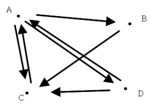
2003 PTS

5) DM

다음 그래프는 어느 도시의 A, B, C, D 네 지점 사이에서 자동차로 곧바로 갈 수 있는 경우를 화살표로 나타내고 있다. 예를 들면, A지점에서 B지점으로 향하는 화살표는 A지점에서 B지점으로 자동차로 곧바로 갈 수 있지만 B지점에서 A지점으로는 곧바로 갈 수 없음을 나타낸다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 주어진 그래프를 인접행렬(adjacent matrix)로 나타내시오.

(2) 어떤 지점에서 다른 지점으로 갈 때, '곧바로 또는 한 지점을 거쳐서' 갈 수 있는지 없는지를 알 수 있는 행렬을 구하시오.
(단, (1)에서 구한 인접행렬을 이용하시오.)

pf) $A = v_1$, $B = v_2$, $C = v_3$, $D = v_4$ 라 하자.

(1) 유향그래프에서의 인접행렬 $E = (a_{ij})$ 는

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 에서 } v_j \text{ 로의 길이 존재} \\ 0, & v_i \text{ 에서 } v_j \text{ 로의 길이 존재하지 않는다.} \end{cases}$$

으로 정의된다. 따라서

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

(2) E의 a_{ij} 는 v_i에서 v_j로 바로 갈 수 있는 길의 개수이고

E^2의 a_{ij}는 v_i 에서 v_j 로 가는 길이가 2인 길의 개수이므로

$$E + E^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ → a_{ij}는 v_i 에서 v_j 로 곧바로 또는 한 점을 거쳐서 갈 수 있는 길의 개수이다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= (2$

Thm) 꼭짓점이 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 인 유향그래프 G의 인접행렬을 $A = (a_{ij})$ 라고 하자.

그러면 행렬 A^p 의 (i, j) 성분은 그래프 G의 꼭짓점 v_i 에서 꼭짓점 v_j 로 가는 길이가 p인 길이 개수이다.

6) NA

다음 연립일차합동식의 해를 구하시오.

$$\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{22} \\ 3x \equiv 5 \pmod{25} \end{cases}$$

(pf) $\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{22} \\ 3x \equiv 5 \pmod{25} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \equiv 2 \pmod{11} \\ 3x \equiv 5 \pmod{25} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{11} \\ x \equiv 10 \pmod{25} \end{cases}$

$N = 11 \cdot 25$ 에 대하여

$N_1 = \frac{N}{11} = 25, \quad N_2 = \frac{N}{25} = 11$

$N_1 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{11} \quad N_2 \cdot 16 \equiv 1 \pmod{25}$

이므로 중국인의 나머지 정리에 의하여 주어진 연립일차 합동식은

다음과 같은 해를 가짐.

$x = 6 \cdot 25 \cdot 4 + 10 \cdot 11 \cdot 16 \equiv 160 \pmod{275}$ ■

Thm) (중국인의 나머지 정리) $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 을 $i \neq j$ 에 대해 $\gcd(n_i, n_j) = 1$ 인 양의 정수라 하자.

그러면 연립선형합동식
$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{n_r} \end{aligned}$$
은 법 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 에 대해 유일한 공통해를 가진다.

<해를 구하는 순서>

1. $N = \prod_{i=1}^{r} n_i$ 에 대하여 $N_i = \frac{N}{n_i}$ 라 한다.
2. $N_i x_i \equiv 1 \pmod{n_i}$ 가 되는 x_i 를 찾는다.
3. $\sum_{i=1}^{r} a_i N_i x_i$ 은 주어진 연립 선형합동식의 법 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 에 대하여 유일한 공통해이다.

7) LA

실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간 V에 대하여 W_1, W_2를 V의 부분공간이라 하자. $V = W_1 + W_2$일 때, 임의의 $v \in V$에 대하여 $v = w_1 + w_2 (w_1 \in W_1, w_2 \in W_2)$로 유일하게 표현될 필요충분조건은 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$임을 증명하시오.

