelos possíveis valores de x em cada item.

a) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 3$

b) $x \in \mathbb{Z}$ e $x \geqslant -2$

c) $x \in \mathbb{N}$ e $x \leqslant +1$

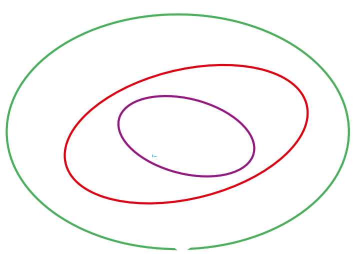
d) $x \in \mathbb{Z}$ e $-2 < x \leqslant 3$

e) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 0$

f) $x \in \mathbb{Z}$ e $x < 0$

3. Formule uma situação-problema que envolva números inteiros e dê para um colega resolver.

4. Copie e complete o diagrama a seguir no caderno, colocando nele os símbolos dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ de forma adequada.

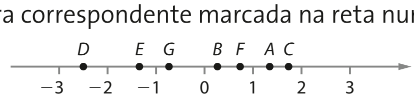


Banco de imagens/Arquivo da editora

Depois distribua os seguintes números nos locais adequados:

-8	$+7$	$\frac{3}{8}$	$-0,5$	12	0	-23	$1\frac{4}{5}$	0,555...

5. Associe no caderno cada número racional abaixo à letra correspondente marcada na reta numerada.



- $1\frac{4}{5}$
- $\frac{4}{3}$
- $-\frac{7}{10}$
- $-\frac{5}{4}$
- $-2,5$
- $0,181818...$
- $0,7$

6. Dê a representação decimal dos seguintes números racionais:

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $1\frac{2}{3}$

7. Determine a geratriz $\frac{a}{b}$ das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,333...

b) 0,1666...

c) 0,242424...

d) 0,125777...

8. Coloque em ordem crescente os números reais:

$$\frac{6}{10};\ 0,\bar{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{4}{5};\ 0,\overline{52};\ 0,25$$

9. Identifique, sem fazer as contas, se a representação decimal dos números dados será exata, infinita periódica ou infinita não periódica.

a) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{171}{40}$

c) $\sqrt{17}$

d) $\frac{23}{90}$

e) $\sqrt{101} + 5$

f) $\frac{1}{125}$

10. Entre os números reais $-\sqrt{3}$ e $+\sqrt{5}$:

a) quantos números naturais existem? E números inteiros?

b) quantos números racionais existem? E números irracionais?

11. *Fazendo conjecturas com o uso da calculadora*

Usem a calculadora, substituam x e y por números reais quaisquer várias vezes e verifiquem se as afirmações abaixo são verdadeiras:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ V

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$ F

> **Você sabia?**
> Conjecturar é levantar hipóteses, é inferir que algo é provável.

Agora, elevem ambos os membros ao quadrado nos itens **a** e **b** e verifiquem se suas conjecturas estavam corretas.

12. Façam o que se pede.

a) Efetuem cada operação:

- $2 + 4$
- $2 + 6$
- $4 + 8$
- $10 + 12$
- $6 + 10$
- $100 + 200$
- $26 + 60$
- $8 + 8$

b) Notem que só foram usados **números pares** nas operações acima. E sobre os resultados obtidos? Há algum padrão que pode ser percebido em todos esses resultados?

c) Conjecturem uma regra para esse padrão (uma hipótese sobre o padrão observado). Algo do tipo: "sempre que..." ou "toda...".

d) Lembrando que qualquer número par p sempre pode ser escrito na forma $p = 2n$, em que n é natural, tentem provar a conjectura obtida no item **c**.

13. Calcule:

a) $|-7|$

b) $|\pi - 3|$

c) $|\pi - 5|$

d) $(-3) \cdot |-5|$

e) $|-9| + |-7|$

f) $-|-7|$

g) $|-2 + 5|$

h) $|2x - 1|$ quando $x = -5$

14. Se P corresponde ao número -127, Q corresponde ao número 238 e M corresponde ao número -31, calcule PQ, PM e MQ.