2021년 A형

2) 복소함수 $f(z) = 2(z+\frac{1}{z})$. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=2\}$ 에서 $|f(z)|$의 $M . m$? [2점]

1pb) $|z| = 2$

$\frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$

$M = 2(2+\frac{1}{2}) = 4+1=5$

$m = 2(\frac{1}{2}+2) = 0$

$z = x+iy$ 라 하면 $|z|^2 = x^2+y^2 = 4$

$f(z) = \frac{1}{2}(x+iy+\frac{1}{x+iy})$

$= \frac{1}{2}(x+iy+\frac{x-iy}{\underbrace{x^2+y^2}_{4}}) = \frac{1}{2}(\frac{4x+4iy+x-iy}{4})$

$= \frac{1}{8}(5x+3iy)$

$\therefore |f(z)|^2 = \frac{1}{64}(25x^2+9y^2) = \frac{1}{64}(16x^2+\overset{36}{9\cdot 4}) = \frac{1}{16}(4x^2+9)$

$|z|=2$ 라 그런듯함

$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x=0$ 일때 $m = (\frac{9}{16})^{1/2} = \frac{3}{4}$

$x=\pm 2$ 일때 $M = (\frac{25}{16})^{1/2} = \frac{5}{4}$

3) A 회사 $N(2500, 80^2) \xrightarrow{100개} \overline{X}$ 모평균 추정 다시 공부.

B 회사 $N(2200, 66^2) \xrightarrow{121개} \overline{Y}$

$\overline{X}-\overline{Y}$ 의 $Var(\overline{X}-\overline{Y}) = a.$

상수 $a.b = ?$ [2점]

$P(\overline{X}-\overline{Y} \le 320) = P(Z \le b).$

(pb) $X \sim N(2500, 80^2) \Rightarrow \overline{X} \sim N(\cancel{250}\ 2500 \text{ 그대로}, 8^2)$

$Y \sim N(2200, 66^2) \Rightarrow \overline{Y} \sim N(\cancel{1100}\ 2200 \text{ 그대로}, 6^2)$

$\Rightarrow \overline{X}-\overline{Y} \sim N(2500-2200, 8^2+6^2)$

$= N(300, 10^2)$

$\cancel{V(\overline{X}-\overline{Y}) = V(\overline{X}) - V(\overline{Y}) = 64 - 36 =} \ 28 = a = 100$

$P(\overline{X}-\overline{Y} \le 320) = P\left(Z \le \dfrac{320-300}{10}\right)$

$= P(Z \le 2)$ $b = 2.$

4) $\mathbb{R}^3$ $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 위에 단위속력곡선

$\gamma:[0,1]\to M$ 각 $s\in[0,1]$ 에 대해 점 $\gamma(s)$ 에서의 γ의

종법선벡터 (binormal vector) $B(s)$.

법선

점 $\gamma(s)$ 에서 M의 normal vector $n(s)$.

열률

$\forall s\in[0,1]$ $B(s)\cdot n(s)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\gamma(s)$의 torsion $a(s)$?

[2점]

곡률

curvature $b(s)$?

$a(s)=0$

~~$b(s)=\frac{1}{2}$~~

γ는 구면곡선이므로 $n=\frac{\gamma}{\|\gamma\|}=\gamma \Rightarrow n'=\gamma'=T$

(단위)

$\langle B,n\rangle=\frac{1}{2} \Rightarrow \langle B',n\rangle+\langle B,n'\rangle=0$

$\Rightarrow \langle B,n'\rangle=\langle \tau N,n\rangle=\frac{\tau}{\kappa}\langle \kappa N,n\rangle=\frac{\tau}{\kappa}\kappa_n=-\frac{\tau}{\kappa}=0$

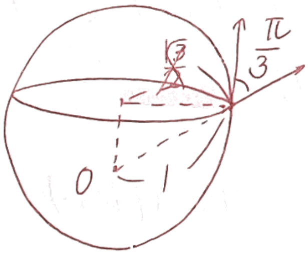
(단, κ_n은 M에서 γ의 법곡률)

$\therefore \tau=a=0.$

γ는 구면 위의 평면 도형이므로 원의 일부.

