2. 비유클리드 기하학의 발견

2.1 중립기하학 (힐베르트 공리군에서 평행선 공리 제외)

Def 2.1) 두 직선 l, m이 만나지 않을 때 두 직선은 평행하다함. ($l /\!/ m$)

Def 2.2) 직선 t가 두 직선 l, m과 서로 다른 점에서 만날 때, t를 l과 m의 횡선(transversal)이라 함.

㊉ 유클리드 공리

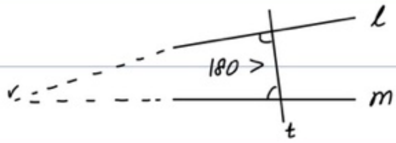
1. 서로 다른 두 점 P, Q 지나는 직선은 오직 하나

2. 두 선분 AB, CD에 대하여 $A*B*E$ 이고 선분 BE가 선분 CD와 합동이 되는 점 E가 유일하게 존재.

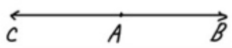
3. 서로 다른 두 점 O, A에 대하여 중심 O, 반지름 OA인 원이 존재

4. 모든 직각은 서로 합동.

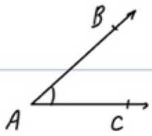
5. 두 직선 l, m의 횡선 t에 대하여 t의 한 쪽에서 만들어지는 두 내각의 합이 $180°$보다 작으면 l과 m은 같은쪽에서 만남.



Def 2.4) $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AC}$ 가 꼭짓점 A에서 방사된 서로 다른 반직선이고 $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{AC}$ 일 때, $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AC}$ 를 반향 반직선(opposite rays)

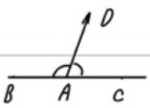


Def 2.5) 반향 반직선이 아닌 두 반직선 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$와 점 A를 한 조로 하는 쌍을 꼭짓점이 A인 각(angle)이라 함.



Def 2.6) 두 각 $\angle BAD$와 $\angle CAD$에 대하여 $\overrightarrow{AD}$가 공통변이고 나머지 두 변 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$가 반향반직선일 때,

각 $\angle BAD$와 $\angle CAD$가 서로 보각이라 함.



Def 2.7) $\angle BAD$가 그 보각과 합동일 때, $\angle BAD$를 직각이라 함.

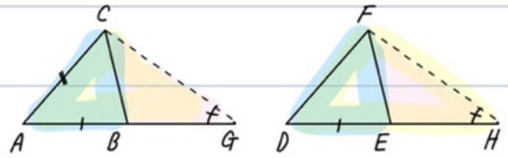
Def 2.8) 두 각 $\angle ABC, \angle DEF$에 대하여 $\angle ABC \cong \angle GEF$ 이고

반직선 $\overrightarrow{EG}$가 두 반직선 $\overrightarrow{ED}$와 $\overrightarrow{EF}$ 사이에 있을 때, $\angle ABC < \angle DEF$로 나타냄.

Def 2.9) 두 선분 AB, CD에 대하여 $AB \cong CE$ 이고 $C*E*D$ 인 점 E가 존재할 때 $AB < CD$ or $CD > AB$

Thm 2.10) 합동인 각의 보각들도 합동이다.

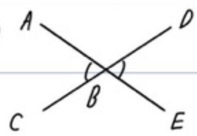
(pf)



1. 합동공리 (1) $AB = DE$, $BC = EF$, $BG = EH$
2. (SAS) ⇒ $\triangle ABC \cong \triangle FDE$
3. 1에 의해서 $AG \cong DH$ 이므로 SAS ⇒ $\triangle ACG \cong \triangle DFH$
4. $CG \cong FH$, $BG \cong EH$, $\angle G \cong \angle H$ ⇒ $\triangle BCG \cong \triangle EFH$ ∎

Corol 2.11) 맞꼭지각은 서로 합동이다.

(pf)

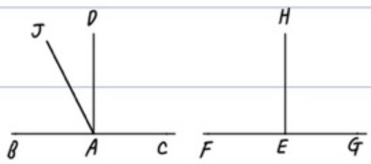


$\angle ABC$의 보각 $\angle ABD$와

$\angle ABC$의 보각 $\angle CBE$는 Thm 2.10에 의해 합동 ∎

Thm 2.12) 모든 직각은 합동이다.

(pf)



1. 귀류법: $\angle BAD \ncong \angle FEH$, $\angle FEH < \angle BAD$
2. 합동공리 (4)에 의해 $\angle BAJ \cong \angle FEH$ 인 반직선 $\overrightarrow{AJ}$가 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AD}$ 사이에 존재.
3. $\angle CAJ$는 $\angle BAJ$의 보각, $\angle GEH$는 $\angle FEH$의 보각이므로 Thm 2.10에 의해 $\angle CAJ \cong \angle GEH \cong \angle FEH$ (by 직각의 정의)
4. $\angle BAJ \cong \angle FEH < \angle BAD \cong \angle CAD$ (By 1)

   ⇒ $\angle BAJ \cong \angle CAK$ 인 반직선 $\overrightarrow{AK}$가 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{AC}$ 사이에 존재.
5. $\angle BAJ \cong \angle FEH \overset{(3)}{\cong} \angle CAJ$

   $\overset{(4)}{\Rightarrow} \angle CAD > \angle CAK$

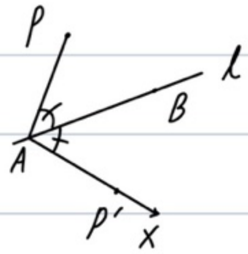
   $\angle CAJ \underset{(2)}{\cong} \angle BAJ \underset{(4)}{\cong} \angle CAK$

   ⇒ $\angle CAD > \angle CAJ$
6. $\overrightarrow{AJ}$은 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AD}$ 사이에, $\overrightarrow{AD}$는 $\overrightarrow{AJ}$와 $\overrightarrow{AC}$ 사이에 ⇒ $\angle CAJ > \angle CAD$ (→←)

7. By 5.6, a contradiction ■

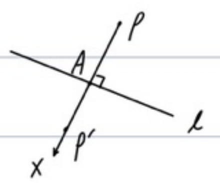
Thm 2.13) 임의의 직선 l과 임의의 점 P에 대하여 P를 지나서 l과 수직인 직선이 존재.

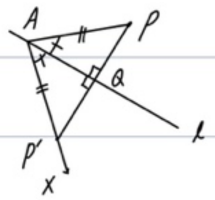
(pf) ① P가 직선 l 위에 있지 않은 경우.



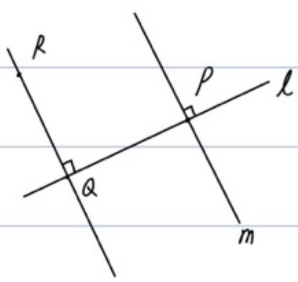
1. 직선 l 위에서 서로 다른 두 점 A, B 잡자. (결합공리2)
2. 직선 l에 대해 점 P와 반대쪽에 $\angle XAB \cong \angle PAB$ 인 반직선 $\overrightarrow{AX}$가 존재. (합동공리4)
3. $AP \cong AP'$ 인 P'가 $\overrightarrow{AX}$ 위에 존재. (합동공리1)
4. P'와 P는 l에 대해 반대쪽. P와 X가 l에 대해 반대쪽 ⇒ P'와 X는 같은쪽. $\overline{PP'} \cap l \neq \emptyset$
5. $\overline{PP'}$와 l의 교점을 Q라 하면 $Q=A$ 이면 $\overline{PP'} \perp l$

$Q \neq A$ 이면 SAS ⇒ $\triangle PAQ \cong \triangle P'AQ$ ⇒ $\overline{PP'} \perp l$





② P가 직선 l 위에 있는 경우



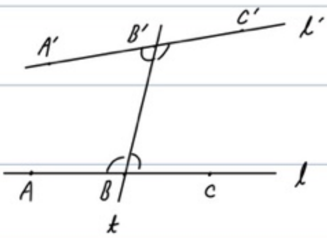
1. 직선 l 위에 있지 않은 점 R (결합공리 3)
2. ①에 의해 R을 지나는 l과 수직인 직선 존재.
3. P에서 $\angle RQP$와 합동인 각이 존재 (합동공리 4)

⇒ P를 지나고 l에 수직인 직선 m 존재. ■

Def 2.14) 직선 t가 직선 l과 점 B에서 만나고 직선 l'와 점 B'에서 만나는 횡선이라 하자.

