

2. 비유클리드 기하학의 발견

2.1 증립기하학 (힐베르트 공리군에서 평행선 공의 제외)

Def 2.1) 두 직선 l, m 이 만나지 않을 때 두 직선은 평행하다함. ($l \parallel m$)

Def 2.2) 직선 t 가 두 직선 l, m 과 서로 다른 점에서 만날 때, t 를 l 과 m 의 횡선(transversal)이라 함.

④ 유클리드 공리

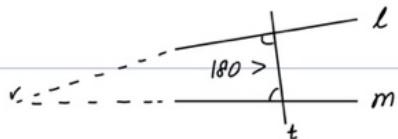
1. 서로 다른 두 점 P, Q 지나는 직선은 오직 하나

2. 두 선분 AB, CD 에 대하여 $A \neq B \neq E$ 이고 선분 BE 가 선분 CD 와 합동이 되는 점 E 가 유일하게 존재.

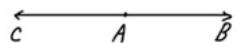
3. 서로 다른 두 점 O, A 에 대하여 중심 O , 반지름 OA 인 원이 존재

4. 모든 직각은 서로 합동.

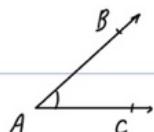
5. 두 직선 l, m 의 횡선 t 에 대하여 t 의 한 쪽에서 만들어지는 두 내각의 합이 180° 보다 작으면 l 과 m 은 같은쪽에서 만남.



Def 2.4) \vec{AB} 와 \vec{AC} 가 꼭짓점 A 에서 방사된 서로 다른 반직선이고 $\vec{AB} = \vec{AC}$ 일 때, \vec{AB} 와 \vec{AC} 를 반향반직선(opposite rays)이라 함.

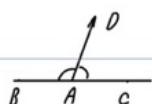


Def 2.5) 반향 반직선이 아닌 두 반직선 \vec{AB}, \vec{AC} 와 점 A 를 한 조로 하는 쌍을 꼭짓점이 A 인 각(angle)이라 함.



Def 2.6) 두 각 $\angle BAD$ 와 $\angle CAD$ 에 대하여 \vec{AD} 가 공통변이고 나머지 두 변 \vec{AB} 와 \vec{AC} 가 반향반직선일 때.

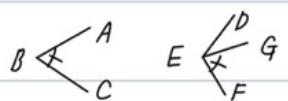
각 $\angle BAD$ 와 $\angle CAD$ 가 서로 보각이라 함.



Def 2.7) $\angle BAD \neq 2$ 보각과 합동일 때, $\angle BAD$ 를 직각이라 함.

Def 2.8) 두 각 $\angle ABC, \angle DEF$ 에 대하여 $\angle ABC \leq \angle GEF$ 이고

반직선 \vec{EG} 가 두 반직선 \vec{ED} 와 \vec{EF} 사이에 있을 때, $\angle ABC < \angle DEF$ 로 정의.



f 가 등장사상

g 가 등장사상

$g \cdot f$ 가 등장사상

Prop 4) ① f^{-1} 도 등장사상

② 반지름 길이가 r 인 원 C 에 대하여 $f(C)$ 도 반지름 r 의 원이 된다.

(Pf) ① 임의의 두 점 $p(\neq) \in C$ 에 대하여 $f(p)=p'$, $f(q)=q'$ 라 하자.

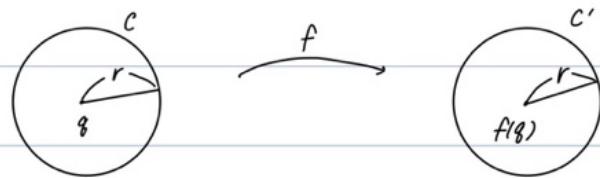
f 가 1-1 대응이므로 f^{-1} 가 존재. $p=f^{-1}(p')$, $q=f^{-1}(q')$

$$\Rightarrow d(f^{-1}(p), f^{-1}(q)) = \underset{f \text{ 가 등장사상}}{\underset{\uparrow}{d(f(f^{-1}(p')), f(f^{-1}(q')))}} = \underset{f \text{ 와 } f^{-1} \text{ 의 관계}}{\downarrow} d(p', q')$$

$\Rightarrow f^{-1}$ 가 등장사상

(평행이동의 원리로 생각하기. f 가 θ 만큼 움직이는 사상 $\Rightarrow f^{-1}$: θ 반대방향으로)

② $C = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, g) = r\}$ $C' = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, f(g)) = r\}$



$p \in C' \Leftrightarrow d(p, f(g)) = r \Leftrightarrow d(f^{-1}(p), g) = r \Leftrightarrow f^{-1}(p) \in C$

C' 의 정의

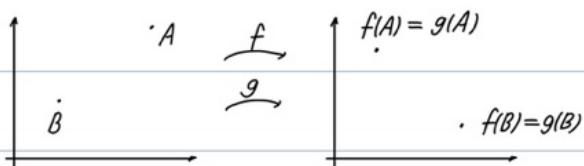
f 가 등장사상

C 의 정의

$\Rightarrow C' = f(C)$

Thm 4.2) 두 등장사상 $f, g: E^n \rightarrow E^n$ 과 서로 다른 두 점 $A, B \in E^n$ 에 대하여 $f(A)=g(A)$, $f(B)=g(B)$ 이면

직선 \overleftrightarrow{AB} 위의 임의의 점 p 에서 $f(p)=g(p)$.



(Pf) 1) $A \neq p \neq B$

$$d(f(A), f(p)) = \underset{f^{-1} \text{ 가 등장사상}}{\downarrow} d(A, p) = \underset{g \text{ 가 등장사상}}{\downarrow} d(g(A), g(p)) = \underset{g(A) = f(A)}{\downarrow} d(f(A), g(p))$$

$$d(f(p), f(B)) = \underset{f^{-1} \text{ 가 등장사상}}{\downarrow} d(p, B) = \underset{g \text{ 가 등장사상}}{\downarrow} d(g(p), g(B)) = \underset{g(B) = f(B)}{\downarrow} d(g(p), f(B))$$

$$f_1 \text{가 등장사상 } g \text{가 등장사상} \quad g(B) = f(B)$$

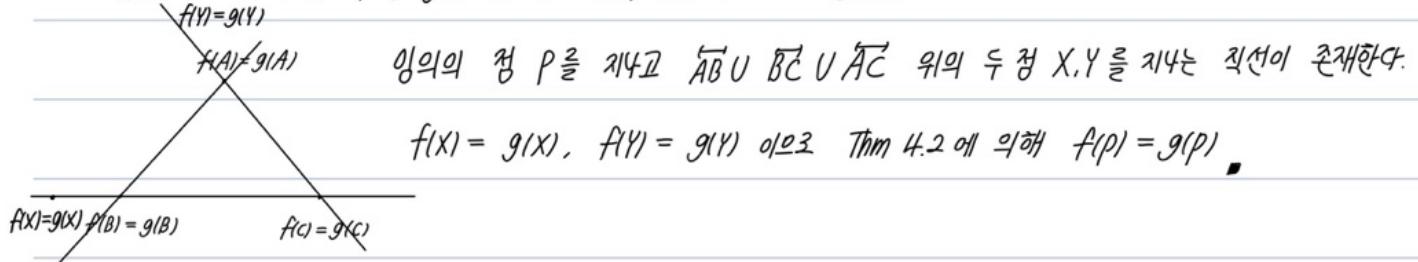
Prop 1에 의해 $f(A) \times f(P) \times f(B)$ 이고, $f(A) \times f(P) \times f(B)$ 이므로 $f(P) = g(P)$.

- 2) $P \in A \times B$ same the above
 3) $A \times B \times P$

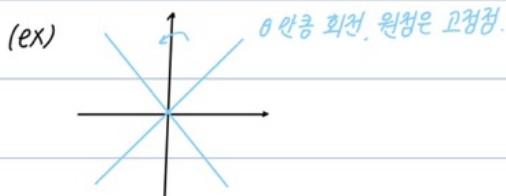
Thm 4.3) \mathbb{E}^2 에서 두 등장사상이 한 직선 위에 있지 않은 세 점에서 일치하면 두 등장사상은 서로 같다.

