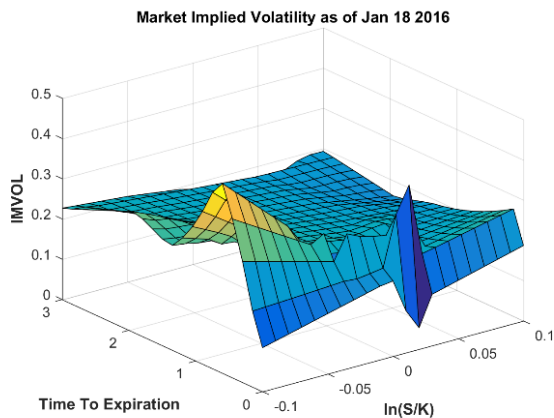
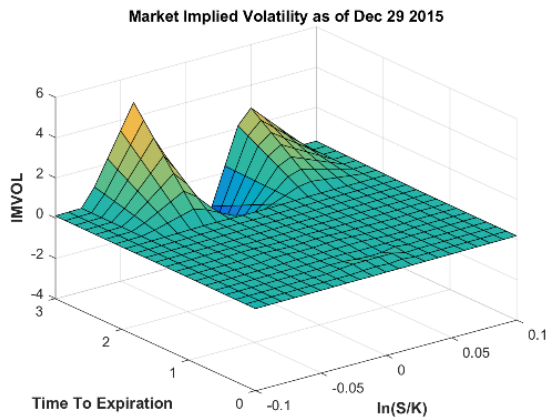


# STOCHASTIC VOLATILITY 기반 XVA 연구:



팀명: 소희미국가자  
서울대 수리과학부 김동건  
서울대 수리과학부 박소희  
Yale 대 경제학부 최원호

## Abstract

2008 년의 글로벌 금융위기 파생상품시장의 전반적인 구조가 변화하기 시작했다. 은행들이 파생상품의 가격을 조정할 때 이전과는 다르게 상대방의 부도위험, 무담보 조달비용 그리고 파생상품 거래에서의 규제로부터 발생하는 비용까지 고려하기 시작했다. 이렇게 파생상품 가격 조정에 반영하는 최신이론들을 XVA 라고 하는데, 해외은행들은 XVA 를 파생상품 가격 조정에 반영하기 시작하였으나, 국내은행들은 거의 반영하지 않고, 반영하더라도 피상적인 방법만을 사용하고 있는 실정이다. 이로 인해 같은 파생상품에 대해 해외와 국내간의 평가, 거래 가격의 괴리가 커질 우려가 있다. 그렇기에 한국에서도 XVA 와 관련된 연구를 활발히 할 필요가 있다. 본 논문에서는 대부분의 XVA 이론이 바탕으로 하고 있는 GBM 모델이 현실에 부합하지 않는 부분이 있다는 점을 고려하여 GBM 모델을 일반화 시킨 Stochastic Volatility 모델에 맞게 XVA 이론을 전개하였다. 또한, Heston 모델과 SABR 모델을 이용하여 특정 조건에서의 확률과정을 calibrate 했고, 이에 해당되는 내재변동성 표면을 구현해봄으로써 Stochastic Volatility 모델들을 비교해 보았다. 마지막으로 코스피 200 콜 옵션의 XVA 를 산출함으로써, XVA 가 시장의 파생상품의 가격을 결정하는데 있어 얼마나 중요한 역할을 하는지 확인해 보았다.

<b>List of Figures</b>	ii
<b>List of Tables</b>	iii
1. Introduction	1
1.1. Market overview in the wake of the crisis	1
1.2. XVA Overview	3
1.2.1. Credit Valuation Adjustment (CVA)	3
1.2.2. Debt Valuation Adjustment (DVA)	4
1.2.3. Funding Valuation Adjustment (FVA)	4
1.2.4. Other Valuation Adjustment (COLVA, KVA, MVA, TVA)	5
1.2.5. Why do we need XVA?	5
1.3. Stochastic Volatility Models	6
1.4. Research Method	6
2. Theorems and Derivations	7
2.1. Stochastic Volatility Models	7
2.1.1. SABR Model	7
2.1.2. Heston Model	8
2.2. Discount curve modelling	11
2.2.1. Cox-Ingersoll-Ross model	11
2.3. XVA for Stochastic Volatility	11
3. Implementations	17
3.1. Discount Curve Calibration	17
3.2. Stochastic Volatility Calibration	18
3.2.1. SABR Model	18
3.2.2. Heston Model	19
3.3. Stochastic Volatility Model Calibration Comparison	20
4. XVA Computation	21
5. Conclusion	22
6. Reference	23
7. Appendix	24
7.1. Hazard rate calibration using CDS spread	24
7.2. Complementary figures and tables	28

**<List of Figures>**

<b>Figure 1.1</b> LIBOR-OIS Spreads between March 2006 and March 2009. Source: (Andrew, 2015) .....	2
<b>Figure A1</b> Market Implied Volatility Surface of KOSPI 200 Call Option on various dates between Dec, 29 <sup>th</sup> 2015 to Jan, 18 <sup>th</sup> 2016. ....	30
<b>Figure 3.1</b> Simulated short rate paths and expected risk free spot rates from Jan, 18 <sup>th</sup> 2016.....	17
<b>Figure 3.2</b> Simulated KOSPI 200 futures variance and paths from Jan, 18 <sup>th</sup> 2016 until Jan, 18 <sup>th</sup> 2017.....	19
<b>Figure 3.3</b> Simulated KOSPI 200 futures variance and paths from Jan, 18 <sup>th</sup> 2016 until Jan, 18 <sup>th</sup> 2017. ....	19
<b>Figure 3.4</b> Top: Implied Volatility Surface obtained from Heston model (left) and SABR model (right). Bottom: Implied Volatility residual squared from Heston model (left) and SABR model (right).....	30

**<List of Tables>**

<b>Table 3.1</b> Summary of estimation results.....	20
<b>Table A1</b> CVA reported under IFRS by subsidiaries of global financial institutions (unit: bn KRW).....	28
<b>Table A2</b> CVA and DVA reported by Korean financial institutions (unit: bn KRW) .....	29
<b>Table A3</b> KOSPI 200 Call option CVA for various strike prices, as well as credit ratings of bond issuers and counter parties.....	31
<b>Table A4</b> KOSPI 200 Call option CVA as a percentage of its market price for various strike prices, as well as credit ratings of bond issuers and counterparties .....	32

# 1. Introduction

2008 년 미국 발 금융위기 이후로 "Too big to fail"이란 말이 무색해졌다. 기업 및 금융기관의 부도위험의 실재성이 부각되었고, 거래상대방 (Counterparty)의 부도 등으로 인한 채무 불이행에 대한 인식이 크게 변화하였다. 또한, 관련 규제들이 생기면서 금융거래의 비용이 증가하게 되었다. 이로 인해 파생상품 시장에 전반에 걸쳐 개념의 변화가 생겼다. 파생상품 가격산정에 있어서 신용위험, 자금조달 (Funding) 위험, 규제 등에 따른 Capital Requirement 등 다양한 위험의 중요성이 재조명되었으며 이를 파생상품의 공정가격 산출에 반영한 최신 이론을 XVA 라고 한다.

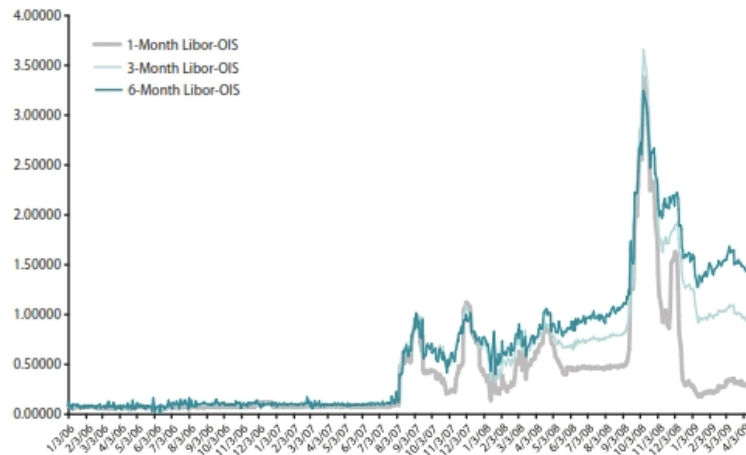
현재 XVA 연구는 석학들의 관심을 받고 있으며 퀀트 등 실무자들의 핵심 업무가 되었다. 하지만, 2008 년 이후로 지속적으로 발전하고 있는 새로운 이론이어서 그런지 아직 이에 대한 국내 연구는 피상적인 수준에서 머무르고 있다. 단적인 예로 2016 년 2 월 11 일 현재 저자들이 RISS 에서 찾을 수 있는 XVA 관련 국내 논문은 없었다.

이에 저자들은 국내 최초로 한국형 XVA 모델에 대한 연구를 진행하고자 한다. 현재 XVA 모델 연구는 기초자산이 Geometric Brownian Motion (GBM)을 따른다는 가정 하에 도출되고 있다. 하지만, GBM 은 기초자산의 변동성이 상수라는 등의 단순한 가정에 의존하고 있고 이는 실제 상황과 잘 맞지 않다. 따라서, 현실적인 XVA 모델을 구하기 위해서는 GBM 을 일반화 시킬 필요가 있다. 이에 저자들은 주식가격이 Geometric Brownian Motion (GBM)을 따른다는 가정을 일반화하여 현업에서 널리 사용되고 있는 Stochastic Volatility 모델들에 적합한 XVA 를 도출하고자 한다. 또한, 많이 인용되고 있는 Stochastic Volatility 모델들을 코스피 200 에 맞게 추정 한 후, 코스피 200 콜 옵션의 XVA 를 실질적으로 산출해보려고 한다.

따라서, 본 논문은 세 가지 관점에서 큰 의의를 가진다. 첫째는, 시장의 판도를 바꾸고 있지만 현재 국내에 관련 논문이 부재한 상황에서 한국형 XVA 모델에 대한 연구를 진행하였다는 점이다. 둘째는, XVA 모델의 기본 가정을 현실 상황에 잘 맞게 일반화 하여 연구하였다는 점이며, 세 번째로 이론에 그치지 않고 코스피 200 콜 옵션에 적합한 XVA 를 직접 산출해보았다는 것이다.

## 1.1 Market overview in the wake of the crisis

2008 년 금융위기 이후의 시장 변화는 크게 네 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 파생상품시장에서 무위험 수익률로 널리 이용되던 LIBOR 금리의 신뢰성에 의문이 제기됐다. Figure 1.1 를 참고하면 2008 년 위기 전후로 LIBOR-OIS 스프레드 추이에 상당한 변화가 있었음을 확인할 수 있다.



**Figure1.1** LIBOR-OIS Spreads between March 2006 and March 2009. Source: (Andrew, 2015)

이는 파생상품 시장에 큰 영향을 끼치게 되었는데, 기존에는 무위험 이자율을 사용해야 하거나, 모델링 할 필요가 있을 때, 기본적으로 LIBOR 를 이용했었다. 하지만 Figure 1.1 에서 보듯이 위기 상황에서 LIBOR 가 무위험 이자율을 나타내는 척도로서 적합한지에 대한 의문이 생기기 시작한 것이다. 따라서 은행들이 만기가 다른 파생상품이나 채권들의 기대 보수 (expected payoff)를 산출하기 위해 LIBOR 에만 의존하지 않고 파생상품의 만기에 더욱 적합한 multiple projection curve 들을 이용하기 시작했다. 또한, 더욱 적절한 할인율을 산출하기 위한 노력이 지속되었는데 현재 장외파생상품 시장에서 활발히 연구되고 있는 Credit Support Annex (CSA) discounting 을 한 예로 들 수 있다 (Green, 2015).

