

한국형 장수 리스크 파생상품 개발: 연금 상품의 장수 리스크 헷징을 중심으로

강윤구
서울대 경제학부

김동건
서울대 수리과학부

김수열
서울대 자유전공학부

(Abstract)

의학 기술이 발전하고 위생 및 생활 수준이 급격하게 개선됨에 따라, 사람들의 평균 수명은 빠르게 증가하고 있다. 고령화 사회로의 이행에 따라 각 보험사 및 연금공단 입장에서는 가입자들이 자신들의 예상보다 오래 살아남는 장수 리스크(Longevity Risk)에 직면하게 되었다. 따라서 해외에서는 사망률에 연동된 파생 상품들을 개발하여 보험사들 및 증권사, 그리고 다양한 자산으로 포트폴리오의 리스크를 줄이려는 투자자들에게 판매하고 있으나, 한국에서는 아직 이러한 장수 리스크 파생상품이 전무한 실정이다. 본 논문에서는 외국의 사례를 참고하여 한국의 장수 리스크 파생 상품을 개발하고, 대표적인 사망률 모형인 Lee-Carter model 과 금리 예측을 위한 DSGE model, 그리고 Esscher transform 및 Wang transform 을 이용하여 개발된 상품의 공정 가격을 책정하는 방법을 제시하였다. 또한 이 상품들로 장수 리스크를 헷징할 경우 어떤 결과가 나타날 수 있는지 계산하였다.

-Table of Contents-

List of Figures	ii
List of Tables	iii
1. Introduction	1
1.1. Korean Pension Market Overview	2
1.2. Taking a Closer Look at the National Pension Plan	3
1.3. Past Research	4
1.4. Research Method	6
2. Pricing Derivative Securities in an Incomplete Market	6
2.1. The Esscher Transform	6
2.2. The Wang Transform	7
3. Modelling Inputs	8
3.1. Mortality Modelling	8
3.2. Input Estimation Procedures and Results	8
3.3. Estimation Procedures and Results for Pricing Models in an Incomplete Market	10
3.3.1. Estimation Procedures for the Risk Aversion Coefficients in the Esscher Transform	10
3.3.2. Estimation Procedures for the Market Price of Risk in the Wang Transform	11
4. Designing and Pricing Death-linked Derivative Securities	11
4.1. Death-linked Bond	11
4.2. Death-linked Swaption	12
5. Annuity and Pension Plan Risk Management	13
5.1. Risk Management Method	13
5.1.1. Delta Hedging	13
5.2. Implications for Risk Management Practices	15
6. Conclusion	16
7. Appendices	17
8. Reference	29

<List of Figures>

Figure 1. 1982~ 2013 년도 한국인구의 연령대별 사망률과 사망률 추세 변화. (출처: 통계청)	1
Figure 2. 영국의 장수 리스크 전가 시장 규모. 단위: 백만 파운드. (출처: Hymans-Robertson)	2
Figure 3. 통계청의 각 세 생명표를 이용해 얻은 한국 사망률 표면과 Lee-Carter 모형으로 추정된 사망률 표면.....	9
Figure 4. Lee-Carter 모형의 2014 ~2100 년 한국 여성 사망률 예측.....	16
Figure A1. DSGE 모형 변수들의 Posterior Distribution.....	24
Figure A2. 2004~2015 년 콜금리와 공시기준이율(단위: %). (출처: CEIC Data Manager, 삼성생명).....	25
Figure A3. $\frac{\alpha-r}{r}$ 의 분포(단위: %). 출처: (CEIC Data Manager, 삼성생명)	25
Figure A4. (왼쪽부터) Esscher Transform 으로 산출한 연금, Swaption 1, Swaption 2 의 손해분포.....	26
Figure B1. 2013 년 OECD 국가들의 퇴직연금 지급구조 비중(단위: %). (출처: OECD).....	27
Figure B2. 2013 년 OECD 국가들의 연금 자산분배율(단위: %). (출처: OECD)	28

<List of Tables>

Table 1. 2009~2013 년도 국가별 연금 총 투자액(단위: 개별 국가 화폐, 백만) (출처: OECD)	3
Table 2. OECD 국가의 명목 및 실질 수익률의 5 년 기하평균(단위: %). (출처: OECD).....	3
Table 3. Lee-Carter 의 $k_t^{(2)}$ 추정값.....	9
Table 4. Lee-Carter 의 $\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}$ 추정값.....	10
Table 5. Tranche 별 장수 채권의 구조 및 추정된 공정가격.....	12
Table 6. Swaption 의 구조와 추정된 공정가격.....	13
Table 7. 각 장수 채권을 이용한 델타 헷지 및 헷지하지 않은 연금의 가격 변동.....	14
Table 8. 각 장수 스왑션을 이용한 델타 헷지 및 헷지하지 않은 연금의 가격 변동.....	14
Table A1. DSGE 모형의 변수들의 Prior Distribution.....	21
Table A2. DSGE 모형의 변수 추정 결과.....	23
Table A3. 스왑션과 연금의 Value at Risk ($\alpha = 5\%, 10\%$).....	26

1. Introduction

국민연금 재정추계위원회가 2013년 3차 추계에서 2060년 국민연금이 고갈될 것으로 보인다고 발표함에 따라, 국민연금의 지급 가능성에 대한 시민들의 불안이 커지고 있다. 국민연금 고갈의 원인으로는 출산율 감소로 인한 인구 구조 변화가 가장 주목 받고 있지만, 기술 발전에 따른 사람들의 평균 수명 증가 또한 무시할 수 없는 요인이다. 생활 환경 및 위생 여건이 개선되고 의학 기술이 발전하며, 영양 상태가 호전됨에 따라 사람들은 과거에 비해 비약적으로 긴 수명을 누리게 된다. 실제로 Figure 1에서 확인 가능하듯이 한국인구의 사망률 추세는 연령대를 불허하고 감소하고 있음을 확인할 수 있다. 이러한 수명 연장이 소비자 개개인에게는 축복이지만, 보험금 및 연금을 지급하는 기업 입장에게는 가입자들에게 주어야 할 현금 흐름이 늘어나는 재앙이 될 수 있다. 따라서 보험사 입장에서는 가입자들이 예상보다 오래 살아남을 장수 리스크(Longevity Risk)에 체계적으로 대비해야 할 필요가 있다.

고령화 현상은 한국뿐만 아니라 해외의 다른 국가들 또한 겪고 있는 일이다. 장수 리스크에 대한 관심이 커지면서 해외에서는 이미 장수 리스크 전가(Longevity Risk Transfer)시장이 성장하고 있는 추세다. 대표적인 예로, Figure 2에서 영국의 장수 리스크 전가 시장의 규모를 볼 수 있는데, 2009년부터 스왑션 및 장수 리스크 보험이 거래되기 시작했으며, 시장규모는 2013년의 경우 160억 파운드(약 30조원), 2014년 1분기의 경우 90억 파운드(약 16.7조원)라는 상당히 큰 규모의 시장이라는 것을 알 수 있다.

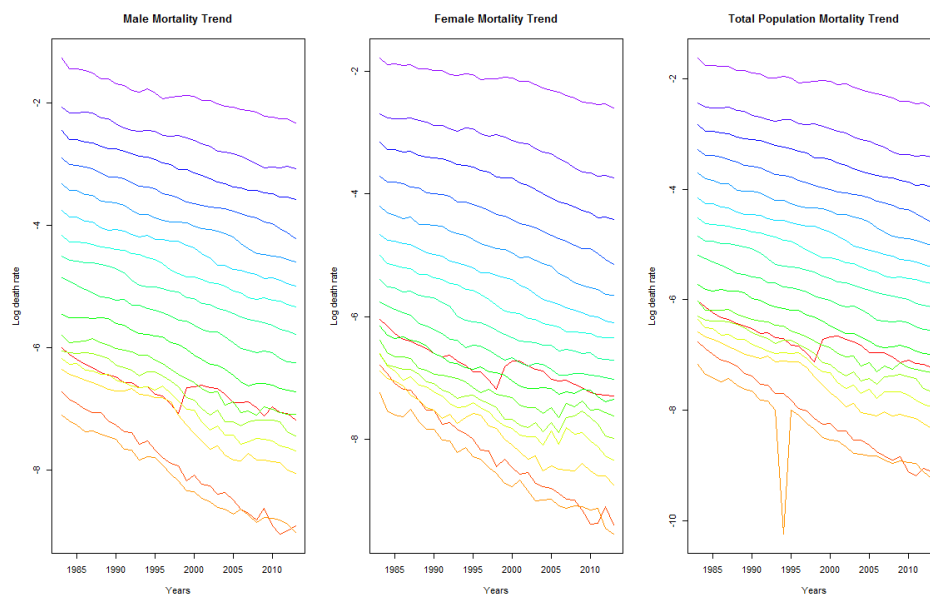


Figure 1. 1982~ 2013년도 한국인구의 연령대별 사망률과 사망률 추세 변화. (출처: 통계청)

이러한 배경에서 문제 의식을 얻은 본 논문은 다음을 목표로 한다. 첫째, 사망률 예측 모형 및 금리 예측 모델링, 불완전 시장에서의 파생 상품 가치 평가법을 이용하여, 한국에서 장수 리스크의 적절한 추정방법을 제안하고, 둘째, 해외에서 시장규모가 커지고 있는 사망률 혹은 생존률 연동 파생상품을 한국의 경우에 대입해 공정 가격을 계산하는 구체적인 방법을 제시한다. 마지막으로, 이렇게 구축한 파생상품을 이용하여 어떻게 장수 리스크가 헷징될 수 있는지 Value at Risk 방법 등을 사용하여 논의한다.

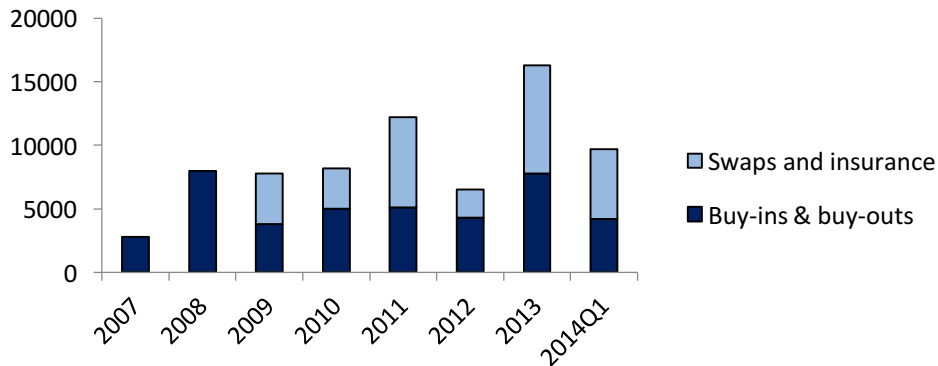


Figure 2. 영국의 장수 리스크 전가 시장 규모. 단위: 백만 파운드. (출처: Hymans-Robertson)

본 논문을 통해 다음과 같은 효과를 기대할 수 있다. 첫번째로, 한국형 장수 리스크 파생상품을 개발함으로써, 가입자들의 장수 리스크에 민감한 개인 연금이나 보험사들이 해당 리스크에 대해 보다 체계적이고 효과적인 헷징을 할 수 있다. 두번째로, 기존의 상품들과 독립적인 가치 평가 구조를 갖는 새로운 파생상품이 개발됨에 따라, 한국의 금융 시장이 완비 시장에 가까워지며, 각 투자 회사들의 포트폴리오 다각화를 기대할 수 있다. 마지막으로 해외에서 이미 성황리에 판매되고 있으나 국내에는 소개되지 않은 상품을 국내 금융시장에도 들여오으로써 국내 금융시장의 선진화에 기여할 수 있다.

1.1 Korean Pension Market Overview

한국 개인연금 시장의 특징으로는 시장이 급속도로 성장하고 있으며, 투자위험을 연금사가 부담하는 비중이 상대적으로 크고, 수익률이 낮은 안전자산군에 많은 자산분배가 되어있다는 것을 유추해 볼 수 있다. OECD에서 2014년 발간한 Pension Markets in Focus를 참조하면, 한국의 경우 연금 총 투자액이 꾸준히 늘어 2009년 38조원에서 86조원으로 상승한 것을 알 수 있다 (Table 1). 연금의 경우 투자위험을 연금가입자에게 전가하는 Defined Contribution (DC)와 연금사가 투자위험을 감수하는 Defined Benefit (DB), 그리고 직관적으로 DC와 DB의 절충안이라고 볼 수 있는 Hybrid 혹은 Mixed 상품이 존재한다. 흥미로운 점은, 한국의 퇴직연금시장의 경우 타 OECD 국가에 비해 DC의 비중이 크다는 점이다. 자산분포의 경우 한국의 연금운영사들의 주식비중이 가장 낮았고 유동이 큰 자산 혹은 채권의 비중이 상당히 큰 것을 알 수 있다(Appendix 5의 Figure B1, B2 참조). 안전한 자산의 비중이 큰 결과, 한국의 연금운영사들의 5년 명목 및 실질 기하평균 수익률은 각각 3.7%, 1.1%에 그쳤다(Table 2). 연금 중 대표성이 많이 부각되는 국민연금의 경우 2015년 5월 운용현황을 보면 총 자산 중 채권이 차지하는 비율이 58%가 넘었지만, 주식의 비중도 32%가량이며 대체투자에는 9.4%가 투자되고 있다.

