2020년 A형

2번) $y^3 = x^2$ 과 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 부분을 D라 하고

D의 경계를 시계 반대 방향으로 한 바퀴 도는 곡선을 C

영역 D 넓이와 선적분 $\int_C -ydx + xdy = ?$ [2점]

pf) ~~$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{y^3}} dydx$~~

(sol1) $\iint_D dA = 2\int_0^1\int_0^{\sqrt{y^3}} dxdy$

$$= 2\int_0^1 \underset{\sim\sim}{y^{\frac{3}{2}}}\, dy = \frac{2\cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\int_C -ydx + xdy = \iint_D 2dA = 2\underbrace{\iint_D dA}_{\frac{4}{5}} = \frac{8}{5}$$

(sol2) C_1: $x(t) = \sqrt{t^3}$, $y(t) = t$, $0 \le t \le 1$.

$x'(t) = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$, $y'(t) = 1$

C_2: $x(t) = -t$, $y(t) = 1$, $-1 \le t \le 1$

$x'(t) = -1$, $y'(t) = 0$

C_3: $x(t) = -\sqrt{(1-t)^3}$, $y(t) = 1-t$, $0 \le t \le 1$

$x'(t) = \frac{3}{2}(1-t)^{\frac{1}{2}}$, $y'(t) = -1$

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} \quad -\frac{1}{5}(1-t)^{\frac{5}{2}}$

$\|$

$\int_0^1 -\frac{1}{2}(1-t)^{\frac{3}{2}}$

$$\int_C -ydx + xdy = \int_{C_1} -ydx + xdy + \int_{C_2} -ydx + xdy + \int_{C_3} -ydx + xdy$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(-t)\left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)}_{-\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}}} + t^{\frac{3}{2}}\, dt + \int_{-1}^{1} \underbrace{(-1)(-1)}_{1} + \cancel{(-t)}0\, dt$$

$-\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}$

$$+ \int_0^1 \underbrace{(-1+t)\left(\frac{3}{2}(1-t)^{1/2}\right)}_{(-\frac{3}{2})(1-t)^{\frac{3}{2}}} + \underbrace{\sqrt{(1-t)^3}}_{1(1-t)^{\frac{3}{2}}}\, dt = -\frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{5} = 2 - \frac{2}{5} = \underset{\sim\sim}{\frac{8}{5}}$$

3번) $\mathbb{R}^3$ 에서 곡선 $\gamma(t) = (2t - \cos t,\ t + \sin t,\ 2t+1)$ $(0 < t < 2\pi)$

위의 점 $\gamma(t_0)$ 에서의 접벡터가 벡터 $(6, 2, 4)$ 와 평행.

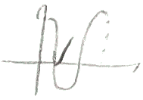
t_0 값과 $t = t_0$ 일 때 γ 의 tosion ? [2점]

열률

풀이)

$$\begin{cases} 2 + \sin t = 3 \\ 1 + \cos t = 1 \end{cases} \qquad \sin t = 1 \quad \cos t = 0$$

$\boxed{t = \frac{\pi}{2}}$



$$\gamma'(t) = (2 + \sin t,\ 1 + \cos t,\ 2)$$

$$\gamma''(t) = (\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

$$\gamma' \times \gamma'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2+\sin t & 1+\cos t & 2 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (2\sin t,\ 2\cos t,\ \underbrace{-\sin t(2+\sin t) - \cos t(1+\cos t)}_{-2\sin t - \sin^2 t - \cos t - \cos^2 t}$$

$$= (2\sin t,\ 2\cos t,\ -2\sin t - 1 - \cos t)$$

$$\|\gamma' \times \gamma''\| = \sqrt{4\sin^2 t}$$

$t_0 = \frac{\pi}{2}$. 까지는 앚충.

$\gamma''(t) = (\cos t,\ -\sin t,\ 0)$. $\gamma'''(t) = (-\sin t,\ -\cos t,\ 0)$ $\gamma'(t_0) = (3, 1, 2)$

$$\Rightarrow \gamma''(t_0) = (\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0},\ \underbrace{-\sin\tfrac{\pi}{2}}_{1}\ 0) \qquad \gamma'''(t_0) = (-\sin\tfrac{\pi}{2},\ -\cos\tfrac{\pi}{2},\ 0)$$

$$= (-1, 0, 0)$$

$$= (0, -1, 0)$$

$$\gamma' \times \gamma''(t_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 0, -3)$$

$$\therefore \tau(t_0) = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'',\ \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{-2}{4+9} = \frac{-2}{13}$$

4번) 대칭군 S_5 와 덧셈 순환군 (additive cyclic group) $\mathbb{Z}_{12}$ 의 direct product

$S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ 에 대해. S_5 원소 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 위수 ?

