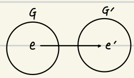
32강 13절 3 핵의 성질

Corol 13.18 $\phi: G \to G'$ 를 준동형사상이라 하자.

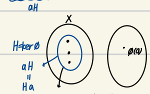
$\Rightarrow$ ϕ가 일대일함수 이기 위한 필요충분조건은 $ker(\phi) = \{e\}$ 이다.

(pf) ($\Rightarrow$) 자명하다.



($\Leftarrow$) $|\{x \in G \mid \phi(x) = \phi(a)\}| = |aH| = |H| = 1$

aH



$\phi(a)$로 가는 이 점 개수가 1개.

$\Rightarrow$ 따라서 ϕ는 일대일.

$\Rightarrow$ $\phi: G \to G'$ 가 동형사상임을 보이기 위해서는

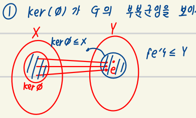
1. ϕ가 준동형사상 임을 보이자.
2. $ker(\phi) = \{e\}$ 을 보이자.
3. ϕ가 G 에서 G' 위로의 사상함을 보이자.

Def 13.19 H가 G의 부분군이라 하자.

모든 $g \in G$ 에 대하여 $gH = Hg$ 이면 H를 G의 정규 부분군 (normal subgroup)

Corol 13.20 $\phi: G \to G'$ 가 준동형사상일 때 $ker(\phi)$는 G의 정규 부분군 이다.

(pf) ① $ker(\phi)$ 가 G의 부분군임을 보이자 ($\to$ Thm 13.15 에서 이미 보였다.)



② $ker(\phi)$ 가 G의 정규부분군임을 보이자.

$\Rightarrow$ $gH \subset Hg$ 임을 보이자.

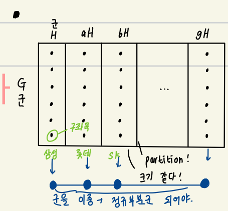
$\Rightarrow$ $x = gh$ 라 하면 $\phi(x) = \phi(g)\phi(h) = \phi(g)$

$\Rightarrow$ $e' = \phi(x)\phi(g)^{-1} = \phi(xg^{-1})$

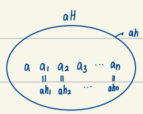
$\Rightarrow$ 따라서, $xg^{-1} \in H$ 이므로 $x \in Hg$ 이다.

$\Rightarrow$ $Hg \subset gH$ 임을 보이는 것도 비슷한 방식으로 하면 된다.

* 정규부분군이 정의되는 이유) 굉장히 중요
left coset 들의 집합이 군이 되기 위해서는 H가 정규부분군이 되어야 함



33강 : 14절 | 잉여군 (factor group)

Def)	H가 G의 부분군이라 하자.
	→ G/H 는 G 에서 H의 좌잉여류들의 집합이다.
질문 :	G/H 가 언제 군이 될까?
①	이항연산 정의
	⇒ $(aH)(bH) = (ab)H$
②	잘 정의되었는가 ?
	→ $\underbrace{aH = a'H}_{\text{aH 라는 집합에서 대표자를 a와 a'로 뽑았을때.}}$, $\underbrace{b'H = bH}_{\text{bH 라는 집합에서 대표자를 b와 b'으로 뽑았을 때!}}$ 라 하자.
	⇒ $(aH)(bH) = (ab)H$
	⇒ $(a'H)(b'H) = (a'b')H$
	⇒ 그러면 $(ab)H = (a'b')H$ 인가?
Summary)	$\underbrace{G/H}_{aH,\, bH \cdots \text{ 집합}}$ 가 군이 되기 위해 성립해야 하는 것
	⇒ $aH = a'H$, $bH = b'H$ 이면 $(ab)H = (a'b')H$ 이다.
주장 1 :	" $aH = a'H$ " 는 " 어떤 $h \in H$ 에 대하여 $a' = ah$ " 와 동치이다.
	(pf)
	
	⇒) $a'h_1 = ah_2$ 이므로 $a' = a\underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\text{그냥 어떤 } h^*\text{로 쓸 수 있음}}$ ah^*
	⇐) aH 의 정의에 의해 $aH \underset{\text{모르면}}{=} a'H$ 가 성립.