직선 l 위의 점 A, C가 $A*B*C$, A, A'와 C, C'가 직선 t에 대해 같은 쪽에 있고, $A'*B'*C'$인

점 A', C'를 l'에서 택하자.



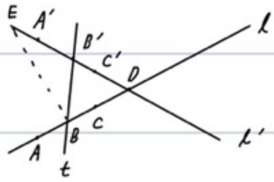
이 때 $\angle A'B'B$, $\angle ABB'$, $\angle C'B'B$, $\angle CBB'$을 내각

($\angle ABB'$, $\angle C'B'B$)

($\angle A'B'B$, $\angle CBB'$)를 엇각.

Thm 2.15) [엇각정리] 한 횡단선에 의해서 잘린 두 직선이 합동인 엇각을 가지면 두 직선은 평행하다. ※ 평행선공리를 가정하지 않는 중립기하학에서는 역을 증명할 수 ×

(pf) 서로 다른 두 직선 l과 l'가 평행하지 않다고 가정. ($l \cap l' = \{P\}$)



점 D가 직선 t에 대해 C, C'와 같은쪽, A, A'는 반대쪽.

그리고 $\angle A'B'B = \angle CBB'$ 라 가정

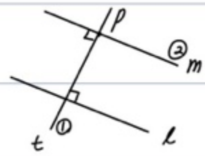
1. $BD \cong EB'$ 가 되는 $E \in \overrightarrow{B'A'}$ 이 존재 (합동공리1)

2. (SAS) $\triangle EB'B \cong \triangle DBB' \Rightarrow \angle DB'B \cong \angle EBB'$

3. $\angle DB'B$, $\angle EB'B$ 보각, $\angle EBB'$, $\angle DBB'$ 보각. $E \in l$ 이고 $l = l'$ ($\rightarrow\leftarrow$)

$\Rightarrow l \parallel l'$ ∎

Corol 2.16) 한 직선 밖의 한 점을 지나는 그 직선의 평행선이 적어도 하나 존재한다.



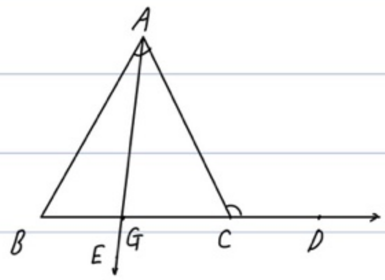
(pf) 1. Thm 2.13 에 의해 점 P를 지나고 l에 수직인 t 존재.

2. Thm 2.13 에 의해 점 P를 지나고 t에 수직인 m 존재.

3. 엇각정리에 의해 $l \parallel m$ ∎

Thm 2.17) [외각정리] 삼각형의 외각은 두 내대각보다 크다.

(pf) 1. $\angle BAC = \angle ACD$ 라 하면 엇각정리에 의해 $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ 이어야 ($\rightarrow\leftarrow$)



2. $\angle BAC > \angle ACD$ 라 가정

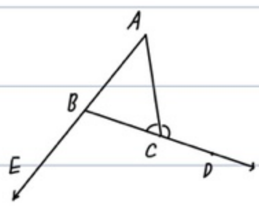
2-1. $\angle ACD = \angle CAE$ 인 반직선 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AE} \cap \overrightarrow{BC} = \{G\}$

2-2. 엇각정리에 의해 $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ 이어야. ($\rightarrow\leftarrow$)

$\Rightarrow \angle BAC < \angle ACD$ ∎

Corol 2.18) 삼각형 두 내각의 합은 2직각보다 작다.

(pf) 1. 반직선 $\overrightarrow{BC}$ 에서 $B*C*D$ 인 점 D가 존재. (순서공리 2번)



$\angle C + \angle ACD = 2$ 직각

$\angle B + \angle C < \angle ACD + \angle C = 2$직각

$\Rightarrow \angle A + \angle B < 2$ 직각 ∎

Thm 2.19) [사케리-르장드르 정리] 중립기하학에서만 성립.

삼각형 내각의 합은 2직각보다 작다.

Def) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

① $\langle v, v \rangle = 0 \quad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$ 양정치

② $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ 대칭성

③ $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$

④ $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle = \langle v, \alpha w \rangle$

③, ④ 쌍선형

(EX) 1. $\langle (a,b), (c,d) \rangle = ac + bd$ (O)

2. $\langle (a,b), (c,d) \rangle = 2ac + 3bd$ (O)

3. $\langle (a,b), (c,d) \rangle = ad + bc$ (O)

Def) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

① $\|v\| \geq 0, \ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$

② $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ ⊛ $\| \cdot \| \underset{\Leftarrow !}{\overset{\text{Condition}}{\Rightarrow}} \langle \cdot, \cdot \rangle$

③ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(EX) 1. $\|(a,b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. $\|(a,b)\| = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$

3. $\|(a,b)\| = |a| + |b|$

1.–3. (O)

4. $\|(a,b)\| = \max\{|a|, |b|\}$

3. $e_1 = (1,0), \ e_2 = (0,1) \Rightarrow \|e_1\| = 1, \ \|e_2\| = 1$

① $\|e_1 + e_2\|^2 = \|(1,1)\|^2 = 4$

$$\|e_1 + e_2\|^2 = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle = \|e_1\|^2 + 2\langle e_1, e_2 \rangle + \|e_2\|^2$$

$$= 1 + 1 + 2\langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\Rightarrow 2 = 2\langle e_1, e_2 \rangle$$

② $\|e_1 - e_2\|^2 = \|(1,-1)\|^2 = 4$

$$\|e_1 - e_2\|^2 = \langle e_1 - e_2, e_1 - e_2 \rangle = \|e_1\|^2 - 2\langle e_1, e_2 \rangle + \|e_2\|^2$$

$= 1 + 1 - 2\langle e_1, e_2 \rangle$

$\Rightarrow 2 = -2\langle e_1, e_2 \rangle$ $(\rightarrow\leftarrow)$

4. $\|(a,b)\| = \max\{|a|, |b|\}$

$\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$?

$\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$

put $v = (a_1, b_1)$ $w = (a_2, b_2)$

i) $\|\alpha v\| = \|\alpha(a_1, b_1)\| = \max\{|\alpha a_1|, |\alpha b_1|\}$

$= \max\{|\alpha||a_1|, |\alpha||b_1|\}$

$= |\alpha| \|(a_1, b_1)\| = |\alpha|\|v\|$

ii) $\|v+w\| = \|(a_1, b_1) + (a_2, b_2)\|$

$= \max\{|a_1+a_2|, |b_1+b_2|\}$

$\downarrow$ T-I

$\le \max\{|a_1|+|a_2|, |b_1|+|b_2|\}$

? $\downarrow$

$= \|v\| + \|w\|$

lemma) Norm $\|\cdot\|$ 이 내적 $\langle\cdot\rangle$ 으로 만들어진다면 다음이 성립한다.

① $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ 평행사변형 법칙

② $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4\langle v, w \rangle$ Polarization identity

(pf) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle$ ⋯ ①

$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$ ⋯ ②

① + ② : $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$

① − ② : $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4\langle v, w \rangle$ ∎

Thm) Norm of $\mathbb{R}^n$ 이 내적으로부터 유도되기 위한 필요충분조건은 Norm 이 평행사변형 법칙을 만족.

(pf) ⇒) 앞 lemma 에 의해.