(pb) 등장사상 f, g 가 한 직선 위에 있지 않은 세 점에서 일치한다면 $f(A) = g(A), f(B) = g(B), f(C) = g(C)$,

Thm 4.2에 의해 f 와 g 는 세 직선 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 에서 일치한다.



Def) 등장사상 f 가 점 P 에서 $f(P) = P$ 일 때. 점 P 를 고정점이라 함.



Coroll) 등장사상 f 가 한 직선 위에 있지 않은 세 고정점을 가지면 f 는 항등사상

$$\begin{cases} f(A) = A = \lambda(A) \\ f(B) = B = \lambda(B) \\ f(C) = C = \lambda(C) \end{cases}$$

Def 4.5) 유clidean 공간 \mathbb{E}^n 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $f(A) = B$ 인 등장사상 $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ 이 존재할 때.

A 와 B 는 합동이다라고 하고, $A \cong B$

4. 3 유clidean 평면 \mathbb{E}^2 의 등장사상.

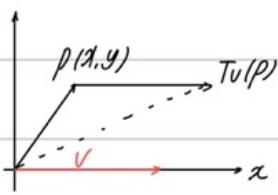
1. 평행이동 (translation)

\mathbb{E}^2 의 각 점 P 에 대해 $T_v(P)$ 는 P 를 v 만큼 이동한 점이다.

$$T_v(P) = P + v$$

(Property 1) 임의의 두 벡터 v, w 에 대해 $T_v \cdot T_w = T_{v+w}$

$$\begin{aligned} (\because (T_v \cdot T_w)(p) &= T_v(T_w(p)) \\ &= p + w + v \\ &= T_{v+w}(p)) \end{aligned}$$



2) $T_v^{-1} = T_{-v}$, $T_v^{-1}(T_v(p)) = p$

$$(\because \Rightarrow T_v^{-1}(p+v) = p$$

$$\Rightarrow p+v = Q, T_{-v}^{-1}(Q) = Q-v = T_{-v}(Q)$$

3) T_v 는 등장사상

\because 임의의 두 점 P, Q 에 대하여 $d(T_v(P), T_v(Q)) = \|T_v(P) - T_v(Q)\|$

$$= \|p+v - (Q+v)\| = \|p-Q\| = d(P, Q)$$

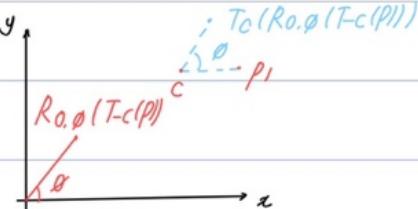
2. 회전이동 (rotation)

\mathbb{E}^2 에서 점 C 와 각도 ϕ 에 대하여 C 를 중심으로 ϕ 만큼 회전하는 사상 $R_{C,\phi}$

$$\textcircled{*} R_{0,\phi}(p) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Property})$$

$$\Rightarrow R_{0,\phi} = T_C \cdot R_{0,\phi} \cdot T_{-C}$$

$$1) R_{C,\phi}^{-1} = R_{C,-\phi}$$



$$2) C=0 \text{ 일 때 회전이동 } R_{0,\phi}$$

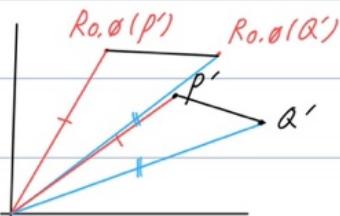
$$3) C \neq 0 \text{ 일 때 회전이동 } R_{C,\phi} = T_C \cdot R_{0,\phi} \cdot T_{-C}$$

$$R_{C,\phi}(p) = R_{0,\phi}(p-C) + C$$

4) $R_{C,\phi}$ 가 등장사상이다.

$$\therefore d(R_{C,\phi}(P), R_{C,\phi}(Q))$$

$$= d(R_{0,\phi}(\underline{P-C}), R_{0,\phi}(\underline{Q-C}))$$



$$\text{SAS 합동 } \triangle P'Q'C \cong \triangle R_{0,phi}(P)Q'C$$

$$= d(P', Q') = d(P, Q)$$

3. 대칭이동

직선 ℓ 이 주어져 있다하자. 임의의 점 P 에 대하여 $\rho_\ell(P)$ 는 점 P 를 직선 ℓ 에 대해 대칭이동한 것이다.

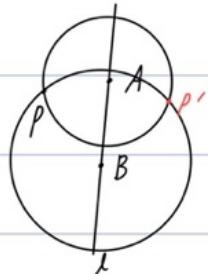
이는 직선 ℓ 에 대해 P 와 반대편에 있고 직선 ℓ 까지의 거리가 $d(P, \ell) = \inf_{X \in \ell} d(P, X)$, $X \in \ell$ 와 같은 것이다.

< 대칭이동 방법 >

1) \mathbb{E}^2 를 포함하는 3차원에서 ℓ 을 축으로 180° 회전시킨다.

2) P 가 ℓ 위에 있지 않으면 ℓ 위의 두 점을 중심으로 하고 P 를 지나는 두 원을 그리면

만나는 교점 중 하나가 대칭점 P' 이다.



3) x -축을 ℓ 이라면 $\rho_\ell(x, y) = (x, -y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

< 대칭이동의 property >

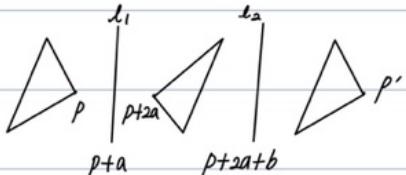
1) $(\rho_\ell)^{-1} = \rho_\ell$

2) ρ_ℓ 은 각의 방향성 (orientation)을 바꾼다.

3) ρ_ℓ 은 등장사상이다. 실제로 두 점 P, Q 에 대하여 다음에 성립.

$$d(\rho_\ell(P), \rho_\ell(Q)) = \|P' - Q'\| = \|P - Q\| = d(P, Q)$$

4) 모든 평행이동은 대칭이동의 합성이다.



(P) 먼저 평행이동 T_V 에 대하여 $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{V}$ 를 만족시키는 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 를 구한다.

직선 ℓ_1 을 $d(P, \ell_1) = |a|$ 이 되도록 잡고, 직선 ℓ_2 를 $d(P+2a, \ell_2) = |b|$ 이 되도록 잡는다.

그러면 임의의 점 P 에 대하여 $T_V(P) = \rho_{\ell_2} \cdot \rho_{\ell_1}(P)$ 가 된다.

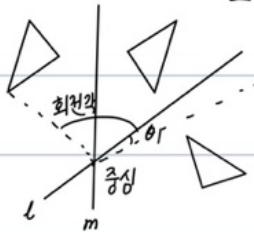
실제로 $P + \vec{a} \in \ell_1$ 이고, $\rho_{\ell_1} = P + 2\vec{a}$ 이며,

$$P + 2\vec{a} + \vec{b} \in \lambda_2 \text{ 이므로 } P + 2\vec{a} + 2\vec{b} = P + \vec{v} = T_V(P) \text{이다.}$$

5) 모든 회전이동은 두 개의 대칭이동의 합성이다.

(PB) 회전이동 R 이 $R = R_{C,\theta}$, 즉 R 이 점 C 를 중심으로 θ 만큼의 회전일 때, 직선 l 을 적당히 잡아

도3과 이루는 각의 크기가 θ_1 이라 하고 $\theta_2 = \frac{\theta - 2\theta_1}{2}$ 가 되도록 직선 m 을 잡으면 된다.



[세반사정리] 평면의 임의의 등장사상은 최대 세 직선에 대한 대칭이동의 합성으로 나타낼 수 있다.

(PB) 평면의 한 등장사상 φ 라 하자.

[Proof]

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C 가 있고,

$\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$ 라 하자.