(pf) $\forall v \in V.\ v = w_1 + w_2\ (w_1 \in W_1, w_2 \in W_2)$

$\leftrightarrow\ W_1 \cap W_2 = \{0\}$

($\Rightarrow$) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 임을 보이자.

($\subset$) $v \in W_1 \cap W_2$ 이면 $v + 0 = v = 0 + v$ 이고

가정에서 v는 유일하게 표현된다 했으므로 $v = 0$ 이다.

($\supset$) $\mathbb{R}$의 부분공간이란 $\mathbb{R}$의 공집합 아닌 부분집합으로서

그 자체가 벡터공간이란 의미이다.

벡터공간은 항상 0을 포함하므로 W_1, W_2 모두 0을 포함한다.

따라서 $0 \in W_1 \cap W_2$ 이다.

($\Leftarrow$) $V = W_1 + W_2$ 이므로 임의의 $v \in V$에 대하여

$v = w_1 + w_2$ 인 $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ 가 존재.

이제 유일성만 보이면 충분.

$w_1, w_1' \in W_1$, $w_2, w_2' \in W_2$ 에 대하여

$w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ 이라 하자.

$w_1 - w_1' \in W_1$, $w_2' - w_2 \in W_2$ 이므로

$w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 이 성립.

따라서 $w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$ 이다. ∎

8) AA

체(field) F위의 다항식환 $F[x]$에서 $p(x)\in F[x]$가 기약 다항식(irreducible polynomial)이면 $p(x)$로 생성된 이데알 $\langle p(x)\rangle$는 극대 이데알(maximal ideal)임을 증명하시오.

(pf 1) (i) $<p(x)> = F[x]$ 라 가정하면

$1 = p(x)h(x)$ 인 $h(x) \in F[x]$ 가 존재한다.

그러면 $p(x)$ 는 단원이 되어 모순이다.

따라서 $<p(x)> \neq F[x]$ 이다.

(ii) $<p(x)> \subset M \subset F[x]$ 를 만족하는 $F[x]$의 아이디얼 M 고려.

F는 체이므로 $F[x]$는 주아이디얼정역.

따라서 $M = <f(x)>$ 인 $f(x) \in F[x]$ 가 존재한다.

$p(x) \in <p(x)> \subset <f(x)>$ 이므로

$p(x) = f(x)g(x)$ 를 만족하는 $g(x) \in F[x]$ 가 존재.

$p(x)$는 기약다항식이므로, $f(x)$ or $g(x)$는 단원이다.

① $f(x)$: 단원인 경우

임의의 $h(x) \in F[x]$ 에 대해

$h(x) = (h(x)f^{-1}(x))f(x) \in <f(x)>$

이므로 $M = <f(x)> = F[x]$ 이다.

② $g(x)$ 가 단원인 경우

$\forall h(x) \in <f(x)>$, $h(x) = f(x)k(x)$ 인 $k(x) \in F[x]$ 가 존재.

그러면, $h(x) = f(x)k(x) = p(x)g(x)^{-1}k(x) \in <p(x)>$

이므로 $M = <f(x)> = <p(x)>$ 이다.

(ii)의 다른 증명?)

$F[x]$ 는 단위원을 갖는 가환환이므로

$F[x]/<p(x)>$ 가 체임을 보이면 $<p(x)>$는 극대아이디얼이다.

F는 단위원을 갖는 가환환이므로 $F[x]/<p(x)>$ 역시 단위원을 갖는 가환환이다.

이제 임의의 $f(x)+<p(x)> \in F[x]/<p(x)>$ $(\neq <p(x)>)$ 에 대하여

$f(x)+<p(x)>$가 단원임을 보이자.

$f(x)+<p(x)> \neq <p(x)>$ 이므로 $f(x) \notin <p(x)>$ 이다.

Thm) 단위원을 갖는 가환환 R과 $c\in R$에 대하여

$I = \{rc \mid r\in R\}$ 이라 하자. 그러면 I는 c를 포함하는 최소의 아이디얼이다.

즉 $I = <c>$ 가 성립한다.

Thm) 체 F 에 대해 $F[x]$의 모든 아이디얼은 주아이디얼이다.