두 번째로, 은행들이 상대방의 부도위험을 감안한 Credit Valuation Adjustment(CVA)를 적극적으로 파생상품 가격 산출에 반영하기 시작했다는 점이다. 2008 년 금융 위기 이전에는 몇몇 큰 은행에서만 CVA 를 산출했었고, 그 중 대부분은 거래 상대방의 부도 위험만을 감안한 unilateral CVA 만 산출하는데 그치고 있었다. 하지만, 위기 이후로 해외 글로벌 투자은행들은 거래상대방과 거래관계자들의 부도위험을 모두 포함하는 bilateral CVA 를 산출하기 시작한 것에 반해, 아직 한국의 은행들은 이를 파생상품가격에 반영하지 않고 있다. (김주철·김민지, 2015)

세 번째로, 현업에서 무담보 조달비용(unsecured funding cost)을 모델링 하기 시작했다. 금융 위기로 인해 Credit Default Swap (CDS) 스프레드가 급격히 벌어지기 시작했고, 이는 무담보 조달비용에 큰 영향을 끼치게 되었다. 따라서, 현업에서는 무담보 조달비용 모델링이 필요하게 되었고 이를 반영한 FVA 를 산출하기 시작했다. 현재, FVA 의 경제적인 의미는 아직 활발히 논의 중이나 대부분의 글로벌 투자은행에서는 FVA 를 산출하고 FVA 충당금을 마련하고 있는 상황이다. 일례로, JP Morgan 의 경우는 2014 년 1 월에 FVA 충당금으로 15 억달러를 보유하고 있었다 (Green, 2015).

네 번째로, 규제강화로 인한 자본 규제 지침(capital requirement directive)등으로 자본관리 비용이 커지게 되었다. 이로 인해 파생상품 거래의 제한 등으로 파생되는 비용들을 무시할 수 없는 상황에 맞닥뜨리게 되는데, 현업의 종사자들은 이와 같은 비용을 수치화하고 관리해야 할 필요성을 느끼게 된 것이다.

## 1.2 XVA Overview

XVA는 시장의 불완정성 (Imperfection) 등으로부터 기인한 문제점들이 파생상품의 공정가격 산출에 어떤 영향을 주는지를 분석하는 모형이라고 할 수 있다. 예를 들어, 파생상품 가격결정론에 큰 영향력을 행사한 Black과 Scholes (1973)의 모형은 몇 가지 단순가정을 전제로 하는데, 이 중에는 파생상품의 거래에 일체의 비용이 소요되지 않는다, 투자자는 무위험 이자율의 채권을 원하는 만큼 발행/매입 할 수 있다, 거래 상대방은 어떠한 경우에도 부도가 나지 않는다는 전제도 포함되어 있다. 하지만, 현실적으로 이런 전제조건이 맞지 않는다는 것은 자명한데, 이런 문제점들로 인한 파생상품의 공정가격을 조정해주는 모형이 XVA인 것이다. 다르게 말하면, XVA 또는 'X' Valuation Adjustment는 파생상품의 가격산정에 있어서 신용위험, Funding 위험, Capital Requirement 위험 등에 따른 가격조정을 하기 위한 모든 이론을 통합해서 지칭한다. 신용위험을 고려한 Credit Valuation Adjustment (CVA)와 Debt Valuation Adjustment (DVA), Funding Cost를 고려한 Funding Valuation Adjustment (FVA), 담보 (Collateral) 관리에서 비롯되는 Collateral Valuation Adjustment (COLVA), 그리고 규정에 따른 Capital Requirement에서 야기되는 비용을 고려한 Capital Valuation Adjustment (KVA) 등이 포함된다. 이 외에도 Margin Valuation Adjustment (MVA)와 Tax Valuation Adjustment (TVA) 등의 모델링도 있다. 이와 같은 모든 Valuation Adjustment를 통틀어 XVA 이론이라고 하고 본 연구에서는 CVA, DVA, FVA, COLVA, KVA를 고려할 예정이다.

서론의 XVA 개념 설명을 위해서는 두 가지 논문을 적극 참조하였는데, 본 연구에서 CVA, DVA, FVA의 개념은 김주철·김민지 저자(2015)의 세미나 발표자료를, COLVA와 KVA 개념은 Green (2015)의 저서를 이용하였다.

### 1.2.1 Credit Valuation Adjustment (CVA)

CVA란 거래상대방(Counterparty)이 가지고 있는 시장위험과 신용위험을 수치화하여 파생상품의 가격산정에 반영하는 이론이다. 파생상품 가격산정의 기본이 되는 Black-Scholes (1973)모델에서는 거래상대방의 위험의 존재를 고려하지 않는다. 따라서 CVA 이론은 거래상대방 위험을 고려하지 않은 파생상품 가격에서 거래상대방 위험을 계량화하여 가격을 조정하는 것이라고 볼 수 있다.

$$Risky\ Portfolio = Riskfree\ Portfolio - Credit\ Valuation\ Adjustment$$

CVA 이론은 세 가지 기본적인 가정을 따른다. 첫째, 자사(은행)의 부도위험은 존재하지 않는다<sup>1</sup>. 둘째, 모든 시장 참여자들은 무 위험 이자율로 대출 및 자금 조달이 가능하다. 셋째, 거래 상대방의 부도확률로 인한 신용 익스포저와 자사의 부도확률은 서로 독립이라고 가정한다. CVA 이론에서 자사의 부도위험을 고려할 경우 DVA

---

<sup>1</sup> 이와 같은 CVA의 개념은 Unilateral CVA라고도 불린다.

이론으로 발전되고, 무 위험 이자율로 대출이 가능하지 않다고 가정할 경우 FVA 이론으로 발전하게 된다.

하지만 거래상대방의 부도위험만 고려한 일방향 CVA (Unilateral CVA) 이론은 차익거래 (Arbitrage)의 문제를 내포하고 있다. 왜냐하면 부도위험이 없는 높은 신용등급의 거래자가 위험자산을 매입할 경우 CVA 를 적용하여 낮은 가격에 자산을 매입하고, CVA 를 적용하지 않은 가격에 매도하는 비대칭적 거래가 가능하기 때문이다. 이처럼 일방향 CVA 는 동일 파생상품에 대해 두 가지 가격이 산출 가능하다는 문제점이 있다.

### 1.2.2 Debt Valuation Adjustment (DVA)

일방향 CVA 의 문제점을 해결하기 위해 거래상대방과 자사 모두의 부도위험을 고려한 양방향 CVA (Bilateral CVA) 개념을 도입할 수 있다. 양방향 CVA 이론을 도입할 경우, 거래상대방의 부도위험으로 인한 가격조정은 CVA, 자사의 부도위험으로 발생한 가격조정을 Debt Valuation Adjustment 라고 볼 수 있다.

$$Bilateral\ CVA = CVA + Debt\ Valuation\ Adjustment$$

DVA 이론의 도입으로 거래자간 파생상품의 가격을 일치시키는 효과를 볼 수 있다. 하지만 자사(은행)의 부채 가치를 평가하는 과정에서 예기치 못한 문제가 발생할 수 있다. 현재 IFRS 는 자사의 부채를 시장가치로 평가하도록 권고하고 있다<sup>2</sup>. 시장금리에는 변화가 없지만 자사의 신용등급이 하락할 경우, 신용등급 하락으로 채권의 가격이 떨어져 부채의 시장가치가 줄어들게 된다. 결과적으로 자본의 양이 늘어난 것처럼 보일 수 있다. 이러한 상황에 DVA 를 적용할 경우, 신용등급 하락으로 인해 DVA 이득이 발생할 수 있는 문제점이 있다.

### 1.2.3 Funding Valuation Adjustment (FVA)

현업에서는 국채의 수익률이나 LIBOR 금리로 대출 및 자금조달이 가능하였기 때문에 이를 무위험 이자율로 사용하는 것이 관행이었다. 하지만 금융위기 후로 무위험 이자율로서는 LIBOR 보다는 Overnight Index Swap (OIS) Rate 을 더 사용하는 추세이다. 이러한 모델링의 변화는 자금조달의 비용에 큰 영향을 끼치게 되는데, 예를 들면 LIBOR-OIS 스프레드는 통상적으로 10bps 내로 유지되었지만, 금융위기 직후 350bps 이상으로 상승하기까지 했다. 따라서, 자금조달에 사용되는 이자율을 모형화하고, 이를 파생상품의 가격을 산출하는데 고려해야 할 필요성이 부각되기 시작했는데. 이런 문제를

---

<sup>2</sup> 주의할 점은 IFRS 등의 가이드라인 하에서 산출된 CVA 와 DVA 는 실질적인 CVA 및 DVA 와 상이할 수 있고, 규제 등으로 가이드라인으로 산출된 CVA 및 DVA 관리비용이 야기된다면 이는 KVA 에 포함되어야 하는 것이다.



해결하는 모형이 FVA 인 것이다. FVA 이론에 의하면 파생상품의 가격조정은 자금조달 비용과 이의 반대 개념인 Funding Benefit 에 의한 효과를 모두 고려해야 한다.

#### *Funding Valuation Adjustment*

$$= \text{Funding Cost Adjustment} + \text{Funding Benefit Adjustment}$$

FVA 의 유효성은 현업에 종사하고 있는 퀀트들과 경제학자들 사이에서 치열하게 논의되고 있는데, Hull 과 White (2012), (2014)는 FVA 의 경제적 의미에 의문을 제기하는 반면, 앞서 얘기한 것처럼 글로벌 투자은행은 포트폴리오 운영상의 위험을 줄이기 위해 막대한 양의 FVA 충당금을 관리하고 있는 실정이다.

### **1.2.4 Other Valuation Adjustment (COLVA, KVA, MVA, TVA)**

Collateral Valuation Adjustment (COLVA): 장외 파생상품 거래를 할 때 ISDA Agreement 혹은 CSA 등의 합의문을 준수하기 위해 적절한 수준의 담보를 제공해야 하는 경우가 생기는 데, 이 경우 담보를 관리 해야 하고, 이 때 비용이 발생하게 된다. 이 비용을 고려하여 파생상품의 가격을 조정하는 이론을 COLVA 라고 한다.

Capital Valuation Adjustment (KVA): Basel II.5 와 Basel III 등의 규제를 준수할 때 비용이 발생한다. 이 때 발생하는 비용을 고려하여 파생상품의 가격을 조정하는 이론을 KVA 라고 한다.

Margin Valuation Adjustment (MVA): margin account 를 관리 할 때 비용이 발생하는데, 이 때 나오는 비용을 고려하여 파생상품의 가격을 조정하는 이론을 MVA 라고 한다.

Tax Valuation Adjustment (TVA): 세금으로 인해 발생하는 비용을 고려하여 파생상품의 가격을 조정하는 이론을 TVA 라고 한다.

본문에서 MVA 와 TVA 는 고려하지 않지만, 논문에서 사용한 방법과 유사한 방법으로 쉽게 도출해 낼 수 있다.

### **1.2.5 Why do we need XVA?**

Law of One Price 에 의하면 동일한 금융상품은 모든 시장에서 같은 가격에 거래되어야 한다. 하지만 앞서 살펴보았듯이, 어떠한 가격조정 이론을 적용하는지, 서로 다른 기업이 엄수해야 할 규제 차이, 등에 따라 파생상품 가격이 상이하게 산출될 수 있다. 따라서, 같은 XVA 모형을 이용하여 파생상품의 공정가격을 산출 하더라도 금융사별로 공정가격이 다르게 나올 수 있다는 것이다. 이는 해외 파생상품시장의 전반적인 패러다임을 바꾸는 계기가 되었다.

하지만, 김주철 및 김민지 저자의 세미나 자료에서 발췌한 Table A1 과 Table A2 에서 볼 수 있듯이, 해외 은행들은 본점의 가격정책을 따라 XVA 를 파생상품 가격을 정하는데 사용하는 반면, 국내은행은 충당금 및 위험가중자산의 형태로만 XVA 를 반영하고, 파생상품 가격 결정에는 사용하지 않고 있다.

이에 따라 여러 문제들이 발생할 수 있다. 우선, 같은 파생상품이라도 평가기준에 따라 평가가격에 차이가 생기는데, 이에 따라 위험이 생겼을 때 국내와 국외의 파생상품 평가가격 괴리가 더욱 더 심화 될 것이다. 또한, 해외은행의 경우 XVA 를 반영하면서 상대방의 리스크를 파생상품 가격에 반영하여 대 고객 장외거래가 줄어들게 될 것이다. 이에 따라 신용도가 낮은 거래상대방이나 만기가 긴 거래가 국내은행으로 집중될 것이다. 또, 가장 간단한 파생상품인 통화선도나 스왑 등에 대해서도 은행간의 상품 가격차이가 커져 파생상품을 헷지 수단으로 사용하는데 어려움이 생길 수 있고 (김주철·김민지, 2015), 나아가 XVA 헷지가 필요할 수도 있다 (Green, 2015).

이와 같은 문제점들을 막기 위해 국내 은행에서도 CVA, DVA, FVA 등의 XVA 를 파생상품의 가격 결정에 사용해야 한다. 그렇기에 한국에 맞는 XVA 모델을 연구할 필요가 있다.