34강 : 14절 2 잉여군

Review) * G/H = { H의 좌잉여유들의 집합 }

= { H, aH, bH, ⋯ }

* G/H 에서 연산

$(aH)(bH) = (ab)H$

* 이 연산이 잘 정의되었는가?

a'H = aH 이름만 다를뿐

a, a'

$(aH)(bH) = (ab)H$
$(a'H)(b'H) = (a'b')H$ 같은가?

* $aH = a'H \Leftrightarrow a' = ah$

* $a' = ah_1,\ b' = bh_2 \Rightarrow a'b' = abh_3 \quad (h_1, h_2, h_3 \in H)$

이 h는 같을 필요 없으므로 분리해서 쓴다.

H가 어떤 조건을 만족 ⇒ G/H 의 연산이 잘 정의되었음!

H가 정규부분군 (normal subgroup)

다시 한번 더
정규부분군을 정의한 이유)
G/H 가 군을 이루게 하고 싶다
- 그러기 위해서는 연산이 잘 정의되어야 하므로 이렇게 연산을 정의.

Review) G/H 가 군이 되기 위해 성립해야 하는 것 :

$aH = a'H,\ bH = b'H$ 이면 $(ab)H = (a'b')H$ 이다.

→ 주장1 을 이용하여 다시 말하면

$a' = ah_1,\ b' = bh_2\ (h_1, h_2 \in H)$ 이면 $a'b' = abh_3$ 인 $h_3 \in H$ 가 있다.

Thm 14.4 H가 G의 부분군이라 하자.

→ H가 G의 정규부분군이면 (즉 모든 $a \in G$ 에 대하여 $aH = Ha$ 이면)

G/H 에서 이항연산이 잘 정의된다.

(Pf) $a'b' = ah_1bh_2 = a(h_1b)h_2 = a(bh_1')h_2 = abh_1'h_2 = abh_3$ ∎

정규부분군이라 $h_1b = bh_1'$

Thm 14.5 H가 G의 정규 부분군이라 하자.

→ G/H 는 이항연산 $(aH)(bH) = (ab)H$ 아래서 군이다.

Def 14.6 G/H 을 H에 의한 G의 잉여군 (factor group or quotient group)

(pf of Thm 14.5) ① 결합법칙

→ $[(aH)(bH)](cH) = (ab)H(cH) = (ab)cH = abcH$

⇒ $(aH)[(bH)(cH)] = (aH)(bc)H = a(bc)H = abcH$

② 항등원 : $H (= eH)$ 가 항등원

⇒ $(aH)(eH) = (ae)H = aH$

⇒ $(eH)(aH) = (ea)H = aH$

③ 역원 : aH 의 역원은 $a^{-1}H$

⇒ $(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$

⇒ $(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$ ∎

Ex 14.7 $n\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ 이라 하자.

⇒ 잉여군 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 는 $\mathbb{Z}_n$ 에 동형이다.

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = & \{n\mathbb{Z}, & 1+n\mathbb{Z}, & \cdots, & (n-1)+n\mathbb{Z}\} & : \text{a group} \\ \cong & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathbb{Z}_n = & \{0, & 1, & \cdots, & n-1\} & \end{array}$$

35강 : 14절 3 준동형사상의 기본정리

• 준동형사상의 기본정리

Truth) $\phi : G \to G'$ 이 준동형사상이라 하자.

⇒ $H = \ker \phi$ 는 G의 정규부분군

⇒ 그러므로 G/H 는 G 의 잉여군.

Thm 14. 11) (Part 1)

⇒ $\phi : G \to G'$ 이 준동형사상이고 $H = \ker \phi$ 라 하자.

