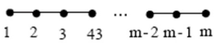
8) OM

단순그래프 G와 음이 아닌 정수 n에 대하여, n보다 작거나 같은 개수의 색으로 그래프 G를 적절하게 색칠하는 (즉, 변으로 연결된 두 꼭지점을 서로 다른 색으로, 모든 꼭지점을 칠하는) 방법의 수를 $P_G(n)$이라 하면 $P_G(n)$은 n에 대한 다항식이다. 또, m개의 꼭지점을 가진 선형 그래프(linear graph 또는 path graph) L_m은 다음과 같다.



이 때, $G=L_m$의 다항식을 $P_G(n)$을 구하고, $P_G(n)$을 사용하여 이 그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 색의 최소 개수를 구하시오.

(pf) 첫 번째 점에 칠할 수 있는 색은 n개

k 번째 점은 $k-1$ 번째와 다른 색을 칠해야 하므로 $n-1$ 개의 색을 칠할수 있다.

따라서 $P_G(n) = n(n-1)^{m-1}$ 이다.

그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 색의 최소 개수는

$m=1$ 인 경우는 1이고 $m>1$ 인 경우는 2.

9) 솔직히 잘 모르겠다. **PAS**

확률변수 X가 구간 $[1,5]$에서 균등분포(uniform distribution)를 이룰 때, X의 확률밀도함수, 평균, 분산을 각각 구하시오.

(pf) $f(x) = \begin{cases} 1/4, & 1 \le x \le 5 \\ 0, & o.w \end{cases}$

$\mu = \int_1^5 x f(x)\, dx = \int_1^5 \frac{1}{4} x\, dx = 3.$

$\sigma^2 = \int_1^5 (x-3)^2 f(x)\, dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4} x^2\, dx = \frac{4}{3}.$

10) NT

1부터 1008까지의 자연수 중 1008과 서로소(relatively prime)인 자연수의 개수를 구하시오.

에라토스테네스의 체

(pf) (i) $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ 이므로 Euler phi 함수를 사용하면

$\varphi(1008) = 1008\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 288$ 이다.

$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{6}{7}$

$= 2^4 \times 3 \times 6 = 48 \times 6$

or.

(ii) $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \le a \le 1008,\ a$는 2의 배수$\}$

$A_3 = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \le a \le 1008,\ a$는 3의 배수$\}$

$A_7 = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \le a \le 1008,\ a$는 7의 배수$\}$ 라 하자.

그러면 1부터 1008 까지의 자연수 중 1008과 서로 소인 자연수의 개수는

다음과 같다.

$|A_2^c \cap A_3^c \cap A_7^c|$

$= 1008 - |A_2 \cup A_3 \cup A_7|$

$= 1008 - (|A_2| + |A_3| + |A_7|) + (|A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_7|)$

$\quad - |A_2 \cap A_3 \cap A_7|$

$= 1008 - \left(\frac{1008}{2} + \frac{1008}{3} + \frac{1008}{7}\right) + \left(\frac{1008}{2\cdot 3} + \frac{1008}{3\cdot 7} + \frac{1008}{2\cdot 7}\right) - \frac{1008}{2\cdot 3\cdot 7}$

$= 1008\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 288.$

11) LA

선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$에 의한 곱이다. 즉, $x \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $Tx = Ax$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오.

(pf) $\ker(T) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = 0 \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0 \}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이므로

$\ker(T) = \{ (-t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$x_1 + x_3 = 0$

$x_2 + 2x_3 = 0$

put $x_3 = t$

$x_1 = -t$

$x_2 = -2t$

따라서 $\dim(\ker A) = 1$ 이다.

또한 차원정리에 의하여 $\dim(\operatorname{im}(T)) = 3 - \dim(\ker T) = 2$ 이 성립한다.

Thm $T: V \to W$ 가 n차원 벡터공간 V에서 벡터공간 W로의 선형변환이면

$\operatorname{rank}(T) + \operatorname{nullity}(T) = n$ 이 성립한다.

Analysis

12)

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}$의 수렴, 발산을 판정하시오.

(pf) put $x_n = \frac{n!}{(n+1)^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+2)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n\cancel{!}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right| = \frac{1}{e} < 1$$

이므로 Σx_n : Conv ∎

Thm) ratio test

$\{x_n\}$을 0이 아닌 실수열이라 하자.

$r = \lim\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ 에 대하여

Σx_n 이 $r<1$ 일 때 절대수렴하고

$r>1$ 일 때 Div

Analysis

13)

실수 집합 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\text{가 유리수}) \\ 1 & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$$

$x=0$에서 f가 미분가능(differentiable)한지 판정하시오.