$S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ 원소 $(\sigma, 9)$ 위수? [2점]

1Pb $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

S_5의 원소 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,4)(3\,5)$

$|(1\,2\,4)| = 3$ 이고 $|(3\,5)| = 2$ ㅋ $|(1\,2\,4)(3\,5)| = \underline{6}$.

$\mathbb{Z}_{12}$ 원소 9에 대해 $|9| = \dfrac{12}{\underbrace{gcd(9,12)}_{3}} = \underline{4}$ 이므로

$|(\sigma, 9)| = lcm(6, 4) = 12$.

(B) 군 G와 $a \in G$ 에 대해

$$|a^k| = \frac{|a|}{gcd(k, |a|)}$$

7번) $x \equiv 25^{99} \pmod{19\cdot 13}$

$\begin{cases} x \equiv a \pmod{19} \\ x \equiv b \pmod{13} \end{cases}$ ⇕ 동치되게 하는 정수 a, b = ?

합동방정식 정수해 x 값을 풀이와 쓰시오.

풀) $x \equiv 25^{99} \pmod{19\cdot 13} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 25^{99} \pmod{19} \\ x \equiv 25^{99} \pmod{13} \end{cases}$ 이 성립.

페르마 정리에 의해

$x = 25^{99} = (5^2)^{99} = (5^{18})^{11} \equiv \underbrace{1}_{a} \pmod{19}$ a=1. b=12 이다.

$x = 25^{99} = (-1)^{99} \equiv -1 \equiv \underbrace{12}_{b} \pmod{13}$

$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{19} \\ x \equiv \overset{}{\cancel{12}}_{(-1)} \pmod{13} \end{cases}$

⇒ $X = 1\cdot 13\cdot x_1 + \overset{(-1)}{\cancel{12}}\cdot 19\, x_2$

$13x_1 \equiv 1 \pmod{19}$ $19x_2 \equiv 1 \pmod{13}$

$19\overline{)26}$ $19\overline{)39}$ ② 38 1

$13\overline{)38}$ 2 26 $\cancel{13\overline{)96}}$ 6 78 $13\overline{)190}$ 1 13 170

$x_1 \equiv 3 \pmod{19}$

19×11 = 19, 19, 209

$13\overline{)209}$ 16, 13, 79, 78, 1

$x_2 \equiv 11 \pmod{13}$

$X = 1\cdot 13\cdot 3 + \overset{209}{\cancel{11}}\ 19\cdot(-1) \pmod{19\cdot 13}$

$= 39 - 209 = -170 \pmod{19\cdot 13}$

$X = \boxed{77} \pmod{19\cdot 13}$

19 × 13 = 57, 19, 247, −170, 77

8) 점화식 $a_0 = 1$. $a_n + a_{n-1} = (-1)^n$. $(n \geq 1)$

만족하는 $\{a_n\}$ 의 생성함수 $g(x) = ?$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \, . & -\frac{1}{3} < x < 1 \\ 0 \, , & \text{그 외 경우} \end{cases}$$ 가 연속확률변수 X의 확률밀도함수일 때.

확률변수 X의 기댓값?

(pb) $a_1 + a_0 = (-1)^1$ $\quad a_1 + 1 = -1$. $\quad \underline{a_1 = -2}$

$a_2 + a_1 = (-1)^2$ $\quad a_2 - 2 = 1$ $\quad \underline{a_2 = 3}$

$a_3 + a_2 = (-1)^3$ $\quad a_3 + 3 = -1$ $\quad \underline{a_3 = -4}$

$a_n = (-1)^n(n+1)$ $\quad \underline{g(x) = (-1)^x(x+1)}$

기댓값 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{1} (-1)^x(x+1)\, dx = ?$ o.k.