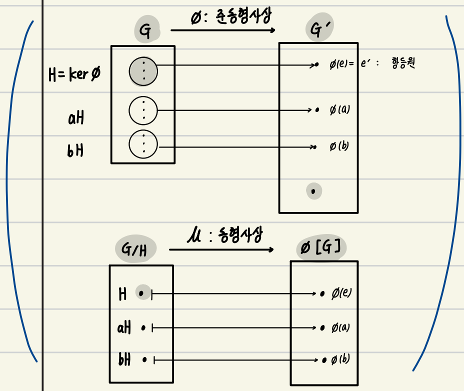
change: one-to-one 역할 onto 역할

⇒ $\mu : G/H \to \phi[G]$ 라 하자.

$aH \longmapsto \phi(a)$

⇒ 그러면 μ 는 잘 정의되고 동형사상이다.

☆



(pf) (i) μ가 잘 정의됨을 보이자.

⇒ $aH = a'H$ 라 하자.

⇒ $\mu(aH) = \phi(a)$

$\|$ 이므로 잘 정의

⇒ $\mu(a'H) = \phi(a') = \phi(ah) = \phi(a)\underbrace{\phi(h)}_{\ker\phi = \{e'\}} = \phi(a)e' = \phi(a)$

준동형사상이므로

(ii) μ가 동형사상임을 보이자.

⇒ 준동형사상

⇒ 일대일 함수

⇒ 전사함수

예제) $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

$a \mapsto a \pmod{n}$

γ는 준동형사상이고 전사함수이다.

⇒ $\ker(\gamma) = n\mathbb{Z}$

⇒ $\mu : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ (10절 참고)

$a+n\mathbb{Z} \mapsto a$

⇒ μ는 동형사상이다.

* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ 임을 보여라.

$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

$a \longmapsto a \pmod{n}$: 준동형

$\ker \phi = n\mathbb{Z}$

준동형사상 기본정리에 의해, $\mu : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ 인 동형사상 존재

$a+n\mathbb{Z} \mapsto a$

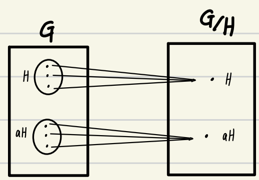
Thm 24.9) $H \triangleleft G$ 라 하자.

그러면 $\gamma : G \to G/H$ 는 준동형사상이다.

$x \mapsto xH$

게다가 $\ker(\gamma) = H$ 이다.

⇒ γ 를 canonical homomorphism 라 부른다.



(pf) ① γ는 준동형사상이다.

② $\ker(\gamma) = H$ 이다.

Thm 14.11 $\phi: G \to G'$ 을 kernel (핵) H를 갖는 준동형사상이라 하자.

(1) $\mu : G/H \to \phi[G]$ 는 동형사상이다.

$gH \mapsto \phi(g)$

연결고리 (2) $\gamma : G \to G/H$ 라 하면 $\phi = \mu \circ \gamma$ 을 만족한다.

$x \mapsto xH$

그림)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \phi[G] \\ G/H \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

(pf) ✓ $\phi(g)$

✓ $\mu \cdot \gamma(g) = \mu(gH) = \phi(g)$

$\mu \cdot \gamma = \phi$ ∎

(pf2) Let $x, y \in G$.

Then $\gamma(xy) = (xy)H = (xH)(yH) = \gamma(x)\gamma(y)$

So γ is a homomorphism.

Since $xH = H$ if and only if $x \in H$, we see that the kernel of γ is indeed H. ∎

36강 14절 4 정규부분군의 조건, 자기동형사상.

Thm 14.13 H가 G의 부분군이라 하자.

⇒ $H \triangleleft G$ 의 3가지의 동치조건은 다음과 같다.

① 모든 $g \in G$ 에 대해 $gH = Hg$

② 모든 $g \in G$ 에 대해 $gHg^{-1} = H$ 이다.