B와 n이 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 γ의 반지름은 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \kappa=b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$



$1-\cancel{\frac{3}{4}}=4$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y}\left(f(x,y)-[x+y]\right)dxdy$$ 분리!

단 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대정수

$$+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{y}f(x,y)\,dxdy+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,dxdy$$ [4점]

(PB) 주어진 식은
$$\boxed{\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y}f(x,y)\,dxdy+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{y}f(x,y)\,dxdy+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\,dxdy}$$ A

$x=\sqrt{1-y^2}$

$x^2=1-y^2$

$x^2+y^2=1$

$$-\boxed{\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y}[x+y]\,dxdy}$$ 이다.

B 라 하자!

$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ \frac{\pi}{4}\le\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\le\frac{\pi}{2}\}$

$=\{(r,\theta)\mid 1\le r\le 2,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

$\dfrac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=\dfrac{r^2\cos^2\theta}{r^3}$

$$A=\iint_{D_1}f(x,y)\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{2}\frac{r^2\cos^2\theta}{r^3}\,r\,drd\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos2\theta+1}{2}\,d\theta=\left[\frac{\sin2\theta}{4}+\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$$

$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{1-y^2}\le x\le y,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\le y\le 1\}$ 라 할 때,

$(x,y)\in D_2-\{(1,1)\}$ 이면 $[x+y]=1$ 이다.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}y-\sqrt{1-y^2}\,dy$$

그러므로 $B=\iint_{D_2}[x+y]\,dxdy=\text{area}(D_2)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

$\therefore A+B=-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$

6) $\mathbb{R}^2$ 동치관계 $\sim$ 정의

$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (tx', ty')$ 인 실수 $t \neq 0$ 존재.

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\sim$에 관한 동치류 $[x,y]$

$\sim$에 관한 상집합 $Y = \mathbb{R}^2/\sim$.

상사상 $\pi : \mathbb{R}^2 \to Y$ $(\pi(x,y) = [x,y])$

$\mathbb{R}^2$ 위에 보통위상 공간 X.

상집합 Y 위의 $\pi : X \to Y$ 에 대한 상위상 $\mathcal{J}$.

즉 $\mathcal{J}$는 Y 위의 $X/\sim$ 의 상위상.

$\exists [0,0]$ 포함하는 $\mathcal{J}$ 의 원소가 유일함을 증명.

& $(Y, \mathcal{J})$가 T_1- space 아닌 이유.? [4점]

1단 보통위상은 거리함수 $d((x_1,y_1).(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_2-y_1)^2}$ 로 부터 유도되는 위상.

$Y = \{[0,0]\} \cup \{[\cos\theta, \sin\theta] \mid 0 \le \theta < \pi\}$

(I) $[0,0] \in G$ 인 $G \in \mathcal{J}$ 에 대해 $G = Y$ 임을 보이자.

$(0,0) \in [0,0] = \pi^{-1}(\{[0,0]\}) \subset \pi^{-1}(G)$ 이므로 $r > 0$ 이 존재하여

$B_d((0,0), r) \subset \pi^{-1}(G)$ 를 만족.

$0 \le \theta < \pi$ 인 임의의 θ 에 대해 $(\frac{r}{2}\cos\theta, \frac{r}{2}\sin\theta) \in B_d((0,0),r) \subset \pi^{-1}(G)$

이므로 $[\cos\theta, \sin\theta] = \pi(\frac{r}{2}\cos\theta, \frac{r}{2}\sin\theta) \subset G$ 가 성립. 따라서 $Y = G$.

(II) $(Y, \mathcal{J})$가 T_1 이라 가정하자.

$[0,0] \in G$. $[1,0] \in H$. $[0,0] \notin H$. $[1,0] \notin G$ 인 open set G, H가 존재.

