- Contents -

I. 기출문제

1997년시행기출(Cauchy-Riemann의 방정식 ; 조화공액함수)

다음 조화함수의 조화공액을 구하여라.

$$u = Arg(z)\ (-\pi < Arg(z) < \pi)$$ (7점)

1998년시행기출(Liouville의 정리)

복소평면 $\mathbb{C}$에서 미분가능한 정함수(entire function)가 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 조건 $f(z) = f(z+2) = f(z+i)$를 만족하고, $f(0) = i$라고 한다. 이 때, $f(1+i)$의 값을 구하시오. (단, i는 허수단위) (6점)

1996년시행모의시험(복소선적분;유수의 정리)

복소선적분 $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{(e^z-1)dz}{z(z-1)(z-i)}$ 을 계산하시오.(3점)

1996년시행기출(복소선적분 ; 유수의 정리)

복소선적분 $\displaystyle\int_{|z|=1} z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$을 구하여라.(4점)

1998년시행추가임용기출(복소 선적분;유수의 정리)

$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{(z^2+7)e^{2z}}{(z-3)(z+1)^2}\,dz$의 값을 구하시오.(5점)

2000년시행기출(복소 선적분;유수의 정리)

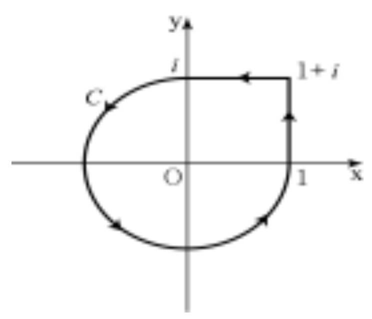
n이 임의의 정수일 때, 복소적분 $\displaystyle\int_{|z|=1} z^n dz$의 값을 구하시오.(5점)

2001년시행기출(Liouville의 정리)

복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 정함수(entire function) f가 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $Ref(z) > 1$을 만족시킨다. 이 때 상수함수임을 보여라.(5점)

2002년 시행기출(Green의 정리)

곡선 C는 다음 그림과 같이 $1,\ 1+i,\ i$를 연결한 두 선분과 단위원의 일부로 이루어져 있다. 이 때, $\displaystyle\int_C \bar{z}dz$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) (5점)



2003년 시행기출(Cauchy의 부등식, Liuville의 정리)

복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 함수(entire function) f가 다음 두 조건을 모두 만족시키면 $f(z) = z$임을 보이시오. (총 5점)

(i) $f(1) = 1$
(ii) 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $\lvert f(z)\rvert \le \lvert z\rvert$

2004년 시행기출(Cauchy-Riemann의 방정식)

복소평면 C 안의 영역(domain) D에서 정의된 함수 $f: D \to C$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z \in D$에 대해 $Im\,f(z) = 2Ref(z)$가 성립한다. $f(z)$는 D에서 상수임을 보이시오. (5점)

Ⅱ. 내용정리

※괄호 안에 적당한 말을 연필로 쓰고 아래의 답을 확인 하세요

1. 복소수계와 복소함수

1.1. 복소수계의 정의와 극형식

정 의 1

실수계(real number system)의 알려진 성질을 이용하여 복소수계$\mathbb{C}$를 구성하자.

(1)$\mathbb{C} \equiv \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$z_1=(x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2=(x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여

$(x_1, y_1)=(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1=x_2, \ y_1=y_2$

$\alpha z_1 \equiv (\alpha x_1, \alpha y_1)$, $z_1+z_2 \equiv (x_1+x_2, y_1+y_2)$,

$z_1 \cdot z_2 \equiv (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2)$

이 때 $\mathbb{C}$를 **복소수계**(Complex number system)라 한다.

(2) $(x, 0) \equiv x \in \mathbb{R}$, $(0, 1) \equiv i=(x, 0)+(0, y)$

(3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \equiv (x, y)=x+y(0, 1)=x+yi$이고

$Re(z) \equiv x$: z의 **실수부**(real part),

$Im(z) \equiv y$: z의 **허수부**(imaginry part)

이 때 $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

(4) $z=x+yi \in \mathbb{C}$에 대하여

$\bar{z} \equiv x-yi$: z의 **공액복소수**(complex conjugate)

$|z| \equiv \sqrt{z\bar{z}}$ $(=\sqrt{x^2+y^2})$: z의 **절대치**(absolute value혹는modulus) 이때 $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

정 리 1

(1) $|Re(z)| \le |z|$, $|Im(z)| \le |z|$

(2) $Re(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z)=$(1) $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$)

(3) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2}=\bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$, $\bar{\bar{z}}=z$

(4) $|z|^2=z \cdot \bar{z}=|\bar{z}|^2$, $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

(5) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$(삼각부등식)

정 의 2

$z \in \mathbb{C}$에 대하여 $z \neq 0$일 때

(1) $\arg(z) \equiv z$와 x축의 양의 방향과의 사이각이고 이를 z의 편각(Argument)이라 하고,

(2) $Arg(z)$는 $\arg(z)$의 $(-\pi, \pi]$의 원소를 뜻하고 $\arg(z)$의 주치(Principal value)라 한다.