(pf) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 0$ 임을 보이자.

주어진 $\varepsilon>0$ 에 대하여 $\delta=\varepsilon$ 라 하자.

$0<|x-0|<\delta \ni \left|\frac{f(x)-1}{x}-0\right| \sim (*)$

(i) x : 유리수 $\ni$ $(*) = \left|\frac{(x^2+1)-1}{x}\right| = |x| < \delta = \varepsilon$

(ii) x : 무리수 $\ni$ $(*) = \left|\frac{1-1}{x}\right| = 0 < \varepsilon$

따라서 $f'(0)=0$ 이다. ∎

Analysis

14)

유리수 집합 $\mathbb{Q}$가 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 조밀(dense)함을 증명하시오. 즉, x와 y가 실수이고 $x<y$이면, $x<r<y$를 만족시키는 유리수 r이 존재함을 보이시오.

(pf1) (i) $y>0$ 인 경우

Archimedes 원리에 의하여 $\frac{1}{n} < y-x$ 인 자연수 n이 존재한다.

$S = \{ m \in \mathbb{N} \mid y \le \frac{m}{n} \}$ 라 하자.

Archimedes 원리에 의하여 $y < \frac{m}{n}$ 인 자연수 m이 존재한다.

즉, S는 공집합이 아닌 자연수의 부분집합이므로 자연수의 정렬성에 의하여

$m = \min S$ 가 존재한다.

Claim) $x < \frac{m-1}{n} < y$

m은 S의 최소원소이므로 $m-1 \notin S$ 이다. 즉, $\frac{m-1}{m} < y$

또한 $x < y - \frac{1}{n} \le \frac{m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m-1}{n}$

이므로 $x < \frac{m-1}{n} < y$ 이 성립한다.

(ii) $y \le 0$ 인 경우

$y+k>0$ 인 자연수 k가 존재한다.

그러면 (i)에 의하여 $x+k < q < y+k$ 인 유리수 q가 존재한다.

유리수 $q-k$ 에 대하여 $x < q-k < y$ 이 성립한다.

or,

(pf2) $y-x>0$ 이므로, Archimedes 원리에 의하여 $\frac{1}{n} < y-x$ 를 만족하는

자연수 n이 존재한다.

$nx < m \le 1+nx$ 인 정수 m이 존재한다.

그러면 $nx < m \le 1+nx < ny$ 이므로

$x < \frac{m}{n} < y$ 이 성립.

15)

복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) D에서 정의된 함수 $f : D \to \mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z \in D$에 대해 $Im\, f(z) = 2Re\, f(z)$가 성립한다. $f(z)$는 D에서 상수임을 보이시오.

$u_x = v_y = 2u_y \quad u_y = -v_x = -(2u_x)$

(pf) $f(z) = u + 2ui \Rightarrow u_x = 2u_y, \quad u_y = -2u_x$ C-R-E

$\Rightarrow u_x = -4u_x \Rightarrow u_x = 0. \Rightarrow u_y = 0$

$\therefore f'(z) = u_x + 2u_x i = 0$ 이므로 $f(z)$는 상수함수. ■

16) DG

개집합(open set) $D \subseteq \mathbb{R}^3$에 대하여 미분가능한 함수 $z = f(x, y) : D \to \mathbb{R}$의 그래프로 이루어지는 곡면 G의 법선과 z축과의 사이각을 θ라 할 때 다음을 보이시오.

$$\iint_G \cos^2 \frac{\theta}{2} \, dS = \frac{1}{2} S(G) + \frac{1}{2} A(D)$$

(단, $S(G)$는 곡면의 겉넓이, $A(D)$는 영역 D의 넓이로 둘 다 유한이고, $dS = \sec\theta \, dA$이다.)

(pf) $\displaystyle \iint_G \cos^2 \frac{\theta}{2} \, ds = \iint_D \cos^2 \frac{\theta}{2} \sec\theta \, dA = \iint_D \frac{1+\cos\theta}{2} \cdot \sec\theta \, dA$

$\displaystyle = \iint_D \frac{1}{2}\sec\theta + \frac{1}{2} \, dA$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \underbrace{\iint_D \sec\theta \, dA}_{S(G)} + \frac{1}{2} \underbrace{\iint_D 1 \, dA}_{A(D)}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} S(G) + \frac{1}{2} A(D)$ ∎

17) DG

호의 길이 s로 나타낸 매개변수 곡선 $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$가 $\alpha''(s) \neq 0$이고 $\alpha(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)} N(s)$가 고정된 점이면, α는 원의 일부임을 보이시오.
(단, $\kappa(s)$는 $\alpha(s)$의 곡률(curvature)이고, $N(s)$는 주법선벡터(principal normal vector)이다.)