Countries	2009	2010	2011	2012	2013
Korea	37,779,083	46,386,464	55,080,899	68,134,772	86,072,668
China	253,300	280,900	357,000	482,100	603,500
Hong Kong, China	522,448	606,941	617,087	700,104	797,614
Japan	125,736,100	122,079,000	118,590,300	125,252,700	140,178,600
United States	10,094,878	11,164,773	11,143,894	12,069,197	13,941,616
United Kingdom	1,124,262	1,289,071	1,444,019	1,603,292	1,625,058
France	3,000	4,000	5,000	6,700	8,600
Germany (2)	126,361	134,846	149,094	167,585	170,744
Australia	1,040,770	1,162,314	1,304,524	1,357,550	1,573,128

Table 1. 2009~2013 년도 국가별 연금 총 투자액(단위: 개별 국가 화폐, 백만). (출처: OECD)

Country	5-year average annual return		Country	5-year average annual return	
	Nominal	Real		Nominal	Real
Korea	3.7	1.1	Mexico	8.7	4.6
Japan	3.6	3.8	Chile	8.4	6.5
United States	7.9	5.7	Israel	8.2	5.6
Germany	4.4	2.9	Iceland	8.1	3.3
Netherlands	9.6	7.4	Belgium	7.6	5.5
Australia (3)	4.4	2.1	Denmark	6.1	4.1
Canada	9.1	7.4	Estonia	5.3	2.8

Table 2. OECD 국가의 명목 및 실질 수익률의 5 년 기하평균(단위: %). (출처: OECD)

1.2 Taking a Closer Look at the National Pension Plan

이번 절에서는 국민연금기금운용 중장기 정책수립 (2013) 보고서를 참고하여 국민연금의 운용정책에 대해 조금 더 자세히 설명하려고 한다. 국민연금은 운영을 위해 전략적 자산분배 (Strategic Asset Allocation: SAA) 와 전술적 자산분배 (Tactical Asset Allocation: TAA) 를 조합하여 운영한다는 것을 알 수 있다. 여기서, 전략적 자산분배 (SAA)를 기본이 되는 중-장기적인 자산분배라고 한다면, 전술적 자산분배 (TAA)는 증권의 시장가와 공정가의 차이 등으로 비롯된 시장의 단기적 수익률 기회를 적극적인 포트폴리오 관리 (Active Portfolio Management)로 잡는 것을 뜻한다. 먼저, 전략적 자산분배 (SAA)를 결정하는데는 정량적 방법과 정성적 방법의 고려를 통해 결정되는데, 국민연금의 경우 정량적 분석 방법으로 평균-분산 최적화 모형 (Mean-Variance Optimization Model: MVO 모델)이 사용되고 있다. 즉, 현실적 제한을 적용시킨 효율적 투자선 (Efficient Frontier) 구축하고, 코너해 (Corner Solution)등이 나타나는지에 대해 분석해본다는 것을 의미한다. 전략적 자산분배 (TAA)를 위해서는 유의미한 적극적 수익률 (Active Return¹)과 적극적 위험

¹ 적극적 수익률은 특정 증권의 기대수익률과 벤치마크가 되는 포트폴리오의 기대수익률의 차로 정의되고 적극적 위험은 적극적인 투자전략을 취함으로써 생겨나는 추가 위험을 뜻한다.

(Active Risk)를 찾아내고 정보비율 (Information Ratio: IR^2)을 분석을 하며 이를 통해 분산 기대되는 분산 대비 수익률이 높을 경우 포트폴리오에 편입시키는 전략을 취한다. 국민연금의 경우 IR의 단순 시계열분석을 하는 방식으로 모델링도 하는 것을 알 수 있다. 또한, 위험관리 지표로서 미달위험 (Shortfall risk)을 산출하는데, 미달위험을 10%로 관리한다는 것은 5년간 연금 누적운용수익률이 동기간 누적물가상승률보다 낮을 확률이 10%이하로 관리한다는 뜻이다.

1.3 Past Research

포트폴리오이론은 노벨경제학상을 수상한 Harry Markowitz (1952)로부터 시작돼, 정보비율 등을 이용해 특정전제조건 하에서 최적의 포트폴리오 자산배분을 등의 명백한 해를 결정해주는 Treynor와 Black (1973)의 모형을 거쳐 더욱 모형을 일반화시키는 방향으로 연구가 진행되고 있다.

파생상품의 공정가격 산출에 대한 연구는 Black, Scholes (1973)와 Merton (1973)의 혁명적인 연구로 활기를 띠기 시작했다. Black, Scholes와 Merton은 주식의 수익률이 이와 같은 특정 Ito 과정을 따를 때 기초자산을 주식으로 갖는 파생상품의 가격을 산출하는 공식에 명백한 해가 존재함을 증명하였다. 하지만, 이와 같은 증명은 차익거래가 존재하지 않아 위험중립확률측도가 존재하고, 시장이 완성시장³이어서 위험중립측도가 유일하다는 것이 전제가 되어 있다⁴. 하지만, 상기 방법은 불완성 시장 (Incomplete Market)에서 파생상품 공정가격이 다수 존재한다는 것을 의미하고 이는 일물일가의 법칙 (Law of One Price)를 충족시키지 못하는 결과를 초래한다⁵. 하지만, 이러한 문제점에 대한 기본적인 이해가 많이 부족한 상황이라, 부적절한 가격결정이론이 적용되고 있는 사례들을 흔히 볼 수 있다.

불완성시장에서의 가격결정 방법으로는 Esscher Principle 및 Wang Principle, 그리고 Esscher Transform과 Wang Transform 등이 연구되었는데 직관적인 설명으로, 특정 위험중립측도를 선택시켜주는 방식들이라고 이해할 수 있다. 조금 더 이론적인 설명으로는 공정가격 산출에 필요한 Pricing Kernel을 모델링하는 방식들이나 것이다. 여러 Pricing Axiom과 Pricing Principle에 대한 소개는 Goovaerts와 Laeven (2008)에 굉장히 잘 정리되어 있고, Wang (2003)은 특정 전제조건 하에서 Esscher Transform과 Wang Transform이 Bühlman의 경제모형으로부터 도출될 수 있다는 것을 보이며, Wang (2002)와 Kijima (2006)는 Wang Transform과 Esscher Transform으로 CAPM 및 Black-Scholes 공식을 도출해낼 수 있다는 것을 증명한다.

2 정보비율은 $IR = \frac{\text{적극적 수익률}}{\text{적극적 위험}}$ 로서 트레이킹 오류 (Tracking Error)에 대한 적극적 수익률의 보상정도를 나타낸다.

3 완성시장은 증권이 가격이 공정가격과 상이할 시 payoff가 같은 복제 포트폴리오 (Replicating Portfolio)를 구성해 무위험 수익 (Arbitrage)를 실현할 수 있는 시장이다.

4 First Fundamental Theorem of Asset Pricing의 결과이다.

5 Second Fundamental Theorem of Asset Pricing의 결과이다.

상기 방법을 통해 연금의 위험관리를 위해 필요한 사망률연동 파생상품의 공정가격 산출을 하려면 사망률, 장기금리, 장수위험의 시장가격 등의 모델링이 필수적이다. 먼저, 사망률 모형에 대한 연구로 Lee와 Carter (1992)의 모형과 이의 변형 및 일반화 모형들이 널리 연구되고 있다.

선도이자율에 대한 연구로는 통계적인 방법으로 Nelson과 Siegel (1987) 및 이를 일반화시킨 Svensson (1994) 방법이 널리 이용되고, 단기금리의 연구에는 Ito 과정을 이용한 균형모형인 Vasicek (1977), Cox, Ingersoll과 Ross의 (1985) 모형 등 1요인 여파인 기간구조모형, 이를 일반화시킨 다요인 여파인 기간구조모형, Heath, Jarrow 그리고 Morton (1990), (1991), (1992) 모형, 시장모형 (Market Models) 및 변동 스마일 (Volatility Smile) 등을 접목시킨 기간구조모형들이 많이 연구된 상태다. 이 외에도 이항나무 (Binomial Tree)를 이용한 Black-Derman-Toy (1990) 모형 등이 있다. 한국의 경우 다요인 CIR 모형이 무위험이자율을 잘 설명해준다는 연구 결과가 있는 상태다 (김인준, 김동석, 그리고 이상구, 2001). 하지만, 위의 금리 모형의 경우 경제의 펀더멘탈 및 금리정책을 잘 반영하지 못한다는 단점이 있는데, 장기간의 선도금리 예측에서 이러한 문제점은 큰 문제점이라고 할 수 있다. 따라서, 본 논문은 현재 경제분석 도구로서 널리 사용되고 있는 Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) 모형을 이용해 장기 선도금리를 예측하고자 한다 (Appendix 참조). (DSGE) 모형은 거시경제를 분석할 때 사용하는 모형들의 집합으로서 한국은행에서도 NEW BOK DSGE (배병호, 2014)를 발표하였다. 또한, 해외 연구를 참고하면 거시경제분석을 위해 DSGE와 VAR, 그리고 DSGE-VAR 등이 사용되고 있다 (Liu and Theodoridis, 2012).

위험관리에 대한 연구는 왕성하게 진행되고 있지만 이조차도 피상적인 면이 많이 부각되고 있다. 연금의 파생상품 구조에 대해서 설명하며 국가 전체의 사망률과 연동되는 이러한 파생상품들로 연금의 위험관리를 할 수 있을 것이라는 연구는 많이 있지만, Karoui (2013)처럼 연금가입자들의 나이대 분포와 국가 전체의 나이대 분포가 상이함으로서 나타날 수 있는 사망률 추세변화의 차이 및 정보의 비대칭으로 일어날 수 있는 연금가입자와 전체 인구의 사망률 추세의 차이 등에 대한 고려는 국내의 연구에서 찾아볼 수 없었다. 증권 포트폴리오의 위험관리에 대한 연구는 Delta Hedging 등이 기본이 되고 있다. 또한, 위험 모니터링을 위한 Value-at-Risk, ARIMA 및 ARCH의 다양한 변형 모형 등을 이용한 위험분석, Copula 함수를 이용한 위험관리 (Braun, 2011), Volatility Surface 모델링 (Bridgo and Mercurio, 2006), Markov Switching Multifractal을 이용한 포트폴리오 변동성 및 듀레이션 분석 등 다양한 연구가 진행되고 있다 (Calvet and Fisher, 2008). 또한, Kuroda와 Matsuyama (2009)에서 다루지는 것처럼 연금의 여유자금에 대한 분석으로 Tail Value at Risk (T-VaR), Conditional Value at Risk (C-VaR), 기대 미달위험 등으로 불리는 Conditional Tail Expectation (CTE) 및 Wang Transform과 같은 Expectation Principle을 응용한 모델링 기법이 널리 사용되고 있다.

1.4 Research Method

연구 방법은 크게 4 단계로 나뉘어 질 것이다. 2 장에서는 불완성시장에서의 위험가격을 Wang Transform 과 Esscher Transform 의 이론적 배경 및 이들을 이용하여 추정하는 방법에 대해 설명하고, 3 장에서는 연금 및 장수 리스크 파생상품의 공정가격 산출에 필요한 사망률을 추정할 것이다. 즉시연금의 공시기준이율 모델링과 금리 모델링은 기술적인 관계로 Appendix 에 포함시켰다. 그리고 이를 토대로, 위험의 시장가격 산출에 필요한 변수들을 추정할 것이다. 4 장에서는 실제 시장에서 판매된 파생상품을 토대로 가상의 파생상품을 구축하고, 3 장의 결과를 이용해 공정가격을 산출할 것이다. 5 장에서는 4 장에서 구축한 파생상품을 이용한 연금 헷지가 효과적인지를 테스트할 것이다. 연금과 파생상품의 VaR 은 Appendix 에 제시하였다. 이를 통해, 파생상품이 연금의 위험관리 수단으로서 얼마나 적절한지에 대해 알아 볼 것이다.

2. Pricing Derivative Securities in an Incomplete Market

연금의 위험은 미래의 사망률이 관련이 되어 있기 때문에 계리적 방법론 Actuarial method 과 Pricing Principle⁶에 대한 이해가 필수적이다. 이번 장에서는 불완전시장에서 보험료 혹은 금융상품의 현재가치가 어떻게 산출되어야 하는지에 대한 간략한 소개와 불완성 시장에서의 파생상품 가격결정 원칙 중 가장 널리 이용되고 있는 Esscher Transform 및 Wang Transform 을 설명할 것이다.