NOTE

(1) $|z| \equiv r$, $Arg(z) \equiv \theta$라 할 때 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=$(2) $re^{i\theta}$)**오일러의 공식**)$(-\pi < \theta \le \pi)$이고 이를 z의 **극형식**(Polar form)이라 한다.

(2) $\arg z \equiv Arg\ z+$(3) $2n\pi$) $(n \in \mathbb{Z})$

1) $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

2) $re^{i\theta}$

3) $2n\pi$

정 리 2

(1) $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

(2) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=$(4) $\arg z_1-\arg z_2$)

(3) $(r(\cos\theta+i\sin\theta))^n=$(5) $r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$) : De Moivre 공식

(4) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ $(r_1, r_2>0)$

$\Leftrightarrow$(6) $r_1=r_2$, $\theta_1=\theta_2+2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$)

1.2.복소수열의 극한

정 의 3

$\mathbb{C}$상의 수열 $\{z_n\}$에 대하여

(1) $\lim_{n\to\infty} z_n=z_0$(혹은 $z_n \to z_0$)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. (7) $n \ge N \to |z_n-z_0|<\varepsilon$)

(2) $\{z_n\}$: Cauchy수열

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. (8) $m>n \ge N \to |z_m-z_n|<\varepsilon$)

정 리 3

복소수열 $\{z_n\}$에 대하여

(1) $\{z_n\}$: 수렴 $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$: Cauchy수열

이 사실은 실수열에 대해서도 성립하고 이를 **Cauchy의 판정법**이라 한 다.

(2)복소수열 $\{z_n\}$, $z_0=x_0+iy_0$에 대하여

(단 $z_n=x_n+iy_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=x_0, \ \lim_{n\to\infty} y_n=y_0$$

1.2. 복소함수의 극한과 연속

정 의 4

개연결집합 $D(\subset \mathbb{C})$, $f : D \to \mathbb{C}$에 대하여

(1) $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ s.t. $0<|z-z_0|<\delta \to |f(z)-w_0|<\varepsilon$

(2) f : $z=z_0$에서 **연속**(Continuous)(혹은 **점별연속**)

$\Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists \delta(\varepsilon, z_0)>0$ s.t. $|z-z_0|<\delta \to |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

(3) f : **평등연속**(Uniformly continuous)(혹은 **균등연속**)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists \delta(\varepsilon)>0$ s.t. $|z-w|<\delta \to |f(z)-f(w)|<\varepsilon$

정 리 4

개연결집합 $D(\subset \mathbb{C})$, $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$에 대하여

(1)함수극한과 연속의 수열판정법

(i) f : z_0에서 연속

$\Leftrightarrow$($\{z_n\} \subset D$, $z_n \to z_0 \Rightarrow$(9) $f(z_n) \to L$)

4) $\arg(z_1)-\arg(z_2)$

5) $r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

6) $r_1=r_2$, $\theta_1=\theta_2+2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

7) $n \ge N \to |z_n-z_0|<\varepsilon$

8) $m>n \ge N \to |z_m-z_n|<\varepsilon$

9) $f(z_n) \to L$

(ii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$

$\Leftrightarrow$($\{z_n\} \subset D\setminus\{z_0\}$, $z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0)$)

(2) $K(\subset \mathbb{C})$: 긴밀집합(폐유계), $f: K \to \mathbb{C}$ 가 연속일 때

(i) $|f|$는 K에서 최대값과 최소값을 갖는다.

(ii) f는 K에서 평등연속이다.

정 리 5

(1) $\exists \lim_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow f$의 극한값은 ([10] 경로)에 상관없이 일정

(2) $f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$: $z = z_0$에서 연속

$\Leftrightarrow u,\ v$: $z = z_0$에서 연속

1.3. 초등함수(Elementary functions)

NOTE

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s.t. (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x$

(ii) ([11] f는 정함수(entire fct))

(즉 $\mathbb{C}$전체에서 미분가능)

(iii) ([12] $f'(z) = f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$)

$\Rightarrow \forall z = x + iy \in \mathbb{C},\ f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

정 의 5

(1) $e^z \equiv$ ([13] $e^x(\cos y + i\sin y)$)

(2) $\sin z \equiv$ ([14] $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$)

$\cos z \equiv$ ([15] $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$)

$\tan z \equiv$ ([16] $\frac{\sin z}{\cos z}$)

$\sec z \equiv$ ([17] $\frac{1}{\cos z}$)

