※ 17

실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 선형변환(linear tansformation) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 $\mathbb{R}^n$의 임의의 두 점 $x, y\,(x \neq y)$를 잇는 선분 $\{(1-t)x+ty \mid 0 \le t \le 1\}$을 $\mathbb{R}^m$에 포함되는 선분(또는 점)으로 보내는 것을 보이시오. [2006]

pf) 임의의 $0 \le t \le 1$ 에 대하여 L은 선형변환이므로

$L((1-t)x+ty) = (1-t)L(x) + tL(y)$ — (*) 이고, 다음이 성립한다.

(i) $L(x) = L(y)$

(*) $= L(x)$ 인 한 점으로 변환된다.

(ii) $L(x) \neq L(y)$

(*) 는 $L(x)$ 와 $L(y)$를 잇는 선분이다.

따라서 선분 (or 점) 으로 보내짐. ∎

※ 18

실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간

$$P_2 = \{a+bx+cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

에 대하여 선형변환(linear transformation) $T: P_2 \to P_2$가 다음을 만족한다고 하자.

$$T(1+x) = 1+x^2$$
$$T(x+x^2) = x-x^2$$
$$T(1+x^2) = 1+x+x^2$$

이 때, $T(4+2x+3x^2)$을 구하시오. [2008]

pf) $4+2x+3x^2 = a(1+x) + b(x+x^2) + c(1+x^2)$

$= (a+c) + (a+b)x + (b+c)x^2$

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ a+b = 2 \\ b+c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c = \frac{5}{2}$ $\quad a = -1+\frac{5}{2} = \frac{3}{2}$, $b = -2+\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow T(4+2x+3x^2)$

$= \frac{3}{2}T(1+x) + \frac{1}{2}T(x+x^2) + \frac{5}{2}T(1+x^2)$

$= \frac{3}{2}(1+x^2) + \frac{1}{2}(x-x^2) + \frac{5}{2}(1+x+x^2)$

$= \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)x^2$

$= 4 + 3x + \frac{7}{2}x^2$ ∎

19

점 (x, y)를 점 (ry, rx)로 옮기는 일차변환 f와 점 (x, y)를 점 $(x\sin\theta + y\cos\theta, x\cos\theta - y\sin\theta)$로 옮기는 일차변환 g에 의한 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [1994]

(pf) $[g \circ f] = [g][f] = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Thm) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 이 선형변환이고 $e_1, \cdots, e_n$ 이 $\mathbb{R}^n$의 표준기저 벡터일 때,

T의 표준행렬은 $[T] = [\,T(e_1) \mid T(e_2) \mid \cdots \mid T(e_n)\,]$ 이다.

20

$\mathbb{R}^2$의 두 기저(basis),

$$\alpha = \{v_1, v_2\}, \beta = \{u_1, u_2\}$$

에 대하여

$$v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0), \ u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3)$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. [2001]

(1) 선형변환 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(v_1) = u_1$, $f(v_2) = u_2$를 나타내는 행렬 A를 구하시오.

(2) 이 선형변환에 의하여 세 점

$$P(-1, 0), Q(1, -1), R(2, 3)$$

이 옮겨지는 점을 각각 P', Q', R'이라 할 때, $\triangle P'Q'R'$의 넓이를 구하시오.

(pf) (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 이면 $f(v_1) = u_1$, $f(v_2) = u_2$ 가 성립.

(2) $P' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2, -3)$

$Q' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (2-1, 3+2) = (1, 5)$

$R' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (4+3, 6-6) = (7, 0)$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left| \begin{array}{cccc} 7 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -21 - 10 - (\underbrace{-3 + 35}_{32}) \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -31 - 32 \right| = \frac{63}{2}$ ∎

21

유한차원 내적공간 V의 부분공간 W ($W \neq V$)에 대하여 선형사상 P를 V에서 W로의 정사영(orthogonal projection)이라 하자. P에 관한 설명 중 옳지 않은 것은? [2009]

① $\mathrm{Im}(P) = W$이다.
② $\mathrm{Ker}(P) \cap W = \{0\}$이다.
③ 임의의 $w \in W$에 대하여 $P(w) = w$이다.
④ 임의의 $v \in V$에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$이다.
⑤ P를 나타내는 행렬은 가역행렬이다.

