* 함수의 크기 : $\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx}$

* 두 함수의 수직 : $f(x)\cdot g(x) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx = 0$

* 수직성을 가지는 함수들 : $[0, 2\pi]$ 에서 연속함수인 벡터공간

: 모두 서로 수직이고 크기는 $\sqrt{\pi}$

$$\sin x \cdot \sin x = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$1 - \cos^2 x$

$\frac{\cos 2x + 1}{2}$

$\cos x \cdot \cos x = \pi$

$\sin x \cdot \cos x = 0$

$\sin x \cdot \sin 2x = 0$

기하학의 종류는 연구하는 방법에 따라

-위상기하학: 구멍 갯수로 분류

구면과 직육면체는 같다

도넛 모양과 손잡이 고리가 하나 붙어있는 컵의 모양이 같다

-대수기하: 방정식의 해로써 도형의 모양을 연구하고 분류하는 학문

-미분기하: 굽어짐(곡률) 개념을 도입해 도형의 모양을 연구하고 분류 -> 미분을 통해 설명

직선과 포물선은 다르다

구면과 타원면은 다르다

위상기하 방법은 도형의 전반적(대역적) 모양을 이해하는 데 유리,

미분기하의 방법은 도형의 상세한(국소적) 모양은 이해하는 데 유리.

1. <곡선>

곡선 $\chi(t)=(3t, 3t^2, 2t^3)$ 위의 모든 점에서 단위접선벡터(unit tangent vector)와 평면 $x+z=0$이 이루는 각을 구하시오. [2004]

(sol) 단위접벡터는 $\chi'(t) = (3, 6t, 6t^2)$

평면의 법벡터 $(1, 0, 1)$

$\cos\theta = \frac{3+6}{\sqrt{2}\sqrt{9+72}} = \frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{3+6t^2}{\sqrt{2}(6t^2+3)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.

호의 길이 s로 나타낸 매개변수 곡선 $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^3$가 $\alpha''(s)\neq 0$이고 $\alpha(s)+\frac{1}{\kappa(s)}N(s)$가 고정된 점이면, α는 원의 일부임을 보이시오.
(단, $\kappa(s)$는 $\alpha(s)$의 곡률(curvature)이고, $N(s)$는 주법선벡터(principal normal vector)이다.) [2005]

(sol) $\alpha''(s) \neq 0 \Rightarrow N(s) \neq 0$.

$\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) = p$ 라 두면

$\alpha'(s) - \frac{\kappa'(s)N(s)}{\kappa(s)^2} + \frac{N'(s)}{\kappa(s)^2} = 0$

$\Rightarrow T(s) - \frac{\kappa'(s)N(s)}{\kappa(s)^2} + \frac{1}{\kappa(s)}\left(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)\right) = 0$

$\Rightarrow -\frac{\kappa'(s)N(s)}{\kappa(s)^2} + \frac{\tau(s)}{\kappa(s)}B(s) = 0$

$\Rightarrow \kappa'(s) = \kappa =$ 상수 k $\tau(s) = 0$ 이므로 α는 평면도형

$\therefore \alpha(s) + \frac{1}{k}N(s) = p \Rightarrow \|\alpha(s) - p\| = \frac{1}{k}\|N(s)\| = \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \alpha$는 중심 p, 반지름 $\frac{1}{k}$인 원의 일부

3.

곡선 $\alpha:(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$, $\alpha(t)=(t^3+t, t^2+1, t)$가 있다. 이 곡선의 접촉평면($\alpha'(t)$와 $\alpha''(t)$를 포함하는 평면)과 xy−평면이 이루는 각이 $45°$가 되는 t의 값을 구하시오. (단, $\mathbb{R}^3$은 3차원 유클리드 공간이다.) [2007]

(sol) $\alpha'(t) = (3t^2+1,\ 2t,\ 1)$

$\alpha''(t) = (6t, 2, 0)$

$\alpha' \times \alpha'' = (-2, 6t, 2-6t^2)$

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(-2,6t,2-6t^2)\cdot(0,0,1)}{\|(-2,6t,2-6t^2)\|}$

$\Rightarrow \sqrt{2}(2-6t^2) = 2\sqrt{9t^4+3t^2+2}$

$\cancel{2}(4-24t^2+36t^4) = \cancel{4}^{2}(9t^4+3t^2+2)$

$= 18t^4+6t^2+4$

$18t^4-30t^2=0$

$6t^2(3t^2-5)=0 \Rightarrow t^2=\frac{5}{3}$. $t=\cancel{\pm}\frac{\sqrt{15}}{3}$ $(t>0)$ ∎

4.