$\operatorname{cosec} z \equiv$ ([18] $\frac{1}{\sin z}$)

$\cot z \equiv$ ([19] $\frac{\cos z}{\sin z}$)

(3) $\sinh z \equiv$ ([20] $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$)

$\cosh z \equiv$ ([21] $\frac{e^z + e^{-z}}{2}$)

(4) $\log z \equiv$ ([22] $\ln|z| + i(Arg(z) + 2n\pi)$ $n \in \mathbb{Z}$) : 다가 함수,

$Log z \equiv$ ([23] $\ln|z| + i\,Arg(z)$) : (일가) 함수

(5) $z^c =$ ([24] $\exp(c\log z)$ $c \in \mathbb{C},\ z \neq 0$) : 다가 함수

NOTE

(1) $\ln$: $(0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ (일가) 함수,

$\log$: ([25] $\mathbb{C}\setminus\{0\}$) $\to \mathbb{C}$ 다가 함수,

Log : ([26] $\mathbb{C}\setminus\{0\}$) $\to \mathbb{C}$ (일가) 함수

(2)다가함수(multiple valued function) $\log$의 편각을 반개구간 $((2k-1)\pi,\ (2k+1)\pi]$($k \in \mathbb{Z}$)로 줄이면 일가함수(single valued function)가 되고 이것을 $\log$의 하나의 **분지(branch)**라 한다.

(3)특히 $k = 0$ (즉 편각이 $(-\pi,\ \pi]$) 일 때의 분지(branch)를 $\log$의 **주분지(principal branch)**라 하고 Log라 표기한다.

이 때 $\log z = Log z + 2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$)이다.

$$= \exp\left(i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)\right)$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

2. 해석함수(Analytic function)

2.1. 복소함수의 미분과 해석함수

정 의 6

(1) f : $z = z_0$에서 **미분가능(Differentiable)**

$\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ ($\equiv f'(z_0)$)

(2)$\mathbb{C}$의 개집합 D, $z_0 \in D$, $f: D(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$에 대하여

(i) f : $z = z_0$에서 **해석적(analytic)**

(혹은 **해석가능, 정칙(Holomorphic)**)

$\Leftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ s.t. ([27] $f: B(z_0, \varepsilon)$ 에서 미분가능.)

(단 $B(z_0,\ \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$)

(ii) f : D에서 **해석적**

$\Leftrightarrow D$의 모든 점에서 미분가능

$\Leftrightarrow D$의 모든 점에서 ([28] 해석적)

(3) f : **정함수(entire function)**

$\Leftrightarrow f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s.t. ([29] $\mathbb{C}$상에서 해석적 (즉 $\forall z \in \mathbb{C}$, f : z에서 해석적))

$\Leftrightarrow f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s.t. $\mathbb{C}$상에서 미분가능(즉 $\forall z \in \mathbb{C}, f$: z에서 미분가능)

정 리 6 (복소함수의 미분공식)

(1) $\frac{d}{dz} c = 0$ (2) $\frac{d}{dz} z = 1$

(3) $\frac{d}{dz}(c f(z)) = cf'(z)$ (4) $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

(5) $\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z)$

(6) $\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

(7) $\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$

(8) $\frac{d}{dz}(f \circ g)(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$(**연쇄율(chain rule)**)

---

10) 경로
11) f는 정함수(enitire function)
12) $f'(z) = f(z)$ ($\forall z \in \mathbb{C}$)
13) $e^x(\cos y + i\sin y)$
14) $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
15) $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
16) $\frac{\sin z}{\cos z}$
17) $\frac{1}{\cos z}$
18) $\frac{1}{\sin z}$
19) $\frac{\cos z}{\sin z}$
20) $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$
21) $\frac{e^z + e^{-z}}{2}$
22) $\ln|z| + i(Arg(z) + 2n\pi)$ $(n \in Z)$
23) $\ln|z| + iArg(z)$
24) $\exp(c\log z)$ $(c \in \mathbb{C}, z \neq 0)$
25) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
26) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
27) $f: B(z_0,\ \varepsilon)$에서 미분가능
28) 해석적
29) $\mathbb{C}$상에서 해석적(즉 $\forall z \in \mathbb{C}$, f : z에서 해석적)

2.2. 코쉬-리만 방정식(Cauchy-Riemann equations)

정　리 7

D는 $\mathbb{C}$의 개연결집합이고 $f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$일 때

(1) $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

s.t. u_x, u_y, v_x, v_y : z_0의 근방에서 존재하고 z_0에서 연속일 때(①)

(ⅰ) f : $z = z_0$에서 미분가능

$\Leftrightarrow$(30) $u_x|_{z_0} = v_y|_{z_0}$, $v_x|_{z_0} = -u_y|_{z_0}$)(Cauchy-Riemann 방정식)

