Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado en Ingeniería de sistemas

Optimización de flujo en redes
Dra. Elisa Schaeffer

Retroalimentación de las tareas realizadas durante el periodo enero–junio de 2019

por

Dayli Machado de Armas

1985275

San Nicolás de los Garza, Nuevo León junio 2019

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Posgrado en Ingeniería de sistemas

Optimización de flujo en redes
Dra. Elisa Schaeffer

Retroalimentación de las tareas realizadas durante el periodo enero–junio de 2019

por

Dayli Machado de Armas

en opción al grado de

Maestría en Ciencias

en Ingeniería de Sistemas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León junio 2019

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Posgrado en Ingeniería de sistemas

Optimización de flujo en redes

Dra. Elisa Schaeffer

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Retroalimentación de las tareas realizadas durante el periodo enero–junio de 2019», realizada por el alumno Dayli Machado de Armas, con número de matrícula 1985275, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dr. Igor Litvinchev
Asesor

Dr. Fernando López Irarragorri
Revisor

Dr Jose Daniel Mosquera Artamonov
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera
Optimización de flujo en redes Dra. Elisa Schaeffer

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2019

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1 Problemas de corte y empaquetamiento

Los problemas de corte y empaquetamiento (C & P, por sus siglas en inglés) tienen un gran valor como tema de investigación en las últimas décadas por su amplio abanico de aplicaciones tanto en la industria como en otras esferas de la vida. Esto se refleja en investigaciones aplicadas en áreas como: industria del vidrio [1], del papel [2, 3], empresas madereras [4], en la rama metalúrgica [5], así como también en áreas de Logística [6, 7], localización y telecomunicaciones [8].

En los problemas de C & P contamos con un conjunto de elementos pequeños llamados carga que deben ser dispuestos o asignados a uno o varios objetos de gran tamaño llamados contenedores, sin la existencia de superposición entre elementos pequeños. Dichos problemas se clasifican como NP-duros debido a su complejidad computacional, ya que no se conoce ningún algoritmo polinomial que los resuelva.

Este trabajo de investigación se centrará en la resolución del problema de empaquetamiento de círculos (CPP, por sus siglas en inglés) y esferas (3DSPP, por sus siglas en inglés) que se puede tratar como problema de mochila (KP, por sus siglas en inglés) que consiste:

- En el caso de los círculos se cuenta con un contenedor (objetos de gran tamaño) de dos dimensiones y se requiere maximizar el espacio ocupado en dicho contenedor por un subconjunto de círculos (elementos pequeños) n de un conjunto

N dado, sin que exista superposición entre ellos.

- En cuanto a las esferas, se requiere encontrar la mayor densidad de un subconjunto de esferas n de un conjunto N dado (elementos pequeños) en un contenedor tridimensional (objetos de gran tamaño) de dimensiones predefinidas, sin superposición entre ellas.

El empaquetado de estos círculos y esferas se analizará en contenedores regulares, como contenedor cuadrado, rectangular y circular en el cuanto a los círculos y contenedores cuboides y cilíndricos en el caso de las esferas.

1.2 Motivación

Los C&P tienen una gran incidencia en muchos sectores dado la necesidad actual de optimización de los recursos (tiempo, materias primas, combustibles y recursos humanos). Muchas empresas tienen como objeto social la fabricación de productos de diferentes tipos (muebles, alimentos, calzado, electrodomésticos, equipos electrónicos, medicamentos), en la fabricación de estos artículos es muy importante la mayor utilización de los recursos disponible es decir minimizar los residuos de los mismos. Además, dado la gran demanda de dichos los artículos las empresas enfrentan día a día problemas de empaquetamiento de los pedidos. La mayoría de estas empresas pretenden utilizar la menor cantidad de contenedores en el envío de productos para así disminuir los costos por concepto de envío [9]. También dado la crisis energética de hoy la carga eficiente en contenedores minimizará la cantidad de viajes de contenedores al extranjero y, por lo tanto, reducirá el gasto de los combustibles [10].

Otros problemas que se presenta al llenar contenedores es la colocación de los artículos por pedidos dado que si por cuestiones de espacio se ubican ineficientemente los artículos de un mismo pedido esto incurrirá en carga y descarga innecesarias del contenedor a la hora de la entrega de los pedidos [11].