③ 모든 $g \in G$, $h \in H$ 에 대해 $ghg^{-1} \in H$ 이다. (이것만 기억)

Claim Procedure

① ab^{-1} 통해 부분군임

② ghg^{-1} 통해 정규부분군임

(pf) (1) ⇒ (2)

(2) ⇒ (3)

(3) ⇒ (1)

내부자기동형사상

Def 14.15) ① $\phi : G \to G$ 가 동형사상이면 ϕ를 G의 automorphism.

② $i_g : G \to G$ 라 하자.
$x \mapsto gxg^{-1}$

⇒ 그러면, i_g는 G의 자기동형사상이다.

⇒ 이 때, i_g를 g에 의한 G의 내부자기동형사상 (Inner automorphism)

37강 | 15절 1 : 잉여류 계산 1

Factor group computations.

* $A/B \simeq C$ A, B, C : 군

* 준동형사상의 기본정리

$\phi : \underset{A}{G} \to \underset{C}{G'}$: 준동형사상 (onto)

⇒ $\mu : G/H \to \phi[G]$ $H = \boxed{\ker \phi}$ (B, C)
$aH \mapsto \phi(a)$

* $\phi : A \to C$ (onto)

$\ker \phi = B$

(Ex) $G/\{e\} \simeq G$

$g\{e\} \xrightarrow[\text{일대일 대응}]{} g$ 이름만 바꾼거니까 동형인 것은 당연.
준동형사상의 가정 써보자.

* $\phi : G \longrightarrow G$ $G/\{e\} \to G$
$g \longmapsto g$: onto

$\ker \phi = \{e\}$

⇒ $\mu : \underbrace{G/\{e\} \to G}_{\text{동형}}$: 동형사상

(Ex) $G/G \simeq \{0\}$

(pf) G 하나 뿐. 원소가 하나 짜리 집합이므로 이름 바꾸기 가능 (동형)

$\phi : G \longrightarrow \{0\}$
$g \longmapsto 0$

$\ker \phi = G$

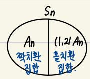
by (준동형사상의 기본정리) ⇒ $\mu : G/G \to \{0\}$: 동형사상
eG 뿐 $\longmapsto 0$

$G/H = \{H, aH, bH, \cdots\}$

$G/G = \{G, \cancel{aG}\} = \{G\}$ ($aG = G$)

(Ex 15.4) $S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$

(pf) $S_n/A_n = \{A_n, (1,2)A_n\}$ → 원소 2개!



* $\phi : S_n \to \mathbb{Z}_2$

$\sigma \longmapsto \begin{cases} 0 : \sigma\text{가 짝치환} \\ 1 : \sigma\text{가 우치환} \end{cases}$

$\ker \phi = A_n$

(Ex 15.7) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6) / \langle (0,1) \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$

(pf) $\phi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2$

$(a, b) \longmapsto a$ $\boxed{\text{projection}}$

$\ker \phi = \langle (0,1) \rangle = \{(0, b) \mid b = 0, \cdots, 5\}$

$\left(\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ (0, b) &\longmapsto 0 \\ (1, b) &\longmapsto 1 \end{aligned} \right)$ 이렇게 써도 됨.
근데 projection 으로 쓰면 더 간단.

$\mu : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 / \langle (0,1) \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

$(a,b) + \langle (0,1) \rangle \longmapsto a$ ∎

FHT에 의해서 μ는 동형사상이다.

↳ fundamental Homomorphism Thm

Thm 15.8) $G = H \times K$ 라 하자.

① $\bar{H} = \{(h, e) \mid h \in H\} \triangleleft G$

② $(H \times K)/\bar{H} \simeq K$

(pf) ① $\bar{H} \triangleleft G$ 임을 보이기 위해

모든 $g \in G$, $h \in \bar{H}$ 에 대하여 $ghg^{-1} \in \bar{H}$ 임을 보이면 된다.