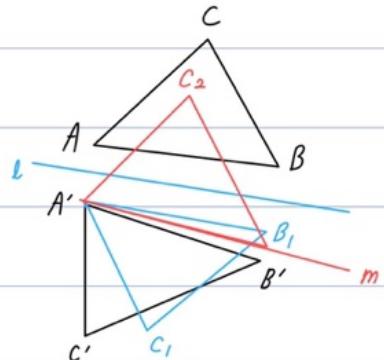
Step 1) $A = A'$ 라 하면 $\overline{AA'}$ 수직이동분선 λ 에 대한 대칭이동

: $\rho_\lambda(B) = B_1$, $\rho_\lambda(C) = C_1$

Step 2) $B' \neq B_1$ 라 하면, $\overline{B'B_1}$ 수직이동분선 m 에 대한 대칭이동

: $\rho_m(B_1) = B'$, $\rho_m(C_1) = C_2$

실제로 $\rho_m(A_1) = A'$



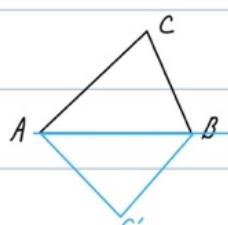
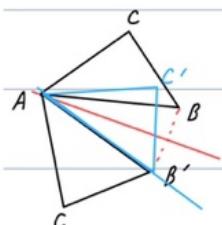
Step 3) $C_2 \neq C'$ 라 하면 $\overline{AB'}$ 에 대한 대칭이동을 하여 C_2 를 C' 로 대응시킨다.

$\Rightarrow \rho_n \cdot \rho_m \cdot \rho_\lambda$ 은 A 와 A' , B 와 B' , C 와 C' 를 대응시키는 등장사상.

\Rightarrow 그러므로 $\rho_n \cdot \rho_m \cdot \rho_\lambda = \varphi$ by Thm 4.3

<Step 1 생략시>

<Step 1, 2 생략시>



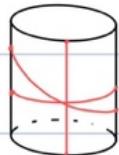
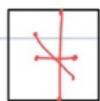
6. 구면 기하학 or 타원기하학

(spherical)

6.1 측지선 (geodesic)

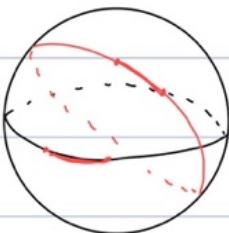
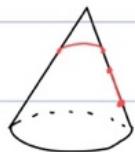
두 점 사이의 최단거리 곡선 $\xrightarrow{\text{def}}$ 측지선

(예)



측지선이라고 해서 두 점 사이의 최단거리가 되는 것은 아님.

최단거리 곡선이 측지선 중의 하나가 되는 것이다.

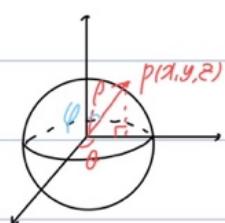


Rmk A)

Def 6.1) 주어진 공간에서 두 점 사이를 잇는 곡선 중 최단거리 곡선을 측지선이라 한다.

Def 6.2) 좌표공간 \mathbb{R}^3 에서 원점 0에서 거리가 ρ 인 점의 집합을 중심이 0이고 반지름이 ρ 인 구 또는 구면

$$\mathcal{S}^2(\rho) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$$

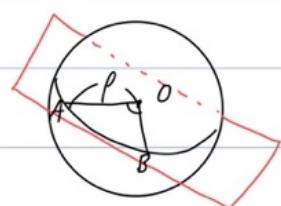


$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

Def 6.3) \mathbb{R}^3 에서 원점 0을 지나는 평면과 $\mathcal{S}^2(\rho)$ 의 교선을 대원이라 한다. (great circle)



※ 구면 위의 측지선은 대원 또는 대원의 일부

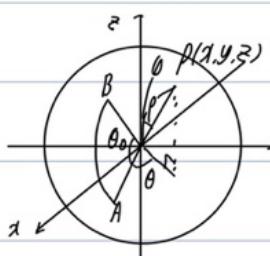
$$(\text{호 } AB \text{의 길이}) = \rho \angle AOB$$

반지름 ρ 인 구

$$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathcal{S}^2(\rho) \subset \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \rho \quad (\text{원점에서부터 } \alpha(t) \text{ 까지의 거리})$$

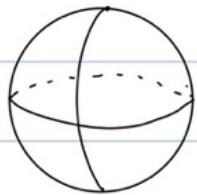


$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Thm 6.4) $S^2(p)$ 위의 두 점을 잇는 곡선 중에서 길이가 최소인 것은 두 점을 지나는 대원에 의해 주어지는 호이다.



회전



같은 경도에 있다고 가정하여 생각

$$(P\beta) \quad \alpha: [a, b] \rightarrow S^2(p) \subset \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$\alpha(a) = A, \alpha(b) = B$ 인 임의의 매개곡선이자 하자.

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

α 가 $S^2(p)$ 위에 있는 곡선이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x = p \sin \varphi \cos \theta \quad \Rightarrow \quad x'(t) = p(\varphi' \cos \varphi \cos \theta - \theta' \sin \varphi \sin \theta)$$

$$y = p \sin \varphi \sin \theta \quad y'(t) = p(\varphi' \cos \varphi \sin \theta + \theta' \sin \varphi \cos \theta)$$

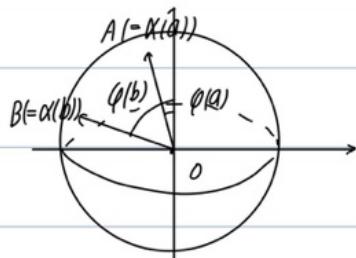
$$z = p \cos \varphi \quad z'(t) = -p \varphi' \sin \varphi$$

↓

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\varphi'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - 2\varphi' \theta' \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta + \theta'^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2(\varphi'^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + 2\varphi' \theta' \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \sin \theta + \theta'^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) + \rho^2 \varphi'^2 \sin^2 \varphi)} dt$$

$$= \rho \int_a^b \sqrt{\theta'^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2 \cos^2 \varphi + \varphi'^2 \sin^2 \varphi} dt$$

$$= \rho \int_a^b (\theta'^2 \sin^2 \varphi + \varphi'^2)^{1/2} dt \geq \rho \int_a^b \varphi' dt (\geq 0) \quad \text{※ } \theta'^2 \sin^2 \varphi \text{ 를 없애는 이유} \\ : 매개변수로 하면 의미 X$$



$$= \rho [\varphi(b) - \varphi(a)]$$

같은 경도에 있으므로 $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$

$$= \rho \angle AOB$$

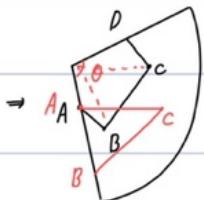
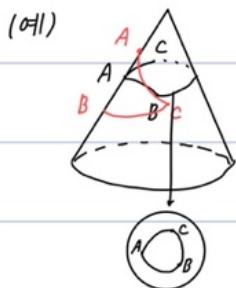
→ 원래 같은 경도에 있었다는 것而已

$$= \widehat{AB} \quad (\rightarrow \text{최솟값})$$



Chapter 6.2 측지삼각형

Def) 기하학적 공간에서 세 변이 모두 측지선으로 이루어지는 삼각형을 측지삼각형 (geodesic triangle)



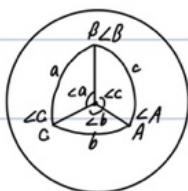
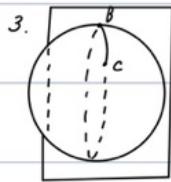
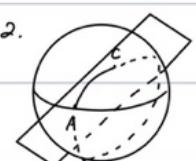
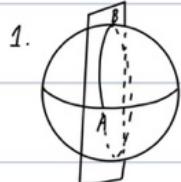
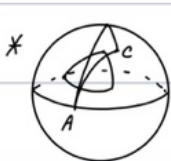
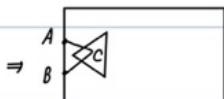
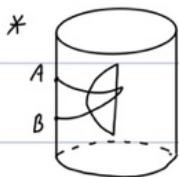
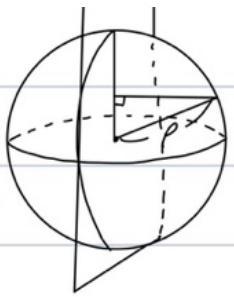
※ 꼭짓점 포함 시 $0 < \theta < 360^\circ$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle \theta = 540^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 540^\circ - \theta > 180^\circ$$

대원 (=반지름 ρ 인 원)

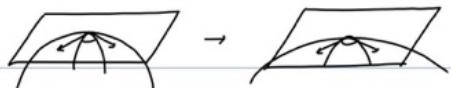
의 일부가 되어야.



$$\begin{aligned} a &= \rho \angle A \\ b &= \rho \angle B \\ c &= \rho \angle C \end{aligned}$$



$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|}$$



Lemma) 1) $(\vec{OP} \times \vec{OQ}) \cdot \vec{OP} = 0$

\vec{OP} 와 \vec{OQ} 에 수직인 벡터 = \vec{OP} 에 수직인 벡터이므로

$$(\vec{OP} \times \vec{OQ}) \cdot \vec{OQ} = 0$$

(+) 두 개가 평행하지 않다.