En el caso específico de el problema empaquetamiento de círculos(CPP) y esferas (3DSPP) tienen gran importancia en areas como la medicina (tratamientos radio-quirúrgicos [12, 13]), en la física (aproximación de materiales granulares [14, 15]), en la química (creación de capa de catalizador de celda de combustible [16], entre otras.

1.3 Objetivos

El objetivo principal de esta investigación es encontrar soluciones aceptables en un tiempo razonable al problema de empaquetamiento de círculos y esferas para contenedores regulares, mediante aproximaciones utilizando modelos de programación no lineal.

1.3.1 Objetivos específicos:

- Elaborar un modelo matemático de programación no lineal que ayude a encontrar la mejor combinación de círculos y esferas a empaquetar, maximizando el espacio ocupado.
- Implementar una metaheurística que asociada al modelo de programación no lineal mejores los resultados.
- Realizar una basta experimentación con el fin validar y comparar la metodología propuesta con los métodos existentes.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Modelos de programación no lineal

2.2 Metaheurísticas

2.3 Clasificación de los problemas de corte y empaquetamiento

De manera general, la estructura del problema de C & P según su tipología cuenta con las siguientes características [17]:

- Tipos de asignación.
    - Maximización de las salidas (Todos los objetos de gran tamaño se utilizan y por tanto la selección se realiza sobre los elementos pequeños, en busca de la maximizar el valor de la asignación)
    - Minimización de las entradas (A diferencia del caso anterior, se debe elegir entre un conjunto de objetos de gran tamaño sobre los que acomodar todos los elementos pequeños de forma que se minimicen las pérdidas).
- Surtido de elementos pequeños.
    - Demandas uniformemente estructuradas.

- Demandas variables.

- Surtido de objetos de gran tamaño.
  - Rectangular, material homogéneo.
  - Material no homogéneo.
- Dimensionalidad.
  - Problemas de una, dos, tres y múltiples dimensiones ($n > 3$).
- Forma de objetos pequeños.
  - Sin mezclas, diseño ortogonal (rectángulos, círculos, cajas, cilindros, esferas, etc.).
  - Diseño no ortogonal (elementos irregulares).

A partir de las características anteriores y como combinación de estas se definen los principales problemas de C& P. Estos se dividen en dos grupos [18].

1. Minimización de las entradas(valor).
   - Single Stock-Size Cutting Stock Problem (SSSCSP).
   - Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem (MSSCSP).
   - Residual Cutting Stock Problem (RCSP).
   - Single Bin-Size Bin Packing Problem (SBSBPP).
   - Multiple Bin-Size Bin Packing Problem (MBSBPP).
   - Residual Bin Packing Problem (RBPP).
   - Open Dimension Problem (ODP).
2. Maximización de las salidas(valor).
   - Identical Item Packing Problem (IIPP).

- Single Large Object Placement Problem (SLOPP).
- Multiple Identical Large Object Placement Problem (MILOPP).
- Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem (MHLOPP).
- Single Knapsack Problem (SKP).
- Multiple Identical Knapsack Problem (MIKP).
- Multiple Heterogeneous Knapsack Problem (MHKP).

En sentido general, esta vasta lista de enfoques o tipos de problemas de C & P tienen como objetivos principales minimizar el desperdicio de materiales en el proceso de corte y minimizar el espacio vacío en los contenedores en su llenado.

En este trabajo aborda el problema de empaquetamiento de una variedad heterogénea de elementos pequeños regulares (círculos y esferas) en un único contenedor regular (rectángulo, círculo, triángulo, cuadrado, paralelepípedo, cubo, pirámide y cilindro) en sus respectivas dimensiones. Este tipo de problemas los podemos manejar como un problema de mochila individual (SKP, por sus siglas en ingles) el cual requiere el empaquetado de un conjunto dado de (diferentes) elementos pequeños de pesos y valores dados en una (única) mochila (contenedor) con una capacidad de peso limitada dada, de manera que el valor de los artículos empacados se maximice [19].