⇒ $(h_1, k)(h_2, e)\underbrace{(h_1, k)^{-1}}_{= (h_1^{-1}, k^{-1})} = (h_1 h_2 h_1^{-1}, \underbrace{kek^{-1}}_{= kk^{-1} = e}) = (h_1 h_2 h_1^{-1}, e) \in \bar{H}$ (뒤 성분이 e 이기만 하면 됨)

② $\phi : H \times K \longrightarrow \underset{\{e\} \times K \text{ 라 쓰자.}}{K}$

$(h, k) \longmapsto (e, k)$

⇒ $\ker \phi = \bar{H} = H \times \{e\}$

⇒ FHT 에 의해서 $\mu : (H \times K)/\bar{H} \to \{e\} \times K$

$(h_1, k)\bar{H} \longmapsto (e, k)$ ∎

Thm) $G = H \times K$ 라 하자.

① $\bar{K} = \{(e,k) \mid k \in K\} \trianglelefteq G$

② $(H \times K)/\bar{K} \simeq H$

(pf) 직접 해보기

(Ex 15.10) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle(0,2)\rangle \cong ?$

(pf) $\phi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \longrightarrow$

0~5 (0,0) 를 같은 걸로 봄
(0,2)
(0,4)
나머지 (0,1) (0,3) (0,5) 도 같은 걸로

홀짝으로

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / \langle(0,2)\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

$\phi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

$(a, b) \longmapsto (a, b \pmod 2)$

$\ker \phi = \langle(0,2)\rangle$ ∎

(Ex) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$ with $H = \{(0,0), (0,3), (2,0), (2,3)\}$

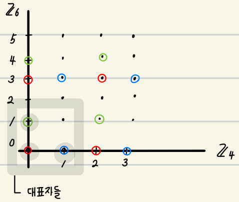
$$= \langle \{(0,3), (2,0)\} \rangle$$

(pf)

$\phi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3}$

$(a, b) \longmapsto (a \pmod 2, b \pmod 3)$

$\ker \phi = H$



2
1
0

$0, 1 \rightarrow \mathbb{Z}_2$

$\rightarrow \mathbb{Z}_3$

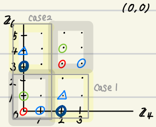
$\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

By FTH, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ∎

(Ex 15. 11) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle(2,3)\rangle \simeq ?$ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$

24개 2개 → $24/2$ = 12개 = 4×3 or $2\times2\times3$.

$\langle(2,3)\rangle = \{(2,3), \cancel{(4,6)}\}$ 2개짜리 원소
$(0,0)$



case 1 case 2
✓ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ vs $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

$|\langle(1,0)\rangle| = 4$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$|(1,0)+H| = 4$ order 2 or 3

Thm 15.9 순환군의 잉여군은 순환군이다.

* $G=\langle a\rangle$
생성원

$H \triangleleft G$

G/H : 순환군? aH ← 생성원

주장 : $G/H = \langle aH\rangle$

증명 : 모든 $bH \in G/H$ 에 대하여

$bH = a^kH = (aH)^k \in \langle aH\rangle$
$b=a^k$

• 단순군 (simple group)

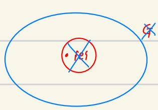
Def 15.14 군이 비자명 진정규부분군들을 가지지 않는다고 하면
그 군을 단순군 (simple group)

Thm 15.15 A_n은 $n\geq5$ 에 대해 단순군

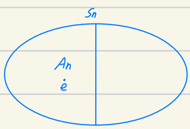
(pf) 생략

* 비자명 진정규부분군 X

G: simple group



* $n\geq5$ S_n



40강 15절 5 단순군

pf (*) $N \triangleleft G \Rightarrow \phi[N] \triangleleft \phi[G]$

① $\phi[N] < \phi[G]$ pass 까먹지 말기.

② $\phi[N] \triangleleft \phi[G]$

$H \triangleleft G$ $g \in G$, $h \in H$

$ghg^{-1} \cdots \in H$

Thm 15.16 $\phi: G \to G'$ 이 군 준동형사상이라고 하자.