Thm) 단위원을 갖는 가환환 R에서 M을 아이디얼이라 하자.

그러면 M이 극대아이디얼일 필요충분조건은 상환 R/M이 체가 되는 것이다.

Thm) $f(x) \neq 0$ 또는 $g(x) \neq 0$ 인 체 F 위의 다항식

$f(x), g(x) \in F[x]$ 에 대하여 최대공약수 $d(x)$는 유일하게 존재하고

$f(x)$와 $g(x)$의 일차결합으로 나타낼 수 있다.

Thm) 환 R에 대해 I를 아이디얼이라 하면 다음이 성립

① R이 가환환이면 R/I 도 가환환

② R이 단위원 가지면, R/I 도 단위원 가짐.

ENV p195

정의) 가환환 R의 아이디얼 $P \subsetneq R$ 에 대해 조건

$a, b\in R$, $ab\in P \Rightarrow a\in P$ 또는 $b\in P$

이 성립할 때, P를 소아이디얼(prime ideal)

ENV p197

정의) 환 R의 아이디얼 $M \subsetneq R$ 에 대해 조건

$M \subset I \triangleleft R \Rightarrow M = I$ 또는 $I = R$

이 성립할 때, M을 극대아이디얼(maximal ideal)

또한 $p(x)$는 기약 다항식이므로 $\gcd(p(x), f(x)) = 1$ 이다.

따라서 $f(x)s(x) + p(x)t(x) = 1$ 을 만족하는 $s(x), t(x)$ 가 존재한다.

그러면 $1 - f(x)s(x) = p(x)t(x) \in <p(x)>$

이므로 $1 + <p(x)> = f(x)s(x) + <p(x)>$ 이해X

$= (f(x)+<p(x)>)(s(x)+<p(x)>)$

이 되어 $f(x)+<p(x)>$ 는 단원이다.

9) PAS

어떤 회사에서는 세 대의 기계 a, b, c 같은 종류의 빵을 만들고 있다. 세 대의 기계는 각각 총 생산량의 $20\%, 30\%, 50\%$를 생산하고 있으며, 생산품의 불량품은 각각 $0.5\%, 1\%, 2\%$이다. 생산된 빵을 임의로 한 개 택하여 검사했을 때, 그것이 불량품이었다고 하자. 이 불량품이 기계 a 또는 b 에서 생산되었을 확률을 구하시오.

(p6) 불량품 고르는 경우 $\overset{let}{=} E$

a,b,c 에서 생산된 제품을 고르는 경우를 각각 A, B, C

~~$P(A \cup B) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$~~ $\frac{1}{2}$

$P(E) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{1000} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{100} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{100} = \frac{14}{1000}$

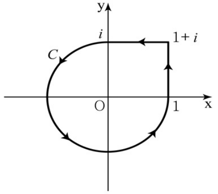
$\therefore P(A \cup B \mid E) = \frac{P((A \cup B) \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{1000}}{\frac{14}{1000}} = \frac{2}{7}$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{1000} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{1+3}{1000} = \frac{4}{1000}$

10) **CA**

곡선 C는 다음 그림과 같이 $1, 1+i, i$를 연결한 두 선분과 단위원의 일부로 이루어져 있다. 이 때, $\int_C \bar{z}dz$의 값을 구하시오. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)



(pb) $\int_C \bar{z}\,dz = \int_C (x-iy)(dx+i\,dy)$

$= \int_C \overset{P}{(x-iy)}\,dx + \overset{Q}{(y+ix)}\,dy$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -i \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = i$

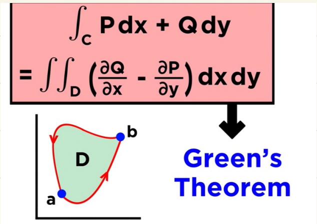
뭐임?