2.3.1 Problema de empaquetamiento mochila (KP)

En el problema clásico de la mochila se tiene un conjunto de n artículos, cada elemento j tiene un beneficio entero p_j y un peso entero w_j. El problema es elegir un subconjunto de los elementos para maximizar su beneficio general, mientras que el peso general no exceda una capacidad dada c. Se puede formular el problema con el siguiente modelo de programación de entera [20]:

$$MAX\ Z = \sum_{j=1}^{n} p_j\ x_j \tag{2.1}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j\ x_j \leq c \tag{2.2}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, ..., n \tag{2.3}$$

2.3.1.1.Problema de empaquetamiento de mochila de 2 dimensiones (2DKP)

El problema del empaquetamiento de mochila de 2 dimensiones (2DKP) es uno de los problemas fundamentales de C & P. Se tiene una plancha rectangular de ancho W y altura H, y m tipos de rectángulos con dimensiones $w_j \times h_j$, $j = 1, \ldots, m$. Hay u_j piezas de rectángulo de tipo j con un beneficio p_j para cada pieza. Por lo tanto, el número total de rectángulos disponibles es $n = \sum_{j=1}^{m} u_j$. Él requiere seleccionar y empaquetar ortogonalmente un conjunto de rectángulos (elementos pequeños) en la plancha (contenedor), maximizando el beneficio total de los rectángulos empaquetados. Además, se asume que el tamaño de la plancha y los rectángulos de entrada son ambos enteros, y la orientación de cada rectángulo es fija [21], el modelo de programación entera que representa este problema es:

$$MAX\ Z = \sum_{j=1}^{m} c_j\ x_j \tag{2.4}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} w_j\ h_j\ x_j \leq WXH \tag{2.5}$$

$$x_j \in \{0, 1, ..., u_j\} \tag{2.6}$$

$$x_j\ piezasrectangularesiguales \tag{2.7}$$

2.3.1.2.Problema de empaquetamiento de mochila en 3 dimensiones (3DKP) de esferas

En el Problema de mochila en 3 dimensiones (3DKP) de esferas, se tiene un contenedor de dimensiones fijas $l \times h \times w$ y un conjunto N de n esferas (elementos pequeños) de radios$r_j, j \in N = \{0, 1, ..., n\}$ El objetivo de este problema es maximizar la densidad, es decir el mayor volumen ocupado por las esferas en el contenedor con las esferas disponibles del conjunto N. No se permite superposición de las esferas empaquetadas ni que las mismas se salgan del contenedor. Este problema se puede modelar con programación entera mixta no lineal de la siguiente manera [22].

$$MAX\ Z = \alpha \sum_{j=1}^{n} r_j^3\ \xi_j \tag{2.8}$$

sujeto a:

$$\xi_j r_j \leq x_j \leq \xi_j(l - r_j), j \in N \tag{2.9}$$

$$\xi_j r_j \leq y_j \leq \xi_j(h - r_j), j \in N \tag{2.10}$$

$$\xi_j r_j \leq z_j \leq \xi_j(w - r_j), j \in N \tag{2.11}$$

$$\xi_j \xi_i(r_j + r_j) \leq \sqrt{(x_j - x_i) + (y_j - y_i) + (z_j - z_i)} z_j, j \in N, i \in N, j < i \tag{2.12}$$

$$\xi_j \in \{0, 1\}, j \in N \tag{2.13}$$

2.4 Trabajos encontrado en la literatura sobre el empaquetamiento de círculos y esferas

En esta sección se mostrará la revisión de diversos trabajos presentes en la literatura existente sobre el tema de empaquetamiento de círculos y esferas, separándolos por la forma del contenedor.

2.4.1 Empaquetamiento de círculos

El problema de empaquetamiento de círculos, se busca el acomodo de un conjunto N e círculos de radio r_j sin sobreposiciones. A continuación, se aluno de los tipos de contenedores tratados en la literatura en el empaquetamiento de círculos.

2.4.1.1.Contenedor rectangular

En [7], se trata el en el empaquetamiento de círculos de diferentes tamaños en un único contenedor teniendo en cuenta la estabilidad, como un problema de programación de enteros mixtos no lineales y se desarrolla una serie de procedimientos heurísticos para tratar resolver este problema. Estas heurísticas entre ellas un algoritmo genético son probadas y comparadas en 66 problemas generados, obteniendo los mejores resultados las heurísticas simples mediante asignación al azar y el algoritmo genético.

