MODULO ANÁLISIS DE DATOS

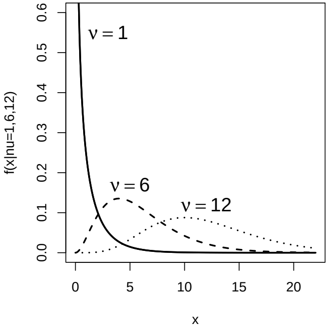
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES
POSTGRADO AUTOFINANCIADO EN MATEMÁTICA
Carrera de Matemáticas
Prof. M.sc. Iván Aliaga C.

18 de noviembre de 2025

Distribución Chi cuadrado

Sea ν un entero positivo. Se dice que una variable aleatoria Y tiene distribución chi(ji) cuadrada con ν grados de libertad si y sólo si $\boldsymbol{Y}$ es una variable aleatoria con distribución gamma y parámetros $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$.

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} y^{\nu/2-1} e^{-y/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Distribución Chi cuadrado

Teorema

Si, $\boldsymbol{X} \sim \chi^2(\nu)$, entonces:

- La media es: $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \nu$.
- La varianza : $\mathbb{V}(\boldsymbol{X}) = 2\nu$.

Propiedades

- Si $\boldsymbol{Z} \sim N(0,1)$, entonces $\boldsymbol{Z}^2 \sim \chi^2(\nu = 1)$.
- Si $\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots, \boldsymbol{Z}_r$ son r variables aleatorias independientes tales que $\boldsymbol{Z}_i \sim N(0,1)$ para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, r$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{Z}_i^2 \sim \chi^2(\nu = r)$$

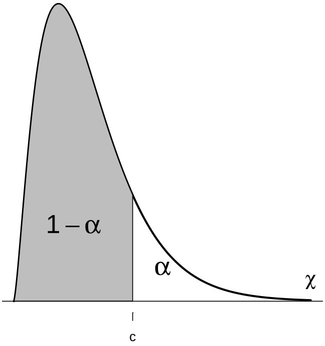
- **Propiedad reproductiva de la distribución chi-cuadrado** Si $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_k$ son k variables aleatorias independientes tales que $\boldsymbol{X}_i \sim \chi^2(\nu_i)$ para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, entonces.

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{X}_i^2 \sim \chi^2(\nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k)$$

Tabulación de la distribución Chi Cuadrado

La tabla de probabilidades de la chi cuadrado con ν grados de libertad, se puede encontrar una probabilidad $1-\alpha$ o un valor $c = \chi^2_{1-\alpha,\nu}$.

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq \chi^2_{1-\alpha,\ \nu}) = 1-\alpha$$



Ejemplos

Si $\boldsymbol{X} \sim \chi^2(\nu = 26)$ determinar

1. $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 17{,}29)$, SOL 0,10
2. $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \geq 38{,}89)$, SOL $1 - 0{,}95$
3. $\mathbb{P}(13{,}84 \leq \boldsymbol{X} \leq 45{,}64)$, SOL $0{,}99 - 0{,}025 = 0{,}965$
4. $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 40)$

Sol.

```
from scipy import stats
X = stats.chi2(df=26)
print("P(X < 40) = ")
```

```
P(X < 40) =
```

```
print(X.cdf(40))
```

```
0.9609880071450072
```

Ejemplos y más ejemplos

Si $\boldsymbol{X} \sim \chi^2(\nu)$ hallar

1. a tal que $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq a) = 0{,}995$ si $\nu = 30$, Sol $a = 53{,}67$
2. a y b tales que $\mathbb{P}(a \leq \boldsymbol{X} \leq b) = 0{,}95$, $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} > b) = 0{,}025$ si $\nu = 13$, Sol De $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} > b) = 0{,}025$, se tiene $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq b) = 0{,}975$, resultando b= 24.74, por otra parte $\mathbb{P}(a \leq \boldsymbol{X} \leq b) = 0{,}95 = \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq b) - \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq a)$, donde resulta:

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq a) = 0{,}975 - 0{,}95 = 0{,}025$$

   luego a= 5.01
3. a tal que $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq a) = 0{,}015$ si $\nu = 8$, Sol por interpolación lineal

$$\begin{aligned} \text{Area acumulada :} \quad & 0{,}010 \leq 0{,}015 \leq 0{,}025 \\ \text{valor de } \chi^2 \quad & 1{,}65 \leq a \leq 2{,}18 \\ \text{luego:} \quad & \frac{a - 1{,}65}{2{,}18 - 1{,}65} = \frac{0{,}015 - 0{,}010}{0{,}025 - 0{,}010}, \quad \text{restultando } a = 1{,}8267 \end{aligned}$$

Ejemplo con python

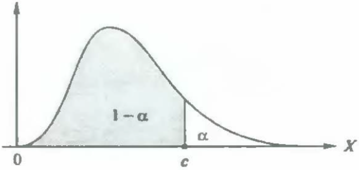
```python
from scipy import stats
X = stats.chi2(df=30)
# hallar a en P(X < a) = 0.995
print(X.ppf(0.995))
```

```
53.671961930240585
```

tabla Chi Cuadrado

TABLA DE LA DISTRIBUCION CHI-CUADRADO

La tabla da áreas $1-\alpha$ y valores $c=\chi^2_{1-\alpha,r}$ tales que $P[X \le c]=1-\alpha$, donde X tiene distribución χ^2 con r grados de libertad.



r	$1-\alpha$									
	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.64	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.74	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19

tabla Chi Cuadrado

11	2.60	3.05	3.82	4.58	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.27	7.01	8.23	9.39	10.87	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3

Distribución t de Student

Teorema

Sea $\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Z}$ son variables aleatorias independientes, $\boldsymbol{Y}$ tiene una distribución Chi cuadrada con ν grados de libertad y $\boldsymbol{Z}$ tiene la distribución normal estándar, entonces la distribución de:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{Z}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{Y}}{\nu}}}$$

Está dada por:

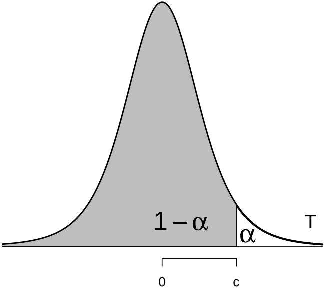
$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

Se denomina distribución t con ν grados de libertad.

Uso de la tabla para la t Student

Si la variable aleatoria $\boldsymbol{T}$ tiene distribución t-Student con ν grados de libertad, $\boldsymbol{T} \sim t(\nu)$, en la tabla de probabilidades t-Student se puede encontrar una probabilidad $1-\alpha$ o un valor $c = t_{1-\alpha,\nu}$ mediante la relación.

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{T} \leq c) = 1-\alpha$$



Ejemplos

Si $\boldsymbol{X}$ tiene distribución t-Student con 18 grados de libertad, determinar:

a) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 2{,}101)$, SOL $0{,}975$.

b) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} > 1{,}734)$, SOL $1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

c) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq -2{,}878)$, SOL $1 - \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 2{,}878) = 1 - 0{,}995 = 0{,}005$.

d) $\mathbb{P}(-1{,}330 \leq \boldsymbol{X} \leq 2{,}552)$, SOL $0{,}990 - (1 - 0{,}90) = 0{,}89$.

e) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 2)$ solucion por interpolación.

$$\begin{aligned} \text{Valores de t :} \quad & 1{,}734 \leq 2 \leq 2{,}101 \\ \text{área respectiva:} \quad & 0{,}95 \leq p_0 \leq 0{,}975 \end{aligned}$$

$$\text{luego: } \frac{p_0 - 0{,}95}{0{,}975 - 0{,}95} = \frac{2 - 1{,}734}{2{,}101 - 1{,}734}, \quad \text{restultando } p_0 = 0{,}968$$

Ejemplo en python

```
from scipy import stats
T = stats.t(df=18)
print("P(T < 2.101) = ")
```

```
P(T < 2.101) =
```

```
print(T.cdf(2.101))
```

```
0.9750038185610183
```

Ejemplos

Si $\boldsymbol{X}$ tiene distribución t con 10 grados de libertad hallar el valor c tal que:

a) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}995$, SOL $c = 3{,}169$.

b) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}05$, SOL $c = -1{,}812$.

c) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} > c) = 0{,}01$, SOL $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}99$ luego $c = 2{,}764$.

