1.

< 행렬식 >

행렬식 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 의 값을 구하시오. [1990]

(sol) $3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(4-20) + (4-(-2))$

$= -48 + 6 = -42$

2.

3×3 행렬 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$의 역행렬을 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$라 할 때,

$a_{21}+a_{32}$의 값은? [1996]

2

(sol) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Downarrow$ $\mathbb{r}_1 \times (-3) + \mathbb{r}_2$
$\mathbb{r}_1 \times (-1) + \mathbb{r}_3$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 \end{array}\right]$

$\Downarrow$ $\mathbb{r}_3 \times 6 + \mathbb{r}_2$
$\mathbb{r}_3 \times (-2) + \mathbb{r}_1$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbb{r}_2 \times (-1) + \mathbb{r}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right]$

a_{21} a_{32}

$3+(-1) = 2$

3.

연립방정식 $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$ 이 $x=y=z=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 a의 값들의 합은? [1992] -1

(sol) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -(a-1) \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{bmatrix}$

$2-a-a^2=0$

$\Leftrightarrow a^2+a-2=0$

$\Leftrightarrow (a+2)(a-1)=0$

$a=1$ or $a=-2$

$1+(-2) = -1$ ■

4.

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉
A는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬(정칙행렬)의 곱으로 나타낼 수 있다.

(pf) 이 말 ㅋ ~~일차종속~~

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{matrix} c_1=0 \\ c_2=0 \\ c_3=0 \end{matrix}\right)$ 일차독립

∴ 항등행렬 아닌 가역행렬 곱으로 ~~표현 불가~~!

$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

표현 가능

→ 그냥 일차독립이면 항등행렬을 곱으로 표현 가능한거지

무조건 항등행렬곱으로만 나타내지는 것 X

5.

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\7&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

A는 수반행렬(adjoint matrix)의 행렬식(determinant)은 A의 행렬식의 제곱과 같다.

(pf) adjoint matrix = Cofactor 의 Transpose

여인수 ⇒ $(-1)^{i+j}M_{ij}$ $\parallel$ C_{ij}

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -21 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

Transpose

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -21 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -21 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = 12\times54+6(21\times18) = 12\times3\times18+6\times21\times18 = 18(\underbrace{36+126}_{162}) = 2916$$

$$(\det A)^2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}^2 = (-(12)-2(21))^2 = (-12-42)^2 = (54)^2 = 2916$$

$(50+4)^2 = 2500+400+16 = 2916$

$\therefore\ |adj(A)| = |A|$ ■

6.

각 성분이 실수인 3×3 정칙행렬(가역행렬) A의 수반행렬(adjoint matrix)을 adj A라 할 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

<보기>

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 $\mathrm{adj}\,(A^n) = (\mathrm{adj}A)^n$이다.

ㄴ. 행렬 A의 전치행렬(transpose matrix)을 A^T라 할 때, $\mathrm{adj}\,(A^T) = (\mathrm{adj}A)^T$이다.

ㄷ. $\mathrm{adj}\,(\mathrm{adj}A) = A$

ㄱ. True ㄴ. True ㄷ. False

$A\cdot adj(A) = det(A)\cdot I_3$ — (*)

ㄱ. True

(∵ (*) 의 양변을 n 제곱하면

$A^n\cdot(adj(A))^n = (det(A))^n\cdot I_3$

(*) 에서 A 자리에 A^n을 대입하면

$A^n\cdot adj(A^n) = det(A^n)\cdot I_3 = (det A)^n\cdot I_3$

이므로 $A^n\cdot(adj(A))^n = A^n\cdot adj(A^n)$ 이 성립.

양 변에 A의 역행렬을 n번 취하면

$(adj\ A)^n = adj(A^n)$ 임을 알수 있다.)

ㄴ. True

(∵ (*) 양변을 전치행렬로 만들어주면

$A^T(adj(A))^T = det\ A\cdot I_3$

(*) 에서 A 자리에 A^T을 대입하면

$A^T\cdot adj(A^T) = det(A^T)\cdot I_3 = det A\cdot I_3$

이므로 $A^T(adj(A))^T = A^T\cdot adj(A^T)$

양변에 A^T의 역행렬을 취하면

$(adj\ A)^T = adj(A^T)$

c. False

(반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$adj(adj(A)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7.

< 부분공간 >

벡터 공간(vector space) $\mathbb{R}^3$이 부분공간(subspace)이 아닌 것은? [1996]

4

① $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$
② $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$
③ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$
④ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$

(sol) $\mathbb{R}^3$의 부분공간은 다음중 한가지 형태임.