En [8], para empaquetar número limitado de círculos de radios diferentes en un contenedor rectangular de dimensiones fijas, propone una nueva formulación basada en el uso de una cuadrícula regular que cubre el contenedor y donde se considera a los nodos de la malla como posiciones potenciales para la asignación de centros de los círculos, y se modela el problema como un problema de optimización 0 - 1 a gran escala y es resuelto con un software comercial.

En [23], propone un modelo matemático para el problema de colocar círculos de diferentes radios en una franja. Se consideran varias peculiaridades del modelo matemático. Sobre la base de estas peculiaridades, se sugiere un método original de transición de un mínimo local a otro para proporcionar una disminución del valor de la función objetivo. El método se basa en la idea de aumentar la dimensión del problema y un método de gradiente reducido, así como en el concepto de desigualdades activas y el método de Newton.

En [24], se estudia el problema de empaquetar círculos de diferentes tamaños en un contenedor rectangular. Y formula este problema como un problema de optimización no lineal y desarrolla un algoritmo de recocido simulado (*simulated annealing*) heurístico para resolver este problema. Las heurísticas se inspiran simulando el proceso de movimiento de los círculos de la física. Estas estrategias converge rápidamente. Sus resultados computacionales muestran que el rendimiento del algoritmo propuesto puede superar al del algoritmo *QuasiPQuasiH*.

En [25], se organiza una cantidad fija n de círculos iguales no superpuestos en un rectángulo con dimensión variable, muestra una notación más corta para los empaques densos hexagonales en contenedores rectangulares. Además, describe un procedimiento determinista para la optimización de empaques que difieren de los patrones hexagonales regulares habituales en una o más variantes, sin depender de programas de simulación. Se encontraron mejoras (para $n = 37, 101, 146, 169$) y se dan valores numéricos para todos los empaques en el rango extendido (excepto para $n = 393, 411, 421, 453$).

En [26], se estudia el problema de empaquetar círculos desiguales en un contenedor rectangular bidimensional. Este problema se resuelve utilizando dos algoritmos codiciosos. El primero selecciona el siguiente círculo para colocar de acuerdo con la regla del grado máximo de orificio. El segundo mejora el primero con una estrategia de búsqueda de autoevaluación.

2.4.1.2. Contenedor circular

En [27], se presentan varios problemas de empaquetado en círculo, se revisa diversas aplicaciones industriales y algunas estrategias heurísticas y exactas para su solución. Este trabajo resalta la relevancia de la optimización global para resolver problemas de empaquetamiento de círculos.

En [28], se considera el problema de encontrar paquetes de círculos congruentes en un círculo o de manera equivalente puntos de expansión en un círculo. Se discuten dos algoritmos (*Optimization by repulsion forces and Billiards simulation*) y se presentan los mejores empaques encontrados de hasta 65 círculos.

En [29], se propone un enfoque de salto de cuenca monótona y su variante basada en la población, para resolver el problema de empacar círculos de radios iguales y diferentes dentro de un recipiente circular con mínimo radio.

En [30], se considera el problema de encontrar el empaque más denso de N círculos iguales en un círculo. Se proponemos un método de optimización global cuasifísico simulando movimientos (por presiones elásticas, por fuertes fuerzas de repulsión y fuerzas atractivas).

En [31], se refiere al problema de empaquetamiento de círculos en un contenedor circular pequeño. La fortaleza de este trabajo está en la combinación adecuada de las estrategias de optimización local y global con la búsqueda aleatoria y los movimientos locales.

En [32], se enfrenta el problema de empaquetar círculos en un círculo de contención más grande, con un algoritmo híbrido que combina dos métodos, el recorrido simulado y la búsqueda tabú esto ayuda a evitar ciclos y a lograr una búsqueda estocástica de gran alcance.

2.4.1.3. Contenedor cuadrado

En [33], se considerará el problema de empaquetar n círculos iguales en el cuadrado unitario. A partir de un algoritmo general de ramificación y unión rectangular, se presentan y analizan varias herramientas que explotan la estructura especial del problema.

