

치환군 (permutation group)

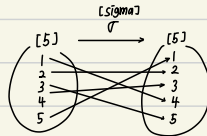
Review)

Def 8.3 집합 A 의 **Permutation** 은 A 에서 A 로의 일대일이며 위로인 함수.

↳ 같은 걸로는 기도 된다 (2~2)

남는거 없고 겹치지 않으면 됨.

Ex 8.4

* $\tau \in \text{Aut}$ < 대칭군 S_n >Def S_n 을 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 모든 치환의 집합이라 함.Thm 8.5 S_n 은 치환의 곱셈 아래서 군을 이룸.(p8) • 결합법칙 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

→ 함수가 결합법칙을 만족하기 때문에 O.K

• 항등원 $\text{id}: [n] \rightarrow [n]$

$$x \mapsto x$$

인 항등원이 존재한다.

• 역원 치환 σ 에 대하여 역함수 σ^{-1} 은 σ 의 방향을 반대로 하는 치환.

$$(\sigma \sigma^{-1})(n) = n \quad (\sigma^{-1} \sigma)(n) = n.$$

Def S_n 을 n 에 대한 **Symmetric group**.* S_n 의 원소 갯수? $n!$ Thm n 개 원소 가지는 집합 A 에 대해 S_A 를 A 의 모든 치환들 군이라 하자.그러면 군으로 $S_n \simeq S_A$

< n 차 이면체군 D_n >

Def D_n 이 정 n각형의 대칭들(회전, 반사)의 집합이라 하면 *n th dihedral group*
 \rightarrow 교환법칙 성립 X

• $f[H]$

Def 8.14 $f: A \rightarrow B$ 는 함수이고 $H \subseteq A$
 $\rightarrow f[H] := \{ f(a) \mid a \in H \}$ 를 f 아래서 H 의 상

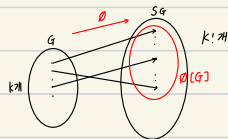
Coroll 8.15 G 와 G' 은 군이라 하고,
 $\emptyset: G \rightarrow G'$ 이 일대일 함수, 준동형사상
 $\rightarrow \emptyset[G]$ 는 G' 의 부분군.
 $\rightarrow G \simeq \emptyset[G]$

• Cayley Theorem

Thm 8.16 모든 군은 치환군 (S_n 의 부분군)에 동형

(pb)

$\emptyset: G \rightarrow S_G$
 $x \mapsto \lambda_x: G \rightarrow G$
 $g \mapsto xg$ 라고 정의하자.



목표: \emptyset 를 정의 후, \emptyset 가 준동형
 \emptyset 가 일대일함수

⑧ 증명해야 하는 것들

1. 잘 정의되었는가? $\lambda_x \in S_G$?

① λ_x : 일대일 함수

② λ_x : 위도역 함수

2. \emptyset 가 준동형 사상인가?

3. \emptyset 가 일대일 함수인가?

1. 잘 정의되었는가? $\lambda_x \in S_G$?

① λ_x : 일대일 함수?

$$xg_1 = xg_2 \rightarrow g_1 = g_2 \text{ 인가?}$$

소거 법칙에 의해 성립.

② λ_x : 위도의 함수?

$$g \in G, \lambda_x(x^{-1}g) = x x^{-1}g = g$$

모든 $g \in G$ 에 대하여 pre image $x^{-1}g$ 가 존재.

2. \emptyset 가 준동형사상인가?

$$\emptyset(x)\emptyset(y) = \emptyset(xy) \text{ 인가?}$$

$$1. \text{ 모든 } g \in G \text{ 에 대해 } \lambda_x \lambda_y(g) = \lambda_x(yg) = xyg$$

$$2. \lambda_{xy}(g) = xyg$$

3. \emptyset 가 일대일 함수인가?

$$\lambda_x = \lambda_y \rightarrow x = y \text{ 인가?}$$

$$\bullet \lambda_x(g) = \lambda_y(g) \rightarrow x = y$$

19강 9월

Orbits, Cycles, and the alternating group

• Orbits

Def 9.1 σ 를 집합 A 의 차환이라 하고, $a \in A$ 라 하자.

$$\text{orb}_\sigma(a) := \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots\}$$

$\text{orb}_\sigma(a)$ 를 a 를 포함하는 orbits of A

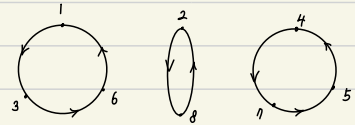
Ex 9.3

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ord}_\sigma(1) = \{1, 3, 6, 1, 3, 6, \dots\} = \text{orb}_\sigma(3) = \text{orb}_\sigma(6)$$

$$\text{ord}_\sigma(2) = \{2, 8\} = \text{orb}_\sigma(8)$$

$$\text{ord}_\sigma(4) = \{4, 7, 5\} = \text{orb}_\sigma(7) = \text{ord}_\sigma(5)$$



EX	$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\text{orb}_\tau(1) = \{1, 3, 4, 1, 3, 4, \dots\} = \text{orb}_\tau(3) = \text{orb}_\tau(4)$ $\text{orb}_\tau(2) = \{2, 6, 2, 6, \dots\} = \text{orb}_\tau(6)$ $\text{orb}_\tau(5) = \{5\}$ $\text{orb}_\tau(7) = \{7\}$ <p>따라서 $\{1, 3, 4\}, \{2, 6\}, \{5\}, \{7\}$ 궤도는 4개.</p> <p>→ 각각 원소가 모두 나타나며, 한번씩만 나타남.</p> <p>→ 분할을 줌.</p> <p>• Cycles (순환치환)</p>
Def 1	치환 $\sigma \in S_n$ 이 두 원소 이상을 포함하는 궤도가 하나 뿐일 때 σ 를 순환치환 (cycle)
EX	$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1, 3) : \text{순환치환}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 3)(2, 4) : \text{순환치환 아니다.}$ <p style="text-align: center;">여기 없으면 그냥 둘개 (재배치)</p>
Def	순환치환의 길이 (length) 는 가장 큰 궤도에 포함된 원소의 개수
EX)	$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1, 3, 5, 4) \text{의 길이는? } 4$
Ex 9. 11	<p>• 치환을 순환치환들의 곱으로 표현</p> $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ 을 순환치환들로 표현 하면}$ $= (1, 3, 6)(2, 8)(4, 7, 5)$ <p>→ 이 순환치환들은 disjoint.</p>
(EX)	<p>↓ 자기 자신으로 가면 쓸 필요 없음. ↓ 순서 바뀌어도 같은 σ</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (2, 5, 7)(3, 4)$

Thm 9.8 모든 치환 $\sigma \in S_n$ 은 서로 소인 순환치환들의 곱으로 나타낼 수 있다.

(pf) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 를 σ 의 궤도라 하자.

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & x \in \beta_i \text{ 인 경우} \\ x & x \notin \beta_i \text{ 인 경우} \end{cases} \quad \text{로 정의.}$$

Truth : μ_i 는 순환치환

μ_i 는 서로 소

Claim) $\sigma = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_r$

$$(pf) \mu_1 \mu_2 \dots \mu_r(x) = \sigma(x)$$