概率论与数理统计

daydalek

2023 年 2 月 28 日

1 基本概念

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

随机试验的要素:

- 可以在相同的条件下重复进行
- 每次实验的结果可能不止一个,并且可以事先明确所有可能结果
- 进行一次试验之前不能确定哪个结果会出现

1.1.2 样本空间

随机试验E的所有可能结果集合称为**样本空间**
E的每个结果称为**样本点**

1.1.3 随机事件

E的样本空间S中的部分样本点组成的集合为E的**随机事件**,简称为事件.
S中所有样本点的集合称为**必然事件**
不含任何样本点的集合称为**不可能事件**

1.1.4 事件之间的关系运算

- 事件的包含与相等

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B \tag{1}$$

- 事件的并运算

$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\} \tag{2}$$

- 事件的交运算

$$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\} \tag{3}$$

- 事件的差运算

$$A - B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\} \tag{4}$$

- 事件的对立事件

$$A^c = \{x|x \notin A\} \tag{5}$$

- 事件的互不相容

$$A \cap B = \emptyset \tag{6}$$

2 频率和概率

2.1 频率

2.1.1 频率的定义

设E是一个随机试验,其样本空间为S,事件A是E的一个随机事件,则事件A发生的频率为

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \tag{7}$$

其中n_A是事件A发生的次数(频数),n是试验E进行的次数.

2.1.2 概率

对于E的每一个事件A,都有一个实数p(A)称为事件A的**概率**,集合P满足

- 非负性

- 规范性
- 可加性

概率有以下性质

- $P(\emptyset) = 0$
- 有限可加性
- $P(A) \leq 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$

广义加法公式(容斥原理)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{8}$$

它的推广:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \tag{9}$$

2.2 等可能概型

2.2.1 古典概型

- 试验E的样本空间S是一个有限集合
- 试验E的每个样本点都是等可能的

$$P(A) = \frac{k}{n} = \sum_{j=1}^{k} P(e_{ij}) \tag{10}$$

k代表A中所含的基本事件数,而n代表样本空间S中的样本点数.

2.2.2 超几何分布

$$P(X = k) = \frac{C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}} \tag{11}$$

其中n_1代表总体中的第一类个体数,n_2代表总体中的第二类个体数,n代表抽样个体数.

2.2.3 几何分布

平面中存在区域G包含着部分区域g,现向G中任意投掷
这种被投掷的点落在G的任何一处都是等可能的,且落在g内的概率仅与其面积有关的随机试验称为几何概型.

$$P = \frac{S_g}{S_G} \tag{12}$$

这种定义可以推广到一维或更高维的空间.

2.3 条件概率

2.3.1 条件概率的定义

设A,B是两个事件,称

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{13}$$

为事件B在事件A发生的条件下的条件概率.
条件概率符合概率定义的三个条件

- 非负性
- 规范性
- 可加性

2.3.2 乘法定理

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)(P(A) > 0, P(B) > 0) \tag{14}$$

2.3.3 全概率公式

如果$A_1, A_2, \cdots, A_n$是一个样本空间S的一个划分,则有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \tag{15}$$