En [34], se propone un enfoque de optimización global basada en el espacio de acción (ASGO) para el problema de empaquetar círculos desiguales en un contenedor cuadrado de dimensiones variables. A partir de configuraciones aleatorias, ASGO ejecuta un método de descenso potencial y una estrategia de salto de cuenca de manera iterativa. Encontrando configuraciones con la energía potencial mínima local mediante el algoritmo BFGS.

En [35] se aborda el problema de encontrar el diámetro máximo de n círculos iguales separados entre sí dentro de un cuadrado unitario. Este problema se enfrenta con un enfoque de optimización máx-mín de función objetivo lineal sujeta a restricciones de desigualdad cuadráticas y cóncavas.

2.4.1.4. Contenedor triangular

En [36], proponen empaques nuevos y eficientes para 16, 17 y 18 círculos congruentes en un triángulo equilátero. Estos resultados fueron obtenidos con la utilización de un recorrido simulado y una técnica do optimización cuasi-Newton han encontrado mediante el uso de recocido simulado y una técnica de optimización cuasi-Newton.

En [37], presentan empaques de círculos iguales para un rango de $22 \leq n \geq 34$. en publicaciones anteriores a este articulo solo se trataban hasta 21 círculos. Se utilizo un nuevo algoritmo de simulación de eventos discretos.

2.4.2 Empaquetamiento de esferas

El problema de empaquetamiento de esferas consiste fundamentalmente en acomodar varias esferas de diferentes y/o igual tamaño en un contenedor tridimensional más grande evitando la superposición de las mismas, por ejemplo, para aproximar y modelar algunas materias sólidas.

2.4.2.1. Contenedor cilíndrico

En [38], se trata el problema de empaquetamiento de esferas idénticas en un cilindro de altura mínima. Se construye un modelo matemático del problema. Sobre la base de las características de problema, se ofrece una estrategia de búsqueda de una aproximación a un mínimo global. La estrategia incluye una construcción de árbol de búsqueda especial, una modificación del método Zoutendijk de direcciones factibles para calcular los mínimos locales, y una modificación del método de vecindad decreciente para buscar una aproximación a un mínimo global.

En [39], se describen métodos experimentales y analíticos para encontrar propiedades geométricas medias de empaquetamientos aleatorios no sesgados de esferas idénticas en recipientes cilíndricos. En este trabajo utilizaron varios métodos de preparación, incluidos algunos que dan lugar a empaquetamientos con polarización axial o radial. Además, ha desarrollado un modelo para calcular las propiedades relevantes de los empaques en un recipiente semi-infinito con una pared plana. El modelo se adapta luego a los embalajes no sesgados en recipientes cilíndricos, por medio de ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes dependen de la relación de diámetro cilindro a esfera.

2.4.2.2. Contenedor cuboide

En [40], se describe una adaptación del algoritmo de billar para encontrar paquetes densos de n esferas iguales dentro de un cubo. Con el objetivo de llegar más rápido a la convergencia de este método estocástico que simula el movimiento de bolas de billar dentro de un dominio, con los centros de las bolas ubicados al azar. Se introducen cuatro tipos de perturbaciones sistemáticas en él. mejora las soluciones conocidas para $11 \leq n \leq 26$, excepto para n igual $13, 14$ y 18.

En [41], dado un conjunto finito de esferas de diferentes tamaños, se estudia el Problema Empaquetado de Tira tridimensional (3DSPP) y el Problema de Mochila tridimensional (3DKP). Para resolver estos problemas se desarrollaron dos algoritmos codiciosos que adaptan los algoritmos propuestos por [26] para 3 dimensiones con algunas mejoras importantes. Este artículo presenta además dos series de 12 instancias cada una para el 3DSPP y para el 3DKP.

En [22], se estudia dos casos de empaquetamiento de esferas en un cuboide, el primer caso donde las dimensiones del cuboide son fijas y el otro donde las dimensiones del cuboide son variable. En este artículo se consideran las esferas fuertemente heterogéneas. Este problema se aborda aplicando un método de búsqueda local que combina tres características fundamentales: (1) una etapa de procedimiento de mejor posición local (algoritmo codicioso), (2) una etapa de intensificación y (3) una etapa de diversificación.