2.1. The Esscher Transform

$\{X_t\}_{t \geq 0}$ 이 Lévy 과정이고 X_t 의 확률분포가 $f_{x,t}$ 라고 할 때, risk aversion parameter, $h \in \mathbb{R}$, 와 모멘트생성함수 $M_{z,t} = E[\exp\{zX_t\}]$ 에 대해 $f^h = \frac{e^{hx}}{M_{h,t}} f_{x,t}$ 를 확률 분포로 가지는 확률과정 X_t^h 가 존재한다 (참조). 따라서,

$$E^h[X_t] = E[X_t \cdot \exp\{hX_t\}] / E[\exp\{hX_t\}]$$

이고, Esscher Principle 에 의해 $E^h[X_t]$ 이 X_t 의 균형가격이라는 것을 알 수있다. 이 때, 함수 $X_t \rightarrow X_t^h$ 를 the Esscher Transform 이라고 한다. 추가적으로, 완성시장에서의 위험중립확률측도를 얻는 방법은 다음과 같다. X_t 는 Lévy 과정이기 때문에 주변분포 (marginal distribution)이 X_1 로 결정되고, $M_{z,t} = (M_{z,1})^t$ 이다. 마찬가지로, $M_{z,t;h} = (M_{z,1;h})^t$ 이다. $r > 0$ 이 무위험 이자율 일 때, $e^{-r} = M(1,1,h)$ 를 만족시키는 유일한 h 를 찾고 이를 h^* 라고 한다 (Gerber and Siu, 1994). 만약, 금융상품의 가격 S_t 가 $S_t = S_0 \exp(X_t)$ 과 같은 과정을 따를 때, 다음과 같은 흥미로운 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E[e^{-rT} S_t^{h^*}] &= E[e^{-rT} S_0 \exp(X_t^{h^*})] \\ &= e^{-rT} S_0 M(1,1,h^*) \\ &= S_0 \end{aligned}$$

6 (Appendix 1) 참조

즉 S_t 에 대한 위험중립과정을 얻은 것이다. 따라서, 함수 $X_t \rightarrow X_t^{h*}$ 를 위험중립 Esscher Transform 이라고 한다. 따라서, 파생상품의 수익률 구조를 $g(S_t)$ 라고 한다면 파생상품의 가격은 $e^{-rT} E^{h*}[g(S_T)]$ 일 것이다. Esscher Transform 을 이용해 얻은 위험중립측도는 유일하다는 것이 Esscher Transform 의 장점이다.

효용함수가 $u(y) = \frac{1}{h}(1 - e^{-hy})$ 라는 가정을 하면 즉시연금의 현재가치는 다음과 같다 (Wang, 2003).

$$P = \frac{1}{h} \ln E[e^{hPV(Cash Flow)}]$$

마지막으로, Esscher Principle 은 정의에서부터 모멘트생성함수의 존재를 필요로 한다. 하지만, log normal distribution 같은 경우 모멘트 생성함수가 잘 정의되어 있지 않다는 단점이 있고, 이 경우 앞으로 소개할 Wang Transform 을 이용할 수 있을 것이다.

2.2. The Wang Transform

앞에서와 같이 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ 이 Levý 과정이고 X_t 의 확률분포가 $f_{x,t}$ 의 누적분포가 F 이며 금융상품의 가격이 $S_t = S_0 \exp(X_t)$ 일 때, Wang Transform 은 다음과 같다.

$$F^W(X_t) = \Phi(\Phi^{-1}(F(X_t)) - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

여기서 $\Phi(x)$ 는 표준정규분포 함수이고 $\Phi^{-1}(x)$ 는 역함수이다. 예를 들어 F 가 $N(\mu, \sigma^2)$ 의 누적정규분포라면, $\Phi\left(\frac{X_t - \mu - \sigma\lambda}{\sigma}\right)$ 일 것이다. 그리고 $\phi(x)$ 이 표준정규분포 일 때, Wang Transform 을 적용한 확률분포는 다음과 같을 것이다.

$$f_{x,t}^W(X_t) = f_{x,t}(X_t) \frac{\phi(\Phi^{-1}(F(X_t)) - \lambda)}{\phi(\Phi^{-1}(F(X_t)))}$$

이 때, $f_{x,t}^W(X_t)$ 는 Wang Principle 의 가정을 만족시키므로,

$$E^W[X_t] = E \left[\frac{X_t \cdot \Phi(\Phi^{-1}(F(X_t)) - \lambda)}{\Phi(\Phi^{-1}(F(X_t)))} \right]$$

는 X_t 의 균형가격이 된다. 따라서, S_t 를 underlying asset 으로 가지는 파생상품의 T 년도의 payoff 가 $g(S_t)$ 라면 파생상품의 현재가치는

$$\begin{aligned} E^W[e^{-rT} g(S_t)] &= e^{-rT} E^W[g(S_0 \exp(X_t))] \\ &= e^{-rT} E \left[\frac{g(S_0 \exp(X_t)) \cdot \Phi(\Phi^{-1}(F(g(S_0 \exp(X_t)))) - \lambda)}{\Phi(\Phi^{-1}(F(g(S_0 \exp(X_t))))} \right] \end{aligned}$$

가 될 것이다.

3. Modelling Inputs

이번 장에서는 사망률연동 파생상품의 공정가격을 산출하기 위해 필요한 사망률, 금리, 공정가격 산출 모형에 대한 설명이 있을 것이다.

3.1. Mortality Modelling

다양한 사망률 모형에 대한 연구가 진행되었지만 본 연구의 목적을 위해 가장 기본이 되는 Lee-Carter (1992) 모형을 사용할 것이다. Lee-Carter 모형은 다음과 같이 표현된다.

$$\log \mu_{xt} = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)}$$

여기서 μ_{xt} 는 사력 (Force of Mortality)을 나타낸다⁷. 하지만 위와 같은 표현은 Identifiability 문제를 가지고 있다. 예를 들면, 임의의 상수 $a, b \in \mathbb{R}^{\times}$ 에 대해 $\log \mu_{xt}$ 는 다음과 같은 표현이 가능하기 때문이다.

$$\begin{aligned} \log \mu_{xt} &= \tilde{\beta}_x^{(1)} + \tilde{\beta}_x^{(2)} \tilde{k}_t^{(2)} \\ \tilde{\beta}_x^{(1)} &= \beta_x^{(1)} + a\beta_x^{(2)} \\ \text{where } \tilde{\beta}_x^{(2)} &= \beta_x^{(2)} / b \\ \tilde{k}_t^{(2)} &= b(k_t^{(2)} - a) \end{aligned}$$

이와 같은 문제는 위의 모형이 동일한 사망률 예측을 하고 최대값이 같은 우도 무한개를 가진다는 것을 뜻한다. 이 문제를 해결하기 위해서 다음과 같은 제한을 두는 것이 일반적이다.

$$\begin{aligned} \sum_t k_t^{(2)} &= 0 \\ \sum_x \beta_x^{(2)} &= 1 \end{aligned}$$

이를 통해 $\beta_x^{(1)}$ 이 임의의 연령 x 에 대해서 $\log \mu_{xt}$ 의 평균을 나타내고 $\beta_x^{(2)}$ 는 $\log \mu_{xt}$ 이 연령별로 어떻게 변화하는지를 나타낸다는 것을 알 수 있다.

3.2. Input Estimation Procedures and Results

이번 절에서는 사망률 연동 파생상품의 공정가격 산출을 위해 사용되는 모형들의 추정방법과 결과에 대해서 설명한다. 먼저 Lee-Carter 모형을 추정하기 위해 일반적으로 오차(disturbance)가 정규분포를 따른다고 가정하므로 x 세의 사람이 t 해에 죽는 사망률을 m_{xt} 라 두면

$$m_{xt} = \log \mu_{xt} - \beta_x^{(1)} \sim \Phi(\beta_x^{(2)} k_t^{(2)}, \sigma^2)$$

이고 행렬로서 아래와 같이 표현된다.

⁷ 사력은 연구에 따라 연령 x 세가 t 년도에 사망할 확률 q_{xt} 혹은 $\mu_{xt} = -\log(1 - q_{xt})$ 로 정의된다. 본 연구에서는 계산에 용이한 첫 번째 정의를 사용할 것이다

$$\begin{array}{ccccc}
& 2001 & 2002 & 2003 & \\
\begin{array}{l} \text{age 45} \\ \text{age 46} \\ \text{age 47} \end{array} & \begin{pmatrix} m_{45,2001} \\ m_{46,2001} \\ m_{47,2001} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{45,2002} \\ m_{46,2002} \\ m_{47,2002} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} m_{45,2003} \\ m_{46,2003} \\ m_{47,2003} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta_{45}^{(2)} \\ \beta_{46}^{(2)} \\ \beta_{47}^{(2)} \end{pmatrix} \\
& k_{2001}^{(2)} & k_{2002}^{(2)} & k_{2003}^{(2)} &
\end{array}$$

저자들은 $\beta_x^{(1)}$ 를 단순 평균으로 추정하면, 최대우도법에서 $\beta_x^{(2)}$ 과 $k_t^{(2)}$ 의 최적화 값이 행렬 m 의 특이값 분해 (Singular Value Decomposition)를 한 것과 같다는 것을 증명했다. $m = B\Sigma U'$ 가 특이값 분해의 결과라면, $\beta^{(2)}$ 의 추정 값은 B 의 첫 번째 열이고 $k_t^{(2)}$ 의 추정 값은 $\beta^{(2)'}\beta^{(1)}$ 이다.

추정을 위해 통계청의 2001년부터 2013년까지의 각세생명표를 사용하였다. 하지만 2004년의 각세생명표가 누락되었으므로 Constant Force of Mortality를 가정하여 보간 (Interpolation)하였다. 추정결과, 남성의 경우 R^2 값은 88.4%, 로그우도는 -5192.75, 여성의 경우 R^2 은 88.4% 로그우도는 -4978.25 그리고 전체인구의 경우 R^2 은 94.3% 로그우도는 -5098.12였다. 그리고 추정된 $\beta_x^{(1)}$, $\beta_x^{(2)}$ 및 $k_t^{(2)}$ 의 추정값은 Table 3, Table 4 및 Figure 3와 같았다.

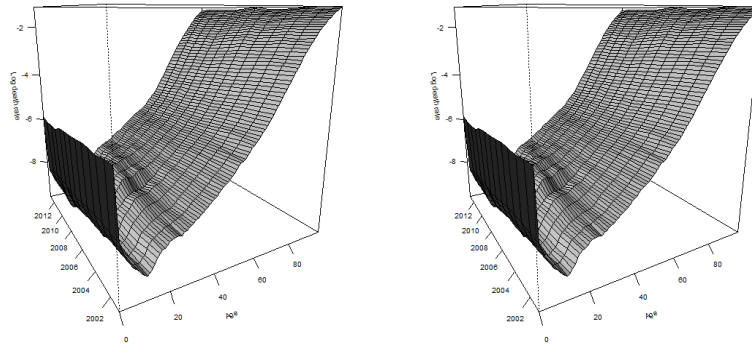


Figure 3. 통계청의 각 세 생명표를 이용해 얻은 한국 사망률 표면과 Lee-Carter 모형으로 추정된 사망률 표면.
(*2004년의 각 세 생명표가 누락되어 있어 Constant Force of Mortality를 가정하여 보간하였다.)

$k_t^{(2)}$	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Male	25.17	20.52	16.91	12.05	6.92	2.44	-0.54	-4.26	-10.34	-11.70	-15.23	-17.32	-24.45
Female	23.14	19.96	17.53	12.53	7.11	5.11	0.78	-5.16	-11.71	-13.45	-16.43	-16.94	-22.48
Total	24.40	20.84	17.58	12.57	7.25	4.15	0.31	-5.37	-11.60	-13.27	-16.08	-17.37	-23.34

Table 3. Lee-Carter의 $k_t^{(2)}$ 추정값

Age	Male $\beta_x^{(1)}$	Male $\beta_x^{(2)}$	Female $\beta_x^{(1)}$	Female $\beta_x^{(2)}$	Total $\beta_x^{(1)}$	Total $\beta_x^{(2)}$
45	-5.73497	0.012158	-6.70478	0.006772	-6.09713	0.01054
46	-5.6393	0.012287	-6.63104	0.007198	-6.0077	0.010714
47	-5.55131	0.011853	-6.55885	0.007681	-5.92562	0.010561
48	-5.46133	0.01164	-6.485	0.008513	-5.84063	0.010615
49	-5.37647	0.011265	-6.41717	0.00864	-5.76126	0.010366
50	-5.2916	0.011224	-6.33924	0.009353	-5.67953	0.010554
51	-5.21101	0.011167	-6.26714	0.009617	-5.60271	0.010579
52	-5.13635	0.010779	-6.19985	0.009753	-5.53061	0.010392
53	-5.06545	0.010314	-6.13607	0.009723	-5.46299	0.01006
54	-4.99863	0.009865	-6.07019	0.010185	-5.39707	0.00984
55	-4.92618	0.009964	-5.99725	0.011058	-5.32527	0.010141
56	-4.84827	0.010624	-5.91489	0.012182	-5.24788	0.010879
57	-4.76891	0.0113	-5.83208	0.012928	-5.16991	0.011462
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
96	-1.29233	0.00212	-1.44573	0.004035	-1.41683	0.004032
97	-1.23997	0.001926	-1.38094	0.003455	-1.35417	0.003613
98	-1.19076	0.001755	-1.32032	0.002886	-1.29479	0.003193
99	-1.14468	0.001606	-1.26386	0.002329	-1.23869	0.002772
100	0	0	0	0	0	0

Table 4. Lee-Carter 의 $\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}$ 추정값.