(I) 에 의해 $G = Y$ 이므로 $[1,0] \in Y = G$ 가 되어 모순. 따라서 $(Y, \mathcal{J})$: T_1공간 아니다.

7) $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ 이 $\binom{2n}{n} = \boxed{f(n) \times \binom{-\frac{1}{2}}{n}}$ 만족.

$f(n)$과 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{8}\right)^n = ?$ (n은 음이 아닌 정수) [4점]

pb) (I) $f(n) = \dfrac{{}_{2n}C_n}{{}_{-\frac{1}{2}}C_n} = \dfrac{\frac{(2n)!}{n!\cancel{n!}}}{\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{\cancel{n!}}}$

$= \dfrac{(2n)!/n!}{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}$

$= \dfrac{(2n)!/n!}{(-\frac{1}{2})^n (1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1))} = (-2)^n \dfrac{(2n)!/n!}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}$

$\dfrac{1\cdot 2 \cdots n \cdot n+1 \cdots 2n+2n}{2\cdot 2^2 \cdots 2^n n}$

$\dfrac{2n\text{개 곱}}{2^n \cdot n\text{ 곱}}$

$= (-2)^n \dfrac{\cancel{(2n)!}/\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}/2^n \cancel{n!}} = (-4)^n$

$\therefore f(n) = (-4)^n$

(II) (I)에 의해 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\binom{2n}{n}} \left(-\frac{1}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{1}{8}\right)^n$

α는 임의 실수

$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$? 이항연산 $(|x|<1)$

$= \left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ■

$1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)$

$= \dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \dfrac{1\cdot \cancel{2}\cdot 3 \cancel{\cdot} \cancel{\cdot} n\,(n+1) \cdots n+2 \cdots (n+n-1)\cancel{(2n)}}{2\cdot 2 \cdots 2 \cdot 1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)\, n}$

$\underbrace{}_{n+1}$

$\rightarrow \cancel{2}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{6} \cdots \cancel{(2n-2)}\, \cancel{(2n)}$

$\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n-2)(2n-1)(2n)}{2 \cdots 2\cdot 2}$

10) G는 direct product $\mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$ (직접곱 (=직적))

위수 18인 G 원소의 개수?

덧셈군 $\mathbb{Z}_{18}$과 군동형 (group isomorphic) 되는 G의 부분군 개수? [4점]

(pf) $\mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$

$|(a, b)| = 18$

$\{1, 2, \cdots, 12\}$

(I) 위수 18인 원소 개수? $|\mathbb{Z}_{13}^*| = 12$ 이므로, 원소 위수는 $1, 2, 3, 4, 6, 12$만 가능

$(a, b) \in \mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$에 대해 $\mathrm{lcm}(|a|, |b|) = |(a, b)| = 18$

① $|b| = 18$인 경우

$|a| = 1, 2, 3, 6$ 이므로

$(\underbrace{\varphi(1)}_{1} + \underbrace{\varphi(2)}_{1} + \underbrace{\varphi(3)}_{2} + \underbrace{\varphi(6)}_{2})\underbrace{\varphi(18)}_{6} = \underbrace{36}$개

② $|b| = 9$인 경우 $1, 2, 4, 5, 7, 8$

$|a| = 2, 6$ 이므로 $(\underbrace{\varphi(2)}_{1} + \underbrace{\varphi(6)}_{2})\underbrace{\varphi(9)}_{6} = \underbrace{18}$개

③ $|b| = 1, 2, 3, 6$인 경우

$\mathrm{lcm}(|a|, |b|) = 18$인 a가 존재하지 않음! $\Rightarrow$ $36 + 18 = \underbrace{54}$개

(II) $\mathbb{Z}_{18}$과 군동형이 되는 G의 부분군의 개수?