### 1.3 Stochastic Volatility Models

Stochastic Volatility 모델에서는 기초자산의 수익률이 확률과정(stochastic process)을 따르면서 이것의 변동성(Volatility)도 확률과정을 따르는 모델이다. 이는 GBM 을 일반화시킨 것이라고 이야기 할 수 있다. 이 모델은 Black-Scholes 모델의 단점을 해결하기 위한 방법 중 하나다. 좀 더 구체적으로 설명하자면, Black-Scholes 모델에서는 Volatility 가 상수라고 가정하는데, Figure A1 처럼 시장의 내재변동성은 상수가 아니라 파생상품의 기초자산가와 행사가의 비율 (moneyness) 혹은 기대 보수 (expected payoff)와 만기에 따라 변화하는 함수라는 것을 알 수 있다. 또한 시간에 따라 내재변동성 표면의 형태가 임의로 달라지는 것으로부터 알 수 있듯이 내재변동성, moneyness, 만기 사이의 관계는 임의로 변화한다. 이는 변동성이 상수가 아닌 함수 꼴로 표현될 수 있으며, 시간에 따라 임의로 바뀌는 모형이 필요하다는 것을 뜻하고, 이런 것들을 일반화 시켜주는 모델이 Stochastic Volatility 모델이다.

### 1.4 Research Method

본 논문에서는 첫 번째로 Stochastic Volatility 모델에 맞게 XVA 모델을 수정하여 GBM 을 바탕으로 한 XVA 모델과 비교, 분석을 할 것이다. 두 번째로, Stochastic Volatility 모델 중 가장 널리 사용되고 있는 Heston 모델과 SABR 모델을 코스피 200 에 적용시키고 이에 해당되는 내재변동성 표면 (Implied Volatility Surface)을 구현할 것이다. 마지막으로, 콜 옵션 가격을 산출하기에 적합한 Heston 모델을 이용해 코스피 200 옵션의 XVA 를 산출할 것이다.

## 2. Theorems and Derivations

### 2.1 Stochastic Volatility Models

Gatheral (2006)을 참고하면, Stochastic Volatility 모델은 다음과 같은 조건을 만족시키는 모형들의 집합이라고 할 수 있다.

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \\ dv_t &= \alpha(S_t, v_t, t) dt + \eta \beta(S_t, v_t, t) v_t dZ_2 \\ \text{Cov}(dZ_1, dZ_2) &= \rho dt \end{aligned}$$

여기서  $dS_t$ 는 기초자산의 변화량,  $dv_t$ 는 변동성의 변화량을 나타내는데, 상기 모형의 특징은  $dS_t$ 와  $dv_t$ 가 모두 Wiener 과정  $dZ_1, dZ_2$ 에 영향을 받는다는 것이다. 다르게 말하면,  $dS_t$ 와  $dv_t$ 가 결정적 (deterministic)이지 않고 특정 확률 과정을 따른다는 것을 의미한다. 시장에서 널리 사용되는 Stochastic Volatility 모형으로는 SABR 모델과 Heston 모델이 있는데 2.1에서는 이 모형들에 대해 설명하려고 한다.

#### 2.1.1 SABR Model

SABR 혹은 Stochastic Alpha Beta Rho 모형은 Hagan et al (2002)이 제안한 모형으로 선도 (forward)의 변화과정이 CEV 모형과 비슷하지만 변동성이 결정적 (deterministic)이지 않고 확률과정 (stochastic process)라고 가정한다. SABR 모형은 선도의 가격이 다음과 같은 과정을 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} dF &= V(t)F(t)^\beta dZ(t) \\ dV(t) &= \epsilon V(t) dW(t) \\ V(0) &= \alpha \\ \text{Cov}(dZ(t), dW(t)) &= \rho dt \end{aligned}$$

여기서  $\epsilon, \alpha \in \square^+$ ,  $\beta \in (0,1], \rho \in [-1,1]$ 라는 조건이 충족되어야 한다.

저자들은 Singular perturbation technique 를 이용해 옵션의 가치를 닫힌 근사해 (closed form approximation)가 Black 의 선도옵션가격 모형과 동일하다는 것을 증명한다.

$$\begin{aligned} C_{SABR} &= e^{-r(T-t)} (FN(d_+) - KN(d_-)) \\ P_{SABR} &= e^{-r(T-t)} (KN(-d_-) - FN(-d_+)) \\ d_\pm &= \frac{\log\left(\frac{F}{K}\right) \pm \frac{\sigma_{imp}^2}{2}(T-t)}{\sigma_{imp}\sqrt{(T-t)}} \end{aligned}$$

또한, Implied Volatility  $\sigma_{imp}$ 의 근사식을 도출하는데, 다음과 같다

$$\begin{aligned}\sigma_{imp} &= \frac{\alpha}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} \left[ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \left( \log \left( \frac{F}{K} \right) \right)^2 + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \left( \log \left( \frac{F}{K} \right) \right)^4 \right] \frac{z}{x(z)} \\ &\cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24(FK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \beta \epsilon \alpha}{4(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \epsilon^2 \frac{2-3\rho^2}{24} \right] (T-t) + \dots \right\} \\ z &= \frac{\epsilon}{\alpha} (FK)^{\frac{1-\beta}{2}} \log \left( \frac{F}{K} \right) \\ x(z) &= \log \left( \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right)\end{aligned}$$

이 근사식은 옵션이 깊은 OTM 이거나 만기가 길 때 적절하지 않다는 것이 알려져 있어서 Paulot (2009) 등은 더 적절한 근사식을 연구한다.

### 2.1.2 Heston Model

Heston (1993)이 제시한 Stochastic Volatility 모형으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \\ dv_t &= -\kappa(v_t - \bar{v})dt + \eta \sqrt{v_t} dZ_2 \\ Cov(dZ_1, dZ_2) &= \rho dt\end{aligned}$$

상기 모형에서 변동성  $v_t$ 이 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 모형과 같게 표현된다는 것을 알 수 있다. 따라서,  $\lambda$ 는 변동성  $v_t$  장기적인 평균  $\bar{v}$ 로 수렴하는 속도(speed of mean reversion)를 나타낸다.  $\eta$ 는 변동성의 변동 (volatility of volatility)라고 불린다. CIR 모형과 마찬가지로  $\eta \sqrt{v_t}$ 는 변동성이 음수가 되지 않도록 보장하고, Feller Condition  $2\lambda \bar{v} > \eta^2$ 이 충족되면 변동성은 항상 양수가 된다.

Heston 과정에서 콜 옵션 가격을 도출하는 과정은 다음과 같다. 먼저, Multi-dimensional Ito 의 Lemma 에 의해 파생상품의 가격 변화량  $dV$ 는

$$\begin{aligned}dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \eta S v \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial S} \sqrt{v} S dZ_1 + \eta \sqrt{v} \frac{\partial V}{\partial v} dZ_2\end{aligned}$$

로 표현됨을 알 수 있다. 파생상품  $V$ 와 기본자산  $S$  그리고 동일한 기본자산을 가지지만 만기, 행사가격 등이 상이한 파생상품  $V_2$ 을 이용하여 구성된 복제포트폴리오

$\pi = V + \delta_1 S + \delta_2 V_2$ 를 고려하면, 포트폴리오 가치의 변화  $d\pi$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} d\pi = & \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} + \mu S \left( \frac{\partial V}{\partial S} + \delta_1 + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} \right) + \kappa(\bar{v} - v) \left( \frac{\partial V}{\partial v} + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial v} \right) + \frac{\eta^2 v}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2} \right) \right. \\ & + \frac{S^2 v}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} \right) + \eta S v \rho \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} \right) \Bigg) dt \\ & + \left( \delta_1 + \frac{\partial V}{\partial S} + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} \right) \sqrt{v} S dZ_1 + \left( \frac{\partial V}{\partial v} + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial v} \right) \eta \sqrt{v} dZ_2 \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \delta_2 &= -\frac{\partial V / \partial v}{\partial V_2 / \partial v} \\ \delta_1 &= -\frac{\partial V}{\partial S} - \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} \end{aligned}$$

일 때, 포트폴리오는 무위험 수익률을 얻어야 하므로,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} + \mu S \left( \frac{\partial V}{\partial S} + \delta_1 + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} \right) + \kappa(\bar{v} - v) \left( \frac{\partial V}{\partial v} + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial v} \right) + \frac{\eta^2 v}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2} \right) \\ & + \frac{S^2 v}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} \right) + \eta S v \rho \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} \right) = rV + \delta_1 rS + \delta_2 rV_2 \\ \rightarrow & \frac{1}{\partial V / \partial v} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \eta S v \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) \\ & = \frac{1}{\partial V_2 / \partial v} \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V_2}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + \eta S v \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial v} + rS \frac{\partial V_2}{\partial S} - rV_2 \right) \end{aligned}$$

인데 좌변과 우변이 파생상품의 종류를 제외하고는 동일하다는 것을 알 수 있다. 따라서, 특정 파생상품  $V$ 의 가치 변화량  $dV$ 는  $S, v, t$ 의 함수  $\lambda(S, v, t)$ 로 이루어져 있다는 것을 알 수 있다. Heston(1993)은 Breeden (1978)의 Consumption-based 모형 논문을 참조하여  $\lambda(S, v, t) = \lambda v$ 라고 가정해

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \eta S v \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = \lambda v \frac{\partial V}{\partial v} \\ \rightarrow & \frac{\partial V}{\partial t} + (\kappa(\bar{v} - v) - \lambda v) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \eta S v \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \end{aligned}$$

와 같은 Fokker-Planck Equation 을 도출한다.

저자는 Black Scholes 의 닫힌 해 (Closed Solution)이 맞는다고 가정하고 콜 옵션의 가치를 다음과 같이 표현한다.

(Ansatz)

$$C = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2 = e^x P_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2$$

$$C(S_T, v, K) = (S_T - K)^+, C(0, v, K) = 0, \frac{\partial C(\infty, v, K)}{\partial S} = 1$$

이를 앞서 구한 Fokker-Planck Equation 에 대입하면

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \eta v \rho \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v} + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} = 0, \quad j \in \{1, 2\}$$

$$a = \kappa \bar{v}, b_1 = \kappa + \lambda - \eta \rho, b_2 = \kappa + \lambda, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}$$

을 얻는다. 여기서 함수  $f_j$ 를 다음과 같이 정의하면

$$f_j(x, v, t) = E[e^{i\phi x} | x(t) = x, v(t) = v], \quad j \in \{1, 2\}$$

Ito 의 Lemma 에 의해

$$df_j = \left( \frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial f_j}{\partial S} \mu S + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial S^2} + \eta S v \rho \frac{\partial^2 f_j}{\partial S \partial v} \right) dt + \frac{\partial f_j}{\partial S} \sqrt{v} S dZ_1 + \eta \sqrt{v} \frac{\partial f_j}{\partial v} dZ_2$$

이며, Law of Iterated Expectation 에 의해  $E[df_j] = 0$ 가 되고,

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial f_j}{\partial S} \mu S + \kappa(\bar{v} - v) \frac{\partial f_j}{\partial v} + \frac{\eta^2 v}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial S^2} + \eta S v \rho \frac{\partial^2 f_j}{\partial S \partial v} = 0$$

을 얻으며,  $f_j(x, v, T) = e^{i\phi x}$ 임을 알 수 있다.

다음으로  $f_j(x, v, t) = e^{D+Ev+i\phi x}$ 라고 가정을 하게 되면

$$D(T-t; \phi) = \text{ri}\phi(T-t) + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\eta\phi i + d)(T-t) - 2 \log \left( \frac{1 - ge^{d(T-t)}}{1 - g} \right) \right\}$$

$$E(T-t; \phi) = \frac{b_j - \rho\eta\phi i + d}{\eta^2} \left[ \frac{1 - e^{d(T-t)}}{1 - ge^{d(T-t)}} \right]$$

$$g = \frac{b_j - \rho\eta\phi i + d}{b_j - \rho\eta\phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(b_j - \rho\eta\phi i)^2 - \eta^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$$

이고, Fourier Inversion Theorem 에 의해

$$P_j(x, v, T; \log(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \log(K)} f_j(x, v, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi, \quad j \in \{1, 2\}$$

라는 것을 알 수 있다. Carr 와 Madan (1999)는 Fast Fourier Transform 을 이용하여 적분을 하는 방법을 제시하는데, 이미 Heston 모형은 널리 사용되고 있는 모형이라 Matlab, R 등의 프로그램 등을 이용해 어렵지 않게 콜 옵션의 가치를 산출 할 수 있다.

