11.

위상공간 X의 부분집합 A의 내부(interior)와 경계(boundary)를 각각 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Bd}(A)$라고 할 때, 다음은 희수가 $\mathrm{Int}(A)=A-\mathrm{Bd}(A)$ 임을 증명한 답안이다.

> (경우 1) A가 열린 집합(open set)일 때:
> 집합 A의 외부(exterior)를 $\mathrm{Ext}(A)$라 하면 $\mathrm{Int}(A)=A$이므로 $\mathrm{Bd}(A)\subset\mathrm{Ext}(A)$이다.
> 따라서 $A-\mathrm{Bd}(A)=A=\mathrm{Int}(A)$이다.
>
> (경우 2) A가 닫힌 집합(closed set)일 때:
> 이 경우 집합 A의 폐포(closure) $\overline{A}$는 A와 같으므로 $A=\overline{A}=\mathrm{Int}(A)\cup\mathrm{Bd}(A)$이다. 그런데 일반적으로 집합 B, C에 대하여 $D=B\cup C$이면 $B=D-C$이므로 $\mathrm{Int}(A)=A-\mathrm{Bd}(A)$이다.

희수의 답안을 보고 옳게 말한 학생을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2009 모의평가]

<보기>

(현정) 희수가 맞게 풀었네.

(기태) 위와 같이 (경우 1)과 (경우 2)로 나누어 증명하는 것은 옳지 않아.

(수연) '$D=B\cup C$이면 $B=D-C$'는 일반적으로 성립하지 않아.

(영호) $\mathrm{Int}(A)=A$인 경우는 $\mathrm{Bd}(A)\subset\mathrm{Ext}(A)$이 아니라 $\mathrm{Bd}(A)=\varnothing$이야.

① 현정 ② 기태, 수연 ③ 기태, 영호
④ 수연, 영호 ⑤ 기태, 수연, 영호

(* 실제 proof)

$\mathrm{int}\,A = A-Bd(A)$

(⊂) $\mathrm{int}\,A \subset A$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\mathrm{int}(A)-Bd(A)}_{=\mathrm{int}(A)}$ $\subset$ $A-Bd(A)$ ($\because \mathrm{int}(A)\cap Bd(A)=\varnothing$)

(⊃) $x\in A-Bd(A)$

$x\in A$, $x\notin Bd(A)$

($X=\mathrm{int}(A)\cup ext(A)\cup Bd(A)$)

$x\notin Bd(A)$ 이므로 $x\in \mathrm{int}(A)$ or $x\in ext(A)$ $\subset A^c$

$x\in A$ 이므로 $x\in \mathrm{int}(A)$ ■

(pf) 현정 X : $(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $[0,1)$: 열린 X, 닫힌 X

기태 O

수연 O $D=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{2,3\}$

$\Rightarrow$ $D=B\cup C$, but $B\neq D-C$

영호 X : $(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $A=(0,1)$

$Bd(A)=\{0,1\}$, $ext(A)=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

12.

집합 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$상에 다음과 같은 위상이 주어졌다.

$$\mathfrak{J}=\{X, \varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_5\}\}$$

이 때, 집합 $\{x_2\}$의 폐포(closure)를 구하시오. [1998]

$\{x_2\}$ 를 포함하는 가장 작은 폐집합 $\Rightarrow$ $\{x_2\}$

근데 $\{x_2\}$ 는 이미 $\notin\mathfrak{J}$ 이므로 폐집합. $\therefore \overline{\{x_2\}}=\{x_2\}$

(pf) x_2를 포함하는 폐집합을 모두 교집합.

폐집합 : $\varnothing$, X, $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\{x_3, x_4, x_5\}$, $\{x_2, x_5\}$, $\{x_5\}$, $\{x_3, x_4\}$
(open set의 여집합)

$\therefore \overline{\{x_2\}}=X\cap\{x_2,x_3,x_4,x_5\}\cap\{x_2,x_5\}$

$=\{x_2,x_5\}$ ■

13.

집합 $X=\{a, b, c, d, e\}$위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$가 다음과 같이 주어졌다.