(2) $\vec{OP} \times \vec{OQ} = \vec{0}$ 일 필요충분조건은 두 벡터 \vec{OP} 와 \vec{OQ} 가 일차종속이다.

(P6)

Report 벡터 \vec{OP} 와 \vec{OQ} 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\vec{OP} \times \vec{OQ} = \|\vec{OP}\| \|\vec{OQ}\| \sin \theta$ 이다.

따라서 영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{OP}, \vec{OQ} 에 대해 두 벡터가 평행일 필요충분조건은 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 이다.

두 벡터가 평행하면 서로 실수배로 표현될 수 있으므로 \vec{OP} 와 \vec{OQ} 는 일차종속이다.

Lemma 6.7) 측지삼각형 $\triangle ABC$ 에서

$$(1) \angle A = \angle(\vec{OB}, \vec{OC}), \angle B = \angle(\vec{OC}, \vec{OA}), \angle C = \angle(\vec{OA}, \vec{OB})$$

$$(2) \angle A = \angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC})$$

$$\angle B = \angle(\vec{OB} \times \vec{OC}, \vec{OB} \times \vec{OA})$$

$$\angle C = \angle(\vec{OC} \times \vec{OA}, \vec{OC} \times \vec{OB})$$

Def) $S^2(P)$ 위의 점 P 의 좌표가 (a, b, c) 일 때, 좌표 $(-a, -b, -c)$ 인 점을 $-P$ 로 쓰고

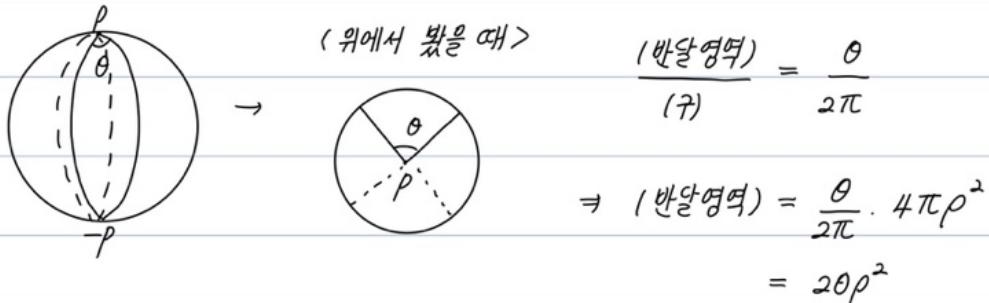
P 의 대칭점 (antipodal point) 라 한다.

(= 대척점)

→ 구는 3차원 속에 있는 2차원

(2가지 방향의 벡터만 존재하므로 가지 2개)

Def) 두 대원이 점 P 에서 만나고 그 각의 크기가 θ 이면 두 대원은 꼭짓점 $P, -P$ 를 갖는 두 개의 영역을 만든다. 각의 크기가 θ 인 두 대원에 의해 주어지는 합동인 두 영역 중 하나를 반달영역 (lunar) 라 한다.



Lemma 6.8) 함수 $f: S^2(P) \rightarrow S^2(P), f(P) = -P$ 는 구면등장사상이다.

(P8) 두 점 $P, Q \in S^2(P)$ 이고 $\alpha: [a, b] \rightarrow S^2(P)$

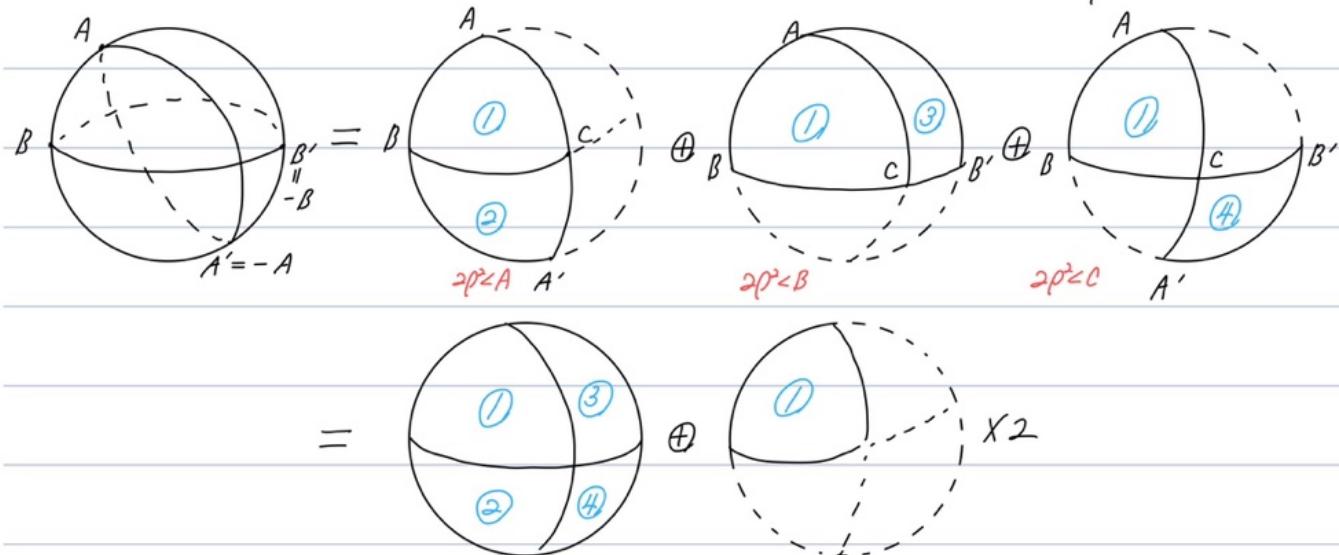
$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 가 $\alpha(a) = P, \alpha(b) = Q$ 인 $S^2(P)$ 위 곡선이라 하자.

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{(-x'(t))^2 + (-y'(t))^2 + (-z'(t))^2} dt$$

$$= \underline{f(f(x))} = \underline{f(-\alpha(t))}$$

$$\Rightarrow d(p, q) = d(f(p), f(q)).$$

Thm 6.9) $\exists S^2(p)$ 위의 측지상각형 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \frac{\Delta ABC}{\rho^2}$



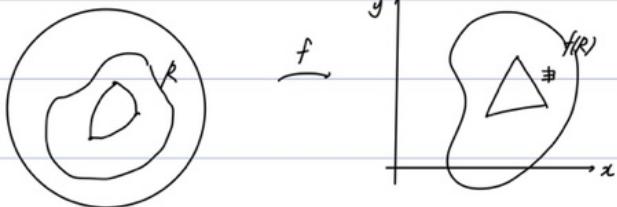
$$\Rightarrow 2\rho^2 A + 2\rho^2 B + 2\rho^2 C = 2\rho^2 \pi + 2\Delta ABC$$

$$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = \pi + \frac{\Delta ABC}{\rho^2}$$

Corol 6.10) $S^2(p)$ 위의 측지상각형 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\angle A + \angle B + \angle C > \pi$

Corol 6.11) $\Delta ABC = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$

Corol 6.12) $\exists S^2(p)$ 의 영역 R 가 측지상각형을 포함하면 R 은 유일의 평면의 영역과 격리동형(isometric)이 될 수 있다.



내각의 합이 180보다 크다.

내각의 합이 180보다 작거나 같다.

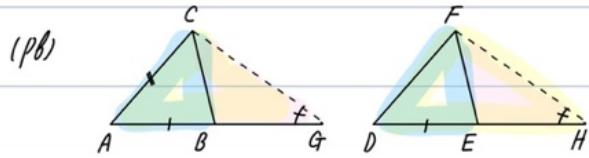
Chapter 6.3. 직각상각형

$$\begin{array}{l} \text{Diagram of a right-angled triangle with hypotenuse } c, \text{ legs } a, b, \text{ and right angle at vertex } C. \\ C^2 = a^2 + b^2 \\ I = \frac{a^2}{C^2} + \frac{b^2}{C^2} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{array}$$

Def 2.9) 두 선분 AB, CD 에 대하여 $AB \leq CE$ 이고 $C \neq E \neq D$ 인 점 E 가 존재할 때 $AB < CD$ or $CD > AB$



Thm 2.10) 합동인 각의 보각들도 합동이다.