## 2.2 Discount curve modeling

### 2.2.1 Cox-Ingersoll-Ross model

Cox et al (1985)의 금리 모형은 균형 단기금리(Equilibrium short rates)모형이다. 본 모형의 두드러지는 특징으로 기대값이 장기적으로 수렴하고, 금리가 항상 양수가 되도록 제한이 되며, 변동성은 금리와 연동이 되는 것 등이 있다. 이 절에서는 CIR 모형에 대한 간략한 소개, 수익률이 CIR 과 같은 확률과정을 따를 때 채권의 확률과정, 그리고 채권의 위험가격을 차례로 설명하겠다.

먼저,  $Z_t$ 를 표준 브라운 운동 (Wiener Process)이면 CIR 은 단기금리  $r_t$ 를 다음과 같이 모델링한다.

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \bar{\sigma}\sqrt{r_t}dZ_t, \quad r_0 = r > 0$$

모든 매개 변수는 임의의 양수이어야 하고  $r$ 은 단기금리의 시장가격이다. 이 확률 과정은 Feller 과정이라고도 불리는데 다음과 같이 만들어질 수 있다 (Rémillard, 2013).

$$X_t^i = \frac{\sigma}{2} \int_0^t e^{-\frac{a}{2}(t-s)} dZ_s^i + e^{-\frac{a}{2}t} \sqrt{\frac{r}{n}}$$

$Z_t^1, \dots, Z_t^n$ 은 독립적인 표준 브라운 운동이고  $X_t^i$ 는  $X_0^i = \sqrt{\frac{r}{n}}$  를 만족시키는 독립적인

Ornstein-Uhlenbeck 과정  $dX_t^i = -\frac{a}{2}X_t^i dt + \frac{\sigma}{2}dZ_t^i$ 이고  $r_t = \sum_{i=1}^n (X_t^i)^2$ 이면  $r_0 = r$ 이고

$$dr_t = a \left( n \frac{\sigma^2}{4a} - r_t \right) dt + \bar{\sigma} \sqrt{r_t} d\hat{W}_t, \quad \hat{W}_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{X_s^i}{r_s} dW_s^i$$

과 같은 브라운 운동을 가지는 확률 과정으로 표현이 가능하다. 따라서,  $\frac{4ab}{\sigma^2} = n$ 일 때 해가 존재하고 이는  $ab > 0$ 를 뜻하며 금리는 Non Central  $\chi^2$  분포를 따르게 된다. 따라서, 최대우도법을 이용해 추정하는 것이 가능해진다.

## 2.3 XVA for Stochastic Volatility Models

저자들은 Stochastic Volatility 모형에 적용 가능한 XVA 모형을 도출해내었는데, 이 과정에서 Burgard 와 Kjaer (2013)의 XVA 모형을 참조했다. 일반적인 Stochastic Volatility

모형에서 기초자산은 다음과 같은 과정을 가진다.

$$\begin{aligned} dS &= \mu_S dt + \sigma_S dZ_1 = \mu(S, t)dt + \sigma(S, v, t)dZ_1 \\ dv &= \mu_v dt + \sigma_v dZ_2 \\ \text{Cov}(dZ_1, dZ_2) &= \rho \sigma_S \sigma_v dt \end{aligned}$$

위와 같은 기초자산을 가지는 파생상품을 보유할 시, 거래 상대방  $C_k$ 가 부도날 경우 파생상품의 가치  $\hat{V}$ 는  $\Delta V_{C_k}$ 만큼 줄어들며 파생상품의 가치는  $g_{C_k}$ 가 될 것이다. 이와 같은 위험을 피하기 위해 거래 상대방  $C_k$ 가 발행하는 채권  $P_{C_k}$ 를 매매해야 하는데 이는 다음과 같은 과정을 따른다고 가정한다.

$$dP_{C_k} = r_{C_k} P_{C_k} - P_{C_k} dJ_{C_k}, \quad k \in \{1, 2\}$$

여기서,  $dJ_{C_k}$ 는  $C_k$ 가 부도날 경우 1인 점프 과정 (Jump Process)라고 보면 된다. 비슷하게 금융기관의 경우 XVA와 Capital Requirement 등을 충족시키기 위해 채권을 매매하는데 이는 다음과 같은 과정

$$dP_k = r_k P_k - (1 - R_k) P_k dJ_B, \quad k \in \{1, 2\}$$

을 가지며  $R_k$ 은 회수율을 뜻한다. 또한, 거래 상대방의 부도확률은 생존분석에 사용되는 것처럼 Exponential Distribution이 가정되는데, 이 때 부도확률을 산출하는데 필요한 재해율  $\lambda_B$ 와  $\lambda_{C_k}$ 은 다음과 같다고 가정한다.

$$\begin{aligned} r_k - r &= (1 - R_k) \lambda_B, \quad k \in \{1, 2\} \\ \lambda_{C_k} &= r_{C_k} - q_{C_k}, \quad k \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

물론, CDS를 이용해 신용곡선을 도출할 수 있는데 관련 공식은 Appendix의 7.1에서 확인할 수 있다. 파생상품 포트폴리오  $\hat{V} = \hat{V}_{C_1} + \delta_v \hat{V}_{C_2}$ 는 동일한 기초자산을 가졌지만 행사가격, 만기, 그리고 Counter-party 등이 다른 두 개의 파생상품  $\hat{V}_{C_1}, \hat{V}_{C_2}$ 으로 이루어져 있다.

Multi-dimensional Ito's Lemma를 이용하면 다음 식을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} d\hat{V} &= \left( \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial S} \mu_S + \frac{\partial \hat{V}}{\partial v} \mu_v + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial v \partial S} \right) dt + \frac{\partial \hat{V}}{\partial S} \sigma_S dZ_1 + \frac{\partial \hat{V}}{\partial v} \sigma_v dZ_2 \\ &\quad + \Delta \hat{V}_B dJ_B + \Delta \hat{V}_{C_1} dJ_{C_1} + \Delta \hat{V}_{C_2} dJ_{C_2} \end{aligned}$$

또한 Funding Equation은 다음과 같이 주어지고



$$\hat{V} - \sum_{j=1}^2 (X_j - \alpha_j P_j) - \emptyset K = 0$$

Cash Account 는 Rebalancing 이 있기 전 다음과 같은 과정을 가진다.

$$\begin{aligned} d\beta_S &= -\delta_S(\gamma_S - q_S)Sdt \\ d\beta_{C_k} &= \alpha_{C_k} q_{C_k} P_{C_k} dt, \quad k \in \{1, 2\} \\ dX_j &= -r_{X_j} X_j dt \\ d\beta_S &= -\gamma_K K dt \end{aligned}$$

Self-financing 가정으로 인해 복제 포트폴리오는 다음과 같은 과정을 가지게 된다.

$$\begin{aligned} d\pi &= \delta_S dS - \delta_S(\gamma_S - q_S)Sdt + \sum_{j=1}^2 (\alpha_{C_j} dP_{C_j} + \alpha_j dP_j) - \sum_{j=1}^2 \alpha_{C_j} q_{C_j} P_{C_j} dt - \sum_{j=1}^2 r_{X_j} X_j dt \\ &\quad - \gamma_K K dt \end{aligned}$$

따라서, 전체 포트폴리오는 다음과 같은 과정을 가진다.

$$\begin{aligned} d\hat{V} + d\pi &= \left( \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial t} + \left( \delta_S + \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S} \right) \mu_S + \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v} \mu_v \right. \\ &\quad + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v^2} \\ &\quad - \delta_S(\gamma_S - q_S)S + \sum_{j=1}^2 (\alpha_{C_j} r_{C_j} P_{C_j} + \alpha_j r_j P_j) - \sum_{j=1}^2 \alpha_{C_j} q_{C_j} P_{C_j} - \sum_{j=1}^2 r_{X_j} X_j \\ &\quad \left. - \gamma_K K + \delta_S \mu_S \right) dt + \left( \delta_S \sigma_S + \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S} \sigma_S \right) dZ_1 + \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v} \sigma_v dZ_2 \\ &\quad + \left( \Delta \hat{V}_B - \sum_{j=1}^2 \alpha_j (1 - R_j) P_j \right) dJ_B + (\Delta \hat{V}_{C_1} - \alpha_{C_1} P_{C_1}) dJ_{C_1} + (\Delta \hat{V}_{C_2} - \alpha_{C_2} P_{C_2}) dJ_{C_2} \end{aligned}$$

이 때, 다음과 같이 포트폴리오를 운용한다면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}_{C_1}}{\partial v} &= -\delta_V \frac{\partial \hat{V}_{C_2}}{\partial v} \\ \delta_S &= -\frac{\partial \hat{V}_{C_1}}{\partial S} - \delta_V \frac{\partial \hat{V}_{C_2}}{\partial S} = -\frac{\partial \hat{V}_{C_1}}{\partial S} + \frac{\partial \hat{V}_{C_1} / \partial v}{\partial \hat{V}_{C_2} / \partial v} \frac{\partial \hat{V}_{C_2}}{\partial S} \\ \alpha_{C_k} &= \frac{\Delta \hat{V}_{C_k}}{P_{C_k}}, \quad k \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

$\frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S} \mu_S, \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v} \mu_v, \delta_S \mu_S, \delta_S \sigma_S + \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S} \sigma_S, \Delta \hat{V}_{C_1} - \alpha_{C_1} P_{C_1}, \Delta \hat{V}_{C_2} - \alpha_{C_2} P_{C_2}$  등이 제거되어 다음과 같은 결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} d\hat{V} + d\pi = & \left( \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v^2} \right. \\ & + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v \partial S} - \delta_S(\gamma_S - q_S)S + \sum_{j=1}^2 (r_{C_j} \Delta \hat{V}_{C_j} + \alpha_j r_j P_j) \\ & \left. - \sum_{j=1}^2 \alpha_{C_j} q_{C_j} P_{C_j} - \sum_{j=1}^2 r_{X_j} X_j - \gamma_K K \right) dt + \left( \Delta \hat{V}_B - \sum_{j=1}^2 \alpha_j (1 - R_j) P_j \right) dJ_B \end{aligned}$$

또한, Funding Equation  $\hat{V} - \sum_{j=1}^2 (X_j - \alpha_j P_j) - \emptyset K = 0$ 에 의해

$$\begin{aligned} \alpha_1(r_1 - r)P_1 + \alpha_2(r_2 - r)P_2 &= r\hat{V} - r\emptyset K - rX_1 - rX_2 + \alpha_1 r_1 P_1 + \alpha_2 r_2 P_2 \\ \rightarrow \alpha_1 r_1 P_1 + \alpha_2 r_2 P_2 &= -r\hat{V} + r\emptyset K + rX_1 + rX_2 + \alpha_1 \lambda_B(1 - R_1)P_1 + \alpha_2 \lambda_B(1 - R_2)P_2 \\ \rightarrow \alpha_1 r_1 P_1 + \alpha_2 r_2 P_2 &= -r\hat{V} + r\emptyset K + rX_1 + rX_2 - \lambda_B \epsilon_h + \lambda_B(g_B - \hat{V}), \\ \epsilon_h &= \Delta \hat{V}_B - \alpha_1(1 - R_1)P_1 + \alpha_2 \lambda_B(1 - R_2)P_2 \end{aligned}$$

을 임을 알 수 있다.