(ⅱ) $f'(z_0) =$(31) $u_x + iv_x|_{z=z_0}$) $\left(= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{z=z_0}\right)$

$=$(32) $v_y - iu_y|_{z=z_0}$) $\left(= -i\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{z=z_0}\right)$

(2) $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ($r \neq 0$)

s.t. $u_r, u_\theta, v_r, v_\theta$: z_0의 근방에서 존재하고 z_0에 연속일 때(②)

(ⅰ) f : z_0에서 미분가능

$\Leftrightarrow$(33) $u_r|_{z_0} = \frac{1}{r}v_\theta\Big|_{z_0}$, $v_r|_{z_0} = -\frac{1}{r}u_\theta\Big|_{z_0}$)(Cauchy-Riemann 방정식)

(ⅱ) $f'(z_0) =$(34) $e^{-i\theta}(u_r + iv_r)|_{z=z_0}$)

$=$(35) $\frac{1}{r}e^{-i\theta}(v_\theta - iu_\theta)\Big|_{z=z_0}$)

NOTE

위의 정리에서

(1)(ⅰ)의 ($\Leftarrow$)방향은 ①을 만족할 때 성립하고 ($\Rightarrow$)은 ①을 만족하지 않더라도 일반적으로 성립한다.

(2)(ⅰ)의 ($\Leftarrow$)방향은 ②를 만족할 때 성립하고 ($\Rightarrow$)은 ②를 만족하지 않더라도 일반적으로 성립한다.

정　리 8 (로피탈의 법칙(L'Hospital's law))

f, g : 미분가능, $\exists \lim_{x\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)} \equiv \alpha \ (\in \overline{\mathbb{R}})$

$\lim_{x\to z_0} f(z) = \lim_{x\to z_0} g(z) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}\left(= \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) = \alpha$

2.3. 조화함수(harmonic function)

NOTE

f : $D(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$가 해석적일 때

$$f'(z) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(z) \\ -i\frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{cases} \quad \text{따라서} \quad f''(z) = (f'(z))'$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdots ① \\ -i\frac{\partial}{\partial y}\left(-i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + i\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \cdots ② \end{cases}$$

①과 ②를 비교하면

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$이다.

30) $u_x|_{z_0} = v_y|_{z_0}$, $v_x|_{z_0} = -u_y|_{z_0}$

31) $u_x + iv_x|_{z=z_0}$

32) $v_y - iu_y|_{z=z_0}$

33) $u_r|_{z_0} = \frac{1}{r}v_\theta\Big|_{z_0}$, $v_r|_{z_0} = -\frac{1}{r}u_\theta\Big|_{z_0}$

34) $e^{-i\theta}(u_r + iv_r)|_{z=z_0}$

35) $\frac{1}{r}e^{-i\theta}(v_\theta - iu_\theta)\Big|_{z=z_0}$

정　의 7

D는 $\mathbb{C}$의 개연결집합일 때

(1) $h: D \to \mathbb{R}$ s.t. (ⅰ) D에서 연속인 1계, 2계 편도함수를 가지고,

(즉 D에서 C^2)

(ⅱ) D에서 (36) $h_{xx} + h_{yy}$) $= 0$ (Laplace 방정식)

$\Leftrightarrow$ h: D에서 조화적(Harmonic)혹은 조화함수(Harmonic function)

(2) $u, v: D \to \mathbb{R}$에 대하여

v : u의 조화공액함수(harmonic conjugate function)

$\Leftrightarrow$(ⅰ) u, v : 조화함수이고

(ⅱ) D에서 (37) $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ (즉 u, v가 D에서 코시-리만 방정식)만족.

$\Leftrightarrow f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$: D에서 (38) 해석적)

3. 복소선적분과 코쉬의 적분공식

3.1. 복소선적분의 정의

정　의 8

곡선 C는 미분가능함수 $z(t) = x(t) + iy(t)$: $[a, b] \to \mathbb{C}$로 매개화되고 C를 포함하는 영역 D에 대하여

$f: D \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$가 연속일 때

(1) $\int_C f(z)dz \equiv$(39) $\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$)

$=$(40) $\int_a^b (u(z(t)) + iv(z(t)))(x'(t) + iy'(t))\,dt$)

(2)곡선 C의 길이(length)는

$L \equiv$(41) $\int_C |dz|$) $=$(42) $\int_a^b |z'(t)|\,dt$)

정　리 9 (복소 선적분의 성질)

(1) $\int_C (f(z) + g(z))dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$

(2) $\int_C z_0 f(z)dz = z_0\int_C f(z)dz$ (단 $z_0 \in \mathbb{C}$)

(3) $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$ (단 $-C$: C의 반대방향의 곡선)

(4) $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

(단, $C_1 + C_2$: C_1의 종점을 C_2의 시점에 연결시킨 곡선)