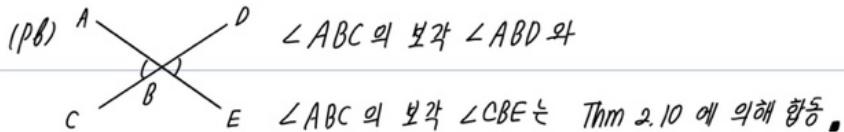
1. 합동공리 (1) $AB = DE, BC = EF, BG = EH$

2. (SAS) $\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle FDE$

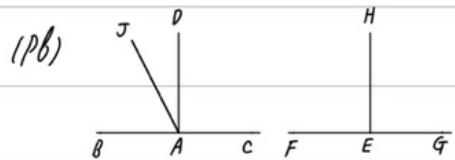
3. 1에 의해서 $AG \cong DH$ 이므로 SAS $\Rightarrow \triangle ACG \cong \triangle DFH$

4. $CG \cong FH, BG \cong EH, \angle G \cong \angle H \Rightarrow \triangle BCG \cong \triangle EFH$

Corol 2.11) 맞꼭지각은 서로 합동이다.



Thm 2.12) 모든 직각은 합동이다.



1. 규칙법: $\angle BAD \neq \angle FEA, \angle FEA < \angle BAD$

2. 합동공리 (4)에 의해 $\angle BAJ \cong \angle FEA$ 인 반직선 \overrightarrow{AJ} 가 \overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{AD} 사이에 존재.

3. $\angle CAJ$ 는 $\angle BAJ$ 의 보각, $\angle GEH$ 는 $\angle FEA$ 의 보각이므로 Thm 2.10에 의해 $\angle CAJ \cong \angle GEH \cong \angle FEA$ (by 직각의 성질)

4. $\angle BAJ \cong \angle FEA < \angle BAD \cong \angle CAD$ (By 1)

$\Rightarrow \angle BAJ \cong \angle CAK$ 인 반직선 \overrightarrow{AK} 가 \overrightarrow{AD} 와 \overrightarrow{AC} 사이에 존재.

5. $\angle BAJ \cong \angle FEA \cong \angle CAJ$ (3)

$\Rightarrow \angle CAD > \angle CAK$ (4)

$\angle CAJ \cong \angle BAJ \cong \angle CAK$ (2) (4)

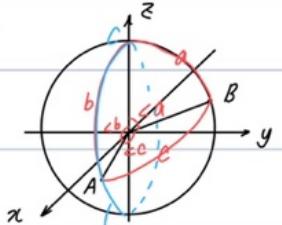
$\Rightarrow \angle CAD > \angle CAJ$

6. $\overrightarrow{AJ} \in \overrightarrow{AB}$ 와 \overrightarrow{AD} 사이에, $\overrightarrow{AD} \in \overrightarrow{AJ}$ 와 \overrightarrow{AC} 사이에 $\Rightarrow \angle CAJ > \angle CAD$ (\leftarrow)

Thm 6.13) $\neq S^2(p)$ 위에서 측지삼각형 $\triangle ABC$ 가 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 측지삼각형이면

$$\cos\left(\frac{c}{p}\right) = \cos\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \cos\left(\frac{b}{p}\right)$$

(Pf)



점 C를 북극점 $(0,0,p)$, 점 A를 xz -평면 위에 가정하자.

$$\angle a = \frac{a}{p}, \angle b = \frac{b}{p} \quad (a = p < a \text{ 이므로})$$

$$A = \left(p \sin\left(\frac{b}{p}\right), 0, p \cos\left(\frac{b}{p}\right)\right)$$

$$(p \sin b, 0, p \cos b)$$

$$B = \left(0, p \sin\left(\frac{a}{p}\right), p \cos\left(\frac{a}{p}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = p^2 \cos\left(\frac{b}{p}\right) \cos\left(\frac{a}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{c}{p}\right) = \cos\left(\frac{a}{p}\right) \cos\left(\frac{b}{p}\right)$$

$$\frac{\|\overrightarrow{OA}\|}{p} \cdot \frac{\|\overrightarrow{OB}\|}{p} \cdot \cos\left(\frac{c}{p}\right) = p^2 \cos\left(\frac{c}{p}\right)$$

■

Thm 6.15) 단위구 S^2 에서 측지삼각형 $\triangle ABC$ 가 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 측지삼각형이라면

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}$$

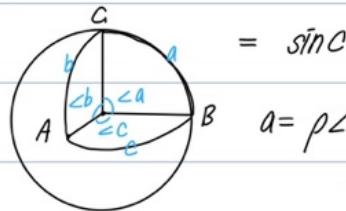
(Pf) 점 C를 북극점 $(0,0,1)$, 점 A를 xz -평면, 점 B를 yz -평면에 있다 가정하자.

$$A = (\sin b, 0, \cos b)$$

$$B = (0, \sin a, \cos a)$$

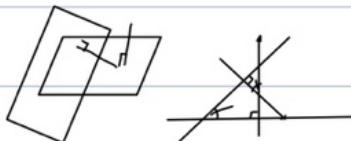
$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin b & 0 & \cos b \\ 0 & \sin a & \cos a \end{vmatrix} = (-\sin a \cos b, -\sin b \cos a, \sin a \sin b)$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \sin C$$



$$= \sin C$$

$$a = \rho < a = \angle a, \quad \angle A = \angle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC})$$



$$\overrightarrow{OA} = (\sin b, 0, \cos b), \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin b & 0 & \cos b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-\sin a \cos b, -\sin b \cos a, \sin a \sin b)$$

$$= (0, -\sin b, 0) \cdot (-\sin a \cos b, -\sin b \cos a, \sin b \sin a)$$

$$= \sin^2 b \cos a$$

$$\|\vec{OA} \times \vec{OC}\| \cdot \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| \cdot \cos \angle A = \sin b \sin c \cdot \cos \angle A$$

$$\Rightarrow \sin^2 b \cos a = \sin b \sin c \cos \angle A$$

$$\Rightarrow \cos \angle A = \frac{\sin b \cos a}{\sin c}$$

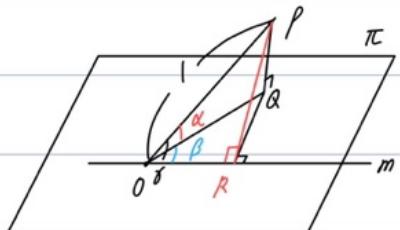
외적 정의

$$\textcircled{2} \quad \|(\vec{OA} \times \vec{OC}) \times (\vec{OA} \times \vec{OB}) \| = \sin b \sin c \cdot \sin \angle A$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{고장 정칙 계산}}{=} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\sin b & 0 \\ -\sin a \cos b & -\sin b \cos a & \sin b \sin a \end{vmatrix} = \|(-\sin^2 b \sin a, 0, \sin a \sin b \cos b)\| \\ & = (\sin^4 b \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 b)^{1/2} \\ & = (\sin^2 a \sin^2 b (\underline{\sin^2 b + \cos^2 b}))^{1/2} \\ & = \sin a \sin b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin b \sin c \cdot \sin \angle A = \sin a \sin b$$

$$\sin \angle A = \frac{\sin a}{\sin c}$$



직선 m 은 O 를 지나면서 평면 π 위에 있다.

점 P 에서 평면에 내린 수선의 빔 Q

점 Q 에서 m 에 내린 수선의 빔 R

직선 PR 은 m 과 수직이다. (삼수선 정리)

$$\text{이 때}, \quad \overline{OP} = 1, \quad \angle QOP = \alpha, \quad \angle QOR = \beta$$

$\angle POR = \gamma$ 라 하자.