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-\frac{1}{3}}^{1} = \frac{1}{2}\left(1 - \overset{\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}}\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{3} = \frac{4+12}{9} = \frac{16}{9}$$

$a_n + a_{n-1} = (-1)^n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n$$

$$\Rightarrow (g(x) - a_0) + x(g(x))$$

$$= \frac{(-x)}{1-(-x)} = \frac{-x}{1+x}$$

$$(1+x)g(x) - \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{a_0} = \frac{-x}{1+x}$$

$$(1+x)g(x) = \frac{-x}{1+x} + 1 = \frac{\cancel{-x} + 1 + \cancel{x}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$(1+x) = t \Rightarrow dx = dt$

$$\rightarrow g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$E(X) = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \frac{\boxed{x}}{(1+x)^2}\, dx \Rightarrow$$ x 곱해줘야.

put $1 + x = t$

$dx = dt$

$$= \int_{\frac{2}{3}}^{2} \overset{t^{-2}}{\frac{1}{t^2}}\, dt = -\left[t^{-1}\right]_{\frac{2}{3}}^{2} = -\left[\overset{-1}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}\right] = 1$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1} \frac{x}{(1+x)^2}\, dx = \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{t-1}{t^2}\, dt = \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \left[\ln t - \frac{1}{t}\right]_{\frac{2}{3}}^{2}$$

$$= \ln 2 - \underset{\ln 2 - \ln 3}{\ln\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \underline{\ln 3 + 1}$$

9번) 정의역이 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ 인 함수 $f(x) = \frac{e^x - 1}{1-x}$

* 유수정리 다시 공부.

$x=0$ 에서의 3차 테일러 다항식?

복소평면에서 원점 중심으로 하고 반지름 길이가 $1/2$ 인 원을

시계 반대 방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C에 대해 선적분 $\int_C \frac{e^z - 1}{z^4(1-z)} dz$? [4점]

(pb) e^x의 테일러 다항식?

$-1<x<1$ 에서 $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ 이므로

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{1-x} = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1\right)x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$= x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \cdots$$

∴ 3차 테일러 다항식은 $x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3$.

C에서 복소함수 $f(z)$의 테일러 급수도 $f(z) = z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{5}{3}z^3 + \cdots$ 이므로

$$\int_C \frac{e^z - 1}{z^4(1-z)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{f(z)}{z^4} = \frac{10}{3}\pi i.$$

10번) $\mathbb{R}$ 원소 $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ 에 대해

환준동형사상 $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ 를 $\varphi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$로 정의.

사상 φ_α 의 핵을 K. $K = \langle p(x) \rangle$ 를 만족하는 최고차항 계수 1인

기약다항식 (irreducible polynomial) $p(x) = ?$

또 factor ring (= quotient ring) $\mathbb{Q}[x]/K$ 원소 $(x-2)+K$ 의

곱셈에 대한 역원을 $g(x)+K$ 라 할 때 $\deg g(x) < \deg p(x)$인 $g(x)$?

1pb) $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$

$f(x) \longmapsto f(\alpha)$.

$\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^2 = 2-\sqrt{2}$

$\Rightarrow (\alpha^2-2)^2 = 2$

$\Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0$

$p(x) = x^4 - 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ 라 하면 α는 $p(x)$의 근.

또한 Eisenstein 판정법에 의해 $p(x)$는 기약다항식.

그러므로 $p(x) = \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$

$K = \langle p(x) \rangle$ 임을 보이자.

($\supset$) $f(x) \in \langle p(x) \rangle$ 에 대해 $f(x) = p(x)g(x)$인 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 가 존재. $f(\alpha) = p(\alpha)g(\alpha) = 0$ 이므로 $f(x) \in K$.

($\subset$) $f(x) \in K$ 에 대해 $f(\alpha) = 0$ 이므로 $p(x) \mid f(x)$

그러면 $f(x) = p(x)g(x)$ 인 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 가 존재하므로 $f(x) = p(x)g(x) \in \langle p(x) \rangle$

따라서 $K = \langle p(x) \rangle$.

* Eisenstein 판정법

정수 계수로 가지는 다항식

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

$a_n \neq 0$, $n \geq 1$ 에 대해

적당한 소수 p가 존재

$p \mid a_0$, $p \mid a_1$, $\cdots$ $p \mid a_{n-1}$, $p \nmid a_n$.

$p^2 \nmid a_0$ 이면.

$f(x)$는 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약.

$x^4-4x^2+2 = (x-2)(x^3+2x^2)+2$

즉 $\frac{1}{2}(x^4-4x^2+2) = (x-2)(\frac{1}{2}x^3+x^2)+1$ 이므로

$((x-2)+\langle p(x)\rangle)\left((-\frac{1}{2}x^3-x^2)+\langle p(x)\rangle\right) = 1+\langle p(x)\rangle$

그러므로 $g(x) = -\frac{1}{2}x^3-x^2$

* 단위원 갖는 가환환 R과 $c\in R$ 에 대해 $I=\{rc \mid r\in R\}$ 라 하자.