(5) $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$

3.2. Cauchy의 적분공식

NOTE

(1)**단순폐곡선** : 끝점 이외에는 자신과 만나지 않고 연속함수에 의해 매개화 가능한 곡선

(2)**단순연결영역** : 내부에 놓인 임의의 단순 폐곡선의 내부가 그 영역에 속하는 영역

36) $h_{xx} + h_{yy}$

37) $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$(즉 u, v가 D에서 코시-리만 방정식을 만족)

38) 해석적

39) $\int_a^b f(z(t))\,z'(t)dt$

40) $\int_a^b (u(z(t)) + i\,v(z(t)))(x'(t) + i\,y'(t))\,dt$

41) $\int_C |dz|$

42) $\int_a^b |z'(t)|\,dt$

정 리 10

(1)Green의 정리

$D(\subset \mathbb{R}^2)$가 단순연결이고 유계폐영역,

$P(x,y),\ Q(x,y) : D \to \mathbb{R}$는 C^1-함수이고 D의 경계를 곡선 C라 할 때 $\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$ (43) $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$)

(2)Cauchy-Goursat의 정리

f : 단순연결영역 D에서 해석적, C : D내부의 단순폐곡선일 때

$\int_C f(z)\,dz =$ (44) 0)

NOTE (Morera의 정리)

f : 단순연결영역 D에서 연속, $\forall C$: D내부의 단순폐곡선,

$\int_C f(z)\,dz = 0$

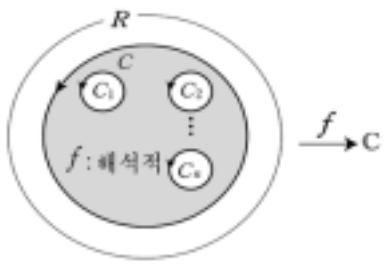
$\Rightarrow f$: D에서 (45) 해석적)

정 리 11

(1)영역 R과 R내부의 양의 방향의 단순폐곡선 C,

$C_1, C_2, \cdots, C_n$: C내부의 양의 방향으로의 단순폐곡선이고 각각의 C_i의 경계와 내부는 서로 만나지 않고 f는 C의 경계 또는 내부이고 각각의 C_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$의 경계와 외부인 영역에서 해석적

$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz =$ (46) $\int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$)



(2)Cauchy의 적분공식(Cauchy's integral formular)

f : 양의 방향(반시계 방향)의 단순폐곡선 C의 경계와 내부에서 해석적,

z_0 : C 내부의 한점일 때

(ⅰ) $\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz =$ (47) $2\pi i f(z_0)$)

(ⅱ) $\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz =$ (48) $\frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$)

(3)선적분의 기본정리

D는 z_1에서 z_2로의 곡선 C를 포함하는 영역, f : $D \to \mathbb{C}$는 연속, $F'(z) = f(z)$ $(\forall z \in D)$일 때

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

정 리 12 (최대, 최소절대치 정리)

R : $\mathbb{C}$의 유계폐영역(긴밀), f : $R \to \mathbb{C}$일 때

(1)최대절대치 정리(Maximum modulus 정리)

f : R에서 (49) 연속), R의 내부에서 (50) 해석적)이고 (51) 상수함수)가 아니면 $|f(z)|$의 최대값을 R의 (52) 경계)에서 갖고 R의 내부에서는 갖지 않는다.

(2)최소절대치 정리(Minimum modulus 정리)

f : R에서 (53) 연속), R의 내부에서 (54) 해석적)이고 (55) 상수함수)가 아니고 $f(z) \neq 0$ $(\forall z \in R)$이면 $|f(z)|$의 최소값을 R의 (56) 경계)에서 갖고 R의 내부에서는 갖지 않는다.

정 리 13

(1)Cauchy의 부등식

$C : |z - z_0| = r$, f : C와 C의 내부에서 해석적,

$|f(z)| \le M$ $(\forall z \in C)$

$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \le$ (57) $\frac{Mn!}{r^n}$) (58) $\forall n = 0, 1, 2, \cdots$)

(2)Liouville의 정리

f : $\mathbb{C}$에서 유계이고 해석적(즉 정함수)

$\Rightarrow f$: (59) 상수)함수

(3)대수학의 기본정리(Fundamental theorem of algebra)

임의의 복소계수 $n(\ge 1)$차 다항방정식은 적어도 하나의 (60) 복소)근을 갖는다.

(따라서 n차 다항방정식은 n개의 근을 갖는다.)