3.3. Estimation Procedures and Results for Pricing Models in an Incomplete Market

본 절에서는 불완전시장에서 파생상품 가격을 측정하기 위해서 사용되는 Esscher Transform 과 Wang Transform 의 매개변수의 측정방법과 결과를 다룬다.

3.3.1. Estimation Procedures for the Risk Aversion Coefficients in the Esscher Transform

$t = 0$ 일 때, x 세가 즉시연금가입 시 연금의 현금흐름은 다음과 같다.

$$\alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}), \quad t \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

여기서 α_t 는 매월 산정되는 보험사의 공시이율이다. Esscher Transform 에 의한 즉시연금의 현재가치 P 는

$$\begin{aligned} P &= \sum_{t=1}^{\infty} e^{-r_t} E^h \left[\alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}) \right] \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{e^{-r_t} E \left[\alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}) \cdot \exp \{ h e^{-r_t} \alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}) \} \right]}{E \left[\exp \{ h e^{-r_t} \alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}) \} \right]} \end{aligned}$$

효용함수가 $u(y) = \frac{1}{h}(1 - e^{-hy})$ 라는 가정을 하면 즉시연금의 현재가치는 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{h} \ln E \left[e^{h \sum_{t=1}^{\infty} e^{-r_t} \alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k})} \right]$$

따라서, 사망률모형으로부터 얻은 사망률 시뮬레이션과 DSGE 모형으로부터 얻은 무위험금리의 시뮬레이션을 이용하여 Risk aversion coefficient, h , 를 추정할 수 있다.

시장을 조사해본 결과 즉시연금가입자는 계약금에 사업비 4~8%를 차감한 금액에 공시기준이율을 곱한 금액을 가입 다음 달부터 지급을 받게 되어있었다. 따라서, 관련정보와 사망률 및 금리 예측을 통해 $h = 2.2202 * 10^{-18}$ 라고 추정했다.

3.3.2. Estimation Procedures for the Market Price of Risk in the Wang Transform

Esscher Transform 의 추정에서와 같이, $t = 0$ 일 때, x 세가 즉시연금가입 시 연금의 현금흐름은 다음과 같다.

$$\alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}), \quad t \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

따라서, 즉시연금의 현재가치 P 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{t=1}^{\infty} E^W \left[e^{-r_t} \alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}) \right] \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} E \left[\frac{e^{-r_t} \alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k}) \cdot \Phi \left(\Phi^{-1} \left(F(e^{-r_t} \alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k})) \right) + \lambda \right)}{\Phi \left(\Phi^{-1} \left(F(e^{-r_t} \alpha_t \prod_{k=0}^t (1 - q_{x+k,k})) \right) \right)} \right] \end{aligned}$$

위의 공식을 이용하여, 시뮬레이션을 통해 장수 리스크의 시장가격을 Calibrate 할 수 있다. 2.1.2와 동일하게 즉시연금을 이용하여 parameter λ 를 추정하였는데, 추정결과 $\lambda = 0.132825$ 였다. 이제 Wang Transform 과 Esscher Transform 을 이용해 장수파생상품의 가격을 측정해보려고한다

4. Designing and Pricing Death-linked Derivative Securities

본 절에서는 시장에서 실제로 판매된 Swiss Re Vita II 채권과 생존률 연동 콜 옵션을 참고하여 가상의 채권과 옵션을 모형화 시키고 Esscher Transform 과 Wang Transform 을 이용하여 공정가격을 산출해보았다.

4.1. Death linked Bond

장수채권으로서 시장에서 성공을 거둔 Swiss Re VITA II 본드를 참고하여 다음과 같은 가상의 장수채권을 구축해보았다 (Table 5). 먼저 채권은 Bond 1, Bond 2, Bond 3 총 3 개의 Tranche 를 가지고 있다고 가정하였다. 각 Tranche 는 초기 채권원금, Trigger Level, Exhaustion Level, 그리고 표면금리 (Coupon rate)으로 구분이

	Bond. 1	Bond. 2	Bond. 3
Initial Principal	KRW 100 billion	KRW 100 billion	KRW 100 billion
Trigger Level	120%	115%	110%
Exhaustion Level	125%	120%	115%
Coupon (bps)	4%	4%	4%
Price (Esscher)	0.487314448	1.002840502	1.215666917
Price (Wang)	0.472857365	0.997860059	1.214429614

Table 5. Tranche 별 장수채권의 구조 및 추정된 공정가격.

되는데, 초기 채권원금 (Principal)은 모두 별로 1000 억원이라고 가정했다. 채권원금은 각 Tranche 및 년도별로 아래에 제시된 식

$$\text{loss}_t^i = \frac{\max\left(\frac{q_{x,t}}{q_{64,2014}} - \text{Trigger}_i, 0\right) - \max\left(\frac{q_{x,t}}{q_{64,2014}} - \text{Exhaustion}_i, 0\right)}{\text{Exhaustion}_i - \text{Trigger}_i}, \quad \begin{matrix} i \in \{1, 2, 3\} \\ t \in \{2015, 2016, \dots, 2034\} \\ x = 64 - 2014 + t \end{matrix}$$

에 따라 누적차감된다. loss_t^i 는 Trigger Level 과 Exhaustion Level 에 의해 결정되는데 x 세의 t 년도 사망률이 $q_{x,t}$ 이고, $\frac{q_{x,t}}{q_{64,2014}}$ 가 Trigger Level 보다 클 때 loss_t^i 가 채권원금으로부터 누적차감되기 시작하며 Exhaustion level 만큼 커질 경우에 모든 채권원금은 차감이 되어버린다. 따라서, 안전한 순으로 채권들을 나열하면 Bond 1, Bond 2, Bond 3 순이다. 본 연구는 표면금리가 4%라고 가정했다. 이자는 매년 지급되며 표면이자율 (Coupon rate)과 누적차감된 채권원금을 곱하는 방식으로 산출된다.

이 경우, Tranche 별 파생상품의 가격은 Table 5 와 같이 산출되었다. Bond 1 의 경우 Esscher Transform 과 Wang Transform 으로 계산했을 때의 공정가격이 각각 487.31 억원 그리고 472.29 억원이었고, Bond 2 가 1002.84 억원 및 997.86 억원, 그리고 Bond 3 이 1215.67 억원, 1214.43 억원이었다.

4.2. Death-linked Swaption

또한, 위험관리에서 델타헷지의 효과의 비교를 위해 장수채권과 비슷하지만 가상의 연금의 지급액과의 상관관계가 조금 더 높은 장수스왑션을 만들었다 (Table 6). 채권과 비슷하게 스왑션은 Swaption 1, Swaption 2, Swaption 3 총 3 개의 Tranche 를 가지고 있다고 가정하였다. 각 Tranche 는 초기 채권원금, Trigger Level, Exhaustion Level, 그리고 표면금리 (Coupon rate)으로 구분이 되는데, 초기 채권원금 (Principal)은 각 Class 별로 620 억원, 2000 억원, 1000 억원이라고 가정하였고, 채권원금은 각 Tranche 및 년도별로

$$\text{payoff}_t^i = \frac{\max(p_{x,t} - \text{Exhaustion}_i, 0)}{\text{Trigger}_i - \text{Exhaustion}_i}, \quad \begin{matrix} i \in \{B, C, D\} \\ t \in \{2015, 2016, \dots, 2034\} \end{matrix}$$

에 따라 누적차감된다. $loss_t^i$ 는 Trigger Level 과 Exhaustion Level 에 의해 결정되는데 x 세의 t 년도 생존률이 $p_{x,t}$ 이고, $p_{x,t}$ 가 Trigger Level 보다 클 때 $loss_t^i$ 가 채권원금으로부터 누적차감되기 시작하며 Exhaustion level 만큼 커질 경우에 모든 채권원금은 차감이 되어버린다. 따라서, 위험한 순으로 채권들을 나열하면

	Swaption. 1	Swaption.2	Swaption. 3
Notional Amount	KRW 100 billion	KRW 100 billion	KRW 100 billion
Exhaustion Level	80%	85%	90%
Price (Esscher)	1.756699152	0.634951778	0.211464549
Price (Wang)	1.724292493	0.622118307	0.207149574

Table 6. Swaption 의 구조와 추정된 공정가격.

Swaption 1, Swaption 2, Swaption 3 순이다. Esscher Transform 을 통해 구한 공정가격은 Swaption 1, Swaption 2, Swaption 3 이 각각 1756.70 억원, 634.95 억원, 211.45 억원이었고 Wang Transform 을 이용하여 얻은 가격은 각각 1724.29 억원, 622.12 억원, 207.15 억원이었다.

5. Annuity and Pension Plan Risk Management

이번 장에서는 연금의 위험관리 방법 및 모니터링 방법에 대한 설명과 Monte Carlo Simulation 을 이용한 Hedge 결과, 그리고 주의할 점에 대한 설명이 있을 것이다.

5.1. Risk Management Method

위험관리 방법으로 가장 널리 사용될 수 있는 방법이 사망률 연동 Option 및 Swaption 등 연금의 지급액과 직접적인 관계가 있는 파생상품을 이용하는 것이지만, 사망률 연동 채권 등과 같은 간접적인 관계가 있는 다른 사망률 연동 파생상품을 이용하여 위험관리를 할 시에는 Delta-Hedging 이 주로 사용되는데 이에 대한 설명 및 시뮬레이션 결과 보고가 있을 것이다. Appendix 에서는 위험 모니터링 방법으로 널리 사용되는 Value-at-Risk 에 대한 설명 및 시뮬레이션 결과가 이어질 것이다.

5.1.1. Delta Hedging

Delta Hedging 의 목적은 적절한 포트폴리오를 구성함으로써 기초자산 (Underlying Asset)의 가치변화에 따른 포트폴리오의 가치변화를 최소화 시키는 것이다. 이론적으로, 특정 사망률이 $q_t = \beta^{(1)} + \beta^{(2)}k_t + \sigma Z_t$, Z_t 는 표준 브라운운동이라는 확률과정을 따르고 $p_t = 1 - q_t$ 를 기초자산으로 가지는 파생상품이 C_t 이며, 연금이 t 년도에 지급해야 할 금액이 Nap_t 면, Delta-hedged 포트폴리오 V 의 가치는 다음과 같다

$$V = Nap_t + \Delta C_t$$

$$dV = Nadp_t + \Delta dC_t$$

$$\begin{aligned}
&= N\alpha dp_t + \Delta \left(\frac{\partial C_t}{\partial p_t} dp_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial p_t^2} (dp_t)^2 + \frac{\partial C_t}{\partial t} dt \right) \\
&= \Delta \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial p_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} \right) dt + \left(N\alpha + \Delta \frac{\partial C_t}{\partial p_t} \right) dp_t
\end{aligned}$$

왜냐하면,

$$\begin{aligned}
p_t &= 1 - q_t = 1 - \beta^{(1)} - \beta^{(2)}k_t - \sigma Z_t \\
\rightarrow dp_t &= -\beta^{(2)} \frac{\partial k_t}{\partial t} dt - \sigma dZ_t \\
\rightarrow (dp_t)^2 &= \sigma^2 dt
\end{aligned}$$

이기 때문이다. 따라서, 파생상품 C_t 를 $\Delta = -\frac{N\alpha}{\partial C_t / \partial p_t}$ 만큼 구입한다면, $dV = \Delta \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial p_t^2} + \frac{\partial C_t}{\partial t} \right) dt$. 즉

포트폴리오의 가격변동과 생존률의 일차적인 관계가 상쇄되는 것이다.

본 연구에서는 앞에서 연구한 장수채권과 장수스왑션 시뮬레이션을 이용하여 델타헷지 포트폴리오를 구성해봄으로써 헷지효과를 추정해보았다. 델타헷지 추정을 위해서 연도별로 사망률을 1 bps 만큼 조정 한 후 연금 및 파생상품들의 가격변화를 추정했고 상기 정보를 이용해 한개의 파생상품과 연금의 델타헷지 포트폴리오를 구성후 포트폴리오 가치의 변화량을 측정했는데, 그 결과는 Table 7, Table 8 과 같았다.