Self-financing 가정에 의해 포트폴리오는 수익을 올리지 않게 되므로

$$d\hat{V} + d\pi = 0$$

가 되고, 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v \partial S} \\ & - \delta_S(\gamma_S - q_S)S + \sum_{j=1}^2 (r_{C_j} \Delta \hat{V}_{C_j} + \alpha_j r_j P_j) - \sum_{j=1}^2 \alpha_{C_j} q_{C_j} P_{C_j} - \sum_{j=1}^2 r_{X_j} X_j \\ & - \gamma_K K = 0 \\ \rightarrow & \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2(\hat{V}_{C_1} + \delta_V \hat{V}_{C_2})}{\partial v \partial S} \\ & - \delta_S(\gamma_S - q_S)S + \sum_{j=1}^2 \lambda_{C_j} (g_{C_j} - \hat{V}) - \sum_{j=1}^2 s_{X_j} X_j - \gamma_K K - r\hat{V} + r\emptyset K - \lambda_B \epsilon_h \\ & + \lambda_B(g_B - \hat{V}) = 0 \end{aligned}$$

이를 정리하기 위해 다음과 같은 결과를 이용하였다.

$$g_B = \hat{V} + \Delta \hat{V}_B, \Delta \hat{V}_{C_j} = g_{C_j} - \hat{V}, \lambda_{C_j} = r_{C_j} - q_{C_j}, s_{X_j} = r_{X_j} - r,$$

이제 파생상품 포트폴리오의 가치  $\hat{V}$ 를 신용위험 등을 고려하지 않고 Black-Scholes의 가정을 충족시키는 가치  $V = V_{C_1} + \delta_V V_{C_2}$ 와  $U = U_{C_1} + \delta_V U_{C_2}$ 의 합으로 나타내면  $\hat{V} = V +$

$U$ 이고, Black Scholes PDE 는 다음과 같은 결과를 줄 것입니다.

$$d\hat{V} + d\pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu_S + \frac{\partial V}{\partial v} \mu_v + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} - \delta_S (\gamma_S - q_S) S + \delta_S \mu_S \right) dt \\ + \left( \delta_S \sigma_S + \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_v \hat{V}_{C_2})}{\partial S} \sigma_S \right) dZ_1 + \frac{\partial(\hat{V}_{C_1} + \delta_v \hat{V}_{C_2})}{\partial v} \sigma_v dZ_2$$

그리고 이미 앞서 구한  $\delta_S, \delta_v$ 는 포트폴리오를 Deterministic Process 로 만들어 줄 것이므로 다음과 같은 공식이 성립할 것이라는 것을 알 수 있다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} - \delta_S (\gamma_S - q_S) S - rV = 0$$

따라서,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} - \left( r + \lambda_B + \sum_{j=1}^2 \lambda_{C_j} \right) U \\ = - \sum_{j=1}^2 \lambda_{C_j} (g_{C_j} + \hat{V}^j - V) + \sum_{j=1}^2 s_{X_j} X_j + \gamma_K K - r\emptyset K + \lambda_B \epsilon_h - \lambda_B (g_B - V) \\ U(T, S) = 0$$

따라서, Multi-dimensional Feynman Kac Theorem 에 의해 포트폴리오전체의 XVA 를 구할 수 있다. 다음으로, XVA 를  $U = U_{C_1} + \delta_v U_{C_2}$  와 같이 counter party 별로 나눌 것인데 이를 위해서는 다음과 같은 식이 성립해야 한다는 것을 알 수 있다.

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\sigma_S^2}{2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial S^2} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial v^2} + \rho \sigma_S \sigma_v \frac{\partial^2 U_k}{\partial v \partial S} - (r + \lambda_B + \lambda_{C_k}) U_k \\ = -\lambda_{C_k} (g_{C_k} - V_k) + s_{X_k} X_k + \gamma_K K - r\emptyset K + \lambda_B \epsilon_{hk} - \lambda_B (g_{Bk} - V_k)$$

또한, 이를 위해서는  $\epsilon_h = \epsilon_{h1} + \epsilon_{h2}$ 로 표현이 가능하여야 할 것이고,

$$\epsilon_{hk} = \Delta \hat{V}_{Bk} - \alpha_{1k} (1 - R_1) P_1 + \alpha_{2k} \lambda_B (1 - R_2) P_2 \\ = g_{Bk} - V_k - U_k - \alpha_{1k} (1 - R_1) P_1 + \alpha_{2k} \lambda_B (1 - R_2) P_2$$

로 쓰여져야 할 것이며

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^2 \alpha_{jk}, \quad j \in \{1, 2\} \\ g_B = \sum_{k=1}^2 g_{Bk}$$

등이 성립해야 할 것이다. 발행자의 채권을 거래상대방별로 구별하는 것은 어렵지 않으며, B의 부도 시 파생상품의 가치가 각 거래 상대방에게 분배가 된다는 것은 적절한 가정이므로,

$$\epsilon_h = \sum_{k=1}^2 \alpha_{hk}$$

가 성립한다.

마지막으로 남은 것이 Capital Allocation ( $\gamma_K K_k - r\emptyset K_k$ )인데, 이는 거래 상대방 수준에서 나누어지기보다는 규제와 회사의 내부 규정에 의해 결정되는 경우가 많이 있으므로 적절한 Capital Allocation Scheme이 필요하게 된다. Capital Allocation이 가능하다고 가정하고 Feynman Kac Theorem을 적용하면,  $k \in \{1, 2\}$ 에 대해,

$$\begin{aligned} U_{C_k} &= CVA_{C_k} + DVA_{C_k} + FCA_{C_k} + COLVA_{C_k} + KVA_{C_k} \\ CVA_{C_k} &= E \left[ \int_{t_0}^T -\lambda_{C_k}(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - \left( r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_{C_k}(u) \right) du \right) (g_{C_k} - V_{C_k}) ds \middle| F_{t_0} \right] \\ DVA_{C_k} &= E \left[ \int_{t_0}^T -\lambda_B(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - \left( r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_{C_k}(u) \right) du \right) (g_{Bk} - V_{C_k}) ds \middle| F_{t_0} \right] \\ FCA_{C_k} &= E \left[ \int_{t_0}^T \lambda_B(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - \left( r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_{C_k}(u) \right) du \right) \epsilon_{hk} ds \middle| F_{t_0} \right] \\ COLVA_{C_k} &= E \left[ \int_{t_0}^T s_{X_k}(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - \left( r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_{C_k}(u) \right) du \right) X_k ds \middle| F_{t_0} \right] \\ KVA_{C_k} &= E \left[ \int_{t_0}^T (\gamma_K(K, s) - r(s)\emptyset_k) \exp \left( \int_{t_0}^s - \left( r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_{C_k}(u) \right) du \right) K_k ds \middle| F_{t_0} \right] \end{aligned}$$

인 것을 알 수 있다. 하지만, Capital Allocation Scheme은 유일하지 않으며 따라서 XVA의 값이 Capital Allocation을 어떻게 하느냐에 따라서 달라질 수 있다는 것을 시사한다. 특이한 점은, Stochastic Volatility 모형을 적용한 XVA 모형이 GBM를 가정한 XVA 모형과 같은 형태로 도출된다는 것을 알 수 있다.

### 3. Implementations

이번 장에서는 Stochastic Volatility 모형의 XVA 산출을 위해 사용되는 모형들의 추정방법과 결과에 대해서 설명한다. 먼저, 할인율 커브를 구하기 위해 CIR 모형을 추정하고, 코스피 200 에 보다 적절한 Stochastic Volatility 모형을 찾기 위해 SABR 모형과 Heston 모형의 모수들을 추정할 것이다.

#### 3.1 Discount Curve Calibration

이번 절에서는 Cox-Ingersoll-Ross 모형의 추정방법과 결과에 대해서 설명할 것이다. Cox-Ingersoll-Ross 모형은 non-central chi-squared 분포를 따른다. 보다 정확하게 설명하면, 단기 금리  $r(t)$ 는 다음과 같은 확률밀도함수를 가진다.

$$f_{r(t)} = f_{\chi^2(v, \lambda_t)/c_t}(x) = c_t f_{\chi^2(v, \lambda_t)}(c_t x)$$

$$c_t = \frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-kt))}$$

$$v = \frac{4k\theta}{\sigma^2}$$

$$\lambda_t = c_t r_0 \exp(-kt)$$

따라서, 최대우도법을 이용해 CIR 모형의 추정이 가능하다.

CIR 함수의 추정을 위해 금융투자협회에 공시된 2015 년 1 월 18 일부터 2016 년 1 월 18 일까지의 3 개월 국고채 금리를 이용했다. 추정결과,  $\kappa$ 의 추정값은 0.7059568,  $\theta$ 의 경우 0.1575195,  $\sigma$ 는 0.1862001 라는 결과를 얻었고, 로그우도값은 -0.00133051 이었다.

위와 같은 추정 결과를 이용해 500 개의 단기금리 시뮬레이션과 예상되는 Spot Rate 을 구했는데 결과는 Figure 3.1 과 같았다.

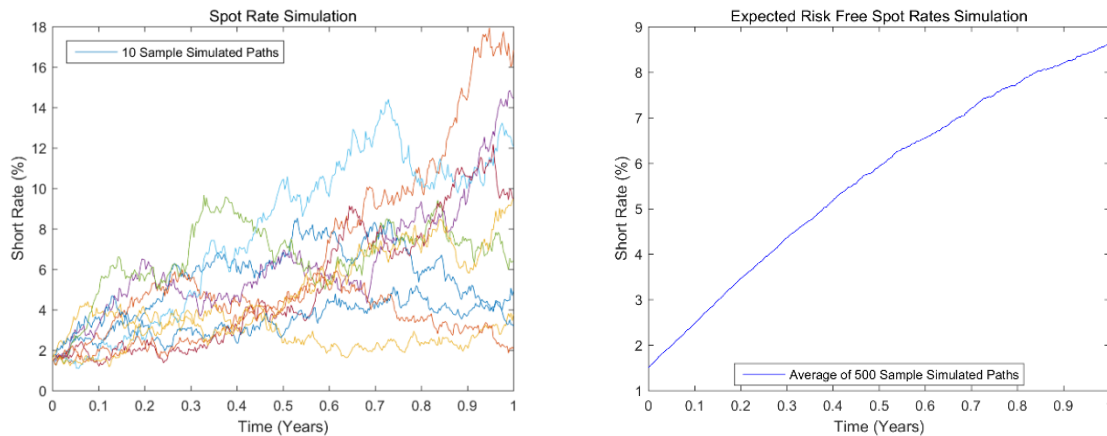


Figure 3.1 Simulated short rate paths and expected risk free spot rates from Jan, 18<sup>th</sup> 2016.

### 3.2 Stochastic Volatility Calibration

본 논문에서는 SABR 모형과 Heston 모형을 코스피 200 에 적용시켰는데 이번 절에서는 각 모형의 최적화 문제를 어떤 데이터를 이용하여 해결했는지 설명할 것이다.

#### 3.2.1 SABR Model

SABR 모형의 Calibration 을 위해 먼저  $\beta$  값을 설정하는데 임의 S 의 값을 설정하거나 다음과 같은 선형회귀분석

$$\log(\sigma_{ATM}) = \log \alpha - (1 - \beta) \log F$$

을 이용하여 추정할 수 있다. 하지만, Hagan et al 에 의하면  $\beta$  값이 최적화 문제를 푸는데 큰 영향을 주지 않으므로 저자들은  $\beta$  를 0.5 라고 임의로 가정하였다. 그리고, 다음과 같은 최적화 문제를 풀었는데,

$$\min_{K, maturity} \|\sigma_{BS \text{ imp}}^2 - \sigma_{SABR \text{ imp}}^2\|_2$$

여기서  $\sigma_{BS \text{ imp}}^2$  은 Black-Scholes 모형의 내재변동성이고  $\sigma_{SABR \text{ imp}}^2$  는 2.1.1 에서 소개된 Hagan et al 의 근사함수이며 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{imp} &= \frac{\alpha}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} \left[ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \left( \log \left( \frac{F}{K} \right) \right)^2 + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \left( \log \left( \frac{F}{K} \right) \right)^4 \right] \frac{z}{x(z)} \\ &\cdot \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24(FK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \beta \epsilon \alpha}{4(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \epsilon^2 \frac{2-3\rho^2}{24} \right] (T-t) + \dots \right\} \\ z &= \frac{\epsilon}{\alpha} (FK)^{\frac{1-\beta}{2}} \log \left( \frac{F}{K} \right) \\ x(z) &= \log \left( \frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1-\rho} \right) \end{aligned}$$

Calibration 을 위해 블룸버그 터미널의 Option Monitor (OMON)에 공시된 행사가, 만기별, 코스피 200 콜 옵션의 내재변동성을 이용하였다. 추정결과,  $\alpha$ 의 추정치는 25.5504784 이었고  $\rho$ 는 0.8314781 이었으며  $\epsilon$ 는 4.4040414 로 추정되었는데, RSS 는 0.177139 이었다. 이 결과를 바탕으로 코스피 200 선물의 변동성과 선물의 가격 시뮬레이션을 500 개씩 산출했는데 결과는 Figure 3.2 와 같았다.