NOTE (Riemann의 정리)

f : $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$가 해석적, 유계이면

$\exists \hat{f}$: $B(z_0, \varepsilon) \to \mathbb{C}$가 해석적

s.t. $f(z) = \hat{f}(z)$ $(\forall z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$

NOTE

복소함수 $f(z)$에 대하여 z_0 : $f(z)$의 영점(zero) $\Leftrightarrow f(z_0) = 0$

정 리 14 (Rouche의 정리)

f, g는 (ⅰ) 단일 폐곡선 C와 C의 내부에서 해석적이고

(ⅱ) $|f(z)| > |g(z)|$ $(\forall z \in C)$

$\Rightarrow C$ 내부에서의 (61) $f+g$) 의 영점의 수

$= C$ 내부에서의 (62) f) 의 영점의 수

43) $\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$
44) 0
45) 해석적
46) $\int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$
47) $2\pi i f(z_0)$
48) $\frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$
49) 연속
50) 해석적
51) 상수함수
52) 경계
53) 연속
54) 해석적
55) 상수함수
56) 경계
57) $\frac{Mn!}{r^n}$
58) $\forall n = 0, 1, 2, \cdots$
59) 상수
60) 복소
61) $f+g$
62) f

NOTE

복소함수론의 주요 정리들의 증명관계는 다음과 같다.

최소절대치 정리

$\Uparrow$

최대절대치 정리

$\Uparrow$

Cauchy-Goursat의 정리 $\Rightarrow$ Cauchy의 적분공식 $\Rightarrow$ 유수의 정리

$\Uparrow$ $\Downarrow$

Green의 정리 + C-R 방정식 Cauchy의 부등식

$\Downarrow$

Liouville의 정리

$\Downarrow$

Rouche의 정리 $\Rightarrow$ 대수학의 기본정리

4. 급수의 표현

4.1. 급수의 수렴성

정 의 9

함수열 $f_n : E(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ($n=1, 2, \cdots$)에 대하여

(1) $f_n(z) \to f(z)$: **수렴**(혹은 **점별수렴**)(Pointwise converge)

$\Leftrightarrow \forall z \in E,\ f_n(z) \to f(z)$

(즉 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \ge N \to |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$)

(2) $f_n \overset{unif}{\to} f$: **평등수렴**(혹은 **균등수렴**)(Uniformly converge)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \ge N \to |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in E$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \ge N \to \| f_n - f \|_\infty < \varepsilon$

(단, $\| f \|_\infty \equiv \sup_{z \in E} |f(z)|$)

정 의 10

함수열 $f_n : E(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ($n=1, 2, \cdots$)에 대하여

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$: **수렴**(혹은 **점별수렴**)(Pointwise converge)

$\Leftrightarrow \forall z \in E,\ s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \to f(z)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$:**평등수렴**(혹은 **균등수렴**)(Uniformly converge)

$\Leftrightarrow \forall z \in E,\ s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \overset{unif}{\to} f(z)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$: **절대수렴**(Absolutely converge)

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$: 수렴

정 리 15

(1)Weierstrass M-판정법

$\{M_n\}$: 실수열로서 $0 \le |f_n(z)| \le M_n$($\forall x \in E$), [63] $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$: 수렴

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$: 평등수렴

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$이 절대수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$은 수렴한다.

---

63) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$: 수렴

NOTE

(1) $\log(z)$의 주분지 $= Log(z)$

(2) z^c의 주분지 $= \exp(c Log(z))$

정 리 16

멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$은 다음의 세 조건중 꼭 하나만을 만족한다.

(1) $z = z_0$에서만 수렴,

(2) $|z - z_0| < a$에서 수렴(특히 절대수렴)하고 $|z - z_0| > a$에서 발산,

(3)모든 복소수 z에서 수렴한다.

이 때 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$의 **수렴반경**(radius of convergence)

을 r이라 할 때 $r = \begin{cases} 0 & (1)\text{의 경우} \\ a & (2)\text{의 경우와 같이 정의하고} \\ \infty & (3)\text{의 경우} \end{cases}$

또한 $r = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

4.2. Taylor의 정리와 Laurent의 정리

정 의 11

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (단, $a_n \in \mathbb{C}$) : **멱급수**(power series)

정 리 17

(1)**테일러**(Taylor)의 정리($z = z_0$**에서 해석적**인 경우)

f 가 $|z - z_0| < R$ ($0 < R \le \infty$)에서 해석적일 때

$f(z) =$ [64] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$) ($|z - z_0| < R$)

: f의 $z = z_0$에서의 **테일러급수전개**(Taylor expansion)

특히 $z_0 = 0$인 경우, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ ($|z| < R$)

: f의 **맥클로린 급수전개**(Maclaurin expansion)

(2)로랑(Laurent)의 정리($z = z_0$**에서 해석적이 아닌** 경우)

f 가 $R_1 < |z - z_0| < R_2$($0 \le R_1 < R_2 \le \infty$)에서 해석적일 때

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ (R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

: f의 $z = z_0$에서의 **로랑 급수전개**(Laurent expansion)