⇐) 내적을 $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$

* 1. $\langle v, v \rangle = \frac{1}{4}(\|v+v\|^2 - \|v-v\|^2) = \frac{1}{4} 4\|v\|^2 = \|v\|^2 \ge 0$

$*2.\ \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$

$= \frac{1}{4}(\|w+v\|^2 - \|w-v\|^2) = \langle w, v\rangle$

$*3.\ 4\langle v_1+v_2, w\rangle = \|v_1+v_2+w\|^2 - \|v_1-v_2-w\|^2$

$= 2(\|v_1\|^2 + \|v_2+w\|^2) - \|v_1-v_2-w\|^2 - \|v_1+v_2-w\|^2$ (평행사변형 법칙)

$= 2(\|v_1\|^2 + \|v_2+w\|^2) - 2(\|v_1-w\|^2 + \|v_2\|^2) \cdots ①$

$4(\langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle) = \|v_1+w\|^2 - \|v_1-w\|^2 + \|v_2+w\|^2 - \|v_2-w\|^2 \cdots ②$

$① - ②:\ 4(\langle v_1+v_2, w\rangle - \langle v_1, w\rangle - \langle v_2, w\rangle)$

$= 2(\|v_1\|^2 + \|v_2+w\|^2 - \|v_1-w\|^2 - \|v_2\|^2)$

$-(\|v_1+w\|^2 - \|v_1-w\|^2 + \|v_2+w\|^2 - \|v_2-w\|^2)$

$= 2(\|v_1\|^2 - \|v_2\|^2) + \|v_2-w\|^2 - \|v_1-w\|^2 - \|v_1+w\|^2 + \|v_2-w\|^2$

$= 2(\cancel{\|v_1\|^2} - \cancel{\|v_2\|^2}) + 2(\cancel{\|v_2\|^2} + \cancel{\|w\|^2}) - 2(\cancel{\|v_1\|^2} + \cancel{\|w\|^2}) = 0$

$*4.\ \langle \alpha v, w\rangle = \|\alpha v+w\|^2 - \|\alpha v-w\|^2$

Chapter 4.1 사인 법칙, 코사인 법칙

$*$ <사인 법칙 - The law of sines>

$\triangle ABC$에 대하여, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

(pf) $(\triangle ABC$의 넓이$) = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$

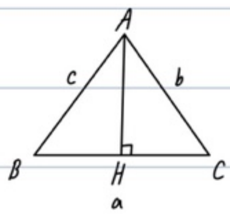
$\Rightarrow 2(\triangle ABC$ 넓이$) = ac\sin B = ab\sin C = bc\sin A$

$$\frac{1}{2(\triangle ABC\text{의 넓이})} = \frac{1}{ac\sin B} = \frac{1}{ab\sin C} = \frac{1}{bc\sin A}$$

$$\frac{abc}{2(\triangle ABC\text{의 넓이})} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \ \blacksquare$$

$*$ <코사인 법칙 - The law of cosines>

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$



$\overline{AH} = b\sin C$ $\Rightarrow$ $\triangle ABH$에 피타고라스 정리

$\overline{CH} = b\cos C$

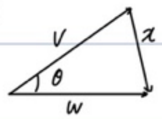
$c^2 = (\overline{AH})^2 + (\overline{BH})^2$

$\overline{BH} = a - b\cos C$

$= b^2\sin^2 C + (a-b\cos C)^2$

$$\Big\downarrow = b^2\sin^2 C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \ \blacksquare$$

⊛ 

$x = v - w$

$$\Rightarrow \ \|w - v\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\underbrace{\langle v, w\rangle}_{\|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\theta}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$\Rightarrow \ \langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2\right)}_{a^2 + b^2 - c^2}$$

$a^2 + b^2 - c^2 \rightarrow$ 피타고라스

(Cauchy-Schwartz-Ineq) 모든 벡터 v, w 에 대해 $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$

"=" $\Leftrightarrow$ $v \parallel w$

(pf) 실수 t 에 대해서 $\|t\cdot v + w\|^2 = t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \ge 0$

판별식 $\frac{D}{4} = \langle v, w\rangle^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \le 0$ 으로부터

$\langle v, w\rangle^2 \le \|v\|^2\|w\|^2 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$ ∎

(민코프스키 부등식) $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$

(pf) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$

$\le \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2$ (C-S-I)

$\rightarrow \|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ ∎

Thm) $d(x, y) = \|x - y\|$ 에 대하여 다음이 성립.

1. $d(x, y) \ge 0$ "=" $\Leftrightarrow$ $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

(pf) 1. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} \ge 0$

2. $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$

3. $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\|$ 민코프스키 부등식.

$\le \|x - y\| + \|y - z\|$ ∎

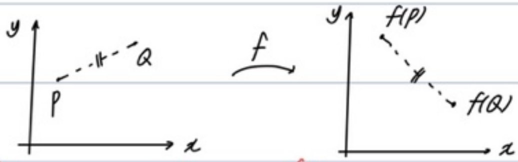
4.2 유클리드 공간과 등장사상

Real num → $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \}$

Euclidean space → $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot \rangle)$

Def 4.1) 유클리드 공간 E^n 에서 일대일 대응사상 $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ 이 임의의 두 점 $P, Q \in E^n$ 에 대해서

$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ 를 만족시킬 때, f를 등장사상(=등거리사상, isometry) 라 한다.



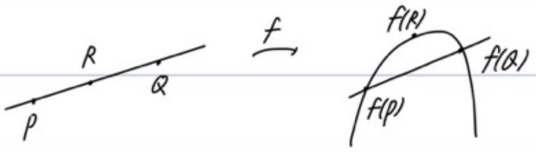
Prop 1) 등거리사상에 대한 직선의 상은 직선이다.

f ℓ f(ℓ)

(pf) 직선 ℓ 위에 임의의 두 점 P, Q 를 생각하자.

1 만약 $f(\overline{PQ})$ 가 두 점 $f(P)$ 와 $f(Q)$ 를 잇는 직선이 아니라 곡선이라 하면

$\overline{PQ}$ 위에 있는 점 R 에 대해 $f(R)$ 이 $\overline{f(P)f(Q)}$ 위에 있지 않은 R 이 존재.



2. $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$ 이지만

$d(f(P), f(R)) + d(f(R), f(Q)) \neq d(f(P), f(Q))$

f가 등장사상이므로 $d(P,R) = d(f(P), f(R))$

$d(R,Q) = d(f(R), f(Q))$, $d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$

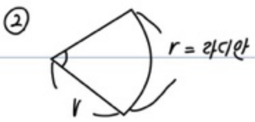
$\Rightarrow d(P,R) + d(R,Q) \neq d(P,Q)$ (←) ■

Prop 2) 등장사상은 각의 크기를 보존한다.

① $d(x,y) = \| x-y \| = \sqrt{(x-y,\ x-y)}$

$\cos\theta = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\| u \| \| v \|}$

②



Prop 3) 등장사상의 proposition 은 등장사상이다.

(pf) $d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) = d(g(f(P)), g(f(Q))) = d(g \cdot f(P), g \cdot f(Q))$ ■

f가 등장사상　　g가 등장사상　　　$g \circ f$가 등장사상

Prop 4) ① f^{-1}도 등장사상

② 반지름 길이가 r인 원 C에 대하여 $f(C)$도 반지름 r인 원이 된다.

(pf) ① 임의의 두 점 $P(\neq)Q$에 대하여 $f(P)=P'$, $f(Q)=Q'$ 라 하자.

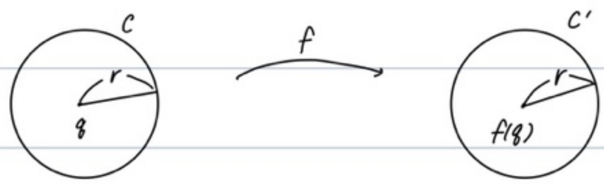
f가 1-1 대응이므로 f^{-1}가 존재. $P=f^{-1}(P')$, $Q=f^{-1}(Q')$

$\Rightarrow d(f^{-1}(P'), f^{-1}(Q')) \underset{f\text{가 등장사상}}{=} d(f(f^{-1}(P')), f(f^{-1}(Q'))) \underset{f\text{와 } f^{-1}\text{의 관계}}{=} d(P', Q')$

$\Rightarrow f^{-1}$가 등장사상

(평행이동의 원리로 생각하기. f가 θ만큼 움직이는 사상 $\Rightarrow f^{-1}$: θ 반대방향으로)

② $C=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,q)=r\}$　　$C'=\{P\in\mathbb{R}^2 \mid d(P,f(q))=r\}$

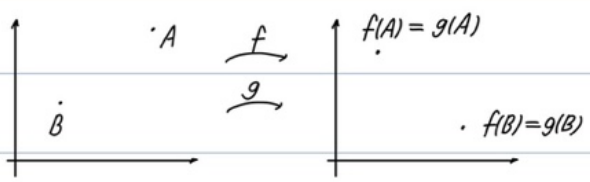


$P\in C' \underset{C'\text{의 정의}}{\Leftrightarrow} d(P,f(q))=r \underset{f\text{가 등장사상}}{\Leftrightarrow} d(f^{-1}(P), q)=r \underset{C\text{의 정의}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(P)\in C$

$\Rightarrow C'=f(C)$ ∎

Thm 4.2) 두 등장사상 $f, g: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$과 서로 다른 두 점 $A, B\in\mathbb{E}^n$에 대하여 $f(A)=g(A)$, $f(B)=g(B)$ 이면

직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 위의 임의의 점 P에서 $f(P)=g(P)$.