다음은 곡선 $\alpha(t)=(\cosh t, \sinh t, t)$에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선(unit-speed reparametrization)을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은? [2009 모의평가]

(단, $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$이다.)

> 주어진 곡선 α의 속력 $\|\alpha'(t)\|$를 구하면
>
> $\|\alpha'(t)\| = \boxed{(가)}$
>
> 이므로 곡선 α의 호길이 함수(arc-length function) $s(t)$는
>
> $s(t)=\int_0^t \|\alpha'(u)\|\,du=\sqrt{2}\sinh t$
>
> 따라서 호길이 함수의 역함수는
>
> $t=t(s)=\sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}$
>
> 이므로 곡선 α에 대하여 단위속력을 갖는 재매개곡선 $\beta(s)$는
>
> $\beta(s)=\alpha(t(s))=\left(\sqrt{1+\frac{s^2}{2}}, \boxed{(나)}, \sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

	(가)	(나)
①	$\sqrt{2}\cosh t$	$\sqrt{2}s$
②	$\sqrt{2}\cosh t$	$\frac{s}{\sqrt{2}}$
③	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\sqrt{2}s$
④	$\sqrt{2}\lvert\sinh t\rvert$	$\frac{s}{\sqrt{2}}$
⑤	$\sinh\frac{\lvert t\rvert}{\sqrt{2}}$	$\cosh\frac{s}{\sqrt{2}}$

(sol) $\alpha'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sinh^2 t+\cosh^2 t+1}$

$= \sqrt{\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}+\frac{(e^t+e^{-t})^2}{4}+1}$

$= \sqrt{\underbrace{\frac{2e^{2t}+2e^{-2t}}{4}}_{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}+1} = \sqrt{\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{2}}$

$= \sqrt{2\left(\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}\right)} = \sqrt{2}\cosh t$

$\sinh\left(\sinh^{-1}\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \frac{s}{\sqrt{2}}$

5.

좌표공간에서 곡선 $\gamma(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$는 두 점 $\mathrm{P}(2, 0, 4\pi)$, $\mathrm{Q}(2, 0, 8\pi)$를 지난다. 점 P에서 점 Q까지 곡선 $\gamma(t)$의 길이가 $4\sqrt{10}\pi$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$이고 $b>0$이다.) [2011]

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$

④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

(sol) $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$$\int_{\frac{4}{b}\pi}^{\frac{8}{b}\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt$$

$$= \int_{\frac{4}{b}\pi}^{\frac{8}{b}\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{8}{b}\pi - \frac{4}{b}\pi\right) = 4\sqrt{10}\pi$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{\cancel{4}}{b}\cancel{\pi} = \cancel{4}\sqrt{10}\,\cancel{\pi}$$

곡선이 $(2,0,4\pi)$ 지나므로 $a=2$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10}\, b$ $\quad a^2+b^2 = 10b^2$

$4 = 9b^2$, $\quad b = \frac{2}{3}$

$2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ ■

6. < 곡률과 열률 >

$a>0$일 때, 단위속력곡선(unit-speed curve)

$$X(t) = \left(a\cos\frac{t}{\sqrt{a^2+1}}, a\sin\frac{t}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

의 곡률(curvature)은? [1993]

① $\frac{a}{a^2+1}$ ② $\frac{\sqrt{a}}{a^2+1}$ ③ $\frac{\sqrt{2}a}{a^2+1}$ ④ $\frac{2a}{a^2+1}$

(sol) 곡률 : $\|T'(t)\|$

put $s = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\quad X(t) = (a\cos st, a\sin st, st)$

$T(t) = X'(t) = (-as\sin st, as\cos st, s)$

$\Rightarrow T'(t) = (-as^2\cos st, -as^2\sin st, 0)$

$$\|T'(t)\| = \sqrt{a^2s^4\cos^2 st + a^2s^4\sin^2 st} = as^2 = a\cdot\frac{1}{a^2+1} = \frac{a}{a^2+1}$$ ■

7.

곡선 $X=(4\cos t)e_1+(4\sin t)e_2+3te_3$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, e_1, e_2, e_3는 $\mathbb{R}^3$의 표준기저이다.) [2000]

(1) 단위 접선 벡터를 구하시오.

(2) 곡률을 구하시오.