d) $\mathbb{P}(-c \leq \boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}95$, SOL $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}975$ luego $c = 2{,}228$.

e) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}92$ solucion por interpolación.

$$\begin{aligned} \text{Valores de t :} \quad & 1{,}372 \leq c \leq 1{,}812 \\ \text{área respectiva:} \quad & 0{,}90 \leq 0{,}92 \leq 0{,}95 \end{aligned}$$

$$\text{luego:} \quad \frac{c - 1{,}372}{1{,}812 - 1{,}372} = \frac{0{,}92 - 0{,}90}{0{,}95 - 0{,}90}, \quad \text{restultando } c = 1{,}548$$

Ejemplo en python

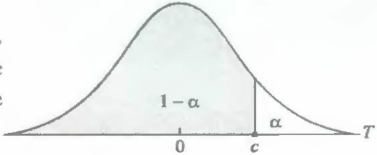
```python
from scipy import stats
T = stats.t(df=10)
# Hallar c tal que P(T < c) = 0.995
print(T.ppf(0.995))
```

```
3.16927267261695
```

tabla t de Student

TABLA DE LA DISTRIBUCION t–Student

La tabla da áreas $1-\alpha$ y valores $c = t_{1-\alpha,r}$, donde, $P[T \leq c] = 1-\alpha$, y donde T tiene distribución t-Student con r grados de libertad..



r	$1-\alpha$: 0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169

tabla t de Student

11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Distribución F de Fisher o de Snedecor

En relación con el muestreo de poblaciones normales, otra distribución que desempeña un papel importante, la distribución F, que se define como la razón de dos variables aleatorias Chi cuadrada independientes, cada una dividida entre sus respectivos grados de libertad.

Teorema

Si $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$ son dos variables aleatorias independientes que tienen distribuciones chi cuadrada con ν_1 y ν_2 grados de libertad, entonces la distribución de:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{U}/\nu_1}{\boldsymbol{V}/\nu_2}$$

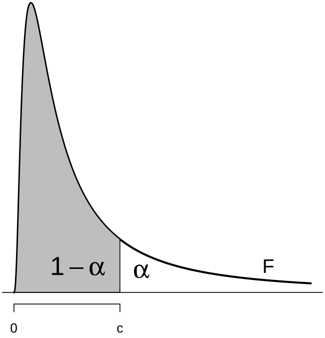
Su función de densidad esta dado por:

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \cdot f^{\frac{\nu_1}{2}-1} \cdot \left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}f\right)^{-1/2(\nu_1+\nu_2)}, \quad f > 0$$

se denomina distribución F de Fisher o Snedecor con ν_1 y ν_2 grados de libertad

Uso de la tabla F de Fisher

Si la variable aleatoria $\boldsymbol{X} \sim F(\nu_1, \nu_2)$, en la tabla de probabilidades $\boldsymbol{F}$ se puede encontrar una probabilidad $1-\alpha$ o un valor $c = \boldsymbol{F}_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}$, mediante la relación $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq) = 1-\alpha$.



Uso de la tabla F de Fisher

Para determinar valores de $\boldsymbol{F}$ correspondientes a áreas $1-\alpha = 0{,}005, 0{,}01, 0{,}025, 0{,}05$ o para determinar probabilidades correspondientes de $c < 1$ se utiliza el teorema siguiente:

Teorema

Si $\boldsymbol{X}$ tiene distribución $\boldsymbol{F}$ con ν_1 y ν_2 grados de libertad, entonces la variable aleatoria $\dfrac{1}{\boldsymbol{X}}$ tiene distribución $\boldsymbol{F}$ de Fisher con ν_2 y ν_1 grados de libertad.

$$\boldsymbol{F}_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{\boldsymbol{F}_{\alpha,\nu_2,\nu_1}}$$

Ejemplos

Si $\boldsymbol{X} \sim F(4,5)$ hallar:

a) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 7{,}39)$, SOL 0,975.

b) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} > 11{,}4)$, SOL $1 - 0{,}99 = 0{,}01$.

c) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 8)$, solucion por interpolación.