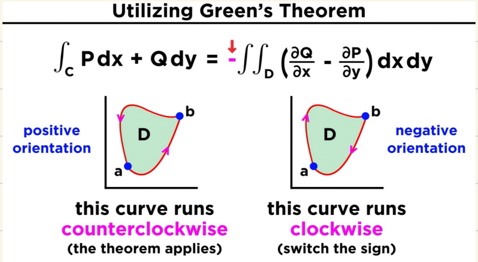
$= \int_D 2i\,dA = 2iA(D) = 2i\left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)$

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = i-(-i) = 2i$

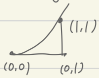
Thm) Green Thm

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D Q_x - P_y \; dA$$





$\int_0^1 \int_0^{x^2} -y^2\,dx + x\,dy$



$= \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}(x) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(-y^2)}_{-2y} \; dy\,dx$

$= \int_0^1 \int_0^{x^2} 1+2y \; dy\,dx$

$= \int_0^1 \left[y+y^2\right]_0^{x^2} dx$

$= -\int_0^1 x^2 + x^4\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = -\frac{8}{15}$

11) Analy, CA

실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [2003]

(1) 모든 n에 대하여 n계도함수 $f^{(n)}(x)$가 존재함을 보이고 함수 f의 $x=0$에서의 테일러 급수를 구하시오.

(2) (1)의 결과를 이용하여 실함수와 복소함수의 미분 가능성이 갖는 특징의 차이를 서술하시오.

(pf) (1) 임의의 자연수 n에 대하여

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} &, x\neq 0 \\ 0 &, x=0 \end{cases}$$

인 다항함수 $p(x)$가 존재함을 보이면 충분하다.

(Math - Induction)

(i) $n=1$ 인 경우

① $x\neq 0$ 인 경우

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = p(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{if } p(x)=2x^3$$

② $x=0$ 인 경우

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

$\frac{1}{x}=t$ 로 치환하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to -\infty}\frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

이므로 $f'(0)=0$ 이다.

(ii) $f^{(n)}=0$ 이라 가정.

$x\neq 0$ 일 때, 적당한 다항함수 $p(x)$가 존재하여 $f^{(n)}(x)$는

$f^{(n)}(x) = p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ 의 형태로 나타낼 수 있다.

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \quad -(*)$$

$\frac{1}{x}=t$ 로 치환하자. 그러면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to\infty}\frac{t\,p(t)}{e^{t^2}},$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to -\infty}\frac{t\,p(t)}{e^{t^2}}$$

이고 $t\,p(t)$는 다항식이므로 $t\,p(t)$의 차수만큼 L'Hospital 정리를 적용하면 $(*)=0$ 라는 사실을 알 수 있다.

(2) 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $f^{(n)}(0)=0$ 이므로

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 는 치역이 0인 상수함수이다.

$x\neq 0$ 인 경우 $f(x)\neq 0$ 이므로

$f(x)$와 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$가 같아지게 되는 0의 근방은 존재 X.

즉, 실함수에서는 x_0에서 무한번 미분가능하더라도

$f(x)$와 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$가 같아지게 되는 x_0의 근방이 존재하지 않을 수 있다.

하지만 복소함수 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$가 $z=z_0$에서 해석적이면 f는 $z=z_0$에서

무한번 미분가능하고, z_0의 적당한 근방 D가 존재하여

D의 모든 점 z에서 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$이 성립한다.

12) **Analysis**

함수항 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}cos(3^n x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}cos(3^n x)$가 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 평등수렴함을 보이시오.

(2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}cos(3^n x)$라 할 때 f의 리만적분 가능성을 판별하고 $\int_0^{2\pi} f(x)dx$를 구하시오.

(pf) (1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)\right| \le \frac{1}{2^n}$ 이고

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 는 수렴하므로

(W-M-T)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ 는 $\mathbb{R}$ 에서 평등수렴.

(2) (1) 에 의해 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ 는 [0, 2π] 에서 균등수렴하므로

$\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ 는 [0, 2π] 에서 리만적분 가능하다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^{2\pi}\cos(3^n x)\,dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n}\left[\sin(3^n x)\right]_0^{2\pi}$$
$$= 0 \quad \blacksquare$$

Thm) W-M-T

$\{M_n\}$을 모든 $x \in D$와 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$|f_n(x)| \le M_n$ 인 양의 실수열이라 하자.

만일 ΣM_n이 수렴하면 Σf_n은 D에서 균등수렴한다.