$\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}\}$

이 때, 집합 $A=\{b, c\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [2000]

thm $(X, \mathfrak{I})$. $x \in X$. $A \subset X$

x: 고립점 $\Rightarrow$ $x \notin A'$

(즉, $\{x\} \in \mathfrak{I}$)

$\neq$ 이어야

$(\{x\} \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$

(pf) 고립점이니까 ($\{a\}, \{b\} \in \mathfrak{I}$ 이니까)

~~a~~, ~~b~~, c, d, e

① $(\underbrace{\{a, c, d\}}_{\in \mathfrak{I}} \setminus \{c\}) \cap \{b, c\} = \varnothing$

$\therefore$ $c \notin \{b, c\}'$

② $d \in G$ 인 $G \in \mathfrak{I}$ 고려

$\Rightarrow$ $\underbrace{(G \setminus \{d\}) \cap \{b, c\}}_{\text{항상 } \ni c} \neq \varnothing$

$\therefore$ $d \in \{b, c\}'$

③ $e \in G$ 인 $G \in \mathfrak{I}$ 고려

$\Rightarrow$ $\underbrace{(G \setminus \{e\}) \cap \{b, c\}}_{\text{항상 } \ni b} \neq \varnothing$

$\therefore$ $e \in \{b, c\}'$

$\therefore$ $A' = \{d, e\}$

14.

실수 전체 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set)의 부분집합

$\mathscr{F}=\{\mathbb{R}-\{p\} \mid p \in \mathbb{R}\}$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [2004]

(1) $\mathscr{F}$를 부분기저(subbase)로 갖는 위상(topology) $\mathfrak{I}$를 구하시오.

(2) 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 자연수 전체 집합 $\mathbb{N}$의 도집합(derived set)을 구하시오.

(pf) (1) 집합론에서 기본적인 정리 : $\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = \mathbb{R}$, $\bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing$

$\mathscr{F} \xrightarrow{\text{유한 교집합}} \beta \overset{\text{let}}{=} \{\mathbb{R}, \mathbb{R}-\{p\}, \text{ 두 점 빠짐, 세 점 빠짐}, \cdots, n\text{개 빠짐}\}$

[설명 비]

↓ 한 번에 써주자.

$= \{\mathbb{R}, \mathbb{R}-\{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \mid p_i \in \mathbb{R}\}$

$\xrightarrow{\text{임의 합집합}}$ $\mathfrak{I} = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{R}-\{p_1, \cdots, p_n\} \mid p_i \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}-\varnothing$ 으로 봐도 됨.

↳ 실제로는 실수 집합의 여유한 위상을 나타냄.

→ 열린집합은 공집합이거나, 실수 전체에서 유한집합을 빼준 형태가 됨을 알 수 있음.

(2) $\mathbb{N}' = ?$ 모르니까 ? 으로 두고,

1이 도집합($\mathbb{N}'$)에 들어가는지 보자.

$\underset{x}{1} \in \mathbb{R}-A$ (유한집합)

굳이 1 X → 임의의 x 해줘도 가능.

$((\mathbb{R}-A) \setminus \{\underset{x}{1}\}) \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$

$\Rightarrow \mathbb{N}' = \mathbb{R}$

(pf) $x \in \mathbb{R}$, $x \in G$ 인 $G \in \mathfrak{I}$ 고려.

$\Rightarrow$ $G = \mathbb{R}-A$ 인 $A (\subset \mathbb{R})$ 유한 부분집합 존재.

$\Rightarrow$ $(G \setminus \{x\}) \cap \mathbb{N} = (\mathbb{R}-(A \cup \{x\})) \cap \mathbb{N} \overset{(*)}{\neq} \varnothing$

아르키메데스 정리에 의해

$(*)$: $\exists\, m \in \mathbb{N}$ s.t $\forall\, y \in A \cup \{x\}$, $y < m$

$m \in (\mathbb{R}-(A \cup \{x\})) \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$ ∎

15.

$\mathbb{R}$을 실수 집합이라 하고 $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$위에서의 여가산 위상(cocountable topology)이라 하자. 즉,

$$\mathfrak{I} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U\text{는 가산집합(countable set)}\} \cup \{\varnothing\}$$

이다. $\mathbb{Q}$를 유리수 집합이라 하고 $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$를 무리수 집합이라 할 때 A의 내부(interior), 유도집합(derived set), 폐포(closure), 경계(boundary)를 증명 없이 각각 구하시오. [2008]

(pf) $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: 열린 set 이므로 $int(A) = A$

$ext(A) = int(A^c) = int(\mathbb{Q}) \overset{(*)}{=} \varnothing$

(*) : $int(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$ 가정

$\Rightarrow \exists x \in int(\mathbb{Q})$

$\Rightarrow x \in \underbrace{\mathbb{R} - A}_{\text{비가산}} \subset \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{가산}}$ 인 가산 set A 존재. (ㄱㄴ)

따라서 $int(\mathbb{Q}) = \varnothing$.

· $b(A) = \mathbb{R} - (\underbrace{int(A) \cup ext(A)}_{A(=\mathbb{R}-\mathbb{Q}) + \varnothing}) = \mathbb{Q}$

· $\overline{A} = \underbrace{int(A)}_{A(=\mathbb{R}-\mathbb{Q})} \cup \underbrace{b(A)}_{\mathbb{Q}} = A \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

· $A' \overset{(*)}{=} \mathbb{R}$

직관적 이해 ($\underset{x}{\cup}$?