$$\text{Valores de F}: \quad 7{,}39 \leq 8 \leq 11{,}4$$

$$\text{área respectiva}: \quad 0{,}975 \leq p_0 \leq 0{,}99$$

$$\text{luego: } \frac{p_0 - 0{,}975}{0{,}99 - 0{,}975} = \frac{8 - 7{,}39}{11{,}4 - 7{,}39}, \quad \text{restultando } p_0 = 0{,}977$$

d) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq 0{,}0645)$, SOL hay que hallar $1 - \alpha$ tal que $c = \boldsymbol{F}_{1-\alpha,4,5} = 0{,}0645$. Se sabe que:

$$\boldsymbol{F}_{\alpha,5,4} = \frac{1}{\boldsymbol{F}_{1-\alpha,4,5}} = \frac{1}{0{,}0645} = 15{,}5$$

de Donde se obtiene $\alpha = 0{,}99$, luego $1 - \alpha = 0{,}01$

Ejemplo en python

```python
from scipy import stats
F = stats.f(dfn=4, dfd=5)
print("P(F < 7.39) = ")
```

```
P(F < 7.39) =
```

```python
print(F.cdf(7.39))
```

```
0.9750145864221545
```

Ejemplo

Si $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{F}(6, 10)$, buscar el valor de c tal que:

a) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}99$, SOL $c = 5{,}39$.

b) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \geq c) = 0{,}05$, SOL $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}95$ luego $c = 3{,}22$

c) $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq c) = 0{,}025$, SOL

$$\boldsymbol{F}_{0,025,6,10} = \frac{1}{\boldsymbol{F}_{0,975,10,6}} = \frac{1}{5{,}46} = 0{,}183$$

d) Si $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{F}(15, 12)$, hallar a y b tales que $\mathbb{P}(a \leq \boldsymbol{X} \leq b) = 0{,}90$, sabiendo que $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} > b) = 0{,}05$. SOL.

De $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} > b) = 0{,}05$, se obtiene $\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq b) = 0{,}95$, entonces $b = 6{,}62$.

De $0{,}90 =$, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a \leq \boldsymbol{X} \leq b) = \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq b) - \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq a) = 0{,}90 \\
0{,}95 - \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq a) = 0{,}90 \\
\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq a) = 0{,}95 - 0{,}90 = 0{,}05 \\
a = \boldsymbol{F}_{0,05,15,12} = \frac{1}{\boldsymbol{F}_{0,95,12,15}} = \frac{1}{2{,}48} = 0{,}4
\end{aligned}$$

Ejemplo en python

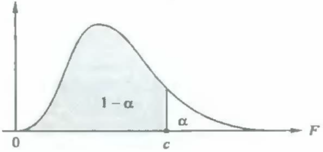
```python
from scipy import stats
F = stats.f(dfn=6 , dfd=10)
# Hallar c de P(F < c) = 0.99
print(F.ppf(0.99))
```

```
5.385811044845793
```

tabla F de Fisher

TABLA DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES F

La tabla da áreas $1-\alpha$ y valores $c = F_{1-\alpha, r_1, r_2}$ tales que $P[F \le c] = 1-\alpha$. Donde r_1 y r_2 son los grados de libertad, y donde $F_{\alpha, r_2, r_1} = 1/F_{1-\alpha, r_1, r_2}$.



		r_1													
$1-\alpha$	r_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	120
.95	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	253
.975		648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	1014
.95	2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5
.975		38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5
.99		98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5
.995		199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
.95	3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.55
.975		17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	13.9
.99		34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.2
.995		55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.4	43.1	42.8	42.0
.95	4	6.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.66
.975		12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.31
.99		21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.6
.995		31.3	26.9	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.7	20.4	20.2	19.5

tabla F de Fisher

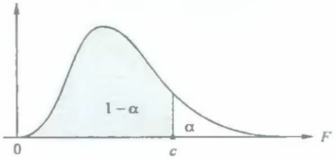
.95	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.40
.975		10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.07
.99		16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.11
.995		22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.9	12.3
.95	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.70
.975		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	4.90
.99		13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	6.97
.995		18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.2	10.0	9.81	9.59	9.00
.95	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.27
.975		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.20
.99		12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	5.74
.995		16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.19
.95	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	2.97
.975		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.73
.99		11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	4.95
.995		14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.06
.95	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.75
.975		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.39
.99		10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.40
.995		13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.30

tabla F de Fisher

TABLA DE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES F

La tabla da áreas $1-\alpha$ y valores $c = F_{1-\alpha, r_1, r_2}$ tales que $P[F \le c] = 1-\alpha$. Donde r_1 y r_2 son los grados de libertad,

y donde $F_{\alpha, r_2, r_1} = 1/F_{1-\alpha, r_1, r_2}$.