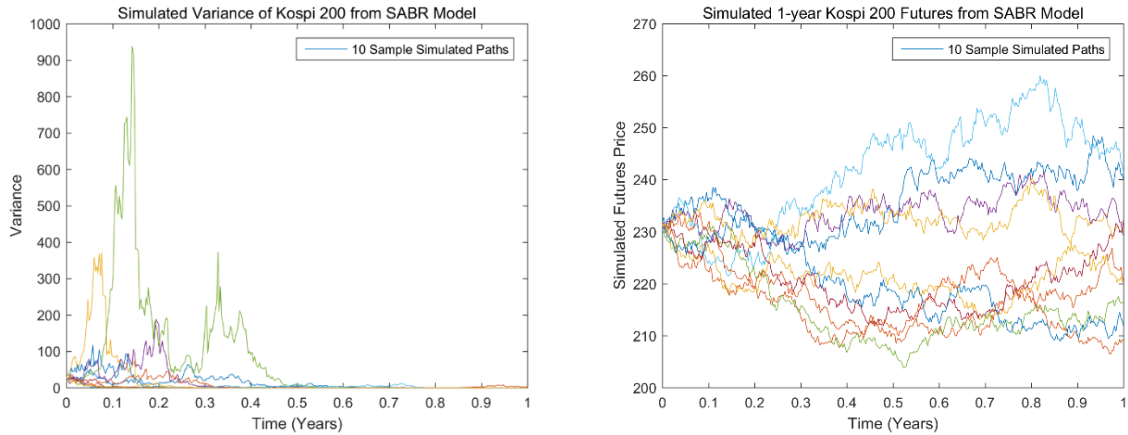


Figure 3.2 Simulated KOSPI 200 futures variance and paths from Jan, 18<sup>th</sup> 2016 until Jan, 18<sup>th</sup> 2017.

### 3.2.2 Heston Model

Heston 모형의 Calibration 을 위해  $C_{mkt}$ 가 코스피 200 옵션의 시장 가격이고  $C_{Heston}$ 이 Heston 모형을 가정하고 산출한 코스피 200 옵션의 가격일 때,  $\|C_{mkt} - C_{Heston}\|_2$ 을 최소화 시켰다. Heston 모형의 경우 추정을 위해 금융투자협회에 공시된 2015년 1월 18일부터 2016년 1월 18일까지의 3개월, 6개월, 9개월, 1년, 1.5년, 2년, 2.5년, 3년 국고채 수익률 데이터를 Bootstrap 하여 Zero Rate 을 구했고, Nelson-Siegel Svensson 기법을 이용해 보간 (Interpolation)하려고 했으나 짧은 만기에서 수익률이 음수가 되는 현상을 피하기 위해 선형보간 (Linear Interpolation)을 이용했다<sup>3</sup>. 그 외 옵션 관련 정보는 블룸버그 터미널의 Option Monitor 의 공시를 이용했다. 추정결과,  $\kappa$ 의 추정 값은 4.480139 였고,  $\theta$ 는 0.009776,  $\rho$ 는 0.888084,  $\sigma$ 는 3.947735 였으며, RSS 는  $10^{-7}$ 보다 작았다. 추정결과를 이용해 얻은 코스피 200의 변동성과 추이는 Figure 3.3 과 같았다.

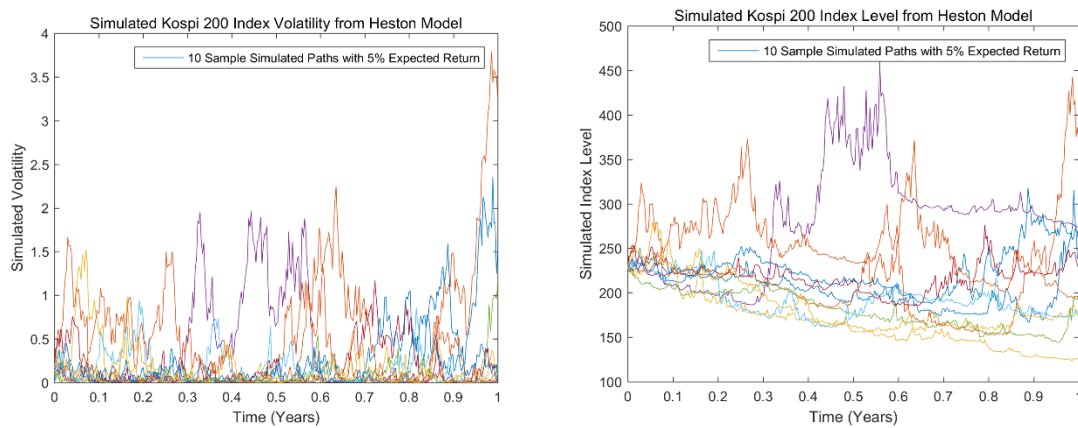


Figure 3.3 Simulated KOSPI200 futures variance and paths from Jan, 18<sup>th</sup> 2016 until Jan, 18<sup>th</sup> 2017.

<sup>3</sup>Nelson Siegel Svensson 기법의 추정치는 다음과 같았다.

Parameter	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\tau_1$	$\tau_2$
Estimates	0.01486825	-0.000058	-0.001544	0.0063963	0.6970444	1.5334998

### 3.3 Stochastic Volatility Model Calibration Comparison

SABR 모델과 Heston 모델의 추정결과를 이용해 내재변동성 표면을 도출하고, 이 결과를 시장의 내재변동성과 비교하였는데 결과는 Figure 3.4 와 같았다. 먼저, 잘 알려져 있는 대로 만기에 가까울 수록 시장의 내재변동성의 오류가 크다는 것을 알 수 있다. 또한, 시장의 내재변동성과 도출된 내재변동성의 오류가 시장의 내재변동성 대비 상당히 완만하다는 것을 알 수 있는데 이는 사용된 모형들이 변동성 표면을 잘 도출하고 있다는 것을 시사한다.

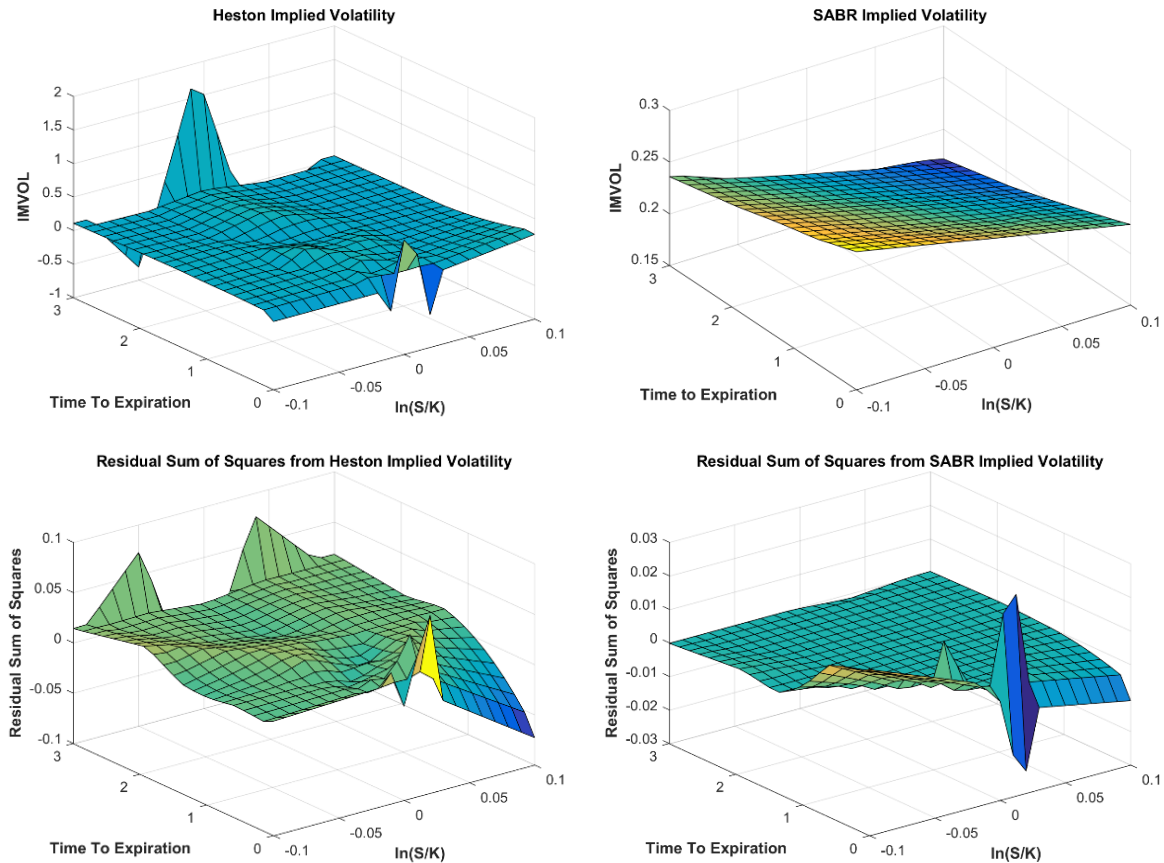


Figure 3.4 Top: Implied Volatility Surface obtained from Heston model (left) and SABR model (right). Bottom: Implied Volatility residual squared from Heston model (left) and SABR model (right)

CIR Estimation	
$\kappa$	0.7059568
$\theta$	0.1575195
$\sigma$	0.1862001
SABR Estimation	
$\alpha$	25.5504784
$\beta$	0.5
$\rho$	0.8314781
$\epsilon$	4.4040414
Heston Estimation	
$\kappa$	4.480139
$\theta$	0.009776
$\rho$	0.888084
$\sigma$	3.947735

Table 3.1 Summary of estimation results



## 4. XVA Computation

이번 장에서는 Heston 모형을 이용해 XVA 를 산출해 볼 것이다. 계산의 간소화를 위해 담보가 없다고 가정할 것이고 규제에 의한 Capital Requirement 즉 KVA 가 없다고 가정할 것이다. 이 경우, 2 장에서의 결과로 XVA 는 다음과 같이 표현될 것이다.

$$g_B = V^+ + R_B V^-$$

$$g_C = R_C V^+ + V^-$$

$$U = CVA + DVA + FCA$$

$$CVA = E \left[ - (1 - R_C) \int_{t_0}^T \lambda_C(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - (r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_C(u)) du \right) V^+ ds \middle| F_{t_0} \right]$$

$$DVA = E \left[ - (1 - R_B) \int_{t_0}^T \lambda_B(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - (r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_C(u)) du \right) V^- ds \middle| F_{t_0} \right]$$

$$FCA = E \left[ \int_{t_0}^T \lambda_B(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - (r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_C(u)) du \right) \epsilon_h ds \middle| F_{t_0} \right]$$

또한, 코스피 200 콜 옵션의 경우 기초자산의 거래가 일어나지 않는 현금 정산의 형태를 띄고, 콜 옵션 구매자의 Payoff가 음수가 되지 않으므로 DVA 가 없어지고 XVA 는 다음과 같아진다.

$$CVA = E \left[ - (1 - R_C) \int_{t_0}^T \lambda_C(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - (r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_C(u)) du \right) V^+ ds \middle| F_{t_0} \right]$$

$$FCA = E \left[ \int_{t_0}^T \lambda_B(s) \exp \left( \int_{t_0}^s - (r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_C(u)) du \right) \epsilon_h ds \middle| F_{t_0} \right]$$

먼저, 주식과 금리가 각 100 개씩의 Simulation Path 를 이용하여 CVA 를 산출했는데 채권 부도 시 회수율  $R_C$  은 금융투자협회에 공시된 2014 년 24.21%라고 가정했다.

산출과정에서, CPU 와 Ram 이 각각 i7-4712HQ, 16 gB 인 컴퓨터에서 100 개의 금리와 코스피 200 일별(daily)시물레이션을 이용하면 산출에 걸리는 시간이 2 시간이 넘는다는 것을 확인하고 시물레이션 경로(Simulation Path)를 10 개씩으로 줄였는데, 이 상황에서도 한 시나리오 하의 CVA 를 산출하는데 5 분 정도의 시간이 필요했다. 산출결과, 행사가별 1 년 만기 코스피 200 콜 옵션의 CVA 는 거래 상대방과 채권 발행자의 신용등급 대해 Table A3 과 같았다.