(pf) 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $v = w_1 + w_2$ 인 $w_1 \in W$, $w_2 \in W$ 가 유일하게 존재.

이 때 w_1을 W로의 v에 대한 정사영이라 함.

① $Im(P) = W$ 이다.

i) $Im(P) \subset W$ 정사영의 정의에 의해 $Im(P) \subset W$

ii) $Im(P) \supset W$ 임의의 $w \in W$ 에 대하여 $w = w + 0$ 이고, $0 \in W^\perp$ 이므로 $P(w) = w \in W$.

따라서 $Im(P) = W$

② $Ker(P) \cap W = \{0\}$ 이다.

$v \in ker(P) \Rightarrow P(v) = 0$, $v \in W$

$\Rightarrow v = v - P(v) \in W^\perp$

$\Rightarrow v \in W \cap W^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow v = 0$

③ 임의의 $w \in W$ 에 대하여, $P(w) = w$ 이다.

$w \in W$, $0 \in W^\perp$ 에 대해 $w = w + 0$ 이므로 $P(w) = w$ 이다.

④ 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$ 이다.

$P(v) \in W$ 이므로 $P(P(v)) = P(v)$ 이다.

⑤ P를 나타내는 행렬은 ~~가역행렬~~ 아니다.

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(\det P = 0) \Rightarrow$ 가역 아니다.

22

직교좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 직선 $y = mx$ $(m \neq 0)$에 내린 수선의 발을 $P'(x', y')$이라고 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족하는 일차변환의 행렬 A는? [1993]

(pf) $\{x(1, m) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 의 정규직교기저는 $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)\right\}$ 이므로 직선 $y = mx$ $(m \neq 0)$ 에 내린

수선의 발 $P'(x', y')$는 다음과 같다.

$$P'(x', y') = \left\langle (x, y), \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$$

$$= \frac{x+my}{\sqrt{m^2+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{m^2+1}(x+my, mx+m^2y)$$

$$= \frac{1}{m^2+1}\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

따라서 $A = \frac{1}{m^2+1}\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix}$

23

다음 중 선형사상인 것은? [1990]

① $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F_1(x, y, z) = (x+1, z-2)$

② $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_2(x, y) = xy$

③ $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F_3(x, y) = (y, x^2)$

④ $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F_4(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

(pf) 함수 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 에 대하여, F가 선형사상일 필요충분조건은

$F(x_1, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n,\ \cdots,\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$

인 실수 a_{ij} 가 존재하는 것.

선형 사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이

$$T(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z)$$

로 정의될 때, $T(\mathbb{R}^3)$의 차원(dimension)을 구하시오. [1996]

(pf) $T(\mathbb{R}^3) = \{ (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x(1,4,7) + y(2,5,8) + z(3,6,9) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$

$= \text{span}\{ (1,4,7), (2,5,8), (3,6,9) \}$

$= \text{span}\{ (1,4,7), (2,5,8) \}$

따라서 $\dim(T(\mathbb{R}^3)) = 2$.

or, $\ker(T) = \{ (x,y,z) \mid T(x,y,z) = (0,0,0) \}$

즉, $\ker(T)$는 선형동차연립방정식 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases}$ 의 해집합이다.