		r_1													
$1-\alpha$	r_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	120
.95	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.84	2.77	2.58
.975		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.14
.99		10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.00
.995		12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	4.75
.95	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.34
.975		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	2.79
.99		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.45
.995		11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.01

tabla F de Fisher

.95	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.11
.975		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.46
.99		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	2.96
.995		10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.37
.95	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	1.90
.975		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.16
.99		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.52
.995		9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	2.81
.95	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.68
.975		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	1.87
.99		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.11
.995		9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.30
.95	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.47
.975		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.58
.99		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	1.73
.995		8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	1.83
.95	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.35
.975		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.95	1.82	1.43
.99		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.53
.995		8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	1.61
.95	∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.22
.975		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.27
.99		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.32
.995		7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.36

ESPERANZA MATEMATICA - Introducción

Cuando una variable esta complementamente determinado por la distribución de probabilidad ya sea discreta o contínua es cuando se debe observar características muy importantes y muy utilizadas por ejemplo: *primer momento alrededor del origen* llamado **valor esperado** o **media de la variable aleatoria** o **esperanza matemática**, el segundo momento alrededor de la media se llama **varianza de la variable aleatoria** y otras características descriptivas como la moda, mediana, etc., que se veran en este apartado.

Definición Esperanza matemática

Definición

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria con rango $R_{\boldsymbol{X}}$ y función de cuantia $p(x)$ si es discreta o función de densidad $f(x)$ si es contínua. **El valor esperado o esperanza matemática** de $\boldsymbol{X}$, se denota por $\mu = \mathbb{E}(\boldsymbol{X})$, y se define por:

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} xp(x), \text{ Si } \boldsymbol{X} \text{ es una v.a. discreta}$$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \int_{R_{\boldsymbol{X}}} xf(x)\, dx, \text{ Si } \boldsymbol{X} \text{ es una v.a. contínua}$$

Interpretación geométrica La esperanza matemática de una variable aleatoria discreta o contínua es igual a la abscisa del centro de gravedad del área acotada por la curva o el polígono de distribución de probabilidad y el eje de abscisas.

Ejemplo variable discreta

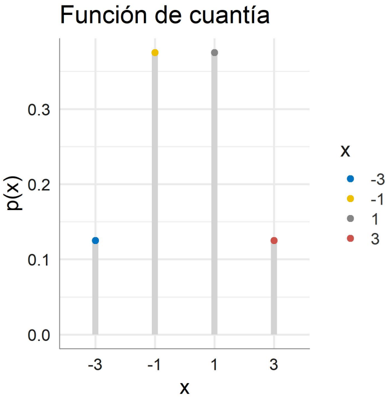
En el ejemplo anterior de la variable aleatoria discreta

$$\boldsymbol{X}(w) = n_C - n_S$$

Hallar la esperanza matemática

x	-3	-1	1	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) &= \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} x\ p(x) \\ &= -3p(-3) - p(-1) + p(1) + 3p(3) \\ &= -3\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + 3\frac{1}{8} \\ &= 0\end{aligned}$$

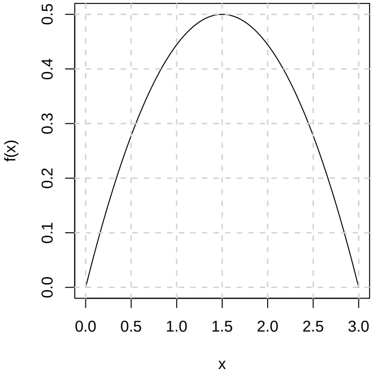


Variable Contínua

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ ) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\boldsymbol{X}) &= \int_{R_{\boldsymbol{X}}} x\ f(x)\ dx \\ &= \int_0^3 x\frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ )\ dx \\ &= \frac{2}{9}\int_0^3 3x^2 \ - x^3\ dx \\ &= \frac{2}{9}\left[3^3 - \frac{3^4}{4}\right] \\ &= 1{,}5 \end{aligned}$$