(pf) 1) $A*P*B$

$d(f(A), f(P)) \underset{f^{-1}\text{가 등장사상}}{=} d(A,P) \underset{g\text{가 등장사상}}{=} d(g(A), g(P)) \underset{g(A)=f(A)}{=} d(f(A), g(P))$

$d(f(P), f(B)) = d(P,B) = d(g(P), g(B)) = d(g(P), f(B))$

f^{-1}가 등장사상 g가 등장사상 $g(B) = f(B)$

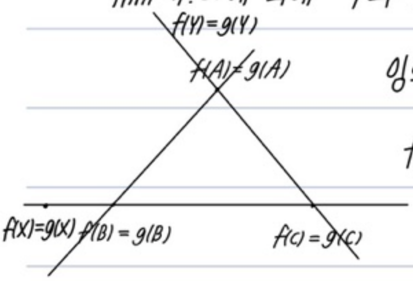
Prop 1 에 의해 $f(A) * f(P) * f(B)$ 이고, $f(A) * f(P) * f(B)$ 이므로 $f(P) = g(P)$.

2) $P * A * B$
3) $A * B * P$) same the above ∎

Thm 4.3) $\mathbb{E}^2$ 에서 두 등장사상이 한 직선 위에 있지 않은 세 점에서 일치하면 두 등장사상은 서로 같다.

(pf) 등장사상 f, g가 한 직선 위에 있지 않은 세 점에서 일치한다면 $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$,

Thm 4.2 에 의해 f와 g는 세 직선 $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ 에서 일치한다.

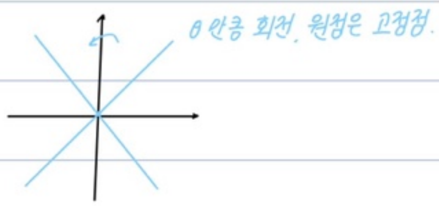


임의의 점 P를 지나고 $\overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{BC} \cup \overleftrightarrow{AC}$ 위의 두 점 X, Y를 지나는 직선이 존재한다.

$f(X) = g(X)$, $f(Y) = g(Y)$ 이므로 Thm 4.2 에 의해 $f(P) = g(P)$ ∎

Def) 등장사상 f가 점 P에서 $f(P) = P$ 일 때, 점 P를 고정점이라 함.

(ex)



Corol) 등장사상 f가 한 직선 위에 있지 않은 세 고정점을 가지면 f는 항등사상

$$\begin{cases} f(A) = A = \iota(A) \\ f(B) = B = \iota(B) \\ f(C) = C = \iota(C) \end{cases}$$

Def 4.5) 유클리드 공간 $\mathbb{E}^n$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $f(A) = B$인 등장사상 $f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ 이 존재할 때,

A와 B는 합동이다 라고 하고, $A \cong B$

4. 3 유클리드 평면 $\mathbb{E}^2$의 등장사상.

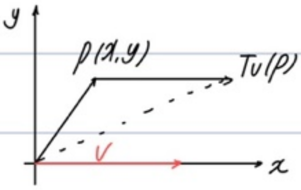
1. 평행이동 (translation)

$\mathbb{E}^2$의 각 점 P에 대해 $T_v(P)$는 P를 v만큼 이동한 점이다.

$T_v(P) = P + v$

(Property 1) 임의의 두 벡터 v, w에 대해 $T_v \cdot T_w = T_{v+w}$

$$(\because \ (T_v \cdot T_w)(p) = T_v(T_w(p)) = p + w + v = T_{v+w}(p) \ )$$



2) $T_v^{-1} = T_{-v}$, $T_v^{-1}(T_v(p)) = p$

$(\because \ \Rightarrow T_v^{-1}(p+v) = p$

$\Rightarrow$ put $p+v = Q$, $T_v^{-1}(Q) = Q - v = T_{-v}(Q)$)

3) T_v는 등장사상

($\because$ 임의의 두 점 P, Q에 대하여 $d(T_v(P), T_v(Q)) = \| T_v(P) - T_v(Q) \|$

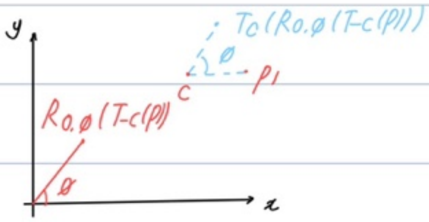
$= \| P + v - (Q + v) \| = \| P - Q \| = d(P, Q)$ ∎)

2. 회전이동 (rotation)

$\mathbb{E}^2$에서 점 C와 각도 ϕ에 대해 C를 중심으로 ϕ 만큼 회전하는 사상. $R_{C,\phi}$

㊟ $R_{O,\phi}(p) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R_{C,\phi} = T_C \cdot R_{O,\phi} \cdot T_{-C}$



(Property)

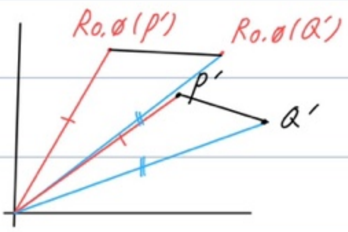
1) $R_{C,\phi}^{-1} = R_{C,-\phi}$

2) $C = O$일 때 회전이동 $R_{O,\phi}$

3) $C \neq O$일 때 회전이동 $R_{C,\phi} = T_C \cdot R_{O,\phi} \cdot T_{-C}$

$R_{C,\phi}(p) = R_{O,\phi}(p - C) + C$

4) $R_{C,\phi}$가 등장사상이다.



($\because$ $d(R_{C,\phi}(P), R_{C,\phi}(Q))$

$= d(R_{O,\phi}(\underbrace{P-C}_{P'}), R_{O,\phi}(\underbrace{Q-C}_{Q'}))$

SAS 합동 $\triangle P'OQ' \cong \triangle R_{O,\phi}(P') O R_{O,\phi}(Q')$

$= d(P', Q') = d(P, Q)$ ∎)

3. 대칭이동

직선 l이 주어져 있다 하자. 임의의 점 P에 대하여 $\rho_l(P)$는 점 P를 직선 l에 대해 대칭이동한 것이다.

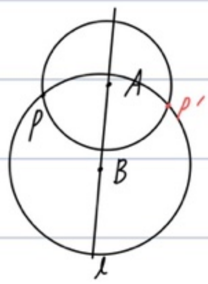
이는 직선 l에 대해 P와 반대편에 있고 직선 l까지의 거리가 $d(P, L) = \inf\{d(P, X),\ x \in l\}$와 같은점이다.

< 대칭이동 방법 >

1) $\mathbb{E}^2$를 포함하는 3차원에서 l을 축으로 $180°$ 회전시킨다.

2) P가 l 위에 있지 않으면 l 위의 두 점을 중심으로 하고 P를 지나는 두 원을 그리면

만나는 교점 중 하나가 대칭점 P'이다.