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x + 2s$

put $z = s$

$y = -2s$, $x = -2(-2s) - 3s$

$= 4s - 3s = s$

$\Rightarrow (x, y, z) = (s, -2s, s)$, $s \in \mathbb{R}$

$\text{nullity}(T) = \dim(\ker(T)) = 1$ 이므로, $\dim(T(\mathbb{R}^3)) = \text{rank}(T)$

$= \dim(\mathbb{R}^3) - \text{nullity}(T)$

$= 3 - 1 = 2$

※ Thm) $T: V \to W$가 n차원 벡터공간 V에서 벡터공간 W로의 선형변환이면 $\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = n$

25

선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$에 의한 곱이다. 즉, $x \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $Tx = Ax$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오. [2005]

(pf) $\ker(T) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = 0 \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0 \}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ put $z = s$, $y = -2s$, $x = -s$ $\Rightarrow (-s, -2s, s)$, $s \in \mathbb{R}$

이므로 $\ker(T) = \{ (-s, -2s, s) \mid s \in \mathbb{R} \}$ 이다. 따라서 $\dim(\ker A) = 1$ 이다.

또한 차원정리에 의하여 $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3 - \dim(\ker(T)) = 3 - 1 = 2$ ∎

Thm) $T: V \to W$가 n차원 벡터공간 V에서 벡터공간 W로의 선형변환이면

$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{nullity}(T) = n$

26

실수체 $\mathbb{R}$위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오 [2010]

<보기>

선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, 2y, x - 3z)$에 대하여 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 차원은 ~~1~~ 0이다. False

(pf) $T(x, y, z) = (x - y, 2y, x - 3z)$

$\Rightarrow x(1, 0, 1) + y(-1, 2, 0) + z(0, 0, -3)$

$\Rightarrow \operatorname{span}\{ (1, 0, 1), (-1, 2, 0), (0, 0, -3) \}$

$\Rightarrow \operatorname{nullity}(T) = 3$

따라서 $\dim(\ker(T)) = 0$. ∎

or, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. $\Rightarrow (0, 0, 0)$ $\dim(\ker(T)) = 0$. ∎

#27

실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L: V \to V$를

$$L(B)=AB-BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace)

$$\mathrm{im}(L)=\{L(B) \mid B \in V\}$$

의 차원은? [2012]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

(pf) $\mathrm{Im}(L)=\{L(B) \mid B\in V\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2c & -2a-2b+2d \\ 2c & -2c \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 2c & -2a-2b+2d \\ 2c & -2c \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= a\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$a\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2a=0$, $2b=0$ ⇒ $a=b=0$, 따라서 둘은 linearly indp't ⇒ $\dim(\mathrm{Im}(L))=2$ ∎

#28

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

함수 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$를 임의의 $v \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $T(v)=Av$로 정의할 때, T는 정칙선형사상이다. True

(pf) $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1(12)-2(21) = -12-42+0$ 이므로 T는 정칙선형사상 맞음 ∎

29

2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$의 단위벡터(unit vector) u에 대하여 선형사상 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을

$$T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{u})\mathrm{u}$$

로 정의하자. 모든 벡터 x에 대하여 $\|T(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{x}\|$임을 보이시오. 또한, $\mathrm{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때, $\mathbb{R}^2$의 기저(basis) $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 x, y에 대하여 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$는 x와 y의 점곱(유클리드 내적, dot product, Euclidean inner roduct)이고, $\|\mathrm{x}\|$은 x의 유클리드 노름(Euclidean norm)이다.) [2016]

(pf) ① $\|T(X)\| = \|X\|$ 임을 보이자.

$\|T(X)\|^2 = T(X) \cdot T(X)$

$= (X - 2(X \cdot u)u)(X - 2(X \cdot u)u)$

$= X \cdot X - 4(X \cdot u)^2 + 4(X \cdot u)^2 \underbrace{u \cdot u}_{1}$

$= X \cdot X = \|X\|^2$ 이고 $\|T(X)\|, \|X\| \geq 0$ 이므로. $\|T(X)\| = \|X\|$.

② 기저 B 에 대해 $[T]_B$ 를 구하자.

