18강

치환군 (permutation group)

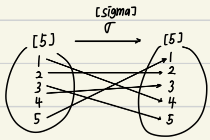
Review)

Def 8.3 집합 A의 Permutation 은 A 에서 A 로의 일대일이며 위로인 함수.

↳ 같은 걸로는 가도 된다 $(2 \to 2)$

남는거 없고 겹치지 않으면 됨.

Ex 8.4



* τ [Tau]

⟨대칭군 S_n⟩

Def S_n 을 $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$ 의 모든 치환의 집합이라 함.

Thm 8.5 S_n 은 치환의 곱셈 아래서 군을 이룸.

(pf)
- 결합법칙 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

  → 함수가 결합법칙을 만족하기 때문에 O.K

- 항등원 $id : [n] \to [n]$, $x \longmapsto x$

  인 항등원이 존재한다.

- 역원 치환 σ 에 대하여 역함수 σ^{-1} 은 σ 의 방향을 반대로 하는 치환.

  $(\sigma \sigma^{-1})(n) = n \quad (\sigma^{-1}\sigma)(n) = n.$

Def S_n 을 n에 대한 Symmetric group.

* S_n 의 원소 갯수? $n!$

Thm n개 원소 가지는 집합 A 에 대해 S_A 를 A의 모든 치환들 군이라 하자.

그러면 군으로 $S_n \simeq S_A$

⟨ n차 이면체군 D_n ⟩

Def D_n 이 정 n각형의 대칭들(회전. 반사)의 집합이라 하면 nth dihedral group

→ 교환법칙 성립 X

· $f[H]$

Def 8.14 $f: A \to B$ 는 함수이고 $H \subseteq A$

→ $f[H] := \{ f(a) \mid a \in H \}$ 를 f 아래서 H의 상

Corol 8.15 G와 G′은 군이라 하고,

$\phi : G \to G'$ 이 일대일 함수, 준동형사상

→ $\phi[G]$ 는 G'의 부분군.

→ $G \simeq \phi[G]$

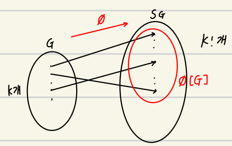
· Cayley Theorem

Thm 8.16 모든 군은 치환군 (S_n의 부분군)에 동형

(pf) $\phi : G \to S_G$

$x \mapsto \lambda_x : G \to G$

$g \mapsto xg$ 라고 정의하자.



목표 : ϕ를 정의 후, ϕ가 준동형 / ϕ가 일대일함수

㊀ 증명해야 하는 것들

1. 잘 정의되었는가? $\lambda_x \in S_G$?

① λ_x : 일대일 함수

② λ_x : 위로의 함수

2. ϕ가 준동형 사상인가?

3. ϕ가 일대일 함수인가?

1. 잘 정의되었는가? $\lambda_x \in S_G$?

① λ_x : 일대일 함수?

$xg_1 = xg_2 \to g_1 = g_2$ 인가?

소거법칙에 의해 성립.

② λ_x : 위로의 함수?

$g \in G$, $\lambda_x(x^{-1}g) = xx^{-1}g = g$

모든 $g \in G$ 에 대하여 pre image $x^{-1}g$ 가 존재.

2. ϕ 가 준동형사상인가?

$\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$ 인가?

1. 모든 $g \in G$ 에 대해 $\lambda_x \lambda_y(g) = \lambda_x(yg) = xyg$

2. $\lambda_{xy}(g) = xyg$

3. ϕ 가 일대일 함수인가?

$\lambda_x = \lambda_y \to x = y$ 인가?

• $\lambda_x(g) = \lambda_y(g) \to x = y$

19강 9절 Orbits, Cycles, and the alternating group

• Orbits

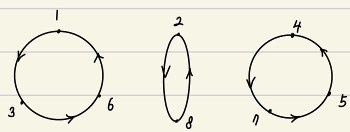
Def 9.1 σ 를 집합 A의 치환이라 하고, $a \in A$ 라 하자.

$orb_\sigma(a) := \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \cdots\}$

$orb_\sigma(a)$ 를 a 를 포함하는 orbits of A

Ex 9.3

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$



$ord_\sigma(1) = \{1, 3, 6, 1, 3, 6, \cdots\} = orb_\sigma(3) = orb_\sigma(6)$

$ord_\sigma(2) = \{2, 8\} = ord_\sigma(8)$

$ord_\sigma(4) = \{4, 7, 5\} = orb_\sigma(7) = ord_\sigma(5)$

Ex $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

$orb_\tau(1) = \{1, 3, 4, 1, 3, 4, \cdots\} = orb_\tau(3) = orb_\tau(4)$

$orb_\tau(2) = \{2, 6, 2, 6, \cdots\} = ord_\tau(6)$

$orb_\tau(5) = \{5\}$

$orb_\tau(7) = \{7\}$

따라서 $\{1, 3, 4\}, \{2, 6\}, \{5\}, \{7\}$ 궤도는 4개.

→ 각각 원소가 모두 나타나며, 한번씩만 나타남.

→ 분할을 줌.

- Cycles (순환치환)

Def 1 치환 $\sigma \in S_n$ 이 두 원소 이상을 포함하는 궤도가 하나 뿐일 때 σ를 순환치환 (cycle)

Ex $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1, 3)$: 순환치환

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3)(2, 4)$: 순환치환 아니다.

여기 없으면 그냥 통과 (자기자신)

Def 순환치환의 길이 (length) 는 가장 큰 궤도에 포함된 원소의 개수

Ex) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1, 3, 5, 4)$ 의 길이는 ? 4

- 치환을 순환치환들의 곱으로 표현

Ex 9.7 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ 을 순환치환들로 표현하면

$= (1, 3, 6)(2, 8)(4, 7, 5)$

→ 이 순환치환들은 disjoint.