1. $\{(0, 0, 0)\}$
2. 원점을 지나는 직선
3. 원점을 지나는 평면
4. $\mathbb{R}^3$

8.

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 V에 대하여 W_1, W_2를 V의 부분공간이라 하자. $V = W_1 + W_2$일 때, 임의의 $v \in V$에 대하여

$$v = w_1 + w_2 (w_1 \in W_1, w_2 \in W_2)$$

로 유일하게 표현될 필요충분조건은 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$임을 증명하시오. [2003]

(p8) 몰라서 풀이 봄.

($\Rightarrow$) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 을 보이자.

i) $W_1 \cap W_2 \subset \{0\}$

$v \in W_1 \cap W_2$ 이면, $v+0 = v = 0+v$ 이고 가정에서 v는 유일하게 표현된다고 했으므로 $v=0$ 이다.

ii) $W_1 \cap W_2 \supset \{0\}$

$\mathbb{R}$ 의 부분공간이란 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합으로서 그 자체가 벡터공간이라는 의미이다.

벡터공간은 항상 0 을 포함하므로 W_1, W_2 모두 0을 포함한다.

따라서 $0 \in W_1 \cap W_2$ 이 성립한다.

($\Leftarrow$) $V = W_1 + W_2$ 이므로 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $v = w_1 + w_2$ 인 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ 가 존재한다.

이제 유일성만 보이면 충분하다.

$w_1, w_1' \in W_1$, $w_2, w_2' \in W_2$ 에 대하여 $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ 라 하자.

$w_1 - w_1' \in W_1$, $w_2' - w_2 \in W_2$ 이므로

$w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 이 성립한다.

따라서 $w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$ 이다. ∎

9.

실수체 $\mathbb{R}$위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

ㄱ. 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$에 대하여 $\mathbb{Q}^3$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다.

ㄴ. $\mathbb{R}^3$의 부분공간 $U=\{(x,y,z)\,|\,z=x+5y\}$에 대하여 $\mathbb{R}^3$가 U와 W의 직합(direct sum) $U\oplus W$와 같게 되는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 W가 존재한다. $\| \; U^\perp$

(sol) ㄱ. ~~True~~ False ㄴ. True

ㄱ. False

Scalar $\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}(1,1,1)=(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}) \notin Q^3$

이므로 Q^3는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 아님.

ㄴ. True

$U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^3.$

10. **< 일차독립, 일차종속 >**

세 벡터 $(1,1,0),(1,x,1),(0,1,-1)$이 일차종속이 될 x의 값은? [1992]

(sol)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x=0$$

11.

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^5$에 속하는 벡터 v_1, v_2, v_3에 대하여 옳은 것만을 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

ㄱ,ㄴ,ㄷ

<보기>

ㄱ. v_1, v_2, v_3이 일차독립이면 $v_1+v_2+v_3$, v_2+v_3, v_3도 일차독립이다.

ㄴ. 집합 $\{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$는 $\mathbb{R}^5$의 부분 공간이다.

ㄷ. 5차 정사각행렬 A에 대하여 두 방정식 $Ax=v_1$, $Ax=v_2$가 모두 해를 가지면 방정식 $Ax=2v_1+v_2$도 해를 가진다.

(sol) ㄱ. 참.

$$c_1(v_1+v_2+v_3) + c_2(v_2+v_3) + c_3v_3 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2 = c_3$

$$\underbrace{c_1}_{0}v_1 + \underbrace{(c_1+c_2)}_{0}v_2 + \underbrace{(c_1+c_2+c_3)}_{0}v_3 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$

ㄴ. 참.

$\{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 는 $\mathbb{R}^5$ 의 부분공간

합 · 스칼라배 만족하므로 부분공간 O.

ㄷ. ? 참

5×5 행렬 A. $Ax = v_1$, $Ax = v_2$ 가 모두 해를 가지면 $Ax = 2v_1+v_2$ 도 해 가짐.

$Ax_1 = v_1$, $Ax_2 = v_2$ 라 하면 $A(2x_1+x_2) = 2Ax_1 + Ax_2 = 2v_1 + v_2$

이므로 $2x_1 + x_2$ 는 $Ax = 2v_1+v_2$ 의 해이다. ■

12.

다음 벡터 중에서 실수체 $\mathbb{R}$위에서 일차종속인 ? [1991]

① e^t, e^{2t}
② $(1, 1, 1), (0, 1, 2)$
③ $(-1, -1, 0), (0, 1, 2)$
④ $(-1, 2, -4), (2, -4, 8)$

(sol) ① $ae^t + be^{2t} = 0$

$\Leftrightarrow$ $a = b = 0$: linearly indpt.