3) x-축을 l이라면 $\rho_l(x, y) = (x, -y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

< 대칭이동의 property >

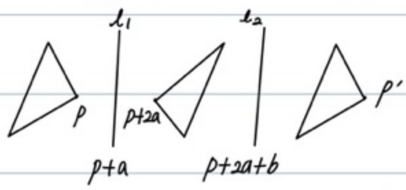
1) $(\rho_l)^{-1} = \rho_l$

2) ρ_l은 각의 방향성(orientation)을 바꾼다.

3) ρ_l은 등장사상이다. 실제로 두 점 P, Q에 대하여 다음이 성립.

$d(\rho_l(P), \rho_l(Q)) = \| P' - Q' \| = \| P - Q \| = d(P, Q)$

4) 모든 평행이동은 대칭이동의 합성이다.



(pf) 먼저 평행이동 T_v에 대하여 $\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{v}$를 만족시키는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$를 구한다.

직선 l_1을 $d(P, l_1) = |a|$이 되도록 잡고, 직선 l_2를 $d(p+2a, l_2) = |b|$이 되도록 잡는다.

그러면 임의의 점 P에 대하여 $T_v(P) = \rho_{l_2} \cdot \rho_{l_1}(P)$가 된다.

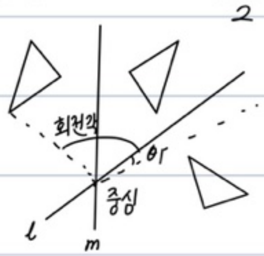
실제로 $p + \vec{a} \in l_1$이고, $\rho_{l_1} = p + 2\vec{a}$이며,

$p+2\vec{a}+\vec{b} \in l_2$ 이므로 $p+2\vec{a}+2\vec{b} = p+\vec{v} = T_{\vec{v}}(p)$ 이다. ■

5) 모든 회전이동은 두 개의 대칭이동의 합성이다.

(pf) 회전이동 R이 $R=R_{C,\theta}$, 즉 R이 점 C를 중심으로 θ 만큼의 회전일 때. 직선 l을 적당히 잡아

도3 과 이루는 각의 크기가 θ_1 이라 하고 $\theta_2 = \frac{\theta-2\theta_1}{2}$ 가 되도록 직선 m을 잡으면 된다.

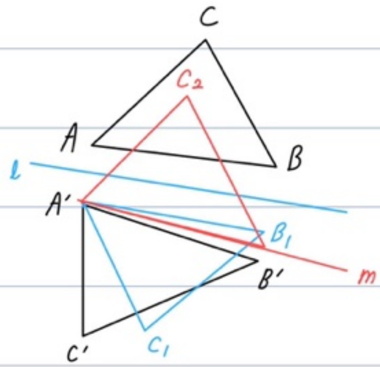


[세반사 정리] 평면의 임의의 등장사상은 최대 세 직선에 대한 대칭이동의 합성으로 나타낼 수 있다.

(pf) 평면의 한 등장사상 φ [phi] 라 하자.

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C 가 있고,

$\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$, $\varphi(C)=C'$ 라 하자.



Step1) $A=A'$ 라 하면 $\overline{AA'}$ 수직이등분선 l 에 대한 대칭이동

: $\rho_l(B)=B_1$, $\rho_l(C)=C_1$

Step 2) $B' \neq B_1$ 라 하면, $\overline{B'B_1}$ 수직이등분선 m에 대한 대칭이동

: $\rho_m(B_1)=B'$, $\rho_m(C_1)=C_2$

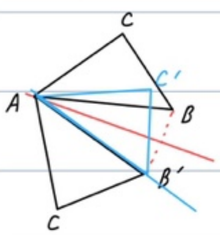
실제로 $\rho_m(A_1)=A'$

Step3) $C_2 \neq C'$ 라 하면 $\overline{A'B'}$ 에 대한 대칭이동을 하여 C_2를 C'로 대응시킨다.

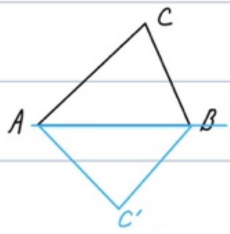
⇒ $\rho_n \cdot \rho_m \cdot \rho_l$ 은 A와 A', B와 B', C와 C' 를 대응시키는 등장사상.

⇒ 그러므로 $\rho_n \cdot \rho_m \cdot \rho_l = \varphi$ by Thm 4.3

<Step 1 생략 시>



<Step 1, 2 생략 시>



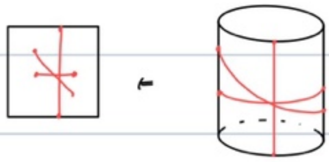
6. 구면 기하학 or 타원 기하학

(spherical)

6.1 측지선 (geodesic)

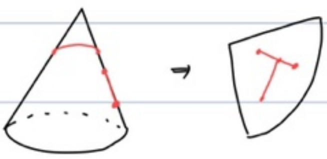
두 점 사이의 최단거리 곡선 $\overset{o}{\Rightarrow}$ / $\not\Leftarrow$ 측지선

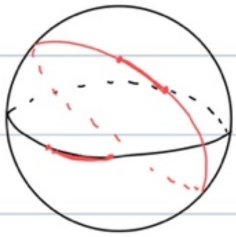
(예)



측지선이라고 해서 두 점 사이의 최단거리가 되는 것은 아님.

최단거리 곡선이 측지선 중의 하나가 되는 것이다.



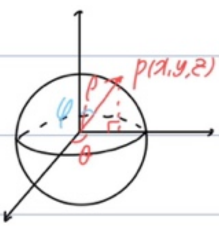


Rmk (*)

Def 6.1) 주어진 공간에서 두 점 사이를 잇는 곡선 중 최단거리 곡선을 측지선이라 한다.

Def 6.2) 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 원점 O에서 거리가 ρ인 점의 집합을 중심이 O이고 반지름이 ρ인 구 또는 구면

$$S^2(\rho)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=\rho^2\}$$

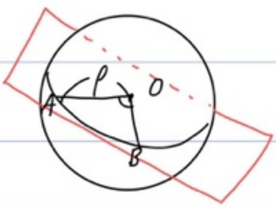


$x=\rho\sin\varphi\cos\theta \qquad 0\le\theta<2\pi$

$y=\rho\sin\varphi\sin\theta \qquad 0\le\varphi\le\pi$

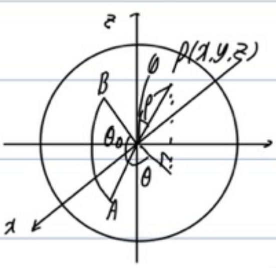
$z=\rho\cos\varphi$

Def 6.3) $\mathbb{R}^3$에서 원점 O를 지나는 평면과 $S^2(\rho)$의 교선을 대원이라 한다. (great circle)



㊉ 구면 위의 측지선은 대원 또는 대원의 일부

(호 AB의 길이) $=\rho\angle AOB$



반지름 ρ인 구

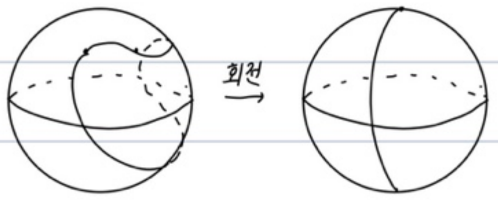
$\alpha:[a,b]\to S^2(\rho)\subset\mathbb{R}^3$

$\alpha(t)=(x(t),\,y(t),\,z(t))$

$\|\alpha(t)\|^2=\rho$ (원점에서부터 $\alpha(t)$까지의 거리)

$$L(\alpha)=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

Thm 6.4) $\mathbb{S}^2(\rho)$ 위의 두 점을 잇는 곡선 중에서 길이가 최소인 것은 두 점을 지나는 대원에 의해 주어지는 호이다.



같은 경도에 있다고 가정하여 생각

(pf) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{S}^2(\rho) \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\alpha(a) = A$, $\alpha(b) = B$ 인 임의의 매개곡선이라 하자.