여기서 $a_n =$ [65] $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z})$)

$C : |z - z_0| = \rho,\ R_1 < \rho < R_2$의 방향은 반시계 방향의 원)

NOTE

(1) f 가 정함수이면 각 $z_0 \in \mathbb{C}$ 에 대하여

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \ (z \in \mathbb{C})$$

(2)Maclaurin **급수전개의 예**

$e^z =$ [66] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$)($\forall z \in \mathbb{C}$)

---

64) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

65) $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ ($n \in \mathbb{Z}$)

66) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$\sin z =$ [67] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $)(\ \forall z \in \mathbb{C}\ )$

$\cos z =$ [68] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}$ $)\ (\ \forall z \in \mathbb{C}\ )$

$\sinh z =$ [69] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $)(\ \forall z \in \mathbb{C}\ )$

$\cosh z =$ [70] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $)(\ \forall z \in \mathbb{C}\ )$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \ (\ |z| < 1\ )$$

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \ (\ |z| < 1\ )$$

5. 유수의 정리(Residue theorem)

5.1. 복소선적분의 계산

정 의 12

f의 $z=z_0$에서의 Laurent급수전개 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$에 대하여 $Res[f, z_0] \equiv$ [71] a_{-1})을 f의 z_0에서의 **유수**(residue)라고 부른다.

정 의 13

$f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$일 때

(1) z_0에서 f가 [72] 해석적이지 않을 때) z_0를 f의 **특이점**(Singularity)이라 하고

(2) $\exists \varepsilon > 0$ s.t. f가 [73] $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ 에서 해석적이고 z_0에서 해석적이지 않을때)

z_0를 f의 **고립특이점**(isolated singularity)이라 한다.

NOTE (확장된 복소함수극한의 정의)

(1) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

(2) $\lim_{z \to \infty} f(z) = L \ \Leftrightarrow \ \lim_{|z| \to \infty} f(z) = L$

(3) $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \ \Leftrightarrow \ \lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$

정 의 14

$f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$일 때 f의 고립특이점 z_0는 다음 세 조건 중 단 하나만을 만족한다.

(1) z_0 : f의 **제거가능특이점**(removable singularity)($\approx$ **해석점**)

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. f가 $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$에서 유계

$\Leftrightarrow$ [74] $\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$)

이 때 $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$라 정의하면 Riemann의 정리에 의해 f는 z_0에 서 해석적이므로 z_0는 제거되어지는 특이점이라 할 수 있다.

(2) z_0 : f의 **위수** k**인 극**(Pole)

$\Leftrightarrow$ (i) $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$,

(ii) [75] $\exists k \in \mathbb{N}$ s.t. $\exists \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) = l \neq 0, \infty$)

이 때 z_0는 $(z-z_0)^k f(z)$의 제거가능특이점이 된다.

위수가 1인 극 $\equiv$ **단순극**(Simple pole)

(3) (1),(2)를 모두 만족하지 않는 고립특이점을 **진성특이점**(Essential singularity)라 한다.

NOTE

$f: D(\subset \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$에 대하여 $z_0(\in \mathbb{C})$는

f 의
- 해석점
- 특이점
  - 고립특이점
    - ([76] 제거가능특이점)($\approx$ 해석점) 76)77)78)
    - ([77] 위수 k인 극)
    - ([78] 진성 특이점)
  - 고립특이점이 아닌 특이점

정 리 18 (유수의 계산공식)

(1) f가 z_0에서 해석적이거나 제거가능 특이점을 가질 때

$Res(f, z_0) =$ [79] 0)

(2) f가 z_0에서 단순극을 가질 때

$Res(f, z_0) =$ [80] $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$)

(3) f가 z_0에서 위수 k인 극을 가질 때

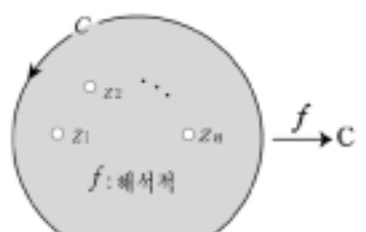
$Res(f, z_0) =$ [81] $\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-z_0)^k f(z)$)

정 리 19 (유수의 정리(Residue theorem))

C : 양의 방향으로의 단순폐곡선이고

f : $z_1, z_2, \cdots, z_n$을 제외한 C와 C의 내부에서 해석적일 때

$\int_C f(z)dz =$ [82] $2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f, z_k]$)



NOTE

유수를 계산하는 방법은

(1)위의 계산공식을 적용하여 유수를 계산하는 방법

(극의 위수를 알 수 있는 경우와 낮은 위수를 갖는 경우)

(2)Laurent급수전개를 통하여 유수를 계산하는 방법

(극의 위수를 알 수 없는 경우와 높은 위수를 갖는 경우)