$\{x\} \in \underbrace{\mathbb{R} - A}_{\text{가산}}$. $((\mathbb{R}-A) \setminus \{x\}) \cap \mathbb{Q}^c \neq \varnothing$ → 1 뿐만 아니라 다른 어떤 걸 가지고 와도 똑같은 논리 적용

구체적 증명

(*) : $x \in \mathbb{R}$ 라 하자. $x \in G \in \mathfrak{I}$ 인 G 고려

$G = \mathbb{R} - A$ 인 가산 A 존재

$\therefore x \in A'$

$(G \setminus \{x\}) \cap A = \overbrace{(\mathbb{R} - (A \cup \{x\}) \cap \mathbb{Q}^c}^{\neq \varnothing} = \varnothing$ 가정

↓ de Morgan Law 적용

$\underbrace{(A \cup \{x\}}_{\text{가산}} \cup \mathbb{Q} = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{비가산}}$ (ㄱㄴ)

16.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 다음 조건 ①, ②에 의해 정의 되는 부분집합족(family of subsets) β를 기저로 하는 위상 $\mathfrak{J}$가 주어졌다고 하자.

① 모든 정수 m에 대하여, $\{m\} \in \beta$이다.
② 모든 정수 n과 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여 $(n, n+2^{-k}) \in \beta$

위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{J})$에서 집합 $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [2015]

(pf) $x \in \mathbb{R}$ 라 하자.

(i) $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup [1, \infty) \overset{let}{=} G$

$G = \left(\bigcup_{a \in \mathbb{Z}} \{a\}\right) \cup \left(\bigcup_{a \in \mathbb{Z}-\{0\}} (a, a+1)\right) \cup (0, \frac{1}{2}) \in \mathfrak{J}$

기저 원소 기저 원소 기저 원소

$\frac{1}{2}$ 포함하고 있지 않음.

$(G \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. $\therefore x \notin A'$.

(ii) $x = \frac{1}{2}$ 인 경우

$x \in (0, 1)$ 에 대하여

$(0,1) \in \mathfrak{J}$ & $((0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}) \cap A = \emptyset$

$\therefore x = \frac{1}{2} \notin A'$

(iii) $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 인 경우

$x \in B$ 인 $B \in \beta$ 는 $(0, 1)$ 뿐!

$((0,1) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. $\therefore x \in A'$

$\therefore A' = (\frac{1}{2}, 1)$ ■

17.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 임의의 부분집합 A에 대하여

$$c(A) = \begin{cases} A, & A\text{는 가산(countable)집합} \\ \mathbb{R}, & A\text{는 비가산(uncountable)집합} \end{cases}$$

로 정의할 때, 다음 조건을 만족시키는 $\mathbb{R}$ 위의 위상(topology)을 $\mathfrak{J}$라 하자.

임의의 $A \subseteq \mathbb{R}$에 대하여 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{J})$에서 A의 폐포(closure)는 $c(A)$이다.

$\text{int}(\mathbb{Z})$, $\text{int}([0,1])$, $\text{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z})$를 구하시오.
(단, $\text{int}(A)$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{J})$에서 A의 내부(interior), $\mathbb{Z}$는 정수 전체의 집합, $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$이다.) [2011]

* $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_c$

($\subset$) $G \in \mathfrak{J} \Rightarrow G^c$: $\mathfrak{J}$ 의 폐집합 $\Rightarrow c(G^c) = G^c$

$\Rightarrow G^c$: 가산 $\Rightarrow G \in \mathfrak{J}_c$

($\supset$) $G(\neq \emptyset) \in \mathfrak{J}_c \Rightarrow G^c$: 가산

$\Rightarrow c(G^c) = G^c \Rightarrow G^c$: $\mathfrak{J}$의 폐집합

$\Rightarrow G \in \mathfrak{J}$ ■

(pf) ⊛ $\text{int}(A) \overset{(*)}{=} (\overline{A^c})^c$

(*) $\text{int}(A^c) = \text{ext}(A) = (\underbrace{\text{int}(A) \cup b(A)}_{\overline{A}})^c = (\overline{A})^c$ 이므로 $\text{int}(A) = (\overline{A^c})^c$ 이다.

$\text{int}(\mathbb{Z}) = (c(\underbrace{\mathbb{R}-\mathbb{Z}}_{\text{비가산}}))^c = \mathbb{R}^c = \emptyset$

$\text{int}([0,1]) = (c(\underbrace{\mathbb{R}-[0,1]}_{\text{비가산}}))^c = \mathbb{R}^c = \emptyset$

$\text{int}(\mathbb{R}-\mathbb{Z}) = (c(\mathbb{R}-\mathbb{R}+\mathbb{Z}))^c = (c(\underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{가산}}))^c = \mathbb{Z}^c = \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

18.