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

α 가 $\mathbb{S}^2(\rho)$ 위에 있는 곡선이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \quad \Rightarrow \quad x'(t) = \rho(\varphi' \cos\varphi \cos\theta - \theta' \sin\varphi \sin\theta)$

$y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad\qquad y'(t) = \rho(\varphi' \cos\varphi \sin\theta + \theta' \sin\varphi \cos\theta)$

$z = \rho \cos\varphi \qquad\qquad\qquad z'(t) = -\rho\varphi' \sin\varphi$

$\downarrow$

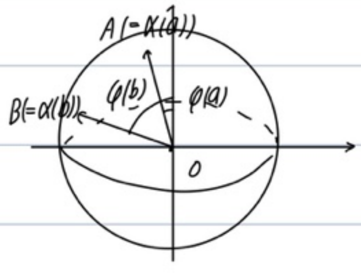
$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\begin{aligned}&\rho^2(\varphi'^2\cos^2\varphi\cos^2\theta - 2\varphi'\theta'\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin\theta + \theta'^2\sin^2\varphi\sin^2\theta \\ &+\rho^2(\varphi'^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2\varphi'\theta'\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin\theta + \theta'^2\sin^2\varphi\cos^2\theta) \\ &+ \rho^2\varphi'^2\sin^2\varphi\end{aligned}}\; dt$$

$$= \rho\int_a^b (\theta'^2\sin^2\varphi + \varphi'^2\cos^2\varphi + \varphi'^2\sin^2\varphi)^{1/2}\, dt$$

$$= \rho\int_a^b (\theta'^2\sin^2\varphi + \varphi'^2)^{1/2}\, dt \quad \geq \rho\int_a^b \varphi'\, dt \ (\geq 0)$$

※ $\theta'^2\sin^2\varphi$ 를 없애는 이유

: 얘 기준으로 하면 의미 X



$= \rho[\varphi(b) - \varphi(a)]$

$= \rho \angle AOB$

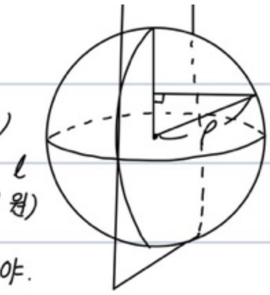
$= \overset{\frown}{AB}$ ($\to$ 최솟값) ∎

같은 경도에 있으므로 $\theta(a) - \theta(b) = 0$

$\to$ 원래 같은 점에 있었다는 것이므로

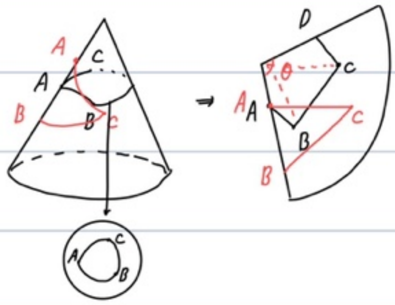
Chapter 6.2 측지삼각형

Def) 기하학적 공간에서 세 변이 모두 측지선으로 이루어지는 삼각형을 측지삼각형(geodesic triangle)



대원(=반지름 ρ인 원)의 일부가 되어야.

(예)

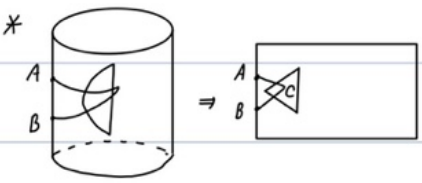


※ 꼭짓점 포함 시 $0 < \theta < 360^\circ$

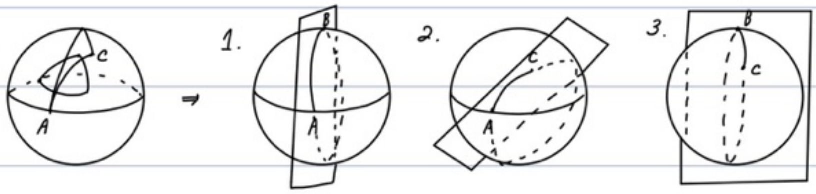
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle\theta = 540^\circ$

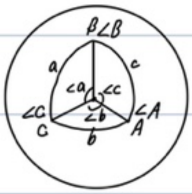
$\angle A + \angle B + \angle C = 540^\circ - \theta > 180^\circ$

*



*

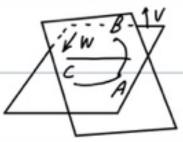




※ $a = \rho\angle a$

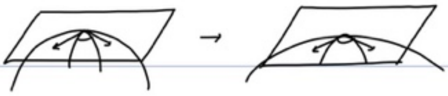
$b = \rho\angle b$

$c = \rho\angle c$



$$\cos\theta = \frac{V\cdot W}{\|V\|\cdot\|W\|} = V\cdot W$$

$\|V\| = \|W\| = 1$



lemma) (1) $(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OP} = 0$

OP와 OQ에 수직인 벡터 = $\overrightarrow{OP}$에 수직인 벡터이므로

$(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OQ} = 0$

($\neq$) 두 개가 평행하지 않다.

(2) $\vec{OP}\times\vec{OQ}=\vec{0}$ 일 필요충분조건은 두 벡터 $\vec{OP}$ 와 $\vec{OQ}$가 일차종속이다.

(pf) Report 벡터 $\vec{OP}$ 와 $\vec{OQ}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\vec{OP}\times\vec{OQ}=\|\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\|\sin\theta$ 이다.

따라서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{OP}, \vec{OQ}$ 에 대해 두 벡터가 평행일 필요충분 조건은 $\vec{a}\times\vec{b}=0$ 이다.

두 벡터가 평행하면 서로 실수배로 표현될 수 있으므로 $\vec{OP}$ 와 $\vec{OQ}$ 는 일차종속이다. ∎

lemma 6.7) 측지삼각형 $\triangle ABC$ 에서

(1) $\angle a=\angle(\vec{OB}, \vec{OC})$ $\angle b=\angle(\vec{OC}, \vec{OA})$, $\angle c=\angle(\vec{OA}, \vec{OB})$

(2) $\angle A=\angle(\vec{OA}\times\vec{OB}, \vec{OA}\times\vec{OC})$

$\angle B=\angle(\vec{OB}\times\vec{OC}, \vec{OB}\times\vec{OA})$

$\angle C=\angle(\vec{OC}\times\vec{OA}, \vec{OC}\times\vec{OB})$

Def) $S^2(\rho)$ 위의 점 P의 좌표가 (a,b,c)일 때, 좌표 $(-a,-b,-c)$인 점을 $-P$로 쓰고

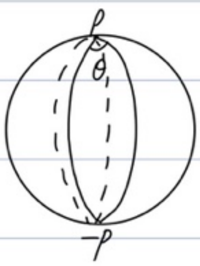
P의 대칭점 (antipodal point) 라 한다.

(= 대척점)

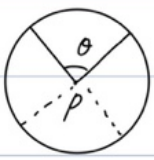
→ 구는 3차원 속에 있는 2차원

(2가지 방향의 벡터만 존재하므로 기저 2개)

Def) 두 대원이 점 P 에서 만나고 그 각의 크기가 θ 이면 두 대원은 꼭짓점 $P, -P$를 갖는 두 개의 영역을 만든다. 각의 크기가 θ 인 두 대원에 의해 주어지는 합동인 두 영역 중 하나를 반달영역 (luna) 라 한다.



→ <위에서 봤을 때>



$$\frac{(\text{반달영역})}{(\text{구})}=\frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow (\text{반달영역})=\frac{\theta}{2\pi}\cdot 4\pi\rho^2 = 2\theta\rho^2$$

lemma 6.8) 함수 $f: S^2(\rho)\to S^2(\rho)$, $f(P)=-P$ 는 구면등장사상이다.