② $a(1,1,1) + b(0,1,2) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &a = 0, \\ &a + b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ &a + 2b = 0 \end{aligned}\right) \text{ : linearly indpt.}$$

③ $a(-1,-1,0) + b(0,1,2) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &-a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ &-a + b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{aligned}\right) \text{ : linearly indpt.}$$

④ $a(-1,2,-4) + b(2,-4,8) = 0$

$\times(-2)$ $\Rightarrow$ linearly dpt. ∎

13. **〈차원〉**

벡터공간 $Mat_2(\mathbb{R})$의 부분공간

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - 3b + 2c + d = 0 \right\}$$

의 차원 $\dim(W)$는? [1993]

(sol) $d = -a + 3b - 2c$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, d = -a + 3b - 2c \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a+3b-2c \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

일차독립인지 확인

$b + c = 0$

$c = 0 \Rightarrow b = 0$: 일차독립.

따라서 기저가 3개 $\rightarrow$ $\dim(W) = 3$ ∎

14.

U, V는 두 벡터 공간(vector space)이고,

$$\dim(U)=7,\ \dim(V)=8,\ \dim(U+V)=10$$

일 때, 벡터 공간 $U\cap V$의 차원(dimension)은? [1994]

$\dim(U\cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V)$

$= 7+8-10 = 5$

15. < 내적 공간 >

실수의 집합 $\mathbb{R}$위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 두 벡터

$$a=(a_1,a_2,a_3,a_4), b=(b_1,b_2,b_3,b_4)$$

에 대하여 내적 a・b를 $a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$로 정의하자. 두 벡터 $(1,0,1,-1)$과 $(1,2,2,0)$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은? [2009 모의평가]

(sol) $\cos\theta = \dfrac{a\cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|} = \dfrac{1+2}{\sqrt{1+1+1}\ \sqrt{1+4+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

16.

3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 벡터 $v_1=(1,2,2)$, $v_2=(1,-1,2)$로 생성된 부분공간을 V라 하자. V의 임의의 정규직교기저(orthonormal basis) $B=\{u_1,u_2\}$에 대하여 B에 의해 결정되는 네 실수 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$가 존재하여

$$v_1=a_{11}u_1+a_{12}u_2,\quad v_2=a_{21}u_1+a_{22}u_2$$

일 때, $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 $u=(x_1,y_1,z_1)$, $v=(x_2,y_2,z_2)$의 유클리드 내적은 $u\cdot v=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$이다.) [2017]

(sol) $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$은 두 벡터 (a_{11},a_{12}), (a_{21},a_{22})으로 만들어지는 평행사변형의 넓이이고 그 값은 인접한 두 변을 v_1, v_2로 갖는 평행사변형의 넓이와 같다.

$\|v_1\times v_2\| = \|v_1\|\|v_2\|\sin\theta$

이고 $\|v_1\times v_2\| = \|(1,2,2)\times(1,-1,2)\| = \|(6,0,-3)\| = 3\sqrt{5}$

17. < 선형변환 >

실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 선형변환(linear tansformation) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 $\mathbb{R}^n$의 임의의 두 점 $x, y\,(x \neq y)$를 잇는 선분 $\{(1-t)x+ty \mid 0 \le t \le 1\}$을 $\mathbb{R}^m$에 포함되는 선분(또는 점)으로 보내는 것을 보이시오. [2006]

(sol) 임의의 $0 \le t \le 1$ 에 대하여 L은 선형변환이므로

$$L((1-t)x+ty) = (1-t)L(x) + tL(y) \quad -(*)$$

이고 다음이 성립.

(Ⅰ) $L(x) = L(y)$

$(*) = L(x)$ 인 한 점으로 변환된다.

(Ⅱ) $L(x) \neq L(y)$

$(*)$는 $L(x)$와 $L(y)$를 잇는 선분이다. ∎

18.
실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간

$$P_2 = \{a+bx+cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

에 대하여 선형변환(linear transformation) $T: P_2 \to P_2$가 다음을 만족한다고 하자.

$$T(1+x) = 1+x^2$$
$$T(x+x^2) = x-x^2$$
$$T(1+x^2) = 1+x+x^2$$

이 때, $T(4+2x+3x^2)$을 구하시오. [2008]

(sol) $4+2x+3x^2 = a(1+x) + b(x+x^2) + c(1+x^2)$

$= (a+c) + (a+b)x + (b+c)x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 4 \\ a+b = 2 \\ b+c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \frac{5}{2},$$

$$b = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$\therefore\ T(4+2x+3x^2) = aT(1+x) + b\,T(x+x^2) + c\,T(1+x^2)$

$= \frac{3}{2}(1+x^2) + \frac{1}{2}(x-x^2) + \frac{5}{2}(1+x+x^2)$

$= (\frac{3}{2}+\frac{5}{2}) + (\frac{1}{2}+\frac{5}{2})x + (\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{2})x^2$

$= 4 + 3x + \frac{7}{2}x^2$

19.