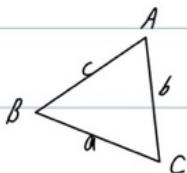
$$\Rightarrow \overline{OQ} = \cos \alpha, \quad \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \cos \beta$$

$$\Rightarrow \overline{OR} = \cos \alpha \cos \beta = \cos \gamma \rightarrow \text{그림 위의 피타고라스.}$$

$(\triangle ORP)$

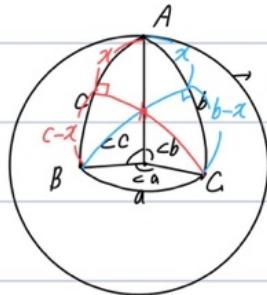
Chapter 6-4 사인법칙과 코사인법칙.

$$\triangle ABC, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



Thm 6.16) 단위구 S^2 의 측지상각형 $\triangle ABC$ 에 대하여

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$



먼쪽으로 돌아간다고 생각

$$(PB) \quad \begin{aligned} \sin A &= \frac{\sin h}{\sin b}, \quad \sin B = \frac{\sin h}{\sin a} \\ \Rightarrow \sin h &= \sin A \sin b = \sin B \sin a \\ \frac{\sin A}{\sin a} &= \frac{\sin B}{\sin b} \end{aligned} \quad)?$$

※ 유clidean 공간에서 고사인법칙

$$\triangle ABC \text{에 대하여 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

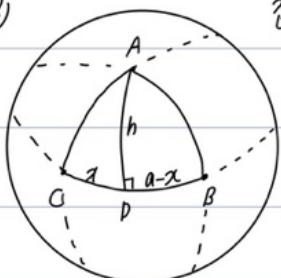
Thm 6.17) (사인법칙) 구 $S^2(\rho)$ 의 측지상각형 $\triangle ABC$ 에 대하여

$$\frac{\sin \angle a}{\sin A} = \frac{\sin \angle b}{\sin B} = \frac{\sin \angle c}{\sin C}$$

Thm 6.18) (코사인법칙) 단위구 S^2 의 측지상각형 $\triangle ABC$ 에 대하여

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

(PB)



점 A에서 BC에 대하여 수선의 발 D

$$\overline{AD} = h, \quad \overline{CD} = x, \quad \overline{DB} = a-x$$

Corol 6.14

$\triangle ACD$ 가 직각삼각형이므로 $\cos b = \underline{\cos a \cosh}$

$$\cos C = \frac{\cosh \sin x}{\sin b} \quad \leftarrow \text{Thm 6.15}$$

$\triangle ADB$ 가 직각삼각형이므로 $\cos c = \cosh \cdot \cos(a-x)$

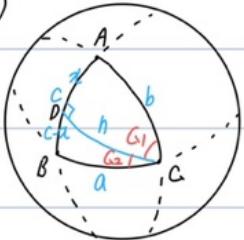
$$= \underline{\cosh} \cdot \underline{\cos a} \underline{\cos b} + \underline{\cosh} \cdot \underline{\sin a} \underline{\sin b}$$

$$\Rightarrow \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

Thm 6.20) (각의 코사인 법칙) 단위구 S^2 의 측지상각형 $\triangle ABC$ 에 대하여

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

1pb)



점 C에서 \overline{AB} 에 떨어 수선의 높이 D

$$\textcircled{f} \quad \cos A \cos(C-\alpha)$$

$$= \cos A \cdot \cos c \cos \alpha + \cos A \cdot \sin c \sin \alpha$$

$$= \cos c \underline{\cos^2 \alpha} + \cos \alpha \sin \alpha \sin c$$

$$= \cos c (1 - \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \sin \alpha \sin c$$

$$= \cos c - \cos c \sin^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \sin c$$

$$= \cos c + \sin \alpha (\sin c \cos \alpha - \cos c \sin \alpha)$$

$$= \cos c + \sin \alpha \cdot \sin(c-\alpha)$$

$$\cos C = \cos(G_1 + G_2)$$

$$= \cos G_1 \cos G_2 - \sin G_1 \sin G_2$$

$$= \frac{\cos \alpha \sin h}{\sin b} \cdot \frac{\cos(c-\alpha) \sin h}{\sin a} - \frac{\sin \alpha}{\sin b} \cdot \frac{\sin(c-\alpha)}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b} \left(\sin^2 h \cos \alpha \cos(c-\alpha) - \sin \alpha \sin(c-\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b} \left(\sin^2 h \cos c + \sin^2 h \sin a \sin(c-\alpha) - \sin \alpha \sin(c-\alpha) \right)$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b} \left(\sin^2 h \cos c + \sin a \sin(c-\alpha) (\sin^2 h - 1) \right)$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b} \left(\sin^2 h \cos c - \sin \alpha \sin(c-\alpha) \cdot \cos^2 h \right)$$

$$-\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

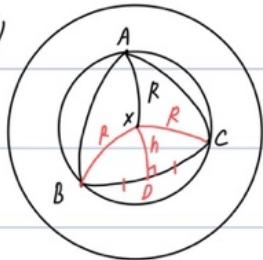
$$= -\frac{\cosh \sin \alpha}{\sin b} \cdot \frac{\cosh \sin(c-\alpha)}{\sin a} + \frac{\sin h}{\sin b} \cdot \frac{\sin h}{\sin a} \cdot \cos c$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b} \left(-\cos^2 h \sin a \sin(c-a) + \sin^2 h \cos c \right)$$

Thm 6.22) $\triangle ABC$ 가 \mathbb{S}^2 의 측지삼각형이고 그 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면

$$\tan R = \frac{\tan(\frac{a}{2})}{\cos(\frac{B+C-A}{2})} = \frac{\tan(\frac{b}{2})}{\cos(\frac{A+C-B}{2})} = \frac{\tan(\frac{c}{2})}{\cos(\frac{A+B-C}{2})}$$

(P8)



외접원의 중심 X , \overline{BC} 에 내린 수선의 발 D

$$\overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} a$$

$$\text{Corol 6.14} \text{에 의해, } \cos R = \cos(\frac{a}{2}) \cosh h$$

$$\text{Thm 6.15} \text{에 의해, } \cos(\angle XBD) = \frac{\cosh \sin(\frac{a}{2})}{\sin R}$$

$$\Rightarrow \cosh h = \frac{\cos(\angle XBD) \cdot \sin R}{\sin(\frac{a}{2})}$$

넣자!

$$\Rightarrow \cos R = \cos(\frac{a}{2}) \cdot \frac{\cos(\angle XBD) \cdot \sin R}{\sin(\frac{a}{2})} \quad \text{한쪽으로}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{a}{2})}{\cos(\frac{a}{2}) \cdot \cos(\angle XBD)} = \frac{\sin R}{\cos R}$$

$$\Rightarrow \tan R = \frac{\tan(\frac{a}{2})}{\cos(\angle XBD)}$$

$$\text{And } \angle A + \angle B + \angle C = 2(\angle XBD + \angle XAB + \angle XAC)$$

$$= 2(\angle XBD + \angle A) = 2\angle XBD + 2\angle A$$

$$\Rightarrow \angle XBD = \frac{\angle B + \angle C - \angle A}{2}$$

X 에서 \overline{AB} or \overline{AC} 에 수선을 내리면 두번째, 세번째도 성립함을 보일 수 있음.

Lemma 6.24) 단위구 S^2 에서 $\triangle ABC$ 가 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 측지삼각형이고 그 넓이가 D 이면
 $\cos C = 0, \sin C = 1$

$$(1) \sin D = \frac{\sin A \sin B}{1 + \cos C}$$

$$(2) \cos D = \frac{\cos A + \cos B}{1 + \cos C}$$

$$(pb) (1) D = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

$$\sin D = \sin(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

$$= -\sin((A+B)+C)$$

$$= -\left(\sin(A+B) \underset{0}{\cancel{\cos C}} + \cos(A+B) \underset{1}{\cancel{\sin C}} \right)$$

$$= -\cos(A+B)$$

$$= \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

7. By 5.6, a contradiction.

Thm 2.13) 임의의 직선 ℓ 과 임의의 점 P 에 대하여 P 를 지나서 ℓ 과 수직인 직선이 존재.

(PB) ① P 가 직선 ℓ 위에 있지 않은 경우.