	Hedged Portfolio with Bond $i \in \{1, 2, 3\}$			Unhedged
	Bond. 1	Bond. 2	Bond. 3	Pension
2015 (Esscher)	-4.4038%	-4.5999%	-4.8572%	-4.0641%
2016	-4.4911%	-4.6401%	-4.7303%	-4.2141%
2017	-5.0050%	-5.1095%	-5.0345%	-4.7848%
2018	-5.3968%	-5.4592%	-5.2263%	-5.2262%
2015 (Wang)	-4.4496%	-4.6537%	-4.9167%	-4.1036%
2016	-4.5386%	-4.6940%	-4.7913%	-4.2557%
2017	-5.0585%	-5.1680%	-5.1016%	-4.8328%
2018	-5.4550%	-5.5212%	-5.2870%	-5.2795%

Table 7. 각 장수채권을 이용한 델타헷지 및 헷지하지 않은 연금의 가격 변동

	Hedged Portfolio with Swaption $i \in \{1, 2, 3\}$			Unhedged
	Swaption. 1	Swaption. 2	Swaption. 3	Pension
2015 (Esscher)	-3.2639%	-3.3248%	-3.3947%	-4.0641%
2016	-3.3793%	-3.4439%	-3.5182%	-4.2141%
2017	-3.9179%	-3.9858%	-4.0640%	-4.7848%
2018	-4.3254%	-4.3968%	-4.4795%	-5.2262%
2015 (Wang)	-3.2902%	-3.3544%	-3.4223%	-4.1036%
2016	-3.4053%	-3.4731%	-3.5455%	-4.2557%
2017	-3.9477%	-4.0188%	-4.0954%	-4.8328%
2018	-4.3579%	-4.4324%	-4.5140%	-5.2795%

Table 8. 각 장수스왑션을 이용한 델타헷지 및 헷지하지 않은 연금의 가격 변동

5.2. Implications for Risk Management Practices

이번 절에서는 연금의 위험관리 방법에 반드시 고려되어야할 점들을 이야기해보겠다. 먼저, 4.1의 결과처럼 사망률 혹은 생존률과 연동되는 파생상품의 Payoff가 단순하지 않을경우 이를 이용해 델타헷지를 하더라도 그 효과가 미미하거나 오히려 좋지않은 결과를 초래할 수 있다는 것을 알 수 있다. 그 이유는 델타-감마 근사를 통해 쉽게 이해할 수 있는데,

$$V(p_t + \epsilon, h, T) - V(p_t, 0, T) \approx \Delta\epsilon + 0.5\Gamma\epsilon^2 + \theta h = \frac{\partial V}{\partial p_t}\epsilon + 0.5\frac{\partial^2 V}{\partial p_t^2}\epsilon^2 + \theta h$$

이므로, 델타헷지를 통해 $\Delta\epsilon = 0$ 이더라도, Γ 와 θ 가 충분히 클 수 있기 때문이다. 그리고, 본 논문의 저자들은 시장에서 판매된 사망률채권보다 델타헷지의 효과가 더 크도록 채권의 Payoff를 정의했음에도 효과가 전혀 없었다는 것을 확인했다. 따라서, 장수 리스크 파생상품이 개발되고 연금이 이용하여 동적헷지를 구사하더라도 충분히 제반 사항이 고려되지 않으면 효과가 감쇄될 수 있다.

또한, 선행연구에서는 잘 다루이지 않던 부분이지만, 국가 전체의 사망률을 기반으로 한 장수 리스크 파생상품을 이용해 연금의 헷지를 계획할 때 반드시 고려되어야 할 점 2가지가 있다⁸. 첫째, 나이대별 사망률 추세의 변화에 차이가 있을 수 있으며, 국가전체인구가 연금에 가입되지 않는 이상, 연금가입자와 국가전체인구의 나이분포가 다를 수 있기 때문에 완벽한 헷지가 불가능할 수 있다. 한국의 사망률 추세변화 (Figure 1) 혹은 Lee-Carter 모형을 이용한 한국 여성인구의 사망률 예측 (Figure 4)을 참고해보면, 나이대별 사망률 감소속도가 상이하다는 것을 알 수 있다. 따라서, 전체인구의 사망률 감소속도와 특정 나이대별 사망률 감소속도는 물론이고, 전체인구 (연금가입자 및 비가입자 포함)와 연금가입자의 사망률감소속도가 다를 수 있다는 것이다.

둘째, 연금가입자가 국가전체인구가 아닌 이상 정보의 비대칭으로 인한 사망률의 차이가 존재할 수 있으며, 그 차이도 변화할 수 있다. 연금에도 보험과 마찬가지로 정보의 비대칭이 존재하고 연금의 입장에서는 역선택⁹의 여지가 충분히 있는 것이다. 이런 2가지 문제점을 보완하기 위해서는 국가전체의 사망률과 연금가입자의 사망률의 상관관계 분석이 필수적인데, 가장 인상깊은 연구는 Karoui (2013)의 특정 전제하에서 상기 상관관계 유의미한 변화를 가장 빠르게 알려주는 알고리즘에 관한 연구이다.

이번 연구를 통해, 위와 같은 문제점들이 충분히 숙고되지 않는다면 연금의 위험관리를 위해 사용된 헷지수단이 오히려 위험을 증폭시킬 수 있다는 점을 충분히 확인할 수 있었다.

⁸ 물론, 해외의 사망률도 함께 연동되는 장수 리스크 파생상품의 경우 해외 사망률 및 한국의 사망률 추세 변화도 추가적으로 고려해야 할 것이다

⁹ 역선택이란 정보의 비대칭에 의하여 불리한 선택을 하게 되는 것을 말한다.

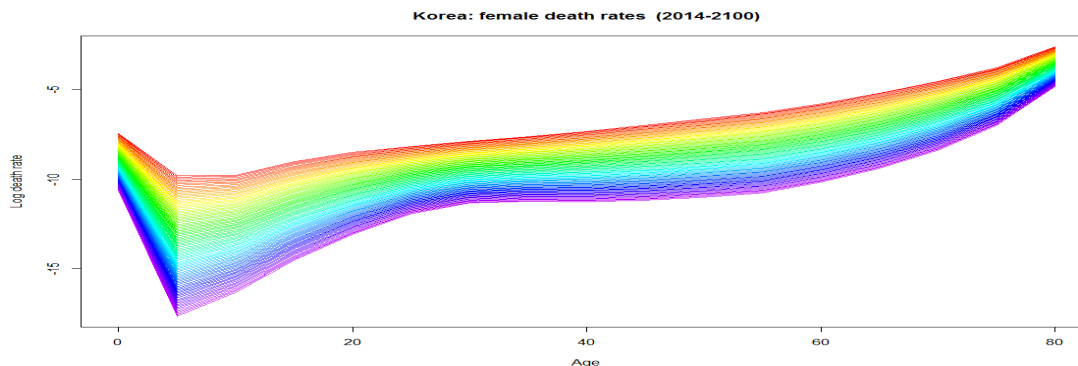


Figure 4. Lee-Carter 모형의 2014 ~2100 년 한국 여성 사망률 예측

6. Conclusion

정리를 하면, 본 연구는 고령화 시대에 수반되는 장수 리스크의 효율적인 헷징을 위해 한국의 사망률 데이터를 기반으로 한 장수 리스크 파생 상품을 제시하였으며 이를 가치평가하는 방법 또한 구체화하였다. 이를 위해 우선 불완비 시장에서의 파생상품 가격결정이론을 정리하고, 상기이론을 장수 리스크 파생상품에 적용시켰으며, 그 과정에 필요한 사망률, 금리의 모델링을 하였고, 가상의 파생상품과 연금을 이용해 위험관리 등을 고려했다. 먼저, 불완전 시장에서의 파생상품 가격결정을 위해 Esscher Transform 과 Wang Transform 을 도입하였는데 Esscher Transform 의 경우 모멘트 생성함수의 존재성을 필요로 했기 때문에, 모멘트 생성함수가 존재하지 않는 분포를 가지는 파생상품의 경우 사용이 불가능했다. 파생상품의 공정가격을 산출하기 위해 Lee-Carter 모형을 이용해 사망률을 분석했으며, DSGE 모형을 통해 경제의 펀더멘털을 반영하는 금리 예측값들을 얻었다. 또한, 공시기준이율에 대한 간단한 가정을 하고 즉시연금의 시장가격과 상기 예측값들을 이용해 Esscher Transform 과 Wang Transform 의 위험회피도 및 위험가격 등을 추정하였으며, 이는 사망률연동 파생상품의 가격을 산출하는데 사용됐다. 연금의 위험관리의 연구로 가상의 연금과 생존률 연동 채권들과 스왑션을 이용하여 동적 헷지를 구사해봤지만, 페이오프 구조가 복잡한 채권을 이용한 델타헷지는 효과가 없었고 스왑션을 이용했을 때 포트폴리오의 변동을 감소시킬 수 있다는 것을 확인했다. 즉, 사망률연동 파생상품이라도 페이오프 구조에 따라 동적헷지가 가능하지 않을 수도 있다는 것을 확인했다. 또한, 저자들은 나아가 연금, 스왑션, 그리고 연금과 스왑션을 델타헷지한 포트폴리오의 VaR 을 산출해봄으로써, 연금과 스왑션의 손실의 위험에 대해 알아보았다.

본 논문의 한계로는 첫째, 사망률 및 금리 모델링에 있어서 기본적인 모형이 사용되었으며, 한국에 더욱 적합한 모형이 존재할 수 있다는 것이다. 둘째, 장수 리스크의 시장가격이 일정하다고 가정되었다. 셋째, 연도별 장수 리스크 프리미엄을 산출하지 못했다. 이는 공시된 연금의 다양성이 부족했기 때문에 비롯된 한계다. 추후 이 한계들을 극복하여 한국 실정에 가장 잘 맞는 사망률 모형을 선정하고, 공시된 연금 자료를 더 모아 연도별 장수 리스크 프리미엄을 계산해낸다면 더욱 체계적인 장수 리스크 관리가 가능할 것으로 보인다.

<Appendices>

A1. Pricing Axioms and Pricing Principles

Pricing Principle 은 실제로 보험상품 혹은 금융상품의 현재가치를 구할 수 있도록 도와주는 방법론이라고 볼 수 있고 이들은 각각 Pricing Axiom 들을 만족시킨다. 따라서, 만족시키고자 하는 Pricing Axiom 이 어떤 것인지에 따라서 사용하고자 하는 Pricing Principle 이 바뀌어야 할 것이다. 간략한 소개를 위해 널리 사용되는 Pricing Axiom 들을 몇가지 나열하자면 다음과 같다. $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ 가 확률공간 (Ω, \mathcal{F}, P) 의 확률변수이고 H 가 임의의 Pricing Principle 이라면

- A1. Risk loading: $H[X] \geq E[X]$
- A2. Subadditivity: $H[X + Y] \leq H[X] + H[Y]$
- A3. Scaling invariance: $H[bX] = bH[X]$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$
- A4. No unjustified risk loading: $H[b] = b$
- A5. Preserves stop-loss ordering: 모든 $b \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대해 $E[X - b]_+ \leq E[Y - b]_+$ 면, $H[X] \leq H[Y]$

그리고 널리 사용되는 Pricing Principle 을 몇가지 나열하자면 다음과 같다.

- P1. Expectation Principle: $H[X] = E[X] + \alpha E[R]$
- P2. Variance Principle: $H[X] = E[R] + \alpha VAR[R]$
- P3. Standard Deviation Principle: $H[X] = E[R] + \alpha \sqrt{VAR[R]}$
- P4. Proportional Hazards Principle: $F(t) = P\{\omega \in \Omega \mid P(\omega) > t\}$ 일 때,
 $H[X] = \int_0^\infty [F(t)]^c dt$, $0 < c < 1$.¹⁰
- P5. Esscher Principle: $E[X \cdot \exp\{\alpha X\}] / E[\exp\{\alpha X\}]$.
- P6. Wang Principle: $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ 가 증가하는 볼록(concave)함수 일 때,
 $H[X] = \int_0^\infty g[F(t)]dt$. 이 때, 함수 g 는 distortion 이라고 불리고 $g[F(t)]$ 는 distorted (tail) probability 라고 불린다.

A2. Interest Rate Modelling

한국의 즉시연금 시장의 특성상 장기 금리 모형이 반드시 필요한 실정이다. 본 논문은 장기선도금리를 예측하기 위해 Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) 모형을 사용했다. DSGE 모형은 거시경제를 분석할 때 사용하는 모형들의 집합으로서, 부분균형 (Partial Equilibrium)모형이 가지는 단점을 보완한 일반균형 (General Equilibrium) 모형으로 Real Business Cycle (RBC) Theory 혹은 New-Keynesian 등이 경쟁구도를 달리고 있다. Lucas (1976)는 부분균형 경제 모형이 정책 분석을 하는데 적합하지 않다고 주장하였는데, 정책의 변화가 있을 때 부분균형모형은 경제 구성원들의 행동양식의 변화를 체계적으로 고려하지 못하기 때문이다. 그에 반해, DSGE 모형은 미시경제와 거시경제를 접목시킴으로써 미시적인 행동양식의 변화까지도 고려한다. DSGE 는 함께 현재 경제분석도구로서 널리 사용되고 있으며 한국은행에서도 NEW

¹⁰ Wang Principle 의 특별 케이스이다.

BOK DSGE (배병호, 2014)를 발표하였다. 또한, 해외 연구를 참고하면 거시경제분석을 위해 DSGE 와 VAR, 그리고 DSGE-VAR 등이 사용되고 있다 (Liu and Theodoridis, 2012).

A2.1. Dynamic Stochastic General Equilibrium Model

본 연구는 장기적인 금리의 예측을 위해서는 거시경제에 기초를 둔 모형을 이용하여야 한다는 것을 주장하고 있고 이를 위해 현재 널리 사용되고 있는 DSGE 모형 중 Lubik (2007)을 참고하여 장기적인 금리 예측을 하였다. Lubik (2007)의 DSGE 모형은 다음과 같은 1 계 조건 (First Order Condition)과 외생변수 (Exogenous Variable)을 가진다.