$\Rightarrow N \triangleleft G$ 이면 $\phi[N] \triangleleft \phi[G]$ 이다. (*)

$\Rightarrow N' \triangleleft G'$ 이면 $\phi^{-1}[N'] \triangleleft G$ 이다.

$\phi[G]$ (핵)

$g \in \phi[G]$, $h \in \phi[N]$

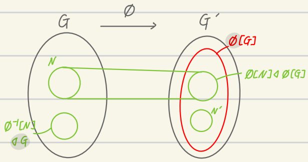
$ghg^{-1} \cdots \in \phi[N]$

$g = \phi(a)$, $h = \phi(b)$ $a \in G$, $b \in N$

$= \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1} = \phi(a)\phi(b)\phi(a^{-1})$

$= \phi(aba^{-1}) \in \phi[N]$

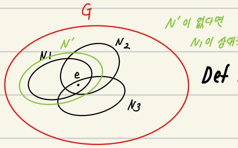
$N \triangleleft G$ 이므로 $aba^{-1} \in N$



maximum → 항상 제일 큼

상대적으로 제일 큼

• 극대정규부분군 (maximal normal subgroup of a group)



N_1 보다 크면서 G보다 작은 Normal subgroup 이 없으면!

Def 15.17 M이 G의 정규부분군으로서 $M \neq G$ 이고

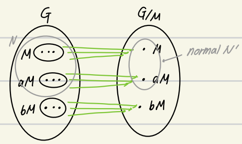
M을 포함하는 G가 아닌 진정규부분군 N이 존재하지 않는다면,

M을 G의 극대정규부분군 (maximal normal subgroup)

Thm 15.18) M이 G의 극대정규부분군이 될 필요충분조건은 G/M 이 단순군.

* Canonical homomorphism

$\gamma: G \to G/M$



M : max. nor. sub $\Leftrightarrow$ G/M : simple

$\Rightarrow$) 귀류법 G/M 이 simple 이 아니라고 하자.

그러면 $\{M\}$ 이나 G/M 이 아닌 G/M 의 normal subgroup N' 이 존재한다.

앞 정리에 의해서 $\underbrace{\gamma^{-1}[N']}_{\text{let } N} \triangleleft G$ 이다.

① $N \neq G$ 임을 보이자. : N' 이 G/M 전체가 아니므로 $N \neq G$ 이다.

② $N \supset M$: $N' \ni M$ 이므로 $\Rightarrow$ $\gamma^{-1}[N'] \supset M$

③ $N \neq M$: $N' \neq \{M\}$ 이므로 $N \neq M$

$\Leftarrow$) 귀류법 M이 maximal 이 아니라 가정하자.

G, M이 아닌, 그리고 M을 포함하는 normal subgroup N 이 존재한다.

앞 정리에 의해 $\gamma[N] \triangleleft G/M$ 이다.

① $\gamma[N] \neq G/M$ 임을 보이자.

$N \neq G$ 이므로 성립

② $\gamma[N] \neq \{M\}$ 임을 보이자.

$N \neq M$ 이므로 성립.

44강 15절 8 중심 (center)

Def

G가 군이라고 하자.

$\exists$ 중심 (center) $Z(G) = \{ z \in G \mid \forall g$ 에 대하여 $zg = gz \}$ 이다.

사실)

① $Z(G) < G$

② $Z(G) \triangleleft G$

③ $Z(G)$는 가환군이다.

(pf)

① $a, b \in Z(G)$ 이면 $ab^{-1} \in Z(G)$ 인가?

$b^{-1}g = gb^{-1}$

$\exists \quad a(b^{-1}g) = a(gb^{-1}) = (ag)b^{-1} = (ga)b^{-1} = g(ab^{-1})$

$(b^{-1}g) = (g^{-1}b)^{-1} = (bg^{-1})^{-1} = gb^{-1}$

② $gzg^{-1} \in Z(G)$ 인가?