$[T]_B = [\, [T(0,1)]_B \mid T(1,0)_B \,] = ?$

30

3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$에 대하여, 두 벡터 v_1, v_2로 생성된 부분공간을 W_{12}라 하고 두 벡터 v_1, v_3으로 생성된 부분공간을 W_{13}이라 하자. $\mathbb{R}^3$의 벡터 u에 대하여 부분공간 W 위로의 u의 정사영(orthogonal projection)을 $\mathrm{proj}_W u$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을

$$T_k(u) = \mathrm{proj}_{W_{12}} u + \mathrm{proj}_{W_{13}} u + ku$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오. (단, 두 벡터 $u_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $u_2 = (b_1, b_2, b_3)$의 유클리드 내적은 $u_1 \cdot u_2 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$이다.) [2019]

(pf) $V_2 \notin \mathrm{span}\{V_1, V_3\}$ 이므로 $B = \{V_1, V_2, V_3\}$ 는 $\mathbb{R}^3$ 의 기저.

$\{V_1, V_3\}$ 는 직교집합이므로 $\mathrm{proj}_{W_{13}} V_2 = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_1 \cdot V_1} \cdot V_1 + \frac{V_3 \cdot V_2}{V_3 \cdot V_3} \cdot V_3 = V_1$ 이다.

$\Rightarrow u_1 = V_1$

$u_2 = V_2 - \frac{\langle u_1, V_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 = (1,1,1) - (1,0,0) = (0,1,1)$ 이라고 하면,

$B_{1,2} = \{u_1, u_2\}$는 W_{12} 의 직교기저이므로, $\mathrm{proj}_{W_{12}} V_3 = \frac{u_1 \cdot V_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{u_2 \cdot u_3}{u_2 \cdot u_2} \cdot u_2 = 0$ 이 성립.

그러면 $T_k(V_1) = V_1 + V_2 + kV_1 = (k+2)V_1$

$T_k(V_2) = V_2 + \underbrace{\mathrm{proj}_{W_{13}} V_2}_{= V_1} + kV_2 = V_1 + (k+1)V_2$ 이므로, $[T_k]_B = \begin{bmatrix} k+2 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$

$T_k(V_3) = \underbrace{\mathrm{proj}_{W_{12}} V_3}_{= 0} + V_3 + kV_3 = (k+1)V_3$

$\det([T_k]_B) = 0$ 이면 역변환 존재 X 이므로 $(k+2)(k+1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = -2$ or $k = -1$

또한 $k = -2$ 이면 $[T_{-2}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로 T_{-2} 의 랭크가 2. ∎

31

V와 W가 n차원 실벡터 공간이라 하자.
선형사상 $L: V \to W$에 대하여 $\ker L = \{0\}$이면 L은 동형사상 (isomorphism)임을 보이시오. [2002]

(pf) L은 선형사상이므로 전단사임을 보이면 충분.

(i) L : 단사

u, v ∈ V 에 대하여 L(u) = L(v) 라 하면 L은 선형사상이므로 L(u-v) = 0 이 성립.

따라서 u-v ∈ ker(L) = {0} 이다.

그러므로 u-v = 0 ⇒ u = v 이다.

(ii) L : 전사

ker L = {0} 이므로 dim(ker L) = 0 이다.

차원정리에 의하여 dim(ker L) + dim(range L) = dim V = n 이므로

dim(range L) = n 이 성립.

range L 은 W 의 부분공간이고 W와 차원이 같으므로, range L = W ∎

※ Thm) T: V → W 가 n차원 벡터공간 V 에서 벡터공간 W 로의 선형변환이면

rank(T) + nullity(T) = n 이 성립.

32

실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 서로 다른 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5로 생성되는 벡터공간

$$V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

ㄱ. 벡터공간 V와 $\mathbb{R}^n$이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 n이 존재한다.

ㄴ. 집합 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 V의 기저(basis)인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

ㄷ. $\dim V = 2$인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

(pf) ㄱ. True

dim V = n 이고, S 를 V 의 기저라 할 때, T: V → ℝⁿ 을 $T(v) = [v]_S$ 라 정의하면 T는 동형사상이 된다.

ㄴ. False.

dim V ≤ dim ℝ⁴ = 4 이므로 V 에 대한 임의의 기저의 원소의 개수는 4개 이하.

ㄷ. True

(1,0,0,0) (2,0,0,0) (3,0,0,0) (4,0,0,0) (0,1,0,0) ∎