26강 11절 1 : 직접곱

- Directed products and finitely generated abelian groups.
- Directed product

Def 11.1 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 가 집합이라 하자.

→ $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 의 직접곱(direct product)은 $a_i \in S_i$ 인 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 들의 집합

$\prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ 이라고 표기

(EX) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (0,0,1), (0,0,2),$

$(1,0,0), (2,0,0), (1,1,0), (1,2,0), \cdots\}$

Q) $G_1, \cdots, G_n$ 이 군이면 $\prod_{i=1}^{n} G_i$ 도 군인가?

→ 연산의 정의 : $(a_1, a_2, \cdots, a_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1b_1, \cdots, a_nb_n)$

Thm 11.2 군 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 에 대하여 $\prod_{i=1}^{n} G_i$ 는 위 연산 아래서 군이다.

(pf) 결합법칙

항등원 $(e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n)$

역원 $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$

- 직접합 (Direct sum)

사실) G_i 가 가환군 이라면

$\prod_{i=1}^{n} G_i$ 을 $\bigoplus_{i=1}^{n} G_i = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ 이라 쓰고, 직접합(direct sum)이라 함.

사실) $|G_i| = S_i$ 라 하면 $|\prod_{i=1}^{n} G_i| = S_1 S_2 \cdots S_n$ 이다.

Q 언제 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn}$ 인가?

Ex 11.3 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \left\{ \begin{array}{c} (0,0), (0,1), (0,2) \\ (1,0), (1,1), (1,2) \end{array} \right\}$ 이 $\mathbb{Z}_6$과 동형인가?

Claim) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ 은 순환군

$(1,1) \to$ generator 라 해보자

$$\left.\begin{array}{ll} (1,1) & (4,4) = (0,1) \\ (2,2) = (0,2) & (5,5) = (1,2) \\ (3,3) = (1,0) & (6,6) = (0,0) \end{array}\right\} \to \langle (1,1) \rangle = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3}_{\text{순환군}} \simeq \mathbb{Z}_6$$

Corol $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6$

Q $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_4$ 인가? * 원소 4개인 군은 2개. $\mathbb{Z}_4$ or K-V_4

A 동형이 아니다. 왜냐하면 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 는 생성원이 없기 때문에 순환군 아니다.

실제로는 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \simeq V_4$.

Observation) m과 n이 서로 소이면 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn}$

m과 n이 서로 소 아니면 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \not\simeq \mathbb{Z}_{mn}$

→ 증명을 위해서는 '생성원이 있느냐' 가 중요!

즉, 위수를 어떻게 계산하는가?

27강 11절 2 : 직접곱의 위수

· 직접곱에서의 위수

Thm 11.9 $i=1,2,\cdots,n$ 에 대하여 $a_i \in G_i$ 라 하고 r_i 가 a_i 의 위수라 하자.

그러면 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 의 위수는 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 의 최소공배수이다.

(pf) $(a_1,\cdots,a_n)$의 위수 $= \mathrm{lcm}(r_1,\cdots,r_n)$

$(a_1,\cdots,a_n)^k \overset{①}{=} (e_1,\cdots,e_n)$ 이 되는 ②최소의 k

① $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^L = (a_1^L,\cdots,a_n^L)$ $a_1^{r_1}=e_1 \rightarrow a_i^{r_i}=e_i$

$= (a_1^{g_1 r_1},\cdots, a_n^{g_n r_n})$

$= (e_1^{g_1},\cdots, e_n^{g_n}) = (e_1,\cdots,e_n)$

② L 이 최소?

There is $M<L$ s.t $(a_1,\cdots,a_n)^M = (e_1,\cdots,e_n)$

$a_i^M = e_i$, $M = g_i r_i$ for $\forall i$

M 은 $r_1,\cdots,r_n$ 의 공배수

그런데 L은 $r_1,\cdots,r_n$ 의 "최소" 공배수이므로 $L \le M$ $(\rightarrow\leftarrow)$ ∎

Ex 11.10 군 $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{60}\times\mathbb{Z}_{24}$ 에서 $(8,4,10)$ 의 위수?

(pf)

$\mathbb{Z}_{12}$ 에서 8의 위수? 12와 8의 gcd? 4 $12/4=3$

$\mathbb{Z}_{60}$ 에서 4의 위수? $\gcd(60,4)=4$ $60/4=15$

$\mathbb{Z}_{24}$ 에서 10의 위수? $\gcd(24,10)=2$ $24/2=12$

$\mathrm{lcm}(3,15,12)=60$ ∎

Ex 11.11 · $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ 는 $(1,0)$ 과 $(0,1)$ 에 의해서 생성된다.

$\rightarrow (a,b) = a(1,0)+b(0,1)$

· $\mathbb{Z}$ 또는 $\mathbb{Z}_m$ 인 n개의 순환군들의 직접곱은 n개의 순서쌍

$(1,0,\cdots,0)\ (0,1,\cdots,0),\cdots (0,0,\cdots,1)$ 에 의해서 생성된다.

· $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{35}$ 는 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 에 의해 생성된다.

$\rightarrow$ 또한 3, 4, 35가 모두 서로 소이기 때문에 $(1,1,1)$ 에 의해 생성된다.

· $G=\prod_{i=1}^{n} G_i$ 라 하자.

$\overline{G_i} = \{(e_1,e_2,\cdots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\cdots,e_n) \mid a_i\in G_i\}$ 라 하자.

그러면 $\overline{G_i} \simeq G_i$ 이다.

$\rightarrow$ 동형은 이름 바꾸기이다! 그냥 하나 더 쓴거 달라질 것 X

Thm m과 n이 서로 소이면 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{mn}$ 이다.

(pf) Claim) m과 n이 서로 소이면 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ 이 순환군이다.

Conjecture) $|\langle (1,1) \rangle| = \mathrm{lcm}(m,n)$

Conjecture 을 이용하면, $|\langle (1,1) \rangle| = \mathrm{lcm}(m,n) = mn$

Thm m과 n이 서로 소가 아니면 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \not\simeq \mathbb{Z}_{mn}$

(pf) Claim) $|\langle (a,b) \rangle| < mn$

($\because$ $|\langle (a,b) \rangle| = \mathrm{lcm}(r_1, r_2)$ (r_1 : a의 위수, r_2 : b의 위수)

$\leq \mathrm{lcm}(m,n)$

$< mn$ m.n이 서로소 아니므로

■