공식 외워야…

$\dfrac{54}{\varphi(18)} = \dfrac{54}{6} = \underbrace{9}$개

$\varphi(18) = 6$

11) $(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1) \equiv 0 \pmod{61}$ [4점]

(pf) 61이 소수인가? $7^2=49<61<8^2=64 \Rightarrow [\sqrt{61}]=7$. $2,3,5,7 \nmid 61 \Rightarrow 61$은 소수.

claim) $(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1) \equiv 0 \pmod{61}$

$\Leftrightarrow (x^{10}-1)(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1) \equiv 0 \pmod{61}$

$\Rightarrow$) 자명 $0 \times (x^5-1) \equiv 0 \pmod{61}$

$(\Leftarrow)$ $(x^{10}-1)\underbrace{(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)}_{(x^{15}-1)}(x^{36}-1) \equiv 0 \pmod{61}$

& $(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1) \not\equiv 0$ 가정.

$x^5 \equiv 1$ 인데 $x^{10} \not\equiv 1$ 이므로 모순.)

$(x^{10}-1)(x^{15}-1)(x^{36}-1) \equiv 0 \pmod{61}$

해는 $61 \nmid x$ 만족 (61 배수가 아님). 해가 중복되지 않게 하려면 60의 완전잉여계에서

원시근 r이라 하자. $x = r^t \pmod{61}$ $1 \le t \le 60$ t를 선택해주면 됨.

$60 \mid 10t$ or $60 \mid 15t$. or $\underline{60 \mid 36t} \Leftrightarrow 10 \mid 6t$

$\Leftrightarrow 5 \mid 3t$ 인데 $\gcd(3,5)=1$이라,

$5 \mid t$

$\Leftrightarrow 6 \mid t$ or $4 \mid t$ or $5 \mid t$

(포함 배제의 원리)

$\therefore$ t의 개수 $= \left\lfloor \frac{60}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{60}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{60}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{60}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{60}{30} \right\rfloor$

$+ \left\lfloor \frac{60}{60} \right\rfloor$

$= 10+12+15-5-3-2+1 = 38-10 = 28$ ■

12) 음아닌 정수 n $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_0(x) = e^x, \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \quad (n \geq 1)$$

$\ni \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$: Conv unifly on $[0,1]$ 임을 보이고,

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = ?$ [4점]

* 함수 $g(x)$: 미가하면, $\int_0^x g(t)e^{-t}dt = \left[-g(t)e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x g'(t)e^{-t}dt$

(pf) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 라 하자.

$$|f_0(x)| \leq e$$

$$|f_1(x)| = \left|\int_0^x f_0(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_0(t)|dt \leq ex$$

$$|f_2(x)| = \left|\int_0^x f_1(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_1(t)|dt \leq \frac{e}{2}x^2$$

$$|f_3(x)| = \left|\int_0^x f_2(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_2(t)|dt \leq \frac{e}{6}x^3$$

$3!$

$\vdots$

$|f_n(x)| = \left|\int_0^x f_{n-1}(t)dt\right| \leq \int_0^x |f_{n-1}(t)|dt \leq \frac{e}{n!}x^n$ 이다.

$|f_n(x)| \leq \frac{e}{n!}$ 이고, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} = e^2 < \infty$ 이므로 W-M-T 에 의해

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 는 $[0,1]$ 에서 균등수렴.

$f_0(0) = 1$, $f_0' = f_0$.

$f_i(0) = 0$, $f_i' = f_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$ 이므로 $f(0) = 1$ 이고.

$\int_0^{@=0}$ 이니까 0

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = e^x + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 는 $[0,1]$에서 균등수렴.

그러므로,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

$$= e^x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

$$= e^x + f(x)$$

$\ni f'(x)e^{-x} = 1 + f(x)e^{-x}$

$$\Rightarrow \cancel{\int_0^x f'(t)e^{-t}dt} = \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt + x$$

$$= \left[-f(t)e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x f'(t)e^{-t}dt + x$$

$$= -f(x)e^{-x} + f(0) + \cancel{\int_0^x f'(t)e^{-t}dt} + x$$

$$0 = -f(x)e^{-x} + \underset{1}{f(0)} + x$$

$$f(x)e^{-x} = 1 + x.$$

$$f(x) = e^{x}(1+x). \quad \blacksquare$$