Eventos equivalentes

Definición

Sea $E_{\boldsymbol{X}}$ un evento en $R_{\boldsymbol{X}}$ ($E_{\boldsymbol{X}} \subset R_{\boldsymbol{X}}$) y $F_{\boldsymbol{Y}}$ un evento en $R_{\boldsymbol{Y}}$ ($F_{\boldsymbol{Y}} \subset R_{\boldsymbol{Y}}$) de manera que $\boldsymbol{Y} = H(\boldsymbol{X})$, $E_{\boldsymbol{X}}$ y $F_{\boldsymbol{X}}$ son eventos equivalentes si:

$$E_{\boldsymbol{X}} = \{x \in R_{\boldsymbol{X}} / H(x) \in F_{\boldsymbol{Y}}\}$$

Definición

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria definida en el espacio muestral $\boldsymbol{\Omega}$ con rango $R_{\boldsymbol{X}}$. Sea H una función real, de modo que $\boldsymbol{Y} = H(\boldsymbol{X})$ es una variable aleatoria con rango $R_{\boldsymbol{Y}}$, entonces para cualquier evento $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Y}} \subset R_{\boldsymbol{Y}}$, la probabilidad de $\mathbb{P}(F_{\boldsymbol{Y}})$ se define como sigue.

$$\mathbb{P}(F_{\boldsymbol{Y}}) = \mathbb{P}(\{x \in R_{\boldsymbol{X}} / H(x) \in F_{\boldsymbol{Y}}\}) = \mathbb{P}(E_{\boldsymbol{X}})$$

Donde $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}}$ es el evento equivalente en $R_{\boldsymbol{X}}$ para el evento $F_{\boldsymbol{Y}}$.

Ejemplo variable discreta

En el ejemplo anterior de la variable aleatoria discreta

$$\boldsymbol{X}(w) = n_C - n_S$$

Hallar la probabilidad $\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} < -5)$ y $\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} \geq 5)$ cuando $\boldsymbol{Y} = 2\boldsymbol{X} - 1$.

x	-3	-1	1	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

y	-7	-3	1	5
p(y)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$R_{\boldsymbol{X}} = \{-3, -1, 1, 3\}; \quad R_{\boldsymbol{Y}} = \{-7, -3, 1, 5\}$$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} < -5) = \mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = -7) = p(-7) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} \geq 5) = \mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = 5) = p(5) = p(3) = \frac{1}{8}$$

Ejemplo variable Contínua

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ ) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Calcular $\mathbb{P}(3 \leq \boldsymbol{Y} \leq 4)$ cuando $\boldsymbol{Y} = 2\boldsymbol{X} - 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(3 \leq \boldsymbol{Y} \leq 4) &= \mathbb{P}(3 \leq 2\boldsymbol{X} - 1 \leq 4) \\ &= \mathbb{P}(4 \leq 2\boldsymbol{X} \leq 5) \\ &= \mathbb{P}(2 \leq \boldsymbol{X} \leq 2{,}5) \\ &= \int_2^{2{,}5} \frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ )\ dx \\ &= \frac{5}{27} \end{aligned}$$

Propiedades de la Esperanza Matemática

Teorema

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria e $\boldsymbol{Y} = H(\boldsymbol{X})$ una función de $\boldsymbol{X}$, el valor esperado de la función $H(\boldsymbol{X})$, denotado por $\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X}))$, se define por:

$$\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X})) = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} H(\boldsymbol{X})p(x), \quad \text{Si } \boldsymbol{X} \text{ es discreta}$$

$$\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X})) = \int_{R_{\boldsymbol{X}}} H(\boldsymbol{X})f(x)\,dx, \quad \text{Si } \boldsymbol{X} \text{ es contínua}$$

Nota La media de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$, tambien es representado cuando $H(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}$, en ese caso.

$$\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X})) = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \mu$$

Propiedades de la esperanza matemática

1. $\mathbb{E}(a) = a$
2. $\mathbb{E}(aH(\boldsymbol{X})) = a\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X}))$
3. $\mathbb{E}(aH(\boldsymbol{X}) + bG(\boldsymbol{X})) = a\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X})) + b\mathbb{E}(G(\boldsymbol{X}))$

Sol.