1. 직선 ℓ 위에서 서로 다른 두 점 A, B 잡자. (결합공리2)

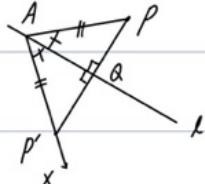
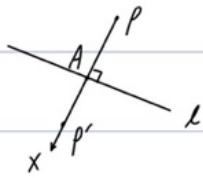
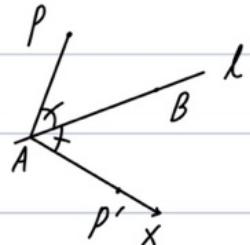
2. 직선 ℓ 에 대해 점 P 와 반대쪽에 $\angle XAB \cong \angle PAB$ 인 반직선 \overrightarrow{AX} 가 존재. (합동공리4)

3. $AP \cong AP'$ 인 P' 가 \overrightarrow{AX} 위에 존재. (합동공리1)

4. P' 와 P 는 ℓ 에 대해 반대쪽, P 와 X 가 ℓ 에 대해 반대쪽 $\Rightarrow P'$ 와 X 는 같은쪽, $\overline{PP'} \cap \ell = \emptyset$

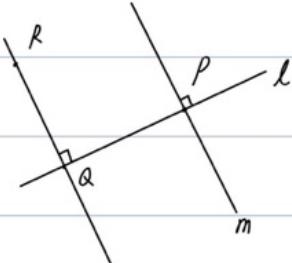
5. $\overline{PP'}$ 와 ℓ 의 교점을 Q 라 하면 $Q=A$ 이면 $\overline{PP'} \perp \ell$

$Q \neq A$ 이면 $SAS \Rightarrow \triangle PAQ \cong \triangle PAQ' \Rightarrow \overline{PP'} \perp \ell$



② P 가 직선 ℓ 위에 있는 경우

1. 직선 ℓ 위에 있지 않은 점 R (결합공리3)



2. ①에 의해 R 을 지나는 ℓ 과 수직인 직선 존재.

3. P 에서 $\angle RQP$ 와 합동인 각이 존재 (합동공리4)

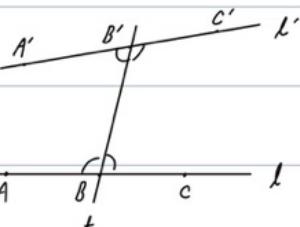
$\Rightarrow P$ 를 지나고 ℓ 에 수직인 직선 m 존재.

Def 2.14) 직선 t 가 직선 ℓ 과 점 B 에서 만나고 직선 ℓ' 와 점 B' 에서 만나는 횡선이라 하자.

직선 ℓ 위의 점 A, C 가 $A * B * C$, A, A' 와 C, C' 가 직선 t 에 대해 같은쪽에 있고, $A' * B' * C'$ 인

점 A', C' 를 ℓ' 에서 택하자.

이 때 $\angle A'B'B$, $\angle ABB'$, $\angle C'B'B$, $\angle CBB'$ 을 내각



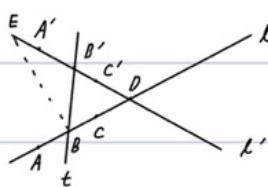
($\angle ABB'$, $\angle CBB'$) 를 엊각.

($\angle A'B'B$, $\angle C'B'B$) 를 엊각.

Thm 2.15) [엇각정리] 한 횡단선에 의해서 잘린 두 직선이 합동인 엇각을 가지면 두 직선은 평행하다. ④ 평행선공리를 가정하지 않는

(Pf) 서로 다른 두 직선 ℓ 과 ℓ' 가 평행하지 않다고 가정. ($\ell \cap \ell' = \{P\}$)

증명기하학에서는 역을 증명할 수 X



점 D가 직선 t에 대해 C, C'의 같은쪽, A, A'는 반대쪽.

그리고 $\angle A'B'B = \angle CBB'$ 라 가정

1. $BD \cong EB'$ 가 되는 $E \in \overline{B'A'}$ 이 존재 (합동공리1)

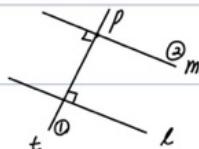
2. (SAS) $\triangle EBB' \cong \triangle DBB' \Rightarrow \angle DBB' \cong \angle EBB'$

3. $\angle DBB'$, $\angle EBB'$ 보각. $\angle EBB'$, $\angle DBB'$ 보각. $E \in \ell$ 이고 $\ell = \ell'$ ($\leftarrow \rightarrow$)

$\Rightarrow \ell \parallel \ell'$.

Corol 2.16) 한 직선 밖의 한 점을 지나는 그 직선의 평행선이 적어도 하나 존재한다.

(Pf) 1. Thm 2.13에 의해 점 P를 지나고 ℓ 에 수직인 t 존재.



2. Thm 2.13에 의해 점 P를 지나고 t에 수직인 m 존재.

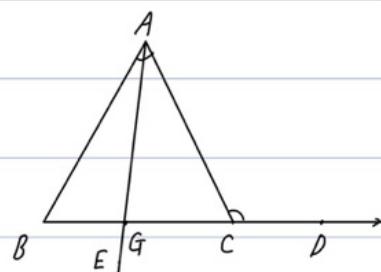
3. 엇각정리에 의해 $\ell \parallel m$.

Thm 2.17) [외각정리] 삼각형의 외각은 두 내대각보다 크다.

(Pf) 1. $\angle BAC = \angle ACD$ 라 하면 엇각정리에 의해 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ 이어야 ($\leftarrow \rightarrow$)

2. $\angle BAC > \angle ACD$ 라 가정

2-1. $\angle ACD = \angle CAE$ 인 반직선 \overline{AE} , $\overline{AE} \cap \overline{BC} = \{G\}$



2-2. 엇각정리에 의해 $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ 이어야. ($\leftarrow \rightarrow$)

$\Rightarrow \angle BAC < \angle ACD$.

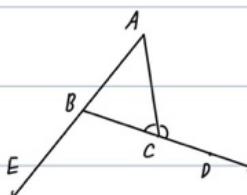
Corol 2.18) 삼각형 두 내각의 합은 2직각보다 작다.

(Pf) 1. 반직선 \overline{BC} 에서 $B \neq C \neq D$ 인 점 D가 존재. (순서공리 2번)

$$\angle C + \angle ACD = 2\text{직각}$$

$$\angle B + \angle C < \angle ACD + \angle C = 2\text{직각}$$

$$\Rightarrow \angle A + \angle B < 2\text{직각}$$



Thm 2.19) [사례의 증명] 증명기하학에서만 성립.

상각형 내각의 합은 2직각보다 작다.

Def) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

① $\langle v, v \rangle = 0$ $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$ 양정치

② $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ 대칭성

③ $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$) 分配律

④ $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle = \langle v, \alpha w \rangle$

(Ex) 1. $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd$ (0)

2. $\langle (a, b), (c, d) \rangle = 2ac + 3bd$ (0)

3. $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ad + bc$ (0)

Def) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

① $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$

② $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ Condition
⊗ $\| \cdot \| \stackrel{!}{\downarrow} \langle \cdot, \cdot \rangle$

③ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(Ex) 1. $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $\|(a, b)\| = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$
3. $\|(a, b)\| = |a| + |b|$
4. $\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$

3. $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1) \Rightarrow \|e_1\| = 1$, $\|e_2\| = 1$

① $\|e_1 + e_2\|^2 = \|(1, 1)\|^2 = 4$

$\langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle = \|e_1\|^2 + 2\langle e_1, e_2 \rangle + \|e_2\|^2$

$= 1 + 1 + 2\langle e_1, e_2 \rangle$

$\Rightarrow 2 = 2\langle e_1, e_2 \rangle$

② $\|e_1 - e_2\|^2 = \|(1, -1)\|^2 = 4$

$\langle e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle = \|e_1\|^2 - 2\langle e_1, e_2 \rangle + \|e_2\|^2$

$$= 1 + / - 2 \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\Rightarrow 2 = -2 \langle e_1, e_2 \rangle \quad (\rightarrow e)$$

$$4. \|(\alpha, b)\| = \max \{ |\alpha|, |b| \}$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| ?$$

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

$$\text{put } v = (a_1, b_1) \quad w = (a_2, b_2)$$

$$i) \|\alpha v\| = \|\alpha(a_1, b_1)\| = \max \{ |\alpha a_1|, |\alpha b_1| \}$$

$$= \max \{ |\alpha| |a_1|, |\alpha| |b_1| \}$$

$$= |\alpha| \|(a_1, b_1)\| = |\alpha| \|v\|$$

$$ii) \|v+w\| = \|(a_1, b_1) + (a_2, b_2)\|$$

$$= \max \{ |a_1+a_2|, |b_1+b_2| \}$$

\int_{T-I}

$$\leq \max \{ |a_1| + |a_2|, |b_1| + |b_2| \}$$

$$\begin{matrix} ? \\ \downarrow \\ = \|v\| + \|w\| \end{matrix}$$

Lemma) Norm $\|\cdot\|$ 이 내적 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 으로 만들어진다면 다음이 성립한다.

$$\textcircled{1} \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2 (\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{평행사변형 법칙}$$

$$\textcircled{2} \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4 \langle v, w \rangle \quad \text{Polarization identity}$$

$$(pf) \|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle \quad \textcircled{1}$$

$$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \langle v, w \rangle \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2 (\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4 \langle v, w \rangle$$

Thm) Norm of \mathbb{R}^n 이 내적으로부터 유도하기 위한 필요충분 조건은 Norm 이 평행사변형 법칙을 만족.