(pf) 두 점 $P, Q\in S^2(\rho)$ 이고 $\alpha: [a,b]\to S^2(\rho)$

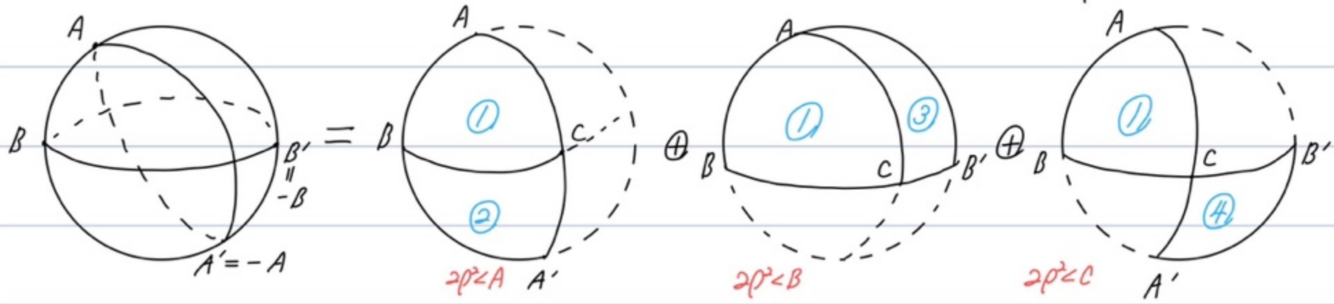
$\alpha(t)=(x(t), y(t), z(t))$ 가 $\alpha(a)=P$, $\alpha(b)=Q$ 인 $S^2(\rho)$ 위 곡선이라 하자.

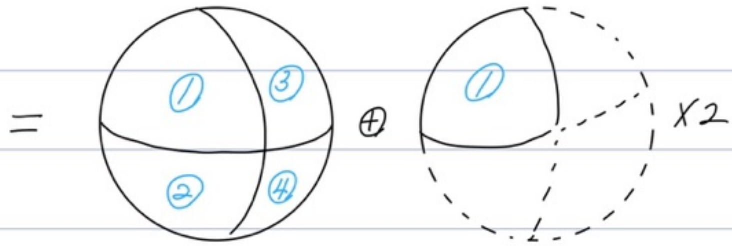
$$L(\alpha)=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{(-x'(t))^2+(-y'(t))^2+(-z'(t))^2}\,dt$$

$= \mathcal{L}(\underbrace{f(\alpha)}_{-\alpha(t)}) = \mathcal{L}(-\alpha(t))$

$\Rightarrow \; d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$. ■

Thm 6.9) ∀ $S^2(\rho)$ 위의 측지삼각형 $\triangle ABC$에 대하여 $\angle A+\angle B+\angle C = \pi + \dfrac{\triangle ABC}{\rho^2}$





$\Rightarrow 2\rho^2\angle A + 2\rho^2\angle B + 2\rho^2\angle C = 2\rho^2\pi + 2\triangle ABC$

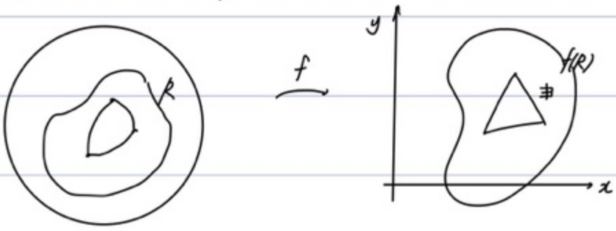
$\Rightarrow \angle A+\angle B+\angle C = \pi + \dfrac{\triangle ABC}{\rho^2}$ ■

ρ120

Corol 6.10) $S^2(1)$ 위의 측지삼각형 $\triangle ABC$에 대하여 $\angle A+\angle B+\angle C > \pi$

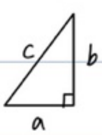
Corol 6.11) $\triangle ABC = \angle A+\angle B+\angle C - \pi$

Corol 6.12) ∀ $S^2(\rho)$ 의 영역 R가 측지삼각형을 포함하면 R은 유클리드 평면의 영역과 거리동형 (isometric)이 될 수 없다.



내각의 합이 180 보다 크다. 내각의 합이 180 보다 작거나 같다.

Chapter 6.3. 직각삼각형



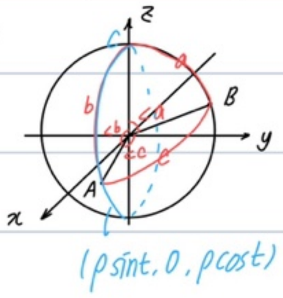
$c^2 = a^2 + b^2$

$1 = \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = \sin^2\theta + \cos^2\theta$

Thm 6.13) 구 $S^2(\rho)$ 위에서 측지삼각형 $\triangle ABC$가 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 측지삼각형이면

$$\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) = \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cdot\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)$$

(pf)



점 C를 북극점 $(0,0,\rho)$, 점 A를 xz- 평면 위에 가정하자.

$\angle a = \frac{a}{\rho}$, $\angle b = \frac{b}{\rho}$ ($a = \rho\angle a$ 이므로)

$A = \left(\rho\sin\left(\frac{b}{\rho}\right),\ 0,\ \rho\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\right)$

$B = \left(0,\ \rho\sin\left(\frac{a}{\rho}\right),\ \rho\cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\right)$

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \rho^2\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) \qquad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{c}{\rho}\right) = \cos\left(\frac{a}{\rho}\right)\cos\left(\frac{b}{\rho}\right)$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\|\vec{OA}\|}_{\rho}\cdot\underbrace{\|\vec{OB}\|}_{\rho}\cdot\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) = \rho^2\cos\left(\frac{c}{\rho}\right) \qquad \blacksquare$$

Thm 6.15) 단위구 S^2 에서 측지삼각형 $\triangle ABC$ 가 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 측지삼각형이라면

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad \cos A = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}$$

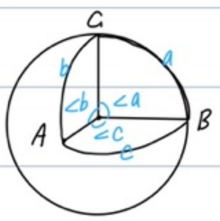
(pf) 점 C를 북극점 $(0,0,1)$, 점 A를 xz-평면, 점 B를 yz-평면에 있다 가정하자.

$A = (\sin b,\ 0,\ \cos b)$

$B = (0,\ \sin a,\ \cos a)$

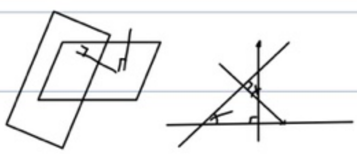
① $$\vec{OA}\times\vec{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin b & 0 & \cos b \\ 0 & \sin a & \cos a \end{vmatrix} = (-\sin a\cos b,\ -\sin b\cos a,\ \sin a\sin b)$$

$$\Rightarrow \|\vec{OA}\times\vec{OB}\| = \|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB}\|\cdot\sin C$$



$$= \sin c$$

$a = \rho\angle a \underset{\rho=1}{=} \angle a$, $\angle A = \angle(\vec{OA}\times\vec{OB},\ \vec{OA}\times\vec{OC})$



$\vec{OA} = (\sin b, 0, \cos b)$, $\vec{OC} = (0,0,1)$

$$\Rightarrow (\vec{OA}\times\vec{OC})\cdot(\vec{OA}\times\vec{OB}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sin b & 0 & \cos b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-\sin a\cos b,\ -\sin b\cos a,\ \sin b\sin a)$$

$$= (0, -\sin b, 0)\cdot(-\sin a\cos b, -\sin b\cos a, \sin b\sin a)$$

$$= \sin^2 b\cos a$$

$$\|\vec{OA}\times\vec{OC}\|\cdot\|\vec{OA}\times\vec{OB}\|\cdot\cos\angle A = \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\angle A$$

$$\Rightarrow \cancel{\sin}^{\cancel{2}}b\cos a = \cancel{\sin b}\sin c\cos\angle A$$

$$\Rightarrow \cos\angle A = \frac{\sin b\cos a}{\sin c}$$

외적 정의

② $\|(\vec{OA}\times\vec{OC})\times(\vec{OA}\times\vec{OB})\| = \sin b\sin c\cdot\sin\angle A$

그냥 외적 계산

$$= \left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\sin b & 0 \\ -\sin a\cos b & -\sin b\cos a & \sin b\sin a \end{vmatrix}\right\| = \|(-\sin^2 b\sin a, 0, \sin a\sin b\cos b)\|$$

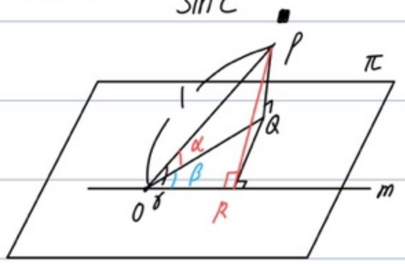
$$= (\sin^4 b\sin^2 a + \sin^2 a\sin^2 b\cos^2 b)^{1/2}$$

$$= (\sin^2 a\sin^2 b(\underbrace{\sin^2 b+\cos^2 b}_{1}))^{1/2}$$

$$= \sin a\sin b$$

$$\Rightarrow \cancel{\sin b}\sin c\cdot\sin\angle A = \sin a\cancel{\sin b}$$

$$\sin\angle A = \frac{\sin a}{\sin c}$$



직선 m은 O를 지나면서 평면 π 위에 있다.