I. Household

Consumption Euler Equation 을 이용해 개방경제 IS 곡선을 구한다.

$$y_t = E_t y_{t+1} - [\tau + \alpha(2 - \alpha)(1 - \tau)](R_t - E_t \pi_{t+1}) - \rho_z z_t \\ - \alpha[\tau + \alpha(2 - \alpha)(1 - \tau)]E_t \Delta q_{t+1} + \alpha(2 - \alpha) \frac{1 - \tau}{\tau} E_t \Delta y_{t+1}^*$$

여기서 $0 < \alpha < 1$ 은 import share 이고 τ 는 intertemporal substitution elasticity 이다. $\alpha = 0$ 일 때 폐쇄경제모형이 되며 내생변수 (Endogenous Variable)로 성장률 y_t 와 물가상승률 π_t 가 있다. 교역조건의 변화율 Δq_t 은 아래에서 다룰 것이지만 외생변수라고 가정할 것이다. y_t^* 는 교역비중을 둔 해외국가 성장률의 비중합이다. 마지막으로 z_t 는 세계의 기술 (Technology) 성장률이다.

II. Producer

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \alpha \beta E_t \Delta q_{t+1} - \alpha \Delta q_t + \frac{\kappa}{\tau + \alpha(2 - \alpha)(1 - \tau)} (y_t - \bar{y}_t)$$

여기서 $\bar{y}_t = -\frac{\alpha(2-\alpha)(\alpha-\tau)}{\tau y_t^*}$ 는 하방 경직적 명목임금 (Nominal Rigidity)을 고려하지 않았을 때의 잠재 성장률이다. κ 는 구조적 매개변수이다.

III. Exchange Rate Policy

PPP 를 가정하면 명목환율 e_t 와 관련하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\pi_t = \Delta e_t + (1 - \alpha) \Delta q_t + \pi_t^*$$

여기서 π_t^* 는 비관찰 (Unobservable)변수로서 두가지로 해석될 수 있는데 첫번째는 세계의 물가상승률이고 두번째는 PPP로부터의 차이이다.

IV. Monetary Policy

$$R_t = \rho_R R_{t-1} + (1 - \rho_R)[\psi_1 \pi_t + \psi_2 y_t + \psi_t \Delta e_t] + \varepsilon_t^R$$

여기서 정책 매개변수 ψ_1, ψ_2, ψ_3 은 모두 임의의 양수로 제한한다. 과거의 명목이자율이 미래에 영향을 끼친다는 가정하에 $0 < \rho_R < 1$ 을 가정하고, ε_t^R 는 금리 정책에 대한 외생변수라고 가정한다.

V. Terms of Trade

교역조건 (Terms of Trade)는 DSGE 의 기초가 되는 경제모형에서는

$$[\tau + \alpha(2 - \alpha)(1 - \tau)]\Delta q_t = \Delta y_t^* - \Delta y_t$$

와 같이 표현이 되지만, 추정을 위해 다음과 같이 외생화 시킨다.

$$\Delta q_t = \rho_q \Delta q_{t-1} + \Delta \varepsilon_{q,t}$$

여기서 $0 < \rho_q < 1$ 이고 Δq_t 는 ARIMA(1,0,0) 과정을 따른다

VI. 그 외 외생변수들

$$\begin{aligned} y_t^* &= \rho_{y^*} y_{t-1}^* + \varepsilon_{y^*,t}^* \\ \pi_t^* &= \rho_{\pi^*} \pi_{t-1}^* + \varepsilon_{\pi^*,t}^* \end{aligned}$$

해외 성장률과 y_t^* 해외 물가상승률은 π_t^* 모두 ARIMA(1,0,0)과정을 따른다.

A2.2. Interest Rate Model Estimation Procedures and Results

DSGE 의 추정법이 복잡하기 때문에 추정 방법을 한번 더 세분화 시켰다.

A.2.2.1. Matrix Representation

DSGE 모형의 추정을 위해 먼저 3.2.1 의 공식들을 행렬화 시킨다. 통제변수 (Control Variable)을 $m \times 1$ 벡터 ζ_t 로 나타내고 외생변수 (Exogenous Variable)을 $k \times 1$ 벡터 z_t 로 나타낼 때, DSGE 모형은 다음과 같이 표현이 가능하게 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= E_t[F\zeta_{t+1} + G\zeta_t + H\zeta_{t-1} + Lz_{t+1} + Mz_t] \\ z_t &= Nz_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

그리고 Uhlig (1999)의 방법을 이용해 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \zeta_t &= P\zeta_{t-1} + Qz_t \\ z_t &= Nz_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

다시 위 행렬을 정리하여,

$$\xi_t = (\zeta_t, z_t)^t = A\xi_{t-1} + B\varepsilon_t,$$

$$A = \begin{bmatrix} P & QN \\ 0 & N \end{bmatrix}_{(k+m) \times (k+m)} \text{ and } B = \begin{bmatrix} Q \\ I_{k \times k} \end{bmatrix}_{(k+m) \times k}$$

를 얻는다. 여기서 ξ_t 를 상태변이공식이라고 부르고 A를 상태변이행렬 (State Transition Matrix)이라고 한다.

A.2.2.2. Likelihood Estimation Procedures

다음은 우도함수의 값을 산출해야 하는데 관측가능변수 $\{y_t\}_{t \geq 0}$ 와 기술과 같은 관측불가능변수들이 있다. 따라서, 상태공간 (State Space)을 정의하고 필터를 이용하여 우도를 산출해야 한다. 상태공간을 정의하기 위해 두가지 함수가 필요한데 먼저 측정공식 (Measurement Equation), $y_t = f(\xi_t, \varepsilon_{y_t} | \theta) = C + K^t \xi_t + \varepsilon_{y_t}$ 이 필요하고, 두번째로 위에서 구한 상태전이공식 $\xi_t = g(\xi_{t-1}, \varepsilon_{\xi_t} | \theta) = A\xi_{t-1} + B\varepsilon_{\xi_t}$ 이 필요하다. 여기서 θ 는 매개변수며 ε_{y_t} 는 y_t 의 Random Fluctuation 이고 ε_{ξ_t} 는 상태전이과정에서 생길 수 있는 오류이다. 다음으로 Kalman Filter 를 이용해서 DSGE 의 우도를 산출할 것인데 추정을 위해 $p(\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}, \theta), p(\xi_t | \mathcal{F}_t, \theta), p(y_t | \mathcal{F}_{t-1}, \theta), \varepsilon_{y_t} \sim N(0, \sigma_y)$ 와 $\varepsilon_{\xi_t} \sim N(0, \sigma_\xi)$ 는 정규분포를 따른다고 가정하고 나면, 산출 순서는 다음과 같다.

- (1) $t \in [1, T]$ 일 때 상태공식 ξ_t 의 기대값과 공분산을 과거의 정보 \mathcal{F}_{t-1} 를 이용해 산출한다.

$$p(\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}, \theta) = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} p(\xi_t | \xi_{t-1}, \mathcal{F}_{t-1}, \theta) p(\xi_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}, \theta) d\xi_{t-1}$$

이고 $\xi_{t|t-1} = E_{t-1}[\xi_t] = A\xi_{t-1|t-1}$, ξ_t 의 변수들의 공분산행렬이 $Q_{t|t-1} = A Q_{t-1|t-1} A^t + B \sigma_\xi B^t$ 이다.

- (2) t 의 정보 \mathcal{F}_t 로 업데이트한다.

$$p(\xi_t | \mathcal{F}_t, \theta) = \frac{p(\mathcal{F}_t | \xi_t, \mathcal{F}_{t-1}, \theta) p(\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}, \theta)}{\int_{\mathbb{R}^{k+m}} p(\mathcal{F}_t | \xi_t, \mathcal{F}_{t-1}, \theta) p(\xi_t | \mathcal{F}_{t-1}, \theta) d\xi_t}$$

이고 Forecast Error 가 $\varepsilon_t = y_t - C - K^t \xi_{t|t-1}$ 일 때, 이 오류의 공분산행렬은 $\Sigma_t = K^t Q_{t|t-1} K + \sigma_y$ 이다. 이 경우 Kalman Gain 은 $\kappa_t = Q_{t|t-1} K (\Sigma_t)^{-1}$ 이 되고,

$$\begin{aligned} \xi_{t|t} &= \xi_{t|t-1} + \kappa_t \varepsilon_t = \xi_{t|t-1} + \kappa_t (y_t - C - K^t \xi_{t|t-1}), \\ Q_{t|t} &= \kappa_t \sigma_y (\kappa_t)^t - \kappa_t K^t Q_{t|t-1} (\kappa_t K^t)^t \end{aligned}$$

가 된다.

- (3) t 의 우도를 계산한다.

DSGE 의 우도는

$$\begin{aligned} p(\mathcal{F}_T | \theta) &= p(y_1 | \theta) \prod_{t=2}^T p(y_t | \theta, \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= p(y_1 | \theta) \prod_{t=2}^T \int_{\mathbb{R}^{k+m}} p(y_t | \xi_t, \theta, \mathcal{F}_{t-1}) p(\xi_t | \theta, \mathcal{F}_{t-1}) d\xi_t \end{aligned}$$

이며, 정규분포의 가정에 의해서 $\ln(\mathcal{L}_t) = -\frac{1}{2} [\ln(2\pi) + \ln(|\Sigma_t|) + \varepsilon_t^t (\Sigma_t)^{-1} \varepsilon_t]$

을 얻는다.

- (4) $t = T$ 까지 (1)에서 (3)을 반복하고 다음과 같이 로그우도를 산출한다.

$$\ln(\mathcal{L}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [\ln(2\pi) + \ln(|\Sigma_t|) + \varepsilon_t^t (\Sigma_t)^{-1} \varepsilon_t]$$

A.2.2.3. Prior Distribution

사후표본 추출을 위해 매개변수들에 사전확률분포를 설정한다. 본 연구의 경우 Lubik (2007)을 참조하여 다음과 같이 설정되었다.

Parameter	Prior Distribution	Parameter	Prior Distribution
ψ_1	Normal	ρ_y	Beta
ψ_2	Normal	ρ_π	Beta
ψ_3	Normal	π_a	Normal
ρ_r	Beta	Γ_q	Normal
α	Beta	σ_q	Gamma
r_{SS}	Normal	σ_z	Gamma
κ	Normal	σ_R	Gamma
τ	Normal	σ_y	Gamma
ρ_q	Beta	σ_q	Gamma
ρ_z	Beta		

Table A1. DSGE 모형의 변수들의 Prior Distribution

A.2.2.4. Sampling from Posterior Distribution (Markov Chain Monte Carlo Method)

사후표본 추출은 크게 두 단계로 나누어 지고 그 중 뒤에 오는 단계는 다시 세분화가 가능하다.

(1) 먼저 계산적 방법을 이용하여 Posterior Mode 를 찾는다

사후분포가

$$p(\theta | \mathcal{F}_t) = \frac{\mathcal{L}(\theta | \mathcal{F}_t)p(\theta)}{\int_{\theta} p(\mathcal{F}_t | \theta)p(\theta)d\theta}$$

이고 분모는 Normalizing Constant 이다. 따라서, Posterior Mode 는 Posterior Kernel $\mathcal{K}(\theta | \mathcal{F}_t)$ 를 최대화 시킴으로써 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 따라서, 계산적 방법을 이용해

$$\ln \mathcal{K}(\theta | \mathcal{F}_t) = \ln \mathcal{L}(\theta | \mathcal{F}_t) + \ln p(\theta)$$

를 최대화 시킨다. 여기서 $\mathcal{L}(\theta | \mathcal{F}_t)$ 는 Kalman Filter 를 이용하여 얻을 수 있고 사전분포 가정을 이용해서 $\ln p(\theta)$ 를 얻을 수 있다. 이를 통해 Posterior Mode θ_{Mode} 를 얻고 공분산행렬 Σ_{Mode} 를 얻는다.

(2) MCMC 를 이용한 사후표본 추출

Posterior Mode θ_{Mode} 를 얻고 공분산행렬 Σ_{Mode} 를 초기변수로 이용하여 원하는 만큼의 사후표본을 추출할 것이다. 본 연구는 Metropolis Markov Chain Monte Carlo 를 이용할 것이다. 시뮬레이션 횟수를 $n \in$

$[1, N_1 + N_2]$ 라고 할 때 초기 N_1 시뮬레이션을 사용하지 않는 것이 일반적이다. 표본추출을 다음과 같은 과정을 반복함으로써 얻는다.