2.4.2.3. Otros contenedores

En [42], se analiza el problema del empaquetamiento de esferas desiguales en un politopo en 3D. Dado un conjunto heterogéneo de esferas y un politopo, maximizar la suma de los volúmenes de las esferas empaquetadas sin que haya superposición de las mismas. Para lograr los dos objetivos mencionados se propone gran variedad de algoritmos que mejoran mucho el algoritmo de ramificación y unión simplista existente para el programa cuadrático no convexo general. Además, se incorporan algoritmos heurísticos para fortalecer la eficiencia del algoritmo.

Bibliografía

[1] J. Puchinger, G. R. Raidl, and G. Koller, “Solving a real-world glass cutting problem,” in *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization* (J. Gottlieb and G. R. Raidl, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 165–176, Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[2] H. J. Fraser and J. A. George, “Integrated container loading software for pulp and paper industry,” *European Journal of Operational Research*, vol. 77, no. 3, pp. 466 – 474, 1994.

[3] S. Menon and L. Schrage, “Order allocation for stock cutting in the paper industry,” *Operations Research*, vol. 50, no. 2, pp. 324–332, 2002.

[4] R. Morabito and M. Arenales, “Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company,” *International Journal of Production Research*, vol. 38, no. 12, pp. 2725–2742, 2000.

[5] C. Gracia, C. Romano, and L. Gracia, “A hybrid approach based on genetic algorithms to solve the problem of cutting structural beams in a metalwork company,” *Journal of Heuristics*, vol. 19, 04 2011.

[6] E. Baltacioglu, J. T. Moore, and R. Hill, “The distributor’s three-dimensional pallet-packing problem: A human intelligence-based heuristic approach,” *International Journal of Operational Research*, vol. 1, 03 2006.

[7] J. A. George, J. M. George, and B. W. Lamar, “Packing different-sized circles into a rectangular container,” *European Journal of Operational Research*, vol. 84, no. 3, pp. 693 – 712, 1995. Cutting and Packing.

[8] I. Litvinchev and E. Ozuna, “Approximate packing circles in a rectangular container: Valid inequalities and nesting,” *Journal of Applied Research and Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 716 – 723, 2014.

[9] J. Liu, Y. Yue, Z. Dong, C. Maple, and M. Keech, “A novel hybrid tabu search approach to container loading,” *Computers & Operations Research*, vol. 38, no. 4, pp. 797 – 807, 2011.

[10] K. He and W. Huang, “A caving degree based flake arrangement approach for the container loading problem,” *Computers & Industrial Engineering*, vol. 59, no. 2, pp. 344 – 351, 2010.

[11] T. Tian, W. Zhu, A. Lim, and L. Wei, “The multiple container loading problem with preference,” *European Journal of Operational Research*, vol. 248, no. 1, pp. 84 – 94, 2016.

[12] A. Sutou and Y. Dai, “Global optimization approach to unequal global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3d,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 114, pp. 671–694, Sep 2002.

[13] J. Wang, “Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning,” *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 3, pp. 453–463, Dec 1999.

[14] Y. Li and W. Ji, “Stability and convergence analysis of a dynamics-based collective method for random sphere packing,” *Journal of Computational Physics*, vol. 250, pp. 373 – 387, 2013.

[15] K. Bagi, “An algorithm to generate random dense arrangements for discrete element simulations of granular assemblies,” *Granular Matter*, vol. 7, pp. 31–43, Apr 2005.

[16] K. Soontrapa and Y. Chen, "Mono-sized sphere packing algorithm development using optimized monte carlo technique," *Advanced Powder Technology*, vol. 24, no. 6, pp. 955 – 961, 2013.

[17] G. Wascher, H. Haubner, and H. Schumann, "An improved typology of cutting and packing problems," *European Journal of Operational Research*, vol. 183, no. 3, pp. 1109 – 1130, 2007.

[18] A. Bortfeldt and G. Wascher, "Constraints in container loading a state of the art review," *European Journal of Operational Research*, vol. 229, no. 1, pp. 1 – 20, 2013.

[19] S. Martello, D. Pisinger, and P. Toth, "New trends in exact algorithms for the (0-1) knapsack problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 123, no. 2, pp. 325 – 332, 2000.

