24강 10절 3: 잉여류의 성질

- 좌잉여류의 2가지 성질

Prop 1 H가 G의 부분군이라 하자.

H의 좌잉여류들은 G의 Partition을 준다.

(pf) Claim) H의 좌잉여들의 합집합은 G가 된다. 선수들 다 합하면 삼성

(∵ $a \in G$ 라 하자.

$\Rightarrow a = a \cdot e \in aH$)

Claim) aH 와 bH 가 같지 않다면, 이 두개는 서로소이다. 선수가 삼성 · SK 동시에 X

(∵ 귀류법 서로소 아니라 가정.

$x \in (aH \cap bH)$ 인 x 가 있다고 가정하자.

$x = ah_1 = bh_2$

$\Rightarrow a = b\underbrace{h_2 h_1^{-1}} \Rightarrow ah = b\underbrace{h'} \in bH \Rightarrow aH \subset bH$
$h_2 h_1^{-1} h = h'$ 으로

$\Rightarrow b = ah_1 h_2^{-1} \Rightarrow bh = ah' \in aH \Rightarrow bH \subset aH$

) ∴ $aH = bH$ 이므로 모순!)

Prop 2 H가 G의 부분군이라고 하자.

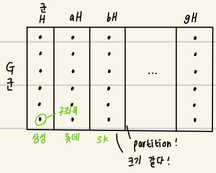
→ H의 잉여류 중 임의로 임의로 2개를 뽑으면, 그 둘은 크기가 같다.

(pf) $\phi : H \to aH$ 가 일대일 대응임을 보이면 된다.
$h \mapsto ah$

$\Rightarrow \phi$ 가 일대일 함수 (∵ $ah_1 = ah_2 \xrightarrow{\text{소거법칙}} h_1 = h_2$)

$\Rightarrow \phi$ 가 위로의 사상 (∵ ah 라는 공역의 원소에 대응되는 원소 h가 있으므로 자명)

< 요약 >



25강 10절 4 : Lagrange Theorem

Thm 10.10 H가 유한군 G의 부분군이라 하자.

→ H의 위수는 G의 위수의 약수

(pf) G가 유한하기 때문에, G에서 H의 좌잉여류들은 유한개가 있다.

H의 좌잉여류들을 $a_1H, a_2H, \cdots, a_kH$ 라 하자.

$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_kH$ 라 하자. (성질 1 에 의해)

$a_1H \sqcup a_2H \sqcup \cdots \sqcup a_kH$

→ $|G| = |a_1H| + |a_2H| + \cdots + |a_kH| = k|H|$ (성질 2 에 의해)

→ $|H|$ 는 $|G|$ 의 약수이다.

Coroly 위수를 소수로 갖는 군은 순환군이다.

(pf) $|G| = p$: 소수

Claim) $G = \langle a \rangle$???

$a \neq e$ 인 어떤 원소 $a \in G$ 를 잡자.

$|\langle a \rangle| \geq 2$ (e랑 a)

$|\langle a \rangle| \mid \underset{p}{\overset{\|}{|G|}}$ $\overset{*}{\Rightarrow}$ $|\langle a \rangle| = 1$ or $\overset{\checkmark}{p}$ (* 라그랑지 정리에 의해서)

$|\langle a \rangle| = p$

⇒ $\langle a \rangle = G$ 이므로 G는 순환군 ∎

Corol 10.12 유한군의 원소의 위수는 군의 위수를 나눈다.

(pf) $|a| = |\underbrace{\langle a \rangle}_{G\text{의 부분군}}| \mid |G|$ ∎

($a \in G$) G의 부분군 라그랑지 정리에 의해서

* 라그랑지 정리 G의 모든 부분군의 위수에 대해 생각.

vs

Corol 10.12 하나의 원소 a 의 위수에 대해 생각.

($\langle \{a, b\} \rangle$, $\langle \{a, b, c\} \rangle$ 도 가능. 하나로 본다

• 지수 $(G:H)$

Def 10.13 H가 G의 부분군이라 하자.

G에서의 H의 index $(G:H)$ 는 G에서의 H의 좌잉여류의 개수.

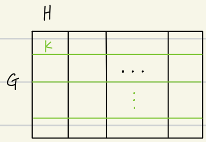
(EX) $(\mathbb{Z}_6 : \{0,3\}) = 3$ ① $\{0,3\}$ $\{1,4\}$ $\{2,5\}$ 3개! ② $\frac{6}{2} = 3$개! (나누기) → 유한군일 때

$(\mathbb{Z} : 5\mathbb{Z}) = 5$ $\underbrace{5\mathbb{Z},\ 5\mathbb{Z}+1,\ 5\mathbb{Z}+2,\ 5\mathbb{Z}+3,\ 5\mathbb{Z}+4}_{5\text{개!}}$ → 유한군 아니므로 ②번 방법 쓰기 곤란.

사실) $|G|$가 유한하면 $(G:H) = |G|/|H|$

Thm 10.14 $K \leq H \leq G$ 라 하고, $(H:K)$와 $(G:H)$가 유한이라 하자.

→ 그러면 $(G:K)$도 유한이며 $(G:K) = (G:H)(H:K)$ 이다.



작은 사각형 개수

$(G:K) = \underset{\text{가로}}{(G:H)}\ \underset{\text{세로}}{(H:K)}$