점 (x, y)를 점 (ry, rx)로 옮기는 일차변환 f와 점 (x, y)를 점 $(x\sin\theta+y\cos\theta, x\cos\theta-y\sin\theta)$로 옮기는 일차변환 g에 의한 합성변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [1994]

(sol) $[g\cdot f] = [g][f] = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$

(*) Thm) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 이 선형변환이고 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 이 $\mathbb{R}^n$의 표준기저벡터일 때, T의 표준행렬은

$[T] = [\,T(e_1) \mid T(e_2) \mid \cdots \mid T(e_n)\,]$ 이다.

20.

$\mathbb{R}^2$의 두 기저(basis),

$\alpha = \{v_1, v_2\}, \beta = \{u_1, u_2\}$

에 대하여

$v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0), \ u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3)$

일 때, 다음 물음에 답하시오. [2001]

(1) 선형변환 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$를 나타내는 행렬 A를 구하시오.

(2) 이 선형변환에 의하여 세 점

$P(-1, 0), Q(1, -1), R(2, 3)$

이 옮겨지는 점을 각각 P', Q', R'이라 할 때, $\triangle P'Q'R'$의 넓이를 구하시오.

(sol)

(1)

$A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{0-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(2) $P(-1, 0)$ $Q(1, -1)$ $R(2, 3)$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 \\ 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\triangle P'Q'R' = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 7 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{matrix}\right|$

$= \frac{1}{2}\left|-21-10-(-3+35)\right| = \frac{1}{2}\left|-31-32\right| = \frac{63}{2}$

21.

유한차원 내적공간 V의 부분공간 W ($W \neq V$)에 대하여 선형사상 P를 V에서 W로의 정사영(orthogonal projection)이라 하자. P에 관한 설명 중 옳지 않은 것은? [2009]

① $\mathrm{Im}(P) = W$이다.
② $\mathrm{Ker}(P) \cap W = \{0\}$이다.
③ 임의의 $w \in W$에 대하여 $P(w) = w$이다.
④ 임의의 $v \in V$에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$이다.
⑤ P를 나타내는 행렬은 가역행렬~~이다~~.
아니다

(pf) 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $v = w_1 + w_2$ 인 $w_1 \in W$, $w_2 \in W^{\perp}$가 유일하게 존재한다.

이 때 w_1을 W로의 v에 대한 정사영이라 한다.

① (C) 정사영의 정의에 의하여 $Im(P) \subset W$

(ↄ) 임의의 $w \in W$ 에 대하여 $w = w + 0$ 이고 $0 \in W^{\perp}$ 이므로 $P(w) = w \in W$ 이다.

② $ker(P) \cap W = \{0\}$

($\because$ $v \in ker(P) \cap W \Rightarrow P(v) = 0$, $v \in W$

$\Rightarrow v = v - P(v) \in W^{\perp}$

$\Rightarrow v \in W \cap W^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow v = 0$)

③ 임의의 $w \in W$ 에 대하여 $P(w) = w$ 이다.

($\because$ $w \in W$, $0 \in W^{\perp}$ 에 대해 $w = w + 0$ 이므로 $P(w) = w$ 이다.)

④ 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$ 이다.

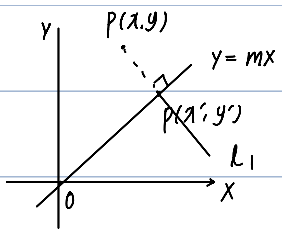
($\because$ $P(v) \in W$ 이므로 ③ 에 의하여 $P(P(v)) = P(v)$ 이다.)

⑤ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ 가역행렬 아님. ∎

22.

직교좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 직선 $y = mx\ (m \neq 0)$에 내린 수선의 발을 $P'(x', y')$이라고 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족하는 일차변환의 행렬 A는? [1993]

(sol)



l_1 은 기울기가 $-\frac{1}{m}$ 이고 $P'(x', y')$ 지남

$\{x(1, m) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 의 정규직교 기저는

$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)\right\}$ 이므로 직선 $y = mx\ (m \neq 0)$ 에 내린 수선의 발 $P'(x', y')$ 는

$P(x', y')$

$= \left\langle (x, y), \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

$= \frac{x}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{my}{\sqrt{m^2+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

$= \frac{1}{m^2+1}(x + my,\ mx + m^2 y)$

$= \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

따라서 $A = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$

23.