FVA의 경우에는 헷지에러  $\epsilon_h$ 에 큰 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 따라서, FVA는 헷지전략에 영향을 받게 되는데 크게 두 가지를 생각해볼 수 있다. 첫째, 자금조달로 파생되는 헷지 에러  $\epsilon_h$ 를 제거하기 위해 완벽한 포트폴리오복제를 한다는 것이다. 이 경우,  $\alpha_1$ 과  $\alpha_2$ 를 다음과 같이 설정하게 되는데,

$$\alpha_1 = \frac{\hat{V} - g_B}{(R_1 - R_2)P_1}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\hat{V} - g_B}{(R_1 - R_2)P_2}$$

$\epsilon_h = 0$  이 되고 FVA가 무의미해진다. 둘째, 거래상대방의 부도로 인해 있을 수 있는 손해만 헷지하는 방법이 있다. 이 경우,  $P_1$ 는 회수율이 없는 채권,  $P_2$ 는 회수율이  $R_2 = R_B$ 인 채권이라고 할 때,  $\alpha_1 P_1 = -U$ ,  $\alpha_2 P_2 = -V$ 가 되도록 채권을 관리하게 되면,  $\epsilon_h = (1 - R_B)V^+$ 가 되고  $FVA = FCA + DVA$ 인데,  $DVA = 0$ 이므로, FVA는 다음과 같이 표현된다.

$$FVA = E \left[ -(1 - R_B) \int_{t_0}^T \lambda_B(s) \exp \left( \int_{t_0}^s -(r(u) + \lambda_B(u) + \lambda_C(u)) du \right) V ds \middle| F_{t_0} \right]$$

또한, 콜 옵션의 경우  $V$ 가 항상 양수이므로,  $V = V^+$ 이고 CVA의  $\lambda_B$ 와  $\lambda_C$ 의 역할을 바꿔주게 되면 콜옵션의 FVA를 얻게 된다는 것을 알 수 있다. 마지막으로 CVA와 콜 옵션의 시장가 대비 비율은 Table A4와 같았는데 약 7~9% 정도가 된다는 것을 확인했다.

## 5. Conclusion

본 논문에서는 우선 Stochastic Volatility 모델에 적합한 XVA를 도출해 냈다. 이를 통해 결과적으로 GBM을 바탕으로 둔 XVA 모델이 Stochastic Volatility를 바탕으로 한 XVA 모델과 일치한다는 것을 확인했다. 또한, 내재변동성 표면이 moneyness와 만기에 영향을 받지 않고 평평한 모습이어야 하지만, 그렇지 않다는 것을 확인함으로써 GBM이 적합하지 않은 가정이라는 것을 다시 한번 확인했고, Heston 모델과 SABR 모델을 이용하여 코스피 200의 확률과정을 calibrate 했다. 이어 추정된 Stochastic Volatility 모형을 이용해 내재변동성 표면을 구현하고 시장의 내재변동성 표면을 얼마나 적절하게 나타내는지 분석해보았다. 마지막으로, Heston 모델을 이용하여 코스피 200 콜 옵션의 XVA를 산출해 보았다. 비교적 단순한 금리 모형을 사용했음에도 불구하고, 금리와 주식의 시뮬레이션 path를 100개씩 도입을 하고 1년 만기 콜 옵션의 XVA를 산출했을 때, 시간이 예상했던 것 보다 상당히 오래 걸렸다. 이를 통해 저자들은 XVA와 관련하여 수치적인 연구가 뒷받침 되어야 한다고 판단했다. 마지막으로 XVA가 시장의 불완전성을 고려하지 않은 파생상품의 가격과 비교 하였을 때 무시할 수 없는 비율을 차지 한다는 것을 확인함으로써, XVA가 파생상품의 가격을 결정하는데 중요한 역할을 한다는 것을 확인했다.

## 6. Reference

- Black, F., and M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 631-659.
- Breeden, D., and R. Litzenberger, 1978, Prices of state-contingent claims implicit in option prices, *Journal of Business* 51, 621-651.
- Carr, Peter, and Madan, Dilip B., 1999, Option valuation using the fast Fourier transform, *The Journal of Computational Finance* 2(4), 61-73
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, and Steven A. Ross, 1985, A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53, 385-407.
- Hull, John, and White, Alan, 2012, The FVA Debate, *Risk* July, 83-85.
- Burgard, C., and M. Kjaer, 2013, Funding Costs Funding Strategies, *Risk* December, 82-87
- Heston, Steven L., 1993, A closed-form solution for options with stochastic volatility, with application to bond and currency options, *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- Hagan, Patrick S., Kumar, Deep, Lesniewski, Andrew S., and Woodward, Diana E., 2002, Managing Smile Risk, *WILMOTT Magazine* September, 84-108
- Gatheral, J., 2006, *The Volatility Surface: A practitioner's Guide*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Green, Andrew, 2016, *XVA: Credit, Funding and Capital Valuation Adjustments*. West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons.
- Paulot, Louis, 2009, Asymptotic Implied Volatility at the Second Order with Application to the SABR Model, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1413649> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1413649>
- Rémillard, Bruno, 2013, *Statistical Methods for Financial Engineering*, Boca Raton, FL: CRC Press.
- 김주철 & 김미선, 2015, 글로벌 금융위기 이후 파생상품 Valuation 의 변화와 시사점, *서울대학교 금융경제 연구원 학술 세미나*, 10 월 20 일.

## 7. Appendix

### 7.1 Hazard rate calibration using CDS spread

CDS 의 가치는 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$V_{CDS} = V_{premium\ leg} + V_{accrued\ premium} - V_{protection\ leg}$$

이 때, 재해율 (hazard rate)  $\lambda$ 를 측정하는 방법으로는 다양한 방법이 있지만, 현업에서는 간단하고 선행보간 보다는 수치해석적으로 신뢰도가 높은 piecewise constant 를 가정하는 경향이 있습니다 (Andrew, 2015). 이 경우  $V_{CDS}$ 의 가치를 구성하는  $V_{premium\ leg}$ ,  $V_{accrued\ premium}$ ,  $V_{protection\ leg}$ 의 가치는 다음과 같이 도출됩니다.

$$\begin{aligned} V_{premium\ leg}(t_0) &= \sum_{i=1}^n E \left[ \exp \left( \int_{t_0}^{t_i} -r(u) du \right) C_i \alpha_i 1_{\tau > t_i} | F_t \right] \\ V_{premium\ leg}(t_0) &= \sum_{i=1}^n B(t_0, t_i) C_i \alpha_i p(\tau > t_i) \\ V_{accrued\ premium}^i(t_0) &= E \left[ \exp \left( \int_{t_0}^{\tau} -r(u) du \right) C_i \alpha_i \frac{(\tau - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} 1_{t_{i-1} \leq \tau \leq t_i} | F_t \right] \\ &= \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u - t_{i-1}) \lambda(u) \exp \left( \int_{t_0}^{t_i} -(r(v) + \lambda(v)) dv \right) du \\ t_{i-1} &= w_0^i \leq \dots \leq w_j^i \leq \dots \leq w_m^i = t_i, \quad i \in \{1, \dots, n\} \\ V_{accrued\ premium}^i(t_0) &= \sum_{j=1}^m \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \int_{w_{j-1}^i}^{w_j^i} (u - w_{j-1}^i) \lambda(u) \exp \left( \int_{w_{j-1}^i}^u -(r(v) + \lambda(v)) dv \right) du \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \int_{w_{j-1}^i}^{w_j^i} (u - w_{j-1}^i) \lambda(u) \exp \left( -(r(v) + \lambda(v))(u - w_{j-1}^i) \right) du \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \left\{ - \left[ \frac{(u - w_{j-1}^i) \lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \exp \left( -(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)(u - w_{j-1}^i) \right) \right]_{w_{j-1}^i}^{w_j^i} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \exp \left( -(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)(u - w_{j-1}^i) \right) \right]_{w_{j-1}^i}^{w_j^i} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \left\{ -\frac{(w_j^i - w_{j-1}^i) \lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \exp\left(-(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)(w_j^i - w_{j-1}^i)\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \left( \exp\left(-(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)(w_j^i - w_{j-1}^i)\right) - 1 \right) \right\} \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \left\{ -\frac{(w_j^i - w_{j-1}^i) \lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \exp\left(-(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)((w_j^i - t_0) - (w_{j-1}^i - t_0))\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \left( \exp\left(-(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)((w_j^i - t_0) - (w_{j-1}^i - t_0))\right) - 1 \right) \right\} \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \left\{ -\frac{(w_j^i - w_{j-1}^i) \lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \frac{B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i)}{B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \left( \frac{B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i)}{B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i)} - 1 \right) \right\} \\
&= \frac{C_i \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i)} \left\{ \frac{(B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i) - B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i))}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(w_j^i - w_{j-1}^i) B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i)}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \right\}
\end{aligned}$$

$$V_{\text{accrued premium}}(t_0) = \sum_{i=1}^n V_{\text{accrued premium}}^i(t_0)$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{protection leg}}(t_0) &= E \left[ \exp \left( \int_{t_0}^{\tau} -r(u) du \right) (1 - R) 1_{\tau < T} | F_t \right] \\
&= (1 - R) \int_{t_0}^T \lambda(u) \exp \left( \int_{t_0}^u -(r(v) + \lambda(v)) dv \right) du
\end{aligned}$$

$$t_0 = p_0 \leq \dots \leq p_j \leq \dots \leq p_l = T$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{protection leg}}(t_0) &= (1 - R) \sum_{k=1}^l \int_{p_{k-1}}^{p_k} \lambda(u) \exp \left( \int_{t_0}^u -(r(v) + \lambda(v)) dv \right) du \\
&= (1 - R) \sum_{k=1}^l \int_{p_{k-1}}^{p_k} \lambda_{k-1,k} \exp \left( -(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})((u - p_k) + (p_k - t_0)) \right) du \\
&= (1 - R) \sum_{k=1}^l B(t_0, p_k) P(\tau > p_k) \left[ \frac{-\lambda_{k-1,k}}{(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})} \exp \left( -(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})(u - p_k) \right) \right]_{p_{k-1}}^{p_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-R) \sum_{k=1}^l B(t_0, p_k) P(\tau > p_k) \frac{\lambda_{k-1,k}}{(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})} \left( \frac{B(t_0, p_{k-1}) P(\tau > p_{k-1})}{B(t_0, p_k) P(\tau > p_k)} - 1 \right) \\
&= (1-R) \sum_{k=1}^l \frac{\lambda_{k-1,k}}{(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})} (B(t_0, p_{k-1}) P(\tau > p_{k-1}) - B(t_0, p_k) P(\tau > p_k))
\end{aligned}$$

위와 같이 도출된 공식들을 이용해 n 번째 만기의 CDS 의 가치  $V_{CDS}^n$ 를 구성하는

$V_{premium\ leg}^n, V_{accrued\ premium}^n, V_{protection\ leg}^n$ 를 n-1 번째 만기의  $V_{premium\ leg}^{n-1}$ ,

$V_{accrued\ premium}^{n-1}, V_{protection\ leg}^{n-1}$ 의 함수로 나타낼 수 있는데 결과는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
V_{premium\ leg}^n(t_0, S_n) &= S_n \sum_{i=1}^B B(t_0, t_i) \alpha_i p(\tau > t_i) \\
&= S_n \sum_{i=1}^{\hat{B}} B(t_0, t_i) \alpha_i p(\tau > t_i) + S_n \sum_{i=\hat{B}}^B B(t_0, t_i) \alpha_i p(\tau > t_i) \\
&= \frac{S_n}{S_{n-1}} V_{premium\ leg}^{n-1}(t_0, S_{n-1}) + S_n \sum_{i=\hat{B}}^B B(t_0, t_i) \alpha_i p(\tau > t_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n V_{accrued\ premium}^i(t_0, S_n) \\
&= \sum_{i=1}^A \frac{S_n \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i)} \left\{ \frac{(B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i) - B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i))}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(w_j^i - w_{j-1}^i) B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i)}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \right\} + \\
&= \frac{S_n}{S_{n-1}} \sum_{i=1}^n V_{accrued\ premium}^i(t_0, S_{n-1}) \\
&+ \sum_{i=\hat{A}}^A \frac{S_n \alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i)} \left\{ \frac{(B(t_0, w_{j-1}^i) P(\tau > w_{j-1}^i) - B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i))}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(w_j^i - w_{j-1}^i) B(t_0, w_j^i) P(\tau > w_j^i)}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{protection\ leg}^n(t_0, S_n) &= (1 \\
&\quad - R) \sum_{k=1}^A \frac{\lambda_{k-1,k}}{(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})} (B(t_0, p_{k-1}) P(\tau > p_{k-1}) - B(t_0, p_k) P(\tau > p_k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V_{protection\ leg}^{n-1}(t_0, S_{n-1}) \\
&\quad + (1 - R) \sum_{k=\hat{A}}^A \frac{\lambda_{k-1,k}}{(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})} (B(t_0, p_{k-1})P(\tau > p_{k-1}) - B(t_0, p_k)P(\tau > p_k))
\end{aligned}$$

따라서, CDS 의 손익분기 스프레드는 다음과 같이 표현되고

$$0 = V_{CDS}^n(t_0, S_n) = V_{protection\ leg}^n(t_0, S_n) + \sum_{i=1}^n V_{accrued\ premium}^i(t_0, S_n) - V_{protection\ leg}^n(t_0, S_n)$$

시장의 CDS Spread  $S_n$ 을 주는 재해율  $\lambda_{k-1,k}$ 를 산출하는 방식으로 Calibration 을 할 수 있습니다.