(pf) $\alpha''(s) \neq 0 \Rightarrow N(s) \neq 0$.

$\alpha(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)} N(s) = p$ 라 두면.

$\alpha'(s) + \left(\dfrac{N'(s) \cdot \kappa(s) - N(s)\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2} \right)$

$= \alpha'(s) - \dfrac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} N(s) + \dfrac{N'(s)}{\kappa(s)} = 0$

이해 X

$\Rightarrow T(s) - \dfrac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2} N(s) + \dfrac{1}{\cancel{\kappa(s)}} (-\cancel{\kappa}(s) T(s) + T(s) B(s)) = 0$

없어지고 $\quad \dfrac{T(s)B(s)}{\kappa(s)} = \alpha'(s)$ 인가 ??

황창주 해설 없는 것 보니 문제 별로인듯.

$\Rightarrow -\dfrac{\kappa'(s) N(s)}{\kappa(s)^2} + \dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} B(s) = 0$

$\Rightarrow \kappa'(s) = \kappa$ 상수 & $\tau(s) = 0$ 이므로, α는 평면도형.

$\therefore \alpha(s) + \dfrac{1}{\kappa} N(s) = p \Rightarrow \| \alpha(s) - p \| = \dfrac{1}{\kappa} \| N(s) \| = \dfrac{1}{\kappa}$.

$\Rightarrow \alpha$는 중심 p, 반지름 $\dfrac{1}{\kappa}$인 원의 일부 ∎

Tp

18)

다음조건을 만족시키는 실위상공간 $\mathbb{R}$의 부분집합 W, X, Y, Z의 예를(증명없이) 하나씩 구하시오.

(1) Y, Z는 연결집합(connected set)이다.

(2) $Y \subset W \subset Z$, $Y \subset X \subset Z$.

(3) W는 연결집합이다.

(4) X는 연결집합이 아니다.

여기에서 기호 $A \subset B$는 A가 B의 진부분집합임을 나타낸다.

(pb) 실위상공간에서 연결집합일 필요충분조건은 구간인 것이다.

$X = (2,6) \cup \{7\}$ $Y = (3,4)$ $Z = (0,8)$ $W = (1,5)$

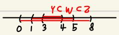
조건 만족하나 보자 ~~

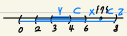
(1) Y, Z 는 연결집합 (connected set) 이다.

$Y = (3,4)$ $Z = (0,8)$ 구간이므로 연결 o.k

(2) $Y \subset W \subset Z$, $Y \subset X \subset Z$

$(3,4) \subset (1,5) \subset (0,8)$ $(3,4) \subset (2,6) \cup \{7\} \subset (0,8)$ o.k





(3) W 는 연결집합이다. $W = (1,5)$ o.k

(4) X 는 연결집합이 아니다. $X = (2,6) \underbrace{\cup \{7\}}_{\text{Not interval}}$ o.k

19) **AA**

$F \leq K$

체 K는 체 F의 대수적 확대체(algebraic extension field)로서 $[K:F]=10$ (즉, $[K:F]=\dim_F K=10$)이다. (~~기저 10개~~) 이사실 안씀

F 위의 기약다항식(irreducible polynomial) $f(x)$의 차수(degree)가 3일 때, $f(x)$의 어떤 근도 K에 포함 되지 않음을 보이시오.

↳ 귀류

(pf) $f(\alpha)=0$ 인 $\alpha \in K$ 가 존재한다고 가정하자.

그러면 K는 F와 α를 포함하는 체이고, $F(\alpha)$는 F와 α를 포함하는 가장 작은 체이므로 $F(\alpha) \subset K$ 가 성립한다.

$10 = |K:F| = |K:F(\alpha)||F(\alpha):F|$ 이고,

$|F(\alpha):F| = \deg f(x) = 3$ 이므로, $\overset{(\rightarrow\leftarrow)}{3 \mid 10}$ 즉 3이 10의 약수가 되어 모순.

따라서 $f(x)$의 어떤 근도 K에 포함되지 않음을 알 수 있다. ∎

Thm) F, K, L는 $F \subseteq K \subseteq L$을 만족하는 체이다.

$[K:F]$와 $[L:K]$는 유한이면 L은 F의 유한확대체이고,

$[L:F] = [L:K][K:F]$ 이다.