자연수 전체의 집합을 N이라 하자.
집합 $X=\{n\in\mathrm{N}\mid n\geq 2\}$의 각 원소 n에 대하여
$B_n=\{k\in X\mid k$는 n의 약수$\}$라 하고, $\{B_n\mid n\in X\}$를
기저로 하는 X 위에서의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자.
다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. [2010]

① 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$은 열린 집합이다.
② 소수 전체의 집합은 열린 집합이다.
③ 소수 전체의 집합은 X에서 조밀(dense)하다.
④ 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $\{x\}$의 폐포(closure)는 $\{nx\mid n\in\mathrm{N}\}$이다.

(pf) $B_2=\{2\}$

$B_3=\{3\}$

$B_4=\{2,4\}$

$B_5=\{5\}$

$B_6=\{2,3,6\}$

$B_7=\{7\}$

⋮

① $G \overset{let}{=} \{2,4,6,8,10\}\in\mathfrak{I}$ 라 가정하자.

$6\in B_n\in G$ 인 $n\in X$ 존재.

$\Rightarrow 6\mid n \Rightarrow 3\mid n \Rightarrow 3\in B_n\subset G$ (→←)

따라서 $\{2,4,6,8,10\}\notin\mathfrak{I}$.

② P : 소수 전체의 집합이라 하자.

$\Rightarrow P=\underbrace{\bigcup_{p\in P}\underset{B_p\ (\text{기저 원소})}{\{p\}}}_{\text{기저 원소들의 합집합}}\in\mathfrak{I}$

③ $\overline{P}=X$

(⊂) ! 정의에 의해 당연히 전체의 부분집합.

(⊃) $x\in X$ 라 하자.

$\underbrace{x\in B_n}_{(*)}$ 인 $n\in X$ 고려.

$x\geq 2$ 이므로 소인수 p 존재

즉, $p\mid x$. (*)에 의해 $x\mid n$

$\Rightarrow p\mid n \Rightarrow p\in B_n$ 이고 P에도 p가 들어감. $p\in B_n\cap P\neq\varnothing$

$\therefore x\in\overline{P}$

④ $\overline{\{x\}}=\{nx\mid n\in\mathbb{N}\}$

(⊂) $y\in\overline{\{x\}}$ 라 하자.

B_y : y를 포함하는 기저의 원소이므로 $x\in B_y\cap\{x\}\neq\varnothing$. $x\mid y$.

$\Rightarrow y=\underbrace{nx}_{\in RHS\ (\text{오른쪽 집합에 포함이 된다})}$ 인 $n\in\mathbb{N}$ 존재.

(⊃) $nx\in RHS$ 라 하자.

$nx\in B_m$ 인 $m\in X$ 고려.

$\Rightarrow nx\mid m$

$\Rightarrow x\mid m$

x는 당연히 한 점 집합 $\{x\}$에 속하므로

$\Rightarrow x\in B_m\cap\{x\}\neq\varnothing$

$\therefore nx\in\overline{\{x\}}$ ∎

19.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 대하여

$$X_1 = (\mathbb{R}, \mathrm{U}),\ X_2 = (\mathbb{R}, D)$$

라고 하자. 여기서 U 는 보통위상(usual topology)이고 D는 이산위상(discrete topology)이다. $X = X_1 \times X_2$를 X_1과 X_2의 곱공간이라 하자. X의 부분집합

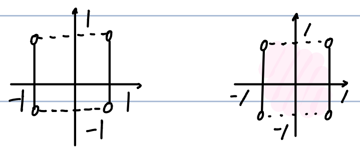
$$A = (-1, 1) \times (-1, 1)$$

에 대하여 A의 폐포(closure)와 경계(boundary)를 (증명없이) 각각 그림으로 나타내시오. [2007]

Def) 위상공간 X, Y 에 대하여 A, B는 각각 X, Y의 부분집합이라고 할 때,

$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ 가 성립한다.

(sol) $b(A)$ $\overline{A}$



20.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 두 위상 $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$를

$$\mathfrak{I}_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}\},\ \mathfrak{I}_2 = \{\varnothing, \mathbb{R}, \mathrm{N}, \mathbb{R}-\mathrm{N}\}$$

으로 정의하자. $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1)$과 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$의 적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합, N은 자연수 전체의 집합이다.) [2011]

$[0, 1] \times [0, 1]$은 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_1) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_2)$에서 조밀(dense)하다.

A가 조밀 in X ⇔ $\overline{A} = X$

(pf) $\overline{[0,1] \times [0,1]} = \overline{[0,1]} \times \overline{[0,1]} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 이므로 참