$S_n$

$$\begin{aligned}
&V_{protection\ leg}^{n-1}(t_0, S_{n-1}) + (1 - R) \sum_{k=\hat{A}}^A \frac{\lambda_{k-1,k}}{(r_{k-1,k} + \lambda_{k-1,k})} (B(t_0, p_{k-1})P(\tau > p_{k-1}) - B(t_0, p_k)P(\tau > p_k)) \\
&= \frac{V_{protection\ leg}^{n-1}(t_0, S_{n-1}) + \sum_{i=\hat{B}}^B B(t_0, t_i) \alpha_i p(\tau > t_i) + \frac{1}{S_{n-1}} \sum_{i=1}^n V_{accrued\ premium}^i(t_0, S_{n-1})}{\frac{1}{S_{n-1}} V_{premium\ leg}^{n-1}(t_0, S_{n-1}) + \sum_{i=\hat{B}}^B B(t_0, t_i) \alpha_i p(\tau > t_i) + \frac{1}{S_{n-1}} \sum_{i=1}^n V_{accrued\ premium}^i(t_0, S_{n-1})} \\
&\quad + \sum_{i=\hat{A}}^A \frac{\alpha_i}{t_i - t_{i-1}} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_{j-1,j}^i}{B(t_0, w_{j-1}^i)P(\tau > w_{j-1}^i)} \left\{ \frac{(B(t_0, w_{j-1}^i)P(\tau > w_{j-1}^i) - B(t_0, w_j^i)P(\tau > w_j^i))}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(w_j^i - w_{j-1}^i)B(t_0, w_j^i)P(\tau > w_j^i)}{(r_{j-1,j}^i + \lambda_{j-1,j}^i)} \right\}
\end{aligned}$$

## 7.2 Complementary figures and tables

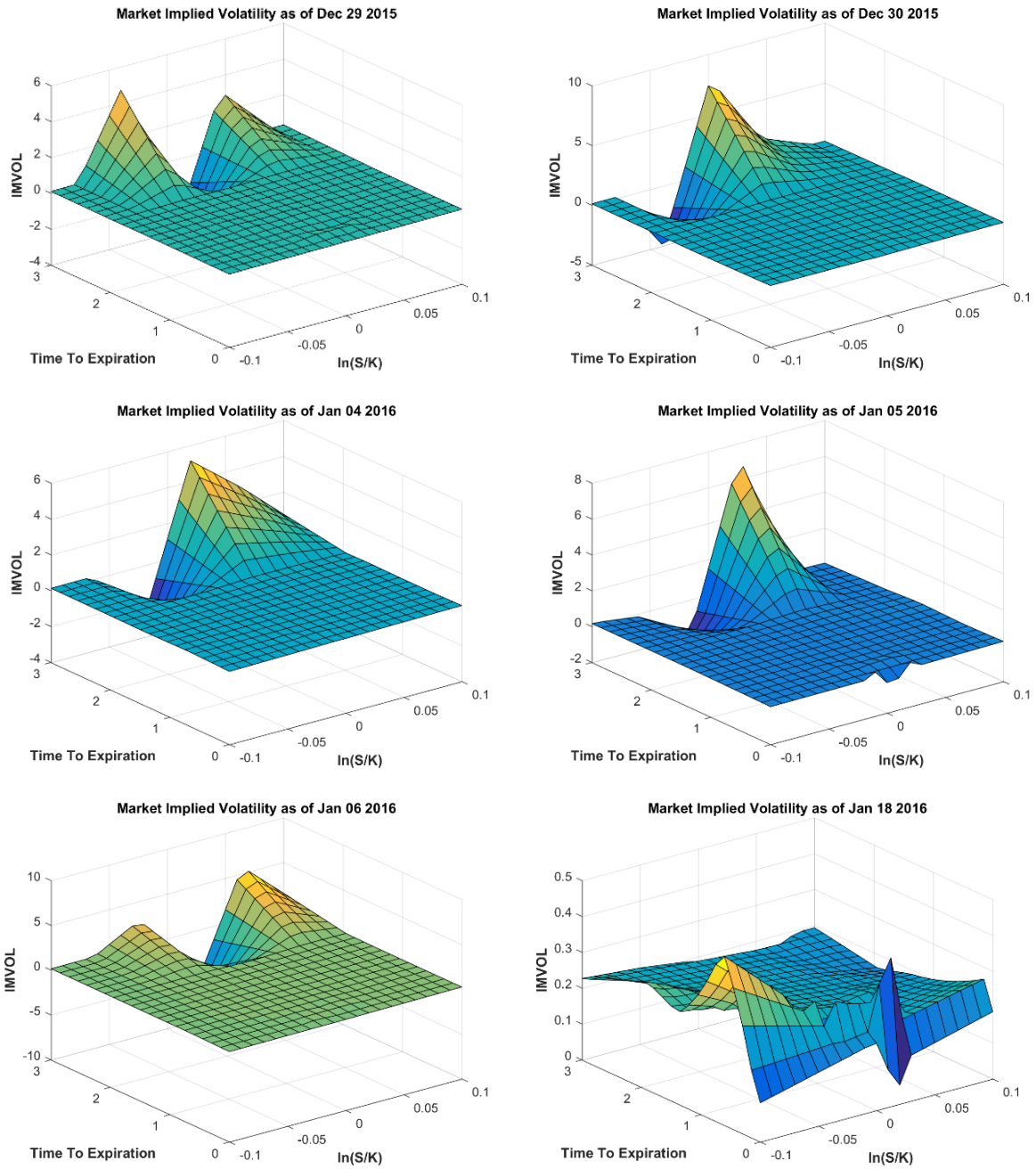
Company	Account	2011	2012	2013	Sep 2014
A	IFRS			2.8	2.5
	Basel			26.0	39.3
B	IFRS	8.6	5.2	8.3	7.6
	Basel			36.7	31.5
C	IFRS	1.2	0.7	2.6	2.3
	Basel			11.0	27.6
D	IFRS	2.9	0.9	0.7	0.4
	Basel			30.2	25.1
E	IFRS	2.9	1.6	5.6	4.3
	Basel			52.7	39.3
F	IFRS	1.1	0.8	7.8	6.6
	Basel			42.2	45.0
G	IFRS	31.0	16.7	11.1	10.3
	Basel			42.2	40.9
H	IFRS	0.4	0.5	0.8	0.7
	Basel			31.2	30.3
I	IFRS	1.2	0.2	0.2	0.4
	Basel			26.7	24.3
J	IFRS	5.3	5.8	8.5	10.7
	Basel			129.5	62.6
K	IFRS	5.5	7.9	8.6	9.9
	Basel			36.1	44.5
L	IFRS	11.5	1.9	0.6	0.6
	Basel			22.8	22.4
M	IFRS			4.6	6.9
	Basel			42.5	45.0

**Table A1.** CVA reported under IFRS by subsidiaries of global financial institutions (unit: bn KRW)



Company	Account	2011	2012	2013	Sep 2014
N	CVA(IFRS)	19.1	14.5	12.4	3.6
	DVA(IFRS)				
	CVA(Basel)			39.4	38.4
O	CVA(IFRS)	27.7	25.9	23.5	22.6
	DVA(IFRS)			1.1	1.2
	CVA(Basel)			102.2	95.7
P	CVA(IFRS)	18.3	2.5	2.4	3.4
	DVA(IFRS)			1.1	1.2
	CVA(Basel)			103.1	137.7
Q	CVA(IFRS)	330.7	167.1	88.5	55.6
	DVA(IFRS)	20.1	20.5	11.4	10.8
	CVA(Basel)			31.8	30.4
R	CVA(IFRS)	27.3	48.1	17.9	4.0
	DVA(IFRS)			0.1	0.1
	CVA(Basel)			65.4	35.5
S	CVA(IFRS)	94.8	195.0	80.4	65.7
	DVA(IFRS)			0.9	1.0
	CVA(Basel)			60.1	38.2
T	CVA(IFRS)	9.8	14.5	17.9	6.4
	DVA(IFRS)				
	CVA(Basel)			34.1	51.6

**Table A2.** CVA and DVA reported by Korean financial institutions (unit: bn KRW)



**Figure A1.** Market Implied Volatility Surface of KOSPI 200 Call Option on various dates between Dec, 29<sup>th</sup> 2015 to Jan, 18<sup>th</sup> 2016.

Bond Issuer Credit Rating	Counter Party Credit Rating							
	$K = 150$	AAA	AA+	AA	$K = 300$	AAA	AA+	AA
	AAA	1.7471	1.9767	2.3125	AAA	1.4007	1.5845	1.8531
	AA+	1.7454	1.9747	2.3102	AA+	1.3993	1.5830	1.8513
	AA	1.7429	1.9719	2.3069	AA	1.3974	1,8487	1.6595
	$K = 180$	AAA	AA+	AA	$K = 330$	AAA	AA+	AA
	AAA	1.6595	1.8774	2.1962	AAA	1.3504	1.5276	1.7856
	AA+	1.6578	1.8756	2.1940	AA+	1.3491	1.5261	1.7847
	AA	1.6555	1.8729	2.1909	AA	1.3472	1.5240	1.7822
	$K = 210$	AAA	AA+	AA	$K = 360$	AAA	AA+	AA
	AAA	1.5839	1.7919	2.0960	AAA	1.3043	1.4754	1.7253
	AA+	1.5823	1.7901	2.0939	AA+	1.3030	1.4740	1.7236
	AA	1.5801	1.7876	2.0910	AA	1.3012	1.4719	1.7212
	$K = 240$	AAA	AA+	AA	$K = 390$	AAA	AA+	AA
	AAA	1.5165	1.1756	2.0066	AAA	1.2618	1.4273	1.6690
	AA+	1.5150	1.1739	2.0046	AA+	1.2606	1.4259	1.6673
	AA	1.5129	1.7115	2.0018	AA	1.2588	1.4239	1.6650
	$K = 270$	AAA	AA+	AA	$K = 420$	AAA	AA+	AA
	AAA	1.4558	1.6468	1.9261	AAA	1.2225	1.3828	1.6168
AA+	1.4543	1.6452	1.9242	AA+	1.2213	1.3814	1.6152	
AA	1.4523	1.6429	1.9215	AA	1.2196	1.3795	1.6130	

**Table A3** KOSPI 200 Call option CVA for various strike prices, as well as credit ratings of bond issuers and counter parties

Bond Issuer Credit Rating	Counterparty Credit Rating			
	$K = 150$	AAA	AA+	AA
	AAA	6.83%	7.73%	9.04%
	AA+	6.82%	7.72%	9.03%
	AA	6.81%	7.71%	9.02%
	$K = 180$	AAA	AA+	AA
	AAA	7.14%	8.08%	9.45%
	AA+	7.14%	8.07%	9.44%
	AA	7.13%	8.06%	9.43%
	$K = 210$	AAA	AA+	AA
	AAA	6.72%	7.60%	8.89%
	AA+	6.71%	7.60%	8.89%
	AA	6.71%	7.59%	8.87%
	$K = 240$	AAA	AA+	AA
	AAA	6.40%	7.24%	8.47%
	AA+	6.40%	7.24%	8.46%
	AA	6.39%	7.23%	8.45%
	$K = 270$	AAA	AA+	AA
	AAA	6.10%	4.73%	8.07%
	AA+	6.10%	4.72%	8.07%
	AA	6.09%	6.89%	8.05%

**Table A4** KOSPI 200 Call option CVA as a percentage of its market price for various strike prices, as well as credit ratings of bond issuers and counterparties