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ K \\ | \\ F \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{) 유한} \\ \\ \text{) 유한이면} \end{array}$$

유한

Thm) K는 F의 확대체, $u \in K$가 F 위에서 대수적 원소이면

F가 계수, u를 해로 갖는 …

$[F(u):F] = \deg(\mathrm{irr}(u,F))$

기약다항식

20)

Tp

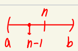
위상공간 X와 전사함수 $g : X \to Y$에 의한 집합 Y의 상위상(quotient topology)은 $g^{-1}(O)$가 X에서 개집합(open set)이 되는 Y의 부분집합 O로 이루어지는 Y위의 위상이다. 실위상공간 $X = \mathbb{R}$과 정수집합 $Y = \mathbb{Z}$에 대하여 전사함수 $f : X \to Y$, $f(x) = [x]$에 의한 Y의 위상을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다)

pf) Claim) 임의의 Y- open set G 에 대해 $n \in G \Rightarrow n-1 \in G$

$n \in G$ 에 대해, $n \in [n, n+1) = f^{-1}(n) \subset \underbrace{\underbrace{f^{-1}}_{\text{conti}}(\overset{\text{open}}{G})}_{\text{open.}}$

이고 f는 conti 이므로 $f^{-1}(G)$는 open set.

$\Rightarrow \exists \underset{(>n-1)}{a}, b \in \mathbb{R}$ s.t $n \in (a, b) \subset f^{-1}(G)$



$\Rightarrow n-1 = f\left(\frac{a+n}{2}\right) \in G$ 이다.

위의 사실에 의하여 G가 $\begin{cases} \text{위로 유계 아니면} & G = \mathbb{Z} \\ \text{위로 유계이면} & G = \{m, m-1, m-2, \cdots\} \end{cases}$

$m = \max G$

임을 알 수 있다.

따라서 Y 상의 위상은 $\{\{a \in \mathbb{Z} \mid a \le n\} \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{Z}\}$ ∎

21) AA

환 준동형사상(ring homomorphism)

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

는 다음과 같이 정의된다.

$f(x) = (x+3\mathbb{Z}, x+5\mathbb{Z}, x+7\mathbb{Z})$

f의 핵(kernel)을 구하시오.

(pf) $\ker f = \{ x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = (3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z}) \}$

$(x+3\mathbb{Z}, x+5\mathbb{Z}, x+7\mathbb{Z}) = (3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \quad x \in 3\mathbb{Z}, \quad x \in 5\mathbb{Z}, \quad x \in 7\mathbb{Z}$

$\gcd(3,5,7) = 1 \quad \mathrm{lcm}(3,5,7) = 3 \times 5 \times 7$

$\Leftrightarrow \quad x \in 105\mathbb{Z}$

이므로 $\ker f = 105\mathbb{Z}$ 이다. ∎

Thm) 사상 $f: R \to S$가 환준동형사상이라 하자.

$\ker f = \{ a \in R \mid f(a) = 0_S \}$ 이고 $\ker f$를 f의 핵(kernel)이라 한다.

22) 중국인 나머지 정리 쓰는 idea 잘 생각함.
근데 푸는 방법 헷갈림. □ 부분

AA

환 준동형사상(ring homomorphism)

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = (x + 3\mathbb{Z},\ x + 5\mathbb{Z},\ x + 7\mathbb{Z})$$

$f(x) = (2 + 3\mathbb{Z},\ 3 + 5\mathbb{Z},\ 4 + 7\mathbb{Z})$를 만족시키는 정수 x를 모두 구하시오.

$x \in \mathbb{Z}$,

(pf)
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ x = \overset{2}{x_1} \cdot 2 \cdot 35 + \overset{1}{x_2} \cdot 3 \cdot 21 + \overset{1}{x_3} \cdot 4 \cdot 15 \pmod{3 \cdot 5 \cdot 7}$

$= 140 + 63 + 60 = 263 \pmod{105}$

$\equiv 53 \pmod{105}$

$\therefore\ x \equiv 53 \pmod{105}$ ∎

$\cancel{2x_1 \equiv 1 \pmod{35}}$

$\cancel{2x_1 - 1 \equiv 0 \pmod{35}}$

$\cancel{x_1 \equiv 18 \pmod{35}}$

보완할 점.

$35x_1 \equiv 1 \pmod 3$	$21x_2 \equiv 1 \pmod 5$	$15x_3 \equiv 1 \pmod 7$
$x_1 \equiv 2 \pmod 3$	$x_2 \equiv 1 \pmod 5$	$x_3 \equiv 1 \pmod 7$