[20] D. Pisinger, "Where are the hard knapsack problems?," *Computers & Operations Research*, vol. 32, no. 9, pp. 2271 – 2284, 2005.

[21] L. Wei and A. Lim, "A bidirectional building approach for the 2d constrained guillotine knapsack packing problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 242, no. 1, pp. 63 – 71, 2015.

[22] M. Hifi and L. Yousef, "A local search-based method for sphere packing problems," *European Journal of Operational Research*, vol. 274, no. 2, pp. 482 – 500, 2019.

[23] Y. Stoyan and G. Yaskov, "A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip," *European Journal of Operational Research*, vol. 156, pp. 590–600, 02 2004.

[24] D. Zhang, Y. Liu, and S. Chen, "Packing different-sized circles into a rectangular container using simulated annealing algorithm.," pp. 388–391, 01 2004.

[25] E. Specht, "High density packings of equal circles in rectangles with variable aspect ratio," *Computers & Operations Research*, vol. 40, no. 1, pp. 58 – 69, 2013.

[26] W. Q. Huang, Y. Li, H. Akeb, and C. M. Li, "Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container," *Journal of the Operational Research Society*, vol. 56, no. 5, pp. 539–548, 2005.

[27] I. Castillo, F. J. Kampas, and J. D. PintÃ©r, "Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications," *European Journal of Operational Research*, vol. 191, no. 3, pp. 786 – 802, 2008.

[28] R. Graham, B. Lubachevsky, K. Nurmela, and P. Ostergard, "Dense packings of congruent circles in a circle," *Discrete Mathematics*, vol. 181, no. 1, pp. 139 – 154, 1998.

[29] A. Grosso, A. R. M. J. U. Jamali, M. Locatelli, and F. Schoen, "Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container," *Journal of Global Optimization*, vol. 47, pp. 63–81, May 2010.

[30] W. Huang and T. Ye, "Global optimization method for finding dense packings of equal circles in a circle," *European Journal of Operational Research*, vol. 210, no. 3, pp. 474 – 481, 2011.

[31] B. Addis, M. Locatelli, and F. Schoen, "Efficiently packing unequal disks in a circle," *Operations Research Letters*, vol. 36, pp. 37–42, 01 2008.

[32] D. fu Zhang and A. sheng Deng, "An effective hybrid algorithm for the problem of packing circles into a larger containing circle," *Computers & Operations Research*, vol. 32, no. 8, pp. 1941 – 1951, 2005.

[33] M. Locatelli and U. Raber, "Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 122, no. 1, pp. 139 – 166, 2002.

[34] K. He, M. Huang, and C. Yang, "An action-space-based global optimization algorithm for packing circles into a square container," *Computers & Operations Research*, vol. 58, pp. 67 – 74, 2015.

[35] C. D. Maranas, C. A. Floudas, and P. M. Pardalos, "New results in the packing of equal circles in a square," *Discrete Mathematics*, vol. 142, no. 1, pp. 287 – 293, 1995.

[36] J. Melissen and P. Schuur, "Packing 16, 17 or 18 circles in an equilateral triangle," *Discrete Mathematics*, vol. 145, no. 1, pp. 333 – 342, 1995.

[37] N. J. A. Sloane, R. H. Hardin, T. D. S. Duff, and J. H. Conway, "Minimal-energy clusters of hard spheres," *Discrete & Computational Geometry*, vol. 14, pp. 237–259, Oct 1995.

[38] Y. G. Stoyan and G. Yaskov, "Packing identical spheres into a cylinder," *International Transactions in Operational Research*, vol. 17, pp. 51 – 70, 12 2009.

[39] G. Tingate, "Some geometrical properties of packings of equal spheres in cylindrical vessels," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 24, no. 2, pp. 153 – 179, 1973.

[40] T. Gensane, "Dense packings of equal spheres in a cube.," *Electr. J. Comb.*, vol. 11, 05 2004.

[41] T. Kubach, A. Bortfeldt, T. Tilli, and H. Gehring, "Greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid," *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, vol. 28, no. 06, pp. 739–753, 2011.

[42] A. Sutou and Y. Dai, "Global optimization approach to unequal global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3d," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 114, pp. 671–694, Sep 2002.