Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Inteligencia Artificial

Actividad 8

Laboratorio de Álgebra Lineal

Nombre: Dayla Marely Carrizales Ortega

Matrícula: 1952471

Maestra: Luis Ángel Gutiérrez Rodríguez

Grupo: 032

21 de febrero del 2025

4.1 Operaciones con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

$$-5 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$4 \quad -2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \quad 5 \quad -4 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore \textbf{\textit{La inversa de la matriz F es }} F^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

Sea A y B matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos las matrices para encontrar la matriz AB

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$$

Calculamos los determinantes de A, B y AB

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (-1)(3) = 2 + 3 = 5$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (5)(4) = 1 - 20 = -19$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = (-2)(16) - (9)(7) = -32 - 63 = \ -95$$

Sustituyendo en $|AB| = |A| \cdot |B|$

$-95 \ = \ (5)(-19)$

$-95 \ = \ -95$

$\therefore$ ***Se cumple que*** $\boldsymbol{|AB| = |A| \cdot |B|}$

4.2 Sistemas de ecuaciones lineales

3. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 4x \ - \ y \ + \ z \ = \ 7 \\ -2x \ + \ 4y \ - \ 2z \ = \ 1 \\ x \ - \ y \ + \ 3z \ = \ 5 \end{cases}$$

Despejando x, y y z

$$x = \frac{7+y-z}{4} \qquad y = \frac{1+2x+2z}{4} \qquad z = \frac{5-x+y}{3}$$

Sea **x= 0** **y=0** **z=0**

1era iteración

$$x = \frac{7+(0)-(0)}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$y = \frac{1+2(1.75)+2(0)}{4} = \frac{1+3.5}{4} = 1.125$$

$$z = \frac{5-(1.75)+(1.125)}{3} = \frac{4.375}{3} = 1.4583$$

2da iteración

x= 1.75 y= 1.125 z= 1.4583

$$x = \frac{7+(1.125)-(1.4583)}{4} = \frac{6.6667}{4} = 1.6667$$

$$y = \frac{1+2(1.6667)+2(1.4583)}{4} = \frac{7.25}{4} = 1.8125$$

$$z = \frac{5-(1.6667)+(1.8125)}{3} = \frac{5.1458}{3} = 1.7153$$

3era iteración

x= 1.75 y= 1.125 z= 1.4583

$$x = \frac{7+(1.8125)-(1.7153)}{4} = \frac{7.0972}{4} = 1.7743$$

$$y = \frac{1+2(1.7743)+2(1.7153)}{4} = \frac{1+3.5486+3.4306}{4} = 1.9948$$

$$z = \frac{5-(1.7743)+(1.9948)}{3} = \frac{5.2205}{3} = 1.7402$$

Según las iteraciones que se hagan es la aproximación a la solución deseada, podemos decir que, si seguimos avanzando, las soluciones van a converger en:

$$\boldsymbol{x \approx 1.77\ a\ 1.82\ , y \approx 1.99\ a\ 2.03, z \approx 1.74}$$

4. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Podemos notar que la 2da y 3era ecuación son múltiplos de la 1era ecuación, entonces:

$2(x + 2y + 3z) = 0$ (ec. 4)

$3(x + 2y + 3z) = 0$ (ec. 5)

Esto se reduce a una única ecuación

$x + 2y + 3z = 0$

Despejamos x

$x = -2y - 3z$

Obteniendo así la solución general del sistema

$\boldsymbol{\therefore (x, y, z) = (-2y - 3z, y, z) = y\,(-2, 1, 0) + z\,(-3, 0, 1)}$

El conjunto de soluciones del sistema homogéneo está dado por:

$\{(-2y - 3z, y, z) | y, z \epsilon \mathbb{R}\} = span\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$

Este conjunto describe un plano en $\mathbb{R}^3$.

4.3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

5. Encuentre la base y la dimensión del subespacio generado por los vectores $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)\}$.

Los vectores (2,4,6) y (3,6,9), son múltiplos del vector (1,2,3), entonces se puede representar como:

$$(2,4,6) = 2(1,2,3) \qquad (3,6,9) = 3(1,2,3)$$

- Base: **(1,2,3)**
- Dimensión: **1**

6. Determine los autovalores y auto vectores de la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculando los autovalores

Buscamos una λ tal que$\det(G - \lambda I) = 0$, obtenemos:

$$G - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante

$\det(G - \lambda I) = (5 - \lambda)^2 - (-2)(-2) = (5 - \lambda)^2 - 4 = 0$

$(5 - \lambda)^2 = 4$

$5 - \lambda = \pm 2$

$5 - \lambda = 2 \rightarrow \lambda = 3$

$5 - \lambda = -2 \rightarrow \lambda = 7$

$\therefore \lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 7$ //Auto valores

Calculando los auto vectores

Para $\lambda_1 = 3$

$$G - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Resulta un sistema de ecuación de la matriz $G - 3I$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$x - y = 0$$

El vector asociado es:

$$\therefore \boldsymbol{v_1 = (1, 1)}$$

Ahora para $\lambda_2 = 7$

$$G - 7I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado es

$$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Resulta en la ecuación

$$x + y = 0$$

Cuyo vector asociado es

$$\therefore \boldsymbol{v_2 = (1, -1)}$$

4.4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

7. Explique como el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el algebra lineal para reducir dimensiones para reducir dimensiones.

El PCA es una técnica que usa álgebra lineal para reducir el número de características en un conjunto de datos, manteniendo la mayor cantidad de información posible. Primero, se ajustan los datos restando su promedio. Luego, se calcula cómo las diferentes características se relacionan entre sí. Después, se encuentran las direcciones principales donde los datos varían más, y se eligen las más importantes. Finalmente, los datos se transforman a un espacio más pequeño usando esas direcciones, logrando así una versión reducida de los datos.

8. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Analice el uso de algebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales.

El álgebra lineal es clave en el aprendizaje profundo, especialmente en las redes neuronales. Las entradas y los pesos de las conexiones entre las neuronas se representan como matrices y vectores, y las operaciones matemáticas entre ellos, como multiplicación de matrices, permiten que la información pase de una a otra. En el proceso de entrenamiento, el cálculo de los errores y la actualización de los pesos también se hace usando álgebra lineal. Esto incluye el uso de gradientes para ajustar los pesos y hacer que la red aprenda mejor. En pocas palabras, el álgebra lineal permite que las redes neuronales funcionen de manera eficiente y aprendan de los datos.

10. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA

Los espacios vectoriales tienen un gran impacto en la representación de datos en la inteligencia artificial, ya que permiten estructurar y organizar la información de manera matemática y computacionalmente eficiente. En IA, los datos, como imágenes, texto o sonidos, se representan mediante vectores en un espacio vectorial, donde cada dimensión del vector corresponde a una característica o propiedad del dato.