점 P에서 평면에 내린 수선의 발 Q

점 Q에서 m에 내린 수선의 발 R

직선 PR은 m과 수직이다. (삼수선 정리)

이 때, $\overline{OP}=1$, $\angle QOP=\alpha$, $\angle QOR=\beta$

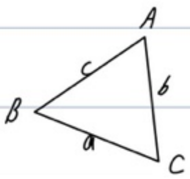
$\angle POR=\gamma$ 라 하자.

$$\Rightarrow \overline{OQ} = \cos\alpha,\quad \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \cos\beta$$

$\Rightarrow \overline{OR} = \cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma$ → 구면 위의 피타고라스.

($\triangle ORP$)

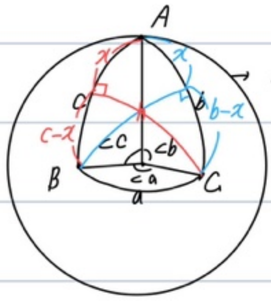
Chapter 6-4 사인법칙과 코사인 법칙.



$$\triangle ABC,\quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Thm 6.16) 단위구 S^2의 측지삼각형 $\triangle ABC$에 대하여

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$



→ 뒷쪽으로 돌아간다고 생각

(pf) $\sin A = \dfrac{\sin h}{\sin b}$, $\sin B = \dfrac{\sin h}{\sin a}$

$\Rightarrow \sin h = \sin A \sin b = \sin B \sin a$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

?

㊀ 유클리드 공간에서 코사인법칙

$\triangle ABC$ 에 대하여 $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

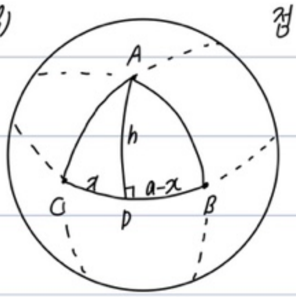
Thm 6.17) (사인법칙) 구 $S^2(\rho)$의 측지삼각형 $\triangle ABC$에 대하여

$$\frac{\sin\angle a}{\sin A} = \frac{\sin\angle b}{\sin B} = \frac{\sin\angle c}{\sin C}$$

Thm 6.18) (코사인법칙) 단위구 S^2의 측지삼각형 $\triangle ABC$에 대하여

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a \sin b \cos C$$

(pf)



점 A에서 BC에 내리는 수선의 발 D

$\overline{AD} = h$, $\overline{CD} = x$, $\overline{DB} = a-x$

Corol 6.14

$\triangle ACD$가 직각삼각형이므로 $\cos b = \cos x \cosh$

$$\cos C = \frac{\cos h \sin x}{\sin b} \leftarrow \text{Thm 6.15}$$

$\triangle ADB$가 직각삼각형이므로 $\cos c = \cos h \cdot \cos(a-x)$

↓ 코코싸싸

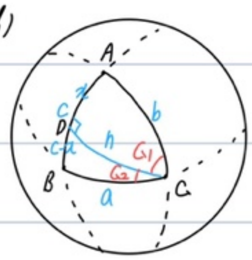
$= \cos h \cdot \cos a \cos x + \cos h \cdot \sin a \sin x$

$\Rightarrow \quad \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$ ∎

Thm 6.20) (각의 코사인 법칙) 단위구 $\mathbb{S}^2$의 측지삼각형 $\triangle ABC$에 대하여

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

pf)



점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발 D

(*) $\cos x \cos(c-x)$

$$= \cos x \cdot \cos c \cos x + \cos x \cdot \sin c \sin x$$

$$= \cos c \cos^2 x + \cos x \sin x \sin c$$

$$= \cos c (1 - \sin^2 x) + \cos x \sin x \sin c$$

$$= \cos c - \cos c \cdot \sin^2 x + \cos x \sin x \sin c$$

$$= \cos c + \sin x (\sin c \cos x - \cos c \sin x)$$

$$= \cos c + \sin x \cdot \sin(c - x)$$

$$\cos C = \cos(C_1 + C_2)$$

$$= \cos C_1 \cos C_2 - \sin C_1 \sin C_2$$

$$= \frac{\cos x \sin h}{\sin b} \cdot \frac{\cos(c-x)\sin h}{\sin a} - \frac{\sin x}{\sin b} \cdot \frac{\sin(c-x)}{\sin a}$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b}\left(\sin^2 h \cos x \cos(c-x) - \sin x \sin(c-x)\right)$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b}\left(\sin^2 h(\cos c + \sin x \sin(c-x)) - \sin x \sin(c-x)\right)$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b}\left(\sin^2 h \cos c + \sin^2 h \sin x \sin(c-x) - \sin x \sin(c-x)\right)$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b}\left(\sin^2 h \cos c + \sin x \sin(c-x)(\sin^2 h - 1)\right)$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b}\left(\sin^2 h \cos c - \sin x \sin(c-x) \cdot \cos^2 h\right)$$

$$-\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

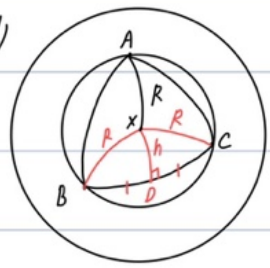
$$= -\frac{\cosh \sin x}{\sin b} \cdot \frac{\cosh \sin(c-x)}{\sin a} + \frac{\sin h}{\sin b} \cdot \frac{\sin h}{\sin a} \cdot \cos c$$

$$= \frac{1}{\sin a \sin b}\left(-\cos^2 h \sin A \sin(C-A) + \sin^2 h \cdot \cos C\right)$$ ∎

Thm 6.22) $\triangle ABC$가 S^2의 측지삼각형이고 그 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$$\tan R = \frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+C-B}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)}$$

(pf)



외접원의 중심 X, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발 D

$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}a$

Corol 6.14 에 의해, $\cos R = \cos\left(\frac{a}{2}\right)\cosh$

Thm 6.15 에 의해, $\cos(\angle XBD) = \dfrac{\cosh \sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin R}$

넣자!

$$\Rightarrow \cosh = \frac{\cos(\angle XBD)\cdot \sin R}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \cos R = \cos\left(\frac{a}{2}\right)\cdot \frac{\cos(\angle XBD)\cdot \sin R}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$ 한쪽으로

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos(\angle XBD)} = \frac{\sin R}{\cos R}$$

$$\Rightarrow \tan R = \frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos(\angle XBD)}$$

And $\angle A + \angle B + \angle C = 2(\angle XBD + \angle XAB + \angle XAC)$

$= 2(\angle XBD + \angle A) = 2\angle XBD + 2\angle A$

$$\Rightarrow \angle XBD = \frac{\angle B + \angle C - \angle A}{2}$$

X에서 $\overline{AB}$ or $\overline{AC}$에 수선을 내리면 두번째, 세번째도 성립함을 보일 수 있음. ∎

lemma 6.24) 단위구 S^2 에서 $\triangle ABC$ 가 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 인 측지삼각형이고 그 넓이가 Δ 이면

$\cos C = 0$, $\sin C = 1$

(1) $\sin \Delta = \dfrac{\sin a \sin b}{1+\cos C}$

(2) $\cos \Delta = \dfrac{\cos a + \cos b}{1+\cos C}$

(pf) (1) $\Delta = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$

$$\sin \Delta = \sin(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

$$= -\sin((A+B)+C)$$

$$= -(\sin(A+B)\underbrace{\cos C}_{0} + \cos(A+B)\underbrace{\sin C}_{1})$$

$$= -\cos(A+B)$$

$$= \sin A \sin B - \cos A \cos B$$