- I. θ^+ 를 $N(\theta_{n-1}, \Sigma_{n-1})$ 로 부터 추출한다. 여기서 $\theta_0 = \theta_{Mode}$ 이고 $\Sigma_0 = \Sigma_{Mode}$ 이다.
- II. $\ln \mathcal{K}(\theta^+ | \mathcal{F}_t) = \ln \mathcal{L}(\theta^+ | \mathcal{F}_t) + \ln p(\theta^+)$ 를 산출한다.
- III. $h \in \text{균등분포}(0, 1)$ 을 추출하고,

$$h < \frac{\ln \mathcal{K}(\theta^+ | \mathcal{F}_t)}{\ln \mathcal{K}(\theta_{n-1} | \mathcal{F}_t)}$$
 이고 $n < N_1 + N_2$ 이면 $\theta_n = \theta^+$ 이라고 둔다.
- IV. 위의 과정을 반복해 $N_1 + N_2$ 개의 표본을 얻고 초기 N_1 개의 표본은 제거한다.

A2.2.5. DSGE Estimation Results

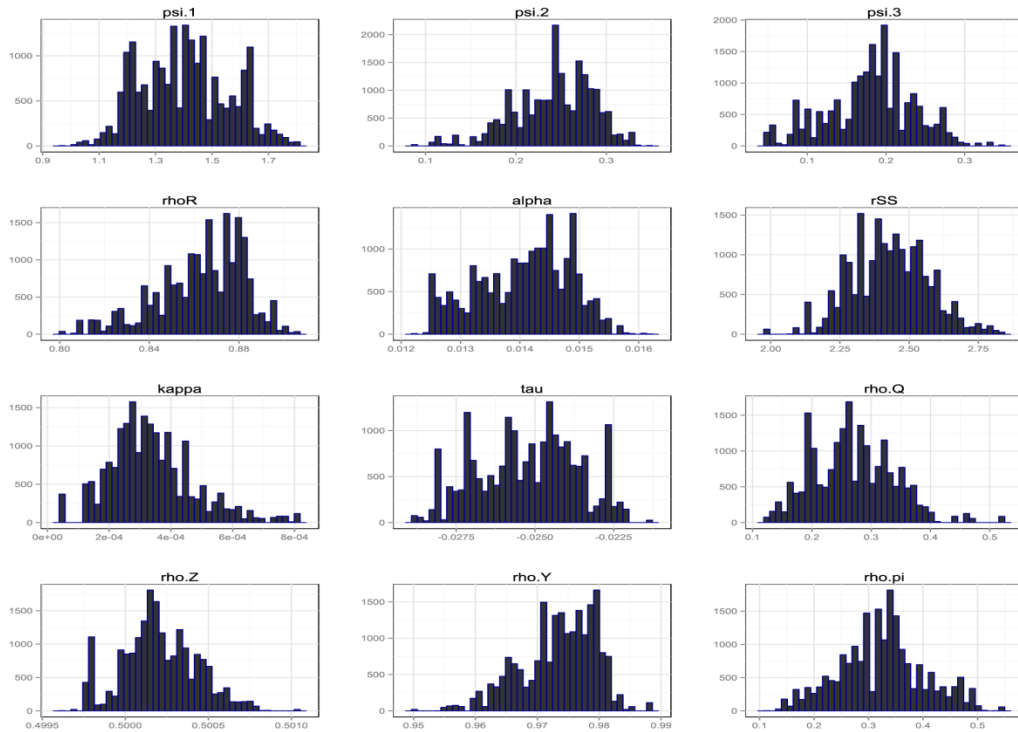
추정을 위해 2000 년 4 분기부터 2013 년 4 분기까지의 경제 데이터가 사용되었다. 데이터 수집을 위해서 IHS Global Insight 를 통해 콜금리와 GDP 데이터를 얻었고 CEIC Data Manager 를 통해 교역조건, CPI Index, 명목환율 데이터를 얻었다. GDP 와 교역조건 그리고 명목환율은 데이터에 로그 차 (Log Difference)를 적용한 후 100 을 곱해서 분기별 성장률을 얻었다. 성장률의 경우 그 후 HP-filter 를 추가 적용시켰는데 이는 관측불가능한 기술의 추세를 제거시키기 위한 것으로 Lubik(2007)저자와 동일한 방법을 선택한 것이다. CPI Index 는 로그 차를 적용 시킨 후 400 을 곱함으로써 연율로 환산하였다.

추정결과 로그우도값은 -1291.55646 이었고 매개변수 추정결과는 Table A2 와 Figure A1 에 정리하였다.

또한, 87 년간의 콜금리 시뮬레이션을 7000 개 얻었다. 마지막으로, DSGE 모형의 장점으로 외생적 충격이 있을 때 경제가 어떻게 반응을 할지에 대한 (Impulse Response) 분석도 가능하다.

Parameter	Posterior Mode	SE Mode	Posterior Mean	SE Posterior
ψ_1	1.784436191	0.1625921901	1.405644522	0.1570932611
ψ_2	0.137498973	0.046786662	0.24168119	0.043969231
ψ_3	0.242811515	0.046601697	0.181277001	0.0549677
ρ_r	0.733985028	0.029259364	0.863357135	0.019502461
α	0.011098362	0.000404858	0.014069371	0.000784558
r_{SS}	2.533434187	0.1472581	2.428805536	0.140232472
κ	2.533434187	0.1472581	2.428805536	0.140232472
τ	0.006439656	0.001614707	-0.025225706	0.001582762
ρ_q	0.326472702	0.073539206	0.269346707	0.068144176
ρ_z	0.502767777	0.000527923	0.500206541	0.000222822
ρ_y	0.967119951	0.01232406	0.973492335	0.006042826
ρ_π	0.316665323	0.06358209	0.323447028	0.07770554
π_a	2.513704613	0.189433613	1.985729066	0.175114759
Γ_q	0.509274484	0.045739	0.558339976	0.042807638
σ_q	5.944384507	0.443714153	5.41460297	0.352361078
σ_z	11.86990338	1.328568355	13.90977797	2.192360119
σ_R	1.652155623	0.151632907	1.350641911	0.110685036
σ_y	0.009727092	0.002618231	0.005750252	0.0013683
σ_q	7.522144447	0.561117511	7.263536828	0.515883239

Table A2. DSGE 모형의 변수 추정 결과



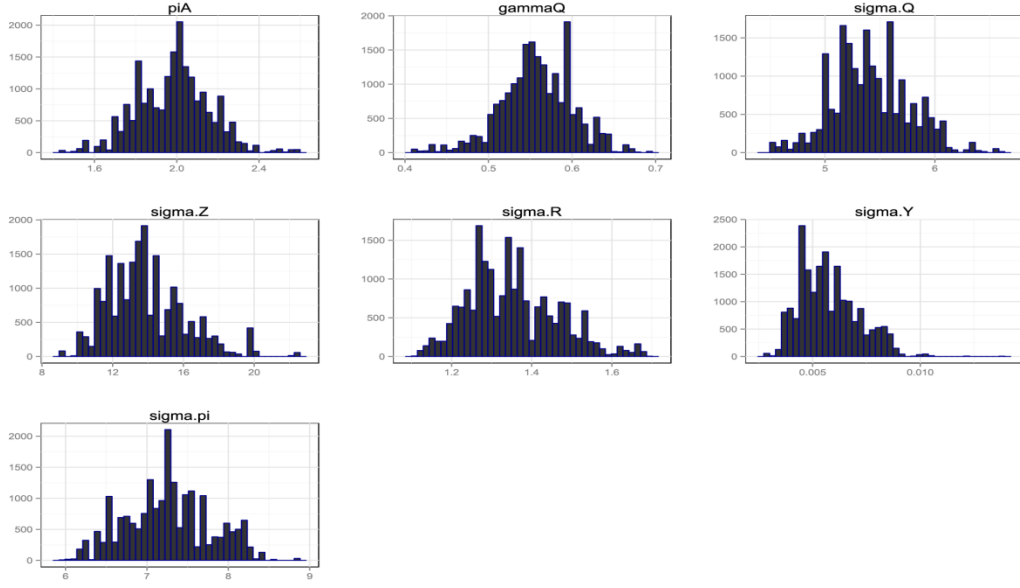


Figure A1. DSGE 모형 변수들의 Posterior Distribution

A3. SPIA Payout Rate Modelling

즉시연금의 공시기준이율에 대한 모델링이 필요했는데 저자들은, 흥미로운 결과를 찾았고 이를 참고해 공시기준이율에 대한 단순 가정을 취할 것이다. CEIC Data Manager를 통해 얻은 2004년 4월부터 2015년 7월까지의 한국의 월별 콜금리 시계열 자료와 삼성생명 인터넷 페이지에 공시되어 있는 2004년 4월부터 2015년 7월까지의 신(新)공시이율(I/II)의 무배당 연금 시계열 자료를 단순 분석하였다. 먼저, 공시기준이율과 콜금리의 차이는 일정하지 않은 패턴을 보이는데, 지난 금융위기를 전후로 차이가 벌어지는 형태를 보이고 있다 (Figure A2). 흥미로운점은 α 가 공시기준이율을 수익률로 가지는 채권의 성장률이고 r 이 콜금리일 때, $\frac{\alpha-r}{r}$ 이 거의 상수와 같다는 것이다 (Figure A3). $\frac{\alpha-r}{r}$ 의 평균은 약 -0.99였으며 약 90%의 분포가 평균에 근접해있었고, 표준편차는 0.028514에 그쳤다. 이것을 통하여, 공시기준이율이 CIR 모형의 특별한 필수조건¹¹을 충족시킨다는 것을 알 수 있다.

11 CIR 모형의 경우, $\frac{\alpha-r}{r} = \phi \frac{q(r,t,T)}{r} = \bar{\phi} \frac{B(t,T)\bar{\sigma}\sqrt{r}}{\bar{\sigma}\sqrt{r}} = \bar{\phi}B(t,T)$

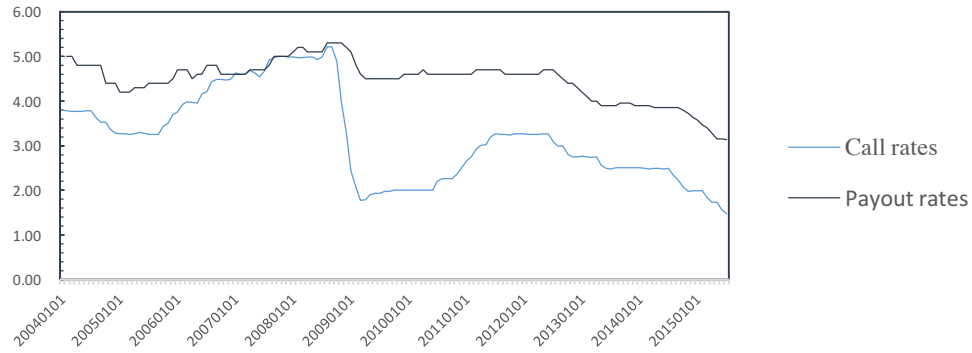


Figure A2. 2004~2015 년 콜금리와 공시기준이율(단위: %). (출처: CEIC Data Manager, 삼성생명)

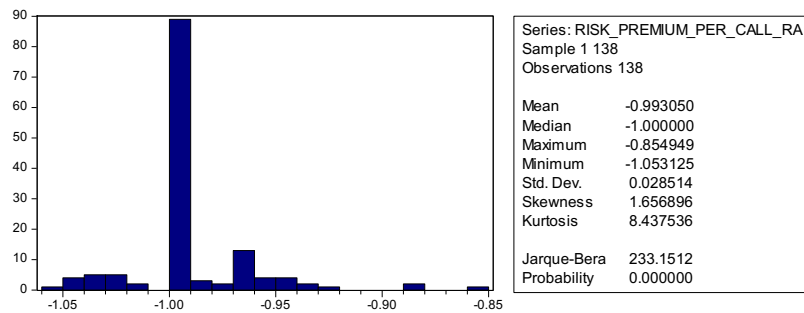


Figure A3. $\frac{\alpha-r}{r}$ 의 분포(단위: %). 출처: (CEIC Data Manager, 삼성생명)

A4. Value at Risk

Value at Risk, $\text{VaR}_\alpha(L)$, $\alpha \in (0, 1)$ 는 포트폴리오의 $(1 - \alpha)\%$ 확률로 넘지 않을 것으로 예상되는 손해 L 중 가장 작은 값이다.

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R} \mid P(L > l) \leq 1 - \alpha\}$$

연금사의 입장에서 연금지급액이 모두 손해라고 가정하면 앞서 산출한 연금지급액 시뮬레이션을 통해 임의의 α 에 대해 Value at Risk가 산출 가능하다. VaR를 산출하려면 손해 (Loss)에 대한 정의가 필요한데, 본 논문에서는 연금의 경우 모든 지급액이 Loss라고 정의하였으며, 스왑선의 경우 2014년의 스왑선 가격만큼의 무위험이자율 채권을 발행하여 스왑선을 구입하면 2015년에 스왑선 구매자가 가질 수 있는 손해를 L 이라고 정의했다. VaR의 산출에 필요한 기대 수익률 (Expected Return)은 산출된 공정가격과 앞서 산출된 페이오프의 시뮬레이션을 이용해 구할 수 있었다.

이 결과, $\alpha = 5\%, 10\%$ 일 때, 세계의 스왑선과 연금의 VaR을 구할 수 있었고, 결과는 Table A3와 같았으며 분포는 Figure A4과 같았다.