Thm) 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 함수 $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$이

리만 적분 가능하다고 가정하자.

급수 Σf_n이 $[a,b]$에서 f로 균등수렴하면

f는 Riemann 적분가능하고,

$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n$ 이 성립한다.

13)

Diff Geo

다음 곡선의 곡률(curvature)과 열률(torsion, 비꼬임률)을 구하고, 두 값을 모두 이용하여 곡선의 종류가 무엇인지 쓰시오.

$$\chi(\theta)=(\cos\theta-2,\ \cos\theta+2,\ \sqrt{2}\sin\theta)$$
(단, $0\le\theta<2\pi$)

.) α가 정칙 곡선일 때, 다음이 성립한다.

(i) $T=\dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$, $N=B\times T$, $B=\dfrac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|}$

(ii) $\kappa=\dfrac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$, $\tau=\dfrac{\langle\alpha'\times\alpha'',\alpha'''\rangle}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}$

(pf) 일단 $\chi(\theta)$: 정칙이므로 옆 정리 사용.

i) $\chi'(\theta)=(-\sin\theta,\ -\sin\theta,\ \sqrt{2}\cos\theta) \rightarrow \|\chi'\|=\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\theta+2\cos^2\theta}=\sqrt{2}$

$\chi''(\theta)=(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sqrt{2}\sin\theta)$

$\chi'''(\theta)=(\sin\theta,\ \sin\theta,\ -\sqrt{2}\cos\theta)$

ii) $\chi'\times\chi''=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & -\sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta \\ -\cos\theta & -\cos\theta & -\sqrt{2}\sin\theta \end{vmatrix}$

$=(\sqrt{2}\sin^2\theta+\sqrt{2}\cos^2\theta,\ -(\sqrt{2}\sin^2\theta+\sqrt{2}\cos^2\theta),\ \sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta)$

$=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$

$|\chi'\times\chi''|=\sqrt{2+2}=2$

iii) $(\chi'\times\chi'',\ \chi''')=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)\cdot(\sin\theta,\ \sin\theta,\ -\sqrt{2}\cos\theta)$

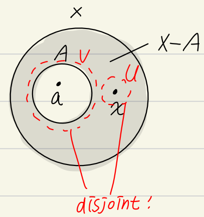
$=\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\sin\theta+0=0$

ㅋ $\kappa=\dfrac{\|\chi'\times\chi''\|}{\|\chi'\|^3}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ → 반지름 r이 $\sqrt{2}$ 인 원.

$\tau=0$

곡선 χ는 곡률이 양의 상수인 평면도형이므로 반지름이 $\frac{1}{\kappa}=\sqrt{2}$ 인 원이다.

14) Tpgy



위상공간 X가 T_2공간(Hausdorff space)일 때, 임의의 컴팩트 집합(compact set) $A \subset X$와 임의의 $x \in X - A$에 대하여 다음 조건을 만족하는 개집합(open set) $U, V \subset X$가 존재함을 증명하시오.

조건 : $x \in U,\ A \subset V,\ U \cap V = \varnothing$

(pf) 임의의 $a \in A$ 에 대해 $a \neq x$ 이다.

X 는 T_2 이므로 $x \in G_a$, $a \in H_a$ 이고 $G_a \cap H_a = \varnothing$ 인

열린 집합 G_a, H_a 가 존재한다.

$\mathcal{C} = \{H_a \mid a \in A\}$ 는 A의 open covering 이고

A는 compact 이므로 finite subcovering $\{H_{a_1}, \cdots, H_{a_n}\}$ 이 존재.

$U = \bigcap_{k=1}^{n} G_{a_k}$, $V = \bigcup_{k=1}^{n} H_{a_k}$ 라 하면,

$x \in U$. $A \subset V$ 가 성립.

또한 $U \cap V = \left(\bigcap_{k=1}^{n} G_{a_k} \right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_{a_k} \right)$

$= \bigcup_{k=1}^{n} \left(H_{a_k} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} G_{a_k} \right) \right)$

$\subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(H_{a_k} \cap G_{a_k} \right) = \varnothing$ 이 성립한다. ∎