$gzg^{-1} = gg^{-1}z = z \in Z(G)$

* $(g\underset{Z(G)}{z}g^{-1})k \overset{??}{=} kgzg^{-1}$

좌 $= gzg^{-1}k = zgg^{-1}k = zk$

우 $= kgzg^{-1} = kgg^{-1}z = kz = zk$

③ $a, b \in Z(G) \longrightarrow ab = ba$

(Ex)

① $Z(S_3) = \{\rho_0\}$

* $Z(S_3) = \{\rho_0\}$

$\rho_1 \boxed{\cancel{\mu_1}} \neq \boxed{\cancel{\mu_1}} \rho_1$

$\rho_1\mu_1 = (1\ 2\ 3)(2\ 3)$

$= (1\ 2)$

$\mu_1\rho_1 = (2\ 3)(1\ 2\ 3)$

$= (1\ 3)$

$(1\ 2) \neq (1\ 3)$

$\rho_2 \square \neq \square \rho_2$

$\mu_1 \square \neq \square \mu_1$

$\mu_2 \square \neq \square \mu_2$

$\mu_3 \square \neq \square \mu_3$

② $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) = \{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_5$

45강 15절 9 교환자 부분군 (commuatator subgroup)

Def) G가 군이라 하자.

→ 교환자 부분군 (commuatator subgroup)

$C(G) = \langle \{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\} \rangle$

사실) ① $C(G) < G$

② $C(G) \triangleleft G$

Thm) $G/C(G)$ 는 가환군이다.

(pf) $(aC(G))(bC(G)) \stackrel{?}{=} (bC(G))(aC(G))$

$\quad\quad abC(G) \quad\quad\quad\quad baC(G)$

$ab = ba\underbrace{c}_{\in C(G)}$

$ab = bac$ 이라 하면 $\underbrace{c}_{\in C(G)} = a^{-1}b^{-1}ab = (a^{-1})(b^{-1})(a^{-1})^{-1}(b^{-1})^{-1}$ ∎

Thm) N이 G의 정규부분군이라 하자.

→ G/N 이 가환군이 될 필요충분조건은 $C(G) \le N$ 이다.

* factor group (= quotient group) G/H

의미) G/N 이 가환군인 G의 가장 작은 정규부분군 N이 C(G)라는 것이다

* G/N : 가환 ⟺ $C(G) \le N$

(⟹)

아이디어) G/N 이 가환이다 $=$ $abN = baN \quad \forall a,b \in G$

$\exists\, n \in N$ s.t $ab = ban$

$n = a^{-1}b^{-1}ab \in C(G)$

$N \supset \{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\}$

$N \ge \underbrace{\langle \{aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in G\} \rangle}_{= C(G)}$

(⟸)

목표 : $abN = baN$

고민 — ($ab = ban$ $(n \in N)$ 인 n이 있을까?? $n = a^{-1}b^{-1}ab \in C(G) \subset N$)

$abN = ab\underbrace{(b^{-1}a^{-1}ba)}_{\in N}N$

$= baN$ 이므로 O.K ∎

* Thm 7.6) If G is a group and $a_i \in G$ for $i \in I$, then the subgroup H of G generated by $\{a_i \mid i \in I\}$ has as elements precisely those elements of G that are finite produts of integral powers of the a_i, where powers of a fixed a_i may occur several times in the product.

The commutators certainly generate a subgroup C ; we must show that it is normal in G. Note that the inverse $(aba^{-1}b^{-1})^{-1}$ of a commutator is again a commutator, namely, $bab^{-1}a^{-1}$. Also $e = eee^{-1}e^{-1}$ is a commutator. Thm* 7.6 then shows

46강 18절 환

- 환과 체 (Rings and fields)

⟨환 Ring⟩

동기) $\mathbb{Z}$는 두개의 연산 $+$와 $\cdot$를 가진다.

→ $+$와 $\cdot$을 동시에 가지는 수학적 대상을 정의하는 것이 자연스럽다!