이외에도 VaR의 많은 응용이 가능한데, 손해를 5년 가중수익률과 5년 가중 물가상승률의 차이로 정의하면 국민연금의 미달위험을 측정할 수 있고, 본 논문의 콜 스왑션을 풋 스왑션으로 바꾸면 연금 운영사의 입장에서 최저 보장 이율의 현재가치 및 위험에 대해 측정이 가능하다.

	Swaption 1	Swaption 2	Swaption 3	Pension
Expected Return (Esscher)	0.020574	0.02043	0.02065	0.02469
5% quantile	-0.005333349	-0.030017164	-0.009733127	0.002559683
10% quantile	-0.003492307	-0.024922573	-0.007892651	0.000493728
Expected Return (Wang)	0.02565	0.02758	0.03135	0.02552
5% quantile	-0.07486887	-0.028629875	-0.009214822	0.002453836
10% quantile	-0.062864901	-0.023774403	-0.007454144	0.000429036

Table A3. 스왑션과 연금의 Value at Risk ($\alpha = 5\%, 10\%$)

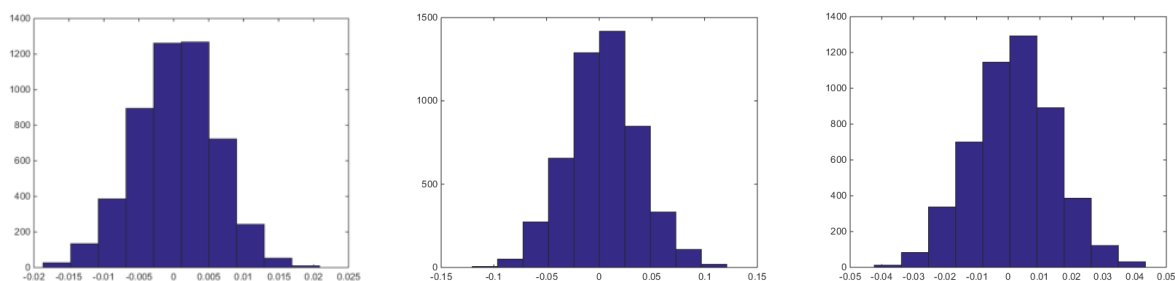


Figure A4. (왼쪽부터) Esscher Transform으로 산출한 연금, Swaption. 1, Swaption. 2의 손해분포

A5. OECD 국가들의 연금 운용 행태 비교

2013년 데이터를 다음 Figure 2개로 정리할 수 있다.

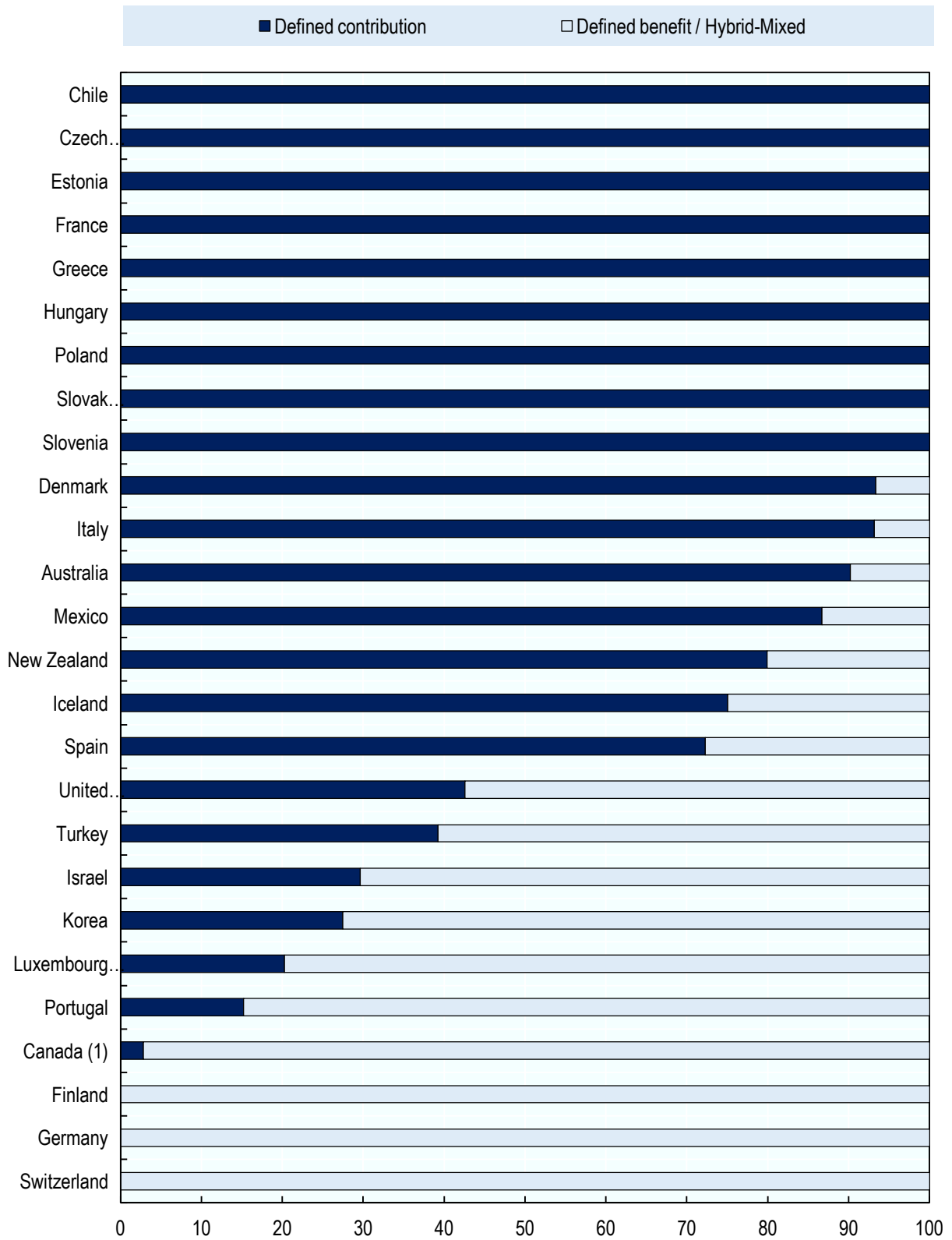


Figure B1. 2013 년 OECD 국가들의 퇴직연금 지급구조 비중(단위: %). (출처: OECD)

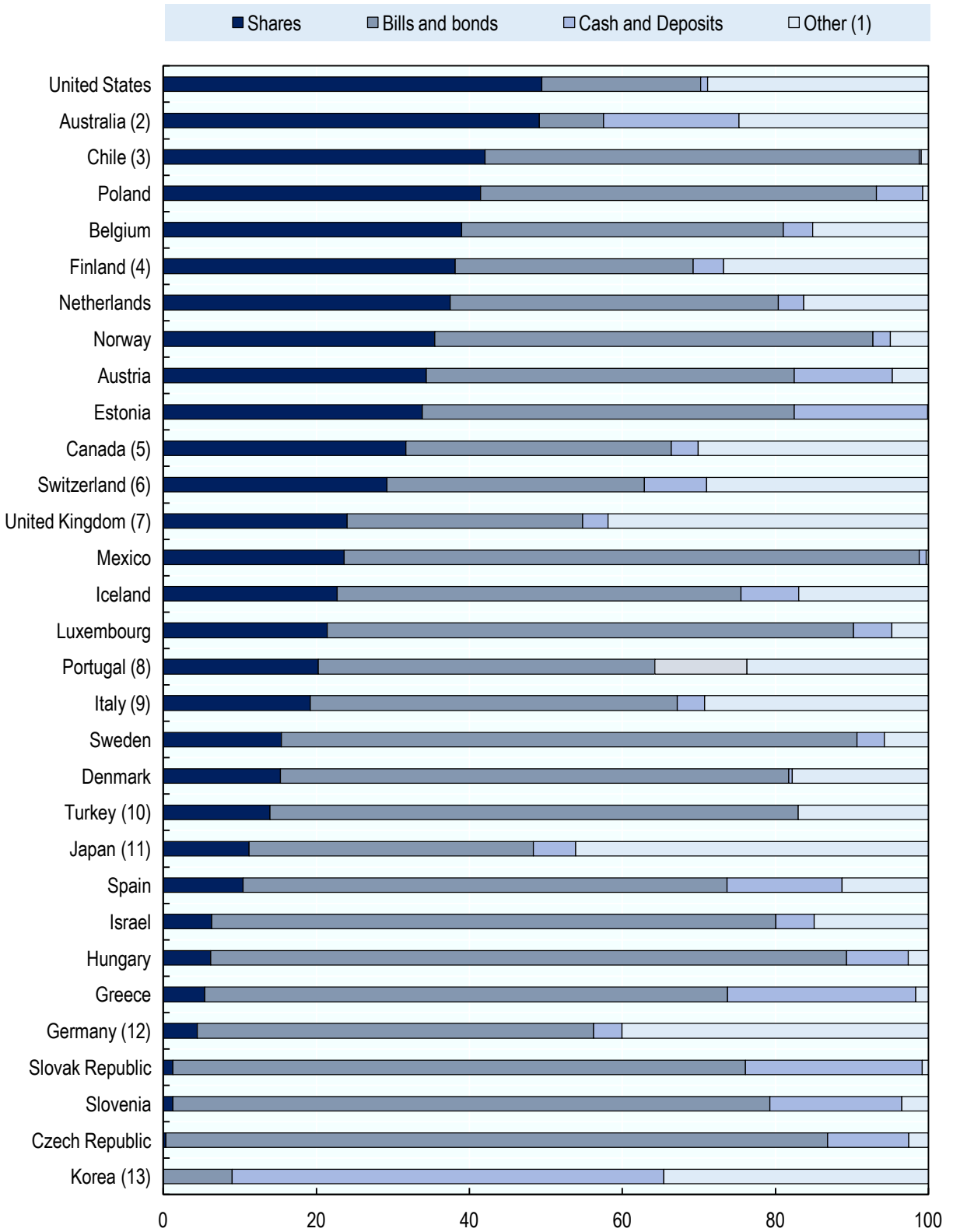


Figure B2. 2013 년 OECD 국가들의 연금 자산분배율(단위: %). (출처: OECD)

< Reference >

- Berg, T. (2010). The Term Structure of Risk Premia: New Evidence from the Financial Crisis, ECB Working Paper No. 1165.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, 637-654.
- Black, F., Derman, E. & Toy, W. (1990). A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial analysts journal* 46.1, 33-39.
- Braun, V. (2011). *Dynamic copulas for finance: an application to portfolio risk calculation*. Vol. 166, BoD–Books on Demand.
- Brigo, D., & Fabio, M. (2007). *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*, Springer Science & Business Media.
- Calvet, L. E., & Fisher, A. J. (2008). *Multifractal volatility: theory, forecasting, and pricing*, Academic Press.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53.2, 385-407.
- El Karoui, N., Loisel, S., Salhi, Y. , & Mazza, C. (2013). *Fast change detection on proportionnal two-population hazard rates*. Working paper.
- Gerber, H. U., & Shiu, E. S. (1993). *Option pricing by Esscher transforms*. HEC Ecole des hautes études commerciales.
- Heath, D., Jarrow, R., & Morton, A. (1990). Bond pricing and the term structure of interest rates: A discrete time approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(4), 419-440.
- Heath, D., Jarrow, R., & Morton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1), 77-105.
- Heath, D., Jarrow, R., & Morton, A. (1990). Contingent claim valuation with a random evolution of interest rates. *Review of Futures Markets*, 9(1), 54-76.
- Kijima, M. (2006). A multivariate extension of equilibrium pricing transforms: The multivariate Esscher and Wang transforms for pricing financial and insurance risks. *Astin Bulletin*, 36(01), 269-283.
- Kuroda, K., & Matsuyama, N. (2009). Actuarial Mathematics, Basic Theory and Current Issues in Japan. *Selected Papers on Probability and Statistics*, 219.
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American statistical association*, 87(419), 659-671.
- Liu, P., & Theodoridis, K. (2010). DSGE model restrictions for structural VAR identification, *Bank of England Working Paper No. 402*, 2012.
- Lucas, R. E. (1976, December). Econometric policy evaluation: A critique. In *Carnegie-Rochester conference series on public policy* (Vol. 1, pp. 19-46). North-Holland.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Merton, R. C. (1971). Theory of rational option pricing.

- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, 473-489.
- Svensson, L. E. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994* (No. w4871). National Bureau of Economic Research.
- Treynor, J. L., & Black, F. (1973). How to use security analysis to improve portfolio selection. *Journal of Business*, 66-86.
- Uhlig, H. (1998). A toolkit for analysing nonlinear dynamic stochastic models easily. *QM&RBC Codes*.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2), 177-188.
- Wang, S. S. (2002). A universal framework for pricing financial and insurance risks. *Astin Bulletin*, 32(02), 213-234.
- 배병호 (2014). 경제전망 및 정책분석을 위한 New BOK-DSGE 모형 구축 결과, *조사통계월보*, 한국은행.