그러면 I는 c를 포함하는 최소의 아이디얼. 즉 $I=\langle c\rangle$

* K는 F의 확대체 $(F\leq K)$ $u\in K$가 F 위에서 대수적 원소, $\mathrm{Irr}(u,F)=p(x)$ 라 하자. $g(x)\in F[x]$ 가 u를 근으로 가지면 $p(x)$는 $g(x)$를 나눈다.

11번) $\mathbb{R}$ 의 위상 $\mathcal{T}_u$

$f_i : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \quad (i=1,2)$

$f_1(x) = [x], \quad f_2(x) = [-x]$

$\{f_1^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_u\} \cup \{f_2^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{T}_u\}$ 을 subbasis 로 하여 생성된

$\mathbb{R}$ 의 위상을 $\mathcal{T}$.

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 에서 $\sqrt{2}$ 를 포함하는 connected component ?

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 에서 집합 $[\frac{1}{2}, 2]$ 의 내부 폐포?

Pf) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ 의 기저는 $\beta = \{(a,b), \{a\} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 이므로

$(1,2)$ 에 대한 상대위상은 비이산위상.

따라서 $(1,2)$ 는 $\sqrt{2}$ 를 포함하는 연결집합.

또 $(1,2) \subsetneq B \subset \mathbb{R}$ 인 임의의 B 에 대해 $(1,2)^c \in \mathcal{T}$ 이므로

$(1,2) \cap B$, $(1,2)^c \cap B$ 는 분리가 되어 B는 비연결.

따라서 ~~(1,2)~~ $\sqrt{2}$ 를 포함하는 성분은 $(1,2)$.

$A = [\frac{1}{2}, 2]$ 라 하자.

(Ⅰ) $\text{Int } A = [1, 2]$.

$(\because$ ① $[1,2]$ 는 열린집합.

$[1,2] = \{1\} \cup (1,2) \cup \{2\}$ 이므로 open set

② $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ 인 경우

$x \in \text{Int}(A)$ 라 가정하면 $\exists B \in \beta$ s.t $x \in B \subset [\frac{1}{2}, 2]$.

그러면 $(0,1) \subset B$ 이므로 $(0,1) \subset B \subset [\frac{1}{2}, 2]$ (모순))

(Ⅱ) $\overline{A} = [0, 2]$

$(\because$ ① $x \in (0, \frac{1}{2})$ 경우

$x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow (0,1) \subset G$

$\Rightarrow G \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$

② $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 인 경우

$x \in [\frac{1}{2}, 2] = A \subset \overline{A}$.

③ $x \notin [0, 2]$

$x \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty) \in \mathcal{T}$ 에 대해

$((-\infty, 0] \cup (2, \infty)) \cap A = \emptyset$

이므로 $x \notin \overline{A}$. ■

12) $\mathbb{R}$ 에서 미가 ft f.

$S = \{x \mid f(x) = 0,\ -1 \le x \le 1\}$

P의 대우명제 쓰고, P 증명 [4점]

P: 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대해 $f(x) \neq 0$ 이거나 $f'(x) \neq 0$ 이면 S는 유한집합.

(pf) S가 무한집합이면, $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t $f(x) = 0 \wedge f'(x) = 0$

Supp/ S 가 무한집합이다.

서로 다른 원소로 이루어진 가부번 부분집합 $\{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$ 존재.

수열 $\{a_n\}$은 유계이므로 Bolzano-Weierstrass Thm 에 의해

수렴하는 부분열 $\{a_{n_k}\}$ 가 존재.

$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$ 라 하자.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} \in [-1,1]$ 이므로 $a \in [-1,1]$ 가 성립.

또한 f는 a에서 연속이므로 $f(a) = \lim_{k \to \infty} f(a_{n_k}) = 0$.

$f'(a) \neq 0$ 라 가정하자. $f'(a) > 0$ 이면

$a - \delta < x < a < y < a + \delta$ 인 x, y 에 대해

$f(x) < f(a) = 0 < f(y)$ 가 되는 $\delta > 0$ 가 존재한다.

그러나 $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a$ 이므로 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여 $k \ge N \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \delta$.

임의 자연수 k에 대해 a_{n_k}는 모두 다른 값이므로

$\exists m \ge N$ s.t $a_{n_m} \neq a$ 이 성립. 즉 $|a_{n_m} - a| < \delta$ 이므로 $f(a_{n_m}) > 0$

또는 $f(a_{n_m}) < 0$ 가 되어 모순. 비슷하게 $f'(a) < 0$ 해도 모순. $\therefore f'(a) = 0$.