D. 1. $\mathbb{E}(a) = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} a\ p(x) = a \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} p(x) = a.$

D. 2. $\mathbb{E}(aH(\boldsymbol{X})) = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} a\ H(\boldsymbol{X})p(x) = a \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} H(\boldsymbol{X})p(x) = a\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X})).$

D. 3. $\mathbb{E}(aH(\boldsymbol{X}) + bG(\boldsymbol{X})) = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} (a\ H(\boldsymbol{X}) + bG(\boldsymbol{X}))p(x) =$

$$a \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} H(\boldsymbol{X})p(x) + b \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} G(\boldsymbol{X})p(x) = a\mathbb{E}(H(\boldsymbol{X})) + b\mathbb{E}(G(\boldsymbol{X})).$$

Ejemplo variable discreta

En el ejemplo anterior de la variable aleatoria discreta

$$\boldsymbol{X}(w) = n_C - n_S$$

. Hallar $\mathbb{E}(2\boldsymbol{X}+1)$, $\mathbb{E}(2\boldsymbol{X}^2+3)$ y $\mathbb{E}(4\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{X}-3)$

x	-3	-1	1	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{x\in R_{\boldsymbol{X}}} xp(x) = $$
$$= (-3)(1/8) + (-1)(3/8) + $$
$$(1)(3/8) + (3)(1/8) = 0$$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) = \sum_{x\in R_{\boldsymbol{X}}} x^2 p(x)$$
$$= (-3)^2(1/8) + (-1)^2(3/8) + $$
$$(1)^2(3/8) + (3)^2(1/8) = 3$$

$$\mathbb{E}(2\boldsymbol{X}+1) = 2\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) + 1 = 1$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2\boldsymbol{X}^2+3) &= 2\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) + 3\\ &= 2(3)+3\\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(4\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{X}-3) &= 4\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) + \mathbb{E}(\boldsymbol{X}) - 3\\ &= 4(3)+(0)-3\\ &= 9\end{aligned}$$

Ejemplo variable Contínua

En el anterior ejemplo se tiene $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ ) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Se requiere hallar $\mathbb{E}(2\boldsymbol{X}+1)$, $\mathbb{E}(2\boldsymbol{X}^2+3)$ y $\mathbb{E}(4\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{X}-3)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\boldsymbol{X}) &= \int_{R_{\boldsymbol{X}}} \boldsymbol{X} f(x)\ dx = \\ &= \int_0^3 x\frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ )\ dx = \\ &= 1{,}5 \\ \mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) &= \int_{R_{\boldsymbol{X}}} \boldsymbol{X}^2 f(x)\ dx = \\ &= \int_0^3 x^2\frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ )\ dx = \\ &= 2{,}7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2\boldsymbol{X}+1) &= 2\mathbb{E}(\boldsymbol{X})+1 \\ &= 2(1{,}5)+1 \\ &= 4 \\ \mathbb{E}(2\boldsymbol{X}^2+3) &= 2\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2)+3 \\ &= 2(2{,}7)+3 \\ &= 6{,}4 \\ \mathbb{E}(4\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{X}-3) &= 4\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2)+\mathbb{E}(\boldsymbol{X})-3 \\ &= 4(2{,}7)+(1{,}5)-3 \\ &= 9{,}3 \end{aligned}$$

Varianza de una variable aleatoria

Definición

La **varianza** de una variable aleatoria $\boldsymbol{X}$, se denota por $\mathbb{V}(\boldsymbol{X})$, $\mathbb{V}ar(\boldsymbol{X})$ o por la letra griega $\sigma^2_{\boldsymbol{X}}$, se define como:

$$\mathbb{V}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \mu)^2]$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \mu)^2] = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} (\boldsymbol{X} - \mu)^2 p(x), \quad \text{Si } \boldsymbol{X} \text{ es discreta}$$

$$\mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \mu)^2] = \int_{R_{\boldsymbol{X}}} (\boldsymbol{X} - \mu)^2 f(x)\, dx, \quad \text{Si } \boldsymbol{X} \text{ es contínua}$$

Teorema

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria con media μ, la varianza de $\boldsymbol{X}$ está dado por:

$$\mathbb{V}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) - [\mathbb{E}(\boldsymbol{X})]^2 = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) - \mu^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\boldsymbol{X}) &= \mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \mu)^2] = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}^2 - 2\boldsymbol{X}\mu + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) - 2\mu\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) + \mu^2 = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Definión de Desviación típica