(3) 곡률 반경을 구하시오. $r=\frac{1}{\kappa}$

(sol) (1) 단위 접선벡터 : $(4\cos t, 4\sin t, 3t)$ 미분 → $\underbrace{(-4\sin t, 4\cos t, 3)}_{\sqrt{16s^2+16c^2+9}=5} = \left(\frac{-4}{5}\sin t, \frac{4}{5}\cos t, \frac{3}{5}\right)$

후, 크기로 나누어야

(2) 곡률 : $(-4\sin t, 4\cos t, 3)$ 미분 후 Norm, → $\left(-\frac{4}{5}\cos t, -\frac{4}{5}\sin t, 0\right)$

크기로 나누기

↓

4

→ $\sqrt{\frac{16}{25}\cos^2 t+\frac{16}{25}\sin^2 t} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{4}{25}$

(3) 곡률 반경 : $r=\frac{1}{\kappa}=\frac{25}{4}$ ■

8.

3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$의 점 $\gamma(s)$에서의 곡률(curvature) $\kappa(s)$는 $\kappa(s)=\sqrt{s^4+4s^2+3}$이다. 곡선 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$을

$$\alpha(t)=\gamma(t)+\gamma'(t)$$

로 정의할 때, $t=0$에서 $t=1$까지 곡선 α의 길이를 구하시오. [2016]

(sol) $\alpha'=\gamma'+\gamma''$, $\|\gamma'\|=1$ & $|\gamma''|=\kappa=\sqrt{s^4+4s^2+3}$ 이고

$\gamma' \perp \gamma''$ 이므로

$\|\alpha'\| = \sqrt{\|\gamma'\|^2+\|\gamma''\|^2} = \sqrt{s^4+4s^2+4} = s^2+2$

$\therefore\ L=\int_0^1 (s^2+2)\,ds = \frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$ ■

(sol) $\int_0^1 \sqrt{\alpha'(t)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(\gamma'(t)+\gamma''(t))^2}\,dt$

$= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa'(t)}+\frac{1}{\kappa''(t)}\right)^2}\,dt$

$\kappa(t)=\sqrt{t^4+4t^2+3} = (t^4+4t^2+3)^{1/2}$

$\kappa'(t) = \frac{4t^3+8t}{2\sqrt{t^4+4t^2+3}} = \frac{2t^3+4t}{\sqrt{t^4+4t^2+3}}$

$\kappa''(t) = \frac{(6t^2+4)\cdot\sqrt{t^4+4t^2+3}-(2t^3+4t)\cdot\frac{4t^3+8t}{2\sqrt{t^4+4t^2+3}}}{t^4+4t^2+3}$

$= \frac{(6t^2+4)(t^4+4t^2+3)^{1/2}-(2t^3+4t)(2t^3+4t)(t^4+4t^2+3)^{-1/2}}{t^4+4t^2+3}$

$= \int_0^1 \sqrt{\quad}$

9.

3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓여 있는 정규곡선(정칙곡선, regular curve) C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. C 위의 모든 점에서 곡률(curvature)이 0이면 C는 직선이거나 직선의 일부이다.

ㄴ. C 위의 모든 점에서 열률(비틀림률, 꼬임률, torsion)이 정의되고 그 값이 0이면 C는 적당한 평면에 놓여 있다.

ㄷ. C 위의 모든 점에서 곡률이 양의 실수로 일정하면 C는 원이거나 원의 일부이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ : τ가 0 아닌 상수이면 원나선 (helix)

10.

3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$의 한 평면에 있고 곡률(cuvature)이 양인 단위속력곡선(unit speed curve) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$에 대하여, 점 $\gamma(s)$에서의 접선벡터(tangent vector)를 $T(s)$, 주법선벡터(principal normal vector)를 $N(s)$라 하자. 곡선 $\beta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$을

$$\beta(s) = \frac{1}{2}T(s) + N(s)$$

로 정의할 때, 모든 양수 t에 대하여 $s=0$에서 $s=t$까지 곡선 β의 길이는 $3t$이다. $s=1$일 때, 곡선 γ의 곡률을 구하시오. [2017]

(sol) $\beta' = \frac{1}{2}T' + N'$ $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T + \cancel{\tau B}$

$= \frac{1}{2}\kappa N - \kappa T$ γ가 평면곡선이므로 $\tau = 0$

$\therefore$ 곡선의 길이 $L(t) = \int_0^t \|\beta'\|\, ds = \boxed{\int_0^t \frac{\sqrt{5}}{2}\kappa\, ds} = 3t$

$L'(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\kappa(t) = 3 \Rightarrow \kappa(1) = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ∎