(pf) \Rightarrow 앞 Lemma에 의해.

$$\Leftrightarrow \text{내적 } \langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$$

$$\text{f. } \langle v, v \rangle = \frac{1}{4} (\|v+v\|^2 - \|v-v\|^2) = \frac{1}{4} 4 \|v\|^2 = \|v\|^2 \geq 0$$

$$\#2. \langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$$

$$= \frac{1}{4} (\|w+v\|^2 - \|w-v\|^2) = \langle w, v \rangle$$

$$\#3. 4 \langle v_1 + v_2, w \rangle = \underbrace{\|v_1 + v_2 + w\|^2}_{\text{평행사변형 법칙}} - \|v_1 - v_2 - w\|^2$$

$$= 2 (\underbrace{\|v_1\|^2 + \|v_2 + w\|^2}_{\text{평행사변형 법칙}}) - \|v_1 - v_2 - w\|^2 - \underbrace{\|v_1 + v_2 - w\|^2}_{\text{평행사변형 법칙}}$$

$$= 2 (\|v_1\|^2 + \|v_2 + w\|^2) - 2 (\|v_1 - w\|^2 + \|v_2\|^2) \cdots \textcircled{1}$$

$$4(\langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle) = \|v_1 + w\|^2 - \|v_1 - w\|^2 + \|v_2 + w\|^2 - \|v_2 - w\|^2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 4(\langle v_1 + v_2, w \rangle - \langle v_1, w \rangle - \langle v_2, w \rangle)$$

$$= 2 (\|v_1\|^2 + \|v_2 + w\|^2 - \|v_1 - w\|^2 - \|v_2\|^2)$$

$$- (\|v_1 + w\|^2 - \|v_1 - w\|^2 + \|v_2 + w\|^2 - \|v_2 - w\|^2)$$

$$= 2 (\|v_1\|^2 - \|v_2\|^2) + \|v_2 - w\|^2 - \|v_1 - w\|^2 - \|v_1 + w\|^2 + \|v_2 - w\|^2$$

$$= 2 (\cancel{\|v_1\|^2} - \cancel{\|v_2\|^2}) + 2 (\cancel{\|v_2\|^2} + \cancel{\|w\|^2}) - 2 (\cancel{\|v_1\|^2} + \cancel{\|w\|^2}) = 0$$

$$\#4. \langle \alpha v, w \rangle = \|\alpha v + w\|^2 - \|\alpha v - w\|^2$$

Chapter 4.1 사인 법칙, 코사인 법칙

* <사인 법칙> - The law of sines

$$\triangle ABC \text{의 넓이}, \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$(p6) (\triangle ABC \text{의 넓이}) = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A$$

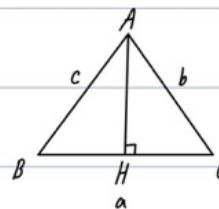
$$\Rightarrow 2(\triangle ABC \text{넓이}) = ac \sin B = ab \sin C = bc \sin A$$

$$\frac{1}{2(\triangle ABC \text{의 넓이})} = \frac{1}{ac \sin B} = \frac{1}{ab \sin C} = \frac{1}{bc \sin A}$$

$$\frac{abc}{2(\triangle ABC \text{의 넓이})} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

* <코사인 법칙> - The law of cosines

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



$$\overline{AH} = b \sin C$$

$\Rightarrow \triangle ABH$ 에 피타고라스 정리

$$\overline{CH} = b \cos C$$

$$\overline{BH} = a - b \cos C$$

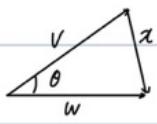
$$c^2 = (\overline{AH})^2 + (\overline{BH})^2$$

$$= b^2 \sin^2 C + (a - b \cos C)^2$$

$$= b^2 \sin^2 C + a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

(8) $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$



$$\Rightarrow \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 \rightarrow \text{파이thagoras}$$

(Cauchy-Schwarz-Theorem) 모든 벡터 \vec{v}, \vec{w} 에 대하여 $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$

$$=^* \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$$

(P8) 실수 t 에 대하여 $\|\vec{t} \cdot \vec{v} + \vec{w}\|^2 = t^2 \|\vec{v}\|^2 + 2t \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2 \geq 0$

판별식 $D_4 = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \leq 0$ 조건부

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \Rightarrow |\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

(인코프스키 부등식) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

$$\begin{aligned} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \|\vec{w}\|^2 \\ &\leq \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| + \|\vec{w}\|^2 \end{aligned} \quad \text{) (C-S-I)}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

Thm) $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ 에 대하여 다음이 성립.

$$1. d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0 \quad =^* \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$$

$$2. d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$$

$$3. d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$$

(P8) 1. $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle} \geq 0$

$$2. d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| = d(\vec{y}, \vec{x})$$

$$\begin{aligned} 3. d(\vec{x}, \vec{z}) &= \|\vec{x} - \vec{z}\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{z}\| \\ &\leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| \end{aligned} \quad \text{) (인코프스키 부등식)}$$

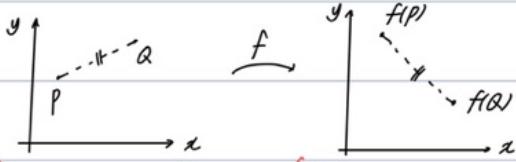
4.2 유클리드 공간과 등장사상

(Def) $\text{num} \rightarrow \mathbb{R}^n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

(Euclidean space) $\rightarrow E^n = (\mathbb{R}^n, <\cdot>)$

Def 4.1) 유클리드 공간 E^n 에서 일대일 대응사상 $f: E^n \rightarrow E^n$ 이 임의의 두 점 $P, Q \in E^n$ 에 대해서

$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ 을 만족시킬 때, f 를 등장사상(=동거리사상: isometry) 라 한다.

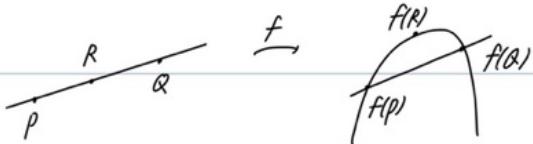


Prop 1) 등거리사상에 대한 직선의像是 직선이다.

(Pf) 직선 l 위에 임의의 두 점 P, Q 를 생각하자.

1 만약 $f(\overline{PQ})$ 가 두 점 $f(P)$ 와 $f(Q)$ 를 잇는 직선이 아니라 곡선이라 하면

\overline{PQ} 위에 있는 점 R 에 대해 $f(R)$ 이 $\overline{f(P)f(Q)}$ 위에 있지 않은 R 이 존재.



2. $d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)$ 이지만

$$d(f(P), f(R)) + d(f(R), f(Q)) \neq d(f(P), f(Q))$$

$$f \text{가 등장사상이므로 } d(P, R) = d(f(P), f(R))$$

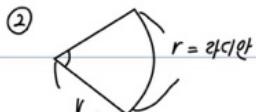
$$d(R, Q) = d(f(R), f(Q)), \quad d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$$

$$\Rightarrow d(P, R) + d(R, Q) + d(P, Q) \leftarrow$$

Prop 2) 등장사상은 각의 크기를 보존한다.

$$\textcircled{1} \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$



Prop 3) 등장사상의 proposition은 등장사상이다.

$$(Pf) \quad d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) = d(g(f(P)), g(f(Q))) = d(g \cdot f(P), g \cdot f(Q))$$