Observe que cuando la medición de la variable aletoria es u (solo es ejemplo, podria ser: peso, talla, número de hermanos, etc.) entonces la unidades de la media o esperanza es tambien u, en cambio la unidad de la varianza seria u^2, para evitar el cuadrado se utiliza una medida de dispersión llamada **Desviación típica** de la variable aletoria y se define como:

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(\boldsymbol{X})} = \sqrt{\sigma_{\boldsymbol{X}}^2}$$

La unidad de σ es la misma que la de la variable aleatoria y de la media o esperanza, un valor pequeño de σ indica poca dispersión mientras que un valor grande de σ indica una gran dispersión.

Ejemplo cálculo de varianza v.a. discreta

En el ejemplo anterior de la variable aleatoria discreta

$$\boldsymbol{X}(w) = n_C - n_S$$

Hallar la varianza

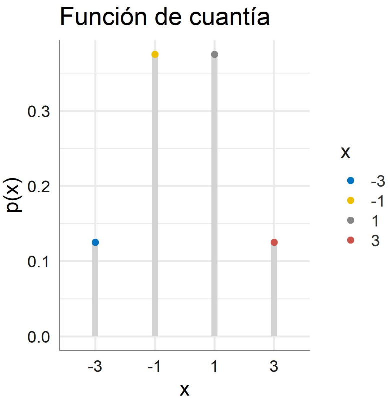
x	-3	-1	1	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} x p(x) = 0$$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) = \sum_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} x^2 p(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\boldsymbol{X}) &= \mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \mu)^2] = \\ &= \mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) - \mu^2 \\ &= 3 - 0^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{X}} = \sqrt{3} = 1{,}73$$



Ejemplo cálculo de varianza v.a. contínua

Sea $\boldsymbol{X}$ una variable aleatoria continua con función de densidad:

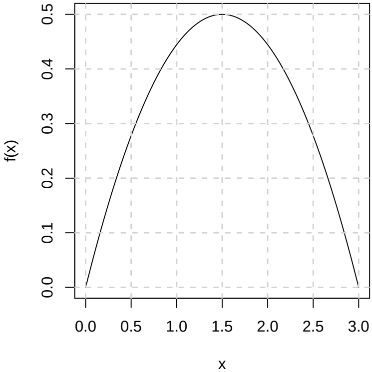
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(\ 3x \ - x^2\ ) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \int_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} x f(x) = 1{,}5$$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) = \int_{x \in R_{\boldsymbol{X}}} x^2 f(x) = 2{,}7$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\boldsymbol{X}) &= \mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \mu)^2] = \\ &= \mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) - \mu^2 \\ &= 2{,}7 - (1{,}5)^2 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\boldsymbol{X}} = \sqrt{0{,}45} = 0{,}671$$



Propiedades de la Varianza

Teorema

Si $\boldsymbol{X}$ es una variable aleatoria, a y b constantes, entonces:

$$\mathbb{V}(a\boldsymbol{X} \pm b) = a^2\mathbb{V}(\boldsymbol{X})$$

Demostración: (con la suma)

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(a\boldsymbol{X} + b) &= \mathbb{E}[(a\boldsymbol{X} + b)^2] - [\mathbb{E}(a\boldsymbol{X} + b)]^2 \\
&= \mathbb{E}[a^2\boldsymbol{X}^2 + 2ab\boldsymbol{X} + b^2] - [a\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) + b]^2 \\
&= a^2\mathbb{E}[\boldsymbol{X}^2] + 2ab\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) + b^2 - [a^2\mathbb{E}(\boldsymbol{X})^2 + 2ab\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) + b^2] \\
&= a^2[\mathbb{E}(\boldsymbol{X}^2) - [\mathbb{E}(\boldsymbol{X})]^2] = a^2\mathbb{V}(\boldsymbol{X})
\end{aligned}$$

Corolario

1. Si $a = 0$ entonces $\mathbb{V}(b) = 0$.
2. Si $b = 0$ entonces $\mathbb{V}(a\boldsymbol{X}) = a^2\mathbb{V}(\boldsymbol{X})$.