자기자신으로 가면 쓸 필요없음. 순서 바뀌어도 상관 X

(Ex) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (2, 5, 7)(3, 4)$

Thm 9.8 모든 치환 $\sigma \in S_n$ 은 서로 소인 순환치환들의 곱으로 나타낼 수 있다.

(pf) $B_1, B_2, \cdots, B_r$ 를 σ 의 궤도라 하자.

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & x \in B_i \text{ 인 경우} \\ x & x \notin B_i \text{ 인 경우} \end{cases}$$ 로 정의.

Truth : μ_i 는 순환치환

μ_i 는 서로 소

Claim) $\sigma = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r$

(pf) $\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_r(x) = \sigma(x)$

Def 9.11 길이가 2인 순환치환을 호환 (transposition)

(EX) $(1, 2)$ $(3, 5)$: 호환

$(1, 3, 4)$: 호환 X

Coroly $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1}) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2)$

즉, 순환치환은 호환의 곱으로 쓸수 있다.

(EX) $(1\ 3\ 5) = (1\ 5)(1\ 3)$

$(2\ 4\ 6\ 7) = (2\ 7)(2\ 6)(2\ 4)$

(pf) ① $k \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)(k) = k$

$(a_1, a_n) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2)(k) = k$

② $k = a_i \ (\neq a_n)$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)(a_i) = a_{i+1}$

$(a_1, a_n)(a_1, a_{n-1}) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2)(a_i) = (a_1, a_n) \cdots (a_1, a_i)(a_i) = (a_1, a_n) \cdots (a_1, a_{i+1})(a_1)$

$= (a_1, a_n) \cdots (a_1, a_{i+2})(a_{i+1}) = a_{i+1}$

③ $k = a_n$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)(a_n) = a_1$

$(a_1, a_n)(a_1, a_{n-1}) \cdots (a_1, a_3)(a_1, a_2)(a_n) = a_1$ ∎

20강 9절 2: 호환

Corol 9.12 적어도 두 원소를 갖는 유한집합의 모든 치환은 호환의 곱이다.

(pf) 치환 ⇒ 서로소인 순환치환의 곱 ⇒ 각 순환치환은 호환의 곱

(Ex) · $\sigma = (1\ 6)(2\ 5\ 3) = (1\ 6)(2\ 3)(2\ 5)$

· 항등치환 $(1\ 2)(1\ 2)$

· $\sigma = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6\ 8\ 9)$

$= (1\ 7)(1\ 5)(1\ 3)(2\ 9)(2\ 8)(2\ 6)(2\ 4)$

Thm 9.15 어떤 치환 $\sigma \in S_n$이 짝수개의 호환의 곱으로 표현되면서 동시에 홀수개의 호환으로 표현될 수 없다.

• 짝치환(우치환)과 홀치환(기치환)

Def 9.18 어떤 치환이 짝수 개의 호환의 곱으로 표현되면 짝치환, 우치환(even permutation)

홀수 개의 호환의 곱으로 표현되면 홀치환, 기치환(odd permutation)

Def S_n에서 모든 짝치환들의 집합을 A_n이라 하자

Thm A_n은 S_n의 부분군

(pf) claim) $\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$ 이면 $\sigma_1\sigma_2^{-1} \in A_n$

$\sigma_1 = t_{11}t_{12}\cdots t_{1(2i)}$ 호환이 $2i$개

$\sigma_2 = t_{21}t_{22}\cdots t_{2(2j)}$ 호환이 $2j$개

$\sigma_1\sigma_2^{-1} = (t_{11}t_{12}\cdots t_{1(2i)})(t_{2(2j)}^{-1}\, t_{2(2j-1)}^{-1}\cdots t_{21}^{-1})$

inverse 되면 순서 거꾸로!

$= t_{11}t_{12}\cdots t_{1(2i)}\,t_{2(2j)}\cdots t_{22}t_{21} \in A_n$

(짝수) + (짝수) = (짝수 개)

• Alternating Group

Def 9.21 A_n은 n개의 문자에 대한 교대군(Alternating Group)

21강 : 9절 3 짝치환, 홀치환, 교대군

• Alternating Group

Def 9.21 A_n은 n개의 문자에 대한 교대군 (Alternating Group)

Q) B_n은 S_n에서 모든 홀치환들의 집합이라 하자.

B_n은 S_n의 부분군인가? No.

이유 : • 홀수 + 홀수 = 짝수 이므로 닫혀있지 않다.

• 항등원이 짝치환이므로 포함되지 않는다.

Q) $|S_n| = n(n-1) \cdots 1 = n!$

→ $|A_n| = ?$

Thm $|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$

* 두 집합의 크기가 같음을 보이기 위해 '그 사이 일대일 대응이 존재함'이 많이 쓰임.

(pf) A_n : S_n에서 모든 짝치환들의 집합.

B_n : S_n에서 모든 홀치환들의 집합.

→ A_n과 B_n 사이의 사상을 정의하자.

$\phi : A_n \to B_n$ 라고 하자.

$\sigma \mapsto (1,2)\sigma$

• 잘 정의되었는가?

$(1,2)\sigma$: 홀치환 ⇒ $(1,2)\sigma \in B_n$

• 일대일 함수인가?

$(1\ 2)\sigma_1 = (1\ 2)\sigma_2$ 이라 하자.

소거법칙에 의해 $\sigma_1 = \sigma_2$

• 전사 함수?

각각의 $\alpha \in B_n$에 대해서 $\phi((1\ 2)\sigma) = (1\ 2)(1\ 2)\sigma = \alpha$

그리고 $(1\ 2)\sigma$는 짝치환이다. ∎