---

67) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

68) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

69) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

70) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

71) a_{-1}

72) 해석적이지 않을 때

73) $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$에서 해석적이고 z_0에서 해석적이지 않을 때

74) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$

75) $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $\exists \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) = l \neq 0, \infty$

76) 제거 가능특이점

77) 위수 k인 극

78) 진성특이점

79) 0

80) $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

81) $\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z-z_0)^k f(z)$

82) $2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f, z_k]$

5.2. 유수의 정리의 응용

NOTE

$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$

공 식 I

$P(x),\ Q(x)$: 다항식, $\deg Q \ge \deg P + 2$, $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$: 상반 평면에 있는 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 의극이고 $Q(x) \ne 0$($\forall x \in \mathbb{R}$)일 때

$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ =(83) $2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_j\right]$).

공 식 II

$P(x),\ Q(x)$: 다항식으로서 $\deg Q(x) \ge \deg P(x) + 2$

$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$: 상반평면에 있는 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 의 극이고 $t_1, t_2, \cdots, t_m$: x 축 위의 $Q(x)$의 영점(즉 $Q(t_i)=0\ \ \forall i = 1, \cdots, m$)일 때

$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ =(84) $2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_j\right] + \pi i \sum_{j=1}^{m} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, t_j\right]$)

공 식III

$P(x),\ Q(x)$: 다항식이고 $\deg Q(x) \ge \deg P(x) + 1$,

$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$: 상반평면에 있는 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 의 극이고 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$Q(x) \ne 0$일 때

(1) $I = P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{iax}dx$ =(85) $2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res[f, z_j]$),

(2) $P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax\, dx$ =(86) $Re(I)$),

$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin ax dx$ =(87) $Im(I)$)

단 $a > 0$, $f(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$

공 식 Ⅳ

$\cos$, $\sin$으로 이루어진 함수의 적분은

$z(\theta) \equiv e^{i\theta}$라 두고,

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$

$d\theta = \frac{1}{iz}dz$이므로 $\cos, \sin$으로 이루어진 실변수 함수의 적분을단위원상의 복소선적분으로 바꾸어 계산한다.

83) $2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)},\ z_j\right]$

84) $2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)},\ z_j\right] + \pi i \sum_{j=1}^{m} Res\left[\frac{P(x)}{Q(x)},\ t_j\right]$

85) $2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\ [f,\ z_j]$

86) $Re(I)$

87) $Im(I)$

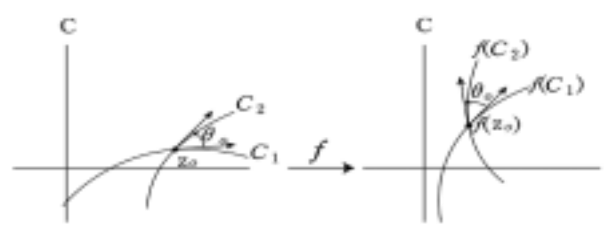
6. 등각사상(Conformal mapping)

6.1. 등각사상의 기본성질

정 의 15

$w = f(z)$가 z_0에서 만나는 두 곡선 사이의 각의 크기와 방향을 보존

$\Leftrightarrow f : z_0$에서 등각(conformal)



정 리 20

$f : z_0$에서 (88) 해석적), $f'(z_0) \ne$ (89) 0) $\Rightarrow f : z_0$에서 등각

6.2. 일차분수변환(Linear fractional transformation)

정 의 16

$ad - bc \ne 0$ ($c \ne 0$)인 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$에 대하여

$w = \frac{az+b}{cz+d}$: 일차분수변환(Linear fractional transformation)

NOTE

(1) $ad - bc = 0$이면 w는 상수함수이고 $c = 0$이면 w는 일차식이 된다.

(2)일차분수변환 $w = \frac{az+b}{cz+d}$($ad - bc \ne 0$, $c \ne 0$)은 원과 직선에 사상한다. 특히 원과 직선이 점 $z = -\frac{d}{c}$(즉 분모 $= 0$)를 지나면직선으로, 지나지 않으면 원으로 사상한다.

원 혹은 직선 $\xrightarrow{\text{일차분수변환}}$ (90) 원 혹은 직선)

정 의 17

$[z,\ z_1,\ z_2,\ z_3] \equiv$ (91) $\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$)

: $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3$의 복비(Cross ratio)

정 리 21

서로 다른 $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$와 서로 다른 $w_1,\ w_2,\ w_3 \in \mathbb{C}$에 대하여

(1) $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$, $f(z_3) = w_3$인 일차분수변환 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$는 유일하게 존재하고

(2) $w = f(z) \Leftrightarrow [w,\ w_1,\ w_2,\ w_3] = [z,\ z_1,\ z_2,\ z_3]$

88) 해석적

89) 0

90) 원 혹은 직선

91) $\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$