다음 중 선형사상인 것은? [1990]

① $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F_1(x, y, z) = (x+1, z-2)$

② $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F_2(x, y) = xy$

③ $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F_3(x, y) = (y, x^2)$

④ $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F_4(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

(sol) ④ 함수 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 에 대하여 다음이 성립한다.

F 가 선형사상일 필요충분조건은

$F(x_1, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n,\ \cdots,\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)$

인 실수 a_{ij} 가 존재하는 것이다.

24.

선형 사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이

$$T(x,y,z) = (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z)$$

로 정의될 때, $T(\mathbb{R}^3)$의 차원(dimension)을 구하시오. [1996]

(*) Dimension Thm

$T: V \to W$ 가 n차원 벡터공간 V에서 벡터공간 W로의 선형변환이면

$\underbrace{rank(T)}_{\text{기저 갯수} = dim(T)} + \underbrace{null(T)}_{\text{자유변수 갯수 (= leading 1 갯수)}} = n$ 이 성립

(sol) 차원 = 기저가 몇개냐? 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{rank}_{dim = 2} + \underbrace{null}_{1} = n$

기저는 $x(1,4,7) + y(2,5,8) + z(3,6,9)$

$(1,4,7)\ (2,5,8)$ 이 기저 ⇒ 2차원

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \cancel{1} & 2 \\ 0 & \cancel{1} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

~~$x = t,\ y = s,\ z = -\frac{1}{3}(t+2s),\ t, s \in \mathbb{R}$~~

$x = t,$
$y = 2t,$ ⇒ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 기저 1개 ⇒ $null(T) = 1$
$z = -t$

~~$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 기저 2개 이므로 2차원~~

⇒ $dim(T) = rank(T)$,

$rank(T) + null(T) = 3,\quad rank(T) = 2$

$\therefore\ dim(T) = 2$

25.

선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$에 의한 곱이다.

즉, $x \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $Tx = Ax$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오. [2005]

(sol) $dim(ker(A)) = null(A) = 1$

$dim(Im(A)) = rank(A) = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$null(T) = 1$

26.

실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오 [2010]

<보기>

선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x-y, 2y, x-3z)$에 대하여 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 차원은 1이다.

(sol) $\dim(\ker(T)) = 1$? No. zero.

$x(1,0,1) + y(-1,2,0) + z(0,0,-3) = 0$ 이려면,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

셋 다 일차독립 $\Rightarrow$ 기저 3개, $rank(T) = 3$

$\dim(\ker(T)) = null(T) = 0$

27.

실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

와 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L: V \to V$를

$$L(B) = AB - BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace)

$$\mathrm{im}(L) = \{L(B) \mid B \in V\}$$

의 차원은? [2012]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

(sol) $L(B) = AB - BA$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하자.

$$L(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2c & -2a-2b+2d \\ 2c & -2c \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 기저는 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2개 $\Rightarrow$ $null(T) = 2$ $\to$ 두 기저는 일차독립집합이므로, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = rank(T) = 2$

28.

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

함수 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$를 임의의 $v \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $T(v)=Av$로 정의할 때, T는 정칙선형사상이다.

(sol) det (A) ≠ 0 이면 T 는 정칙선형사상

$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= -1(12) - 2(21) = -12 - 42 = -54 \neq 0$ 이므로 정칙선형사상.

29.

2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$의 단위벡터(unit vector) u에 대하여 선형사상 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을

$$T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{u})\mathrm{u} \qquad \text{I)}$$

로 정의하자. 모든 벡터 x에 대하여 $\|T(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{x}\|$임을 보이시오. 또한, $\mathrm{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때, $\mathbb{R}^2$의 기저(basis) $B=\{(1, 0), (1, 1)\}$에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 x, y에 대하여 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$는 x와 y의 점곱(유클리드 내적, dot product, Euclidean inner roduct)이고, $\|\mathrm{x}\|$은 x의 유클리드 노름(Euclidean norm)이다.) [2016]

II)

(sol) (I) $\|T(X)\| = \|X\|$

$\|T(X)\|^2 = T(X) \cdot T(X)$

$= (x - 2(x \cdot u)u) \cdot (x - 2(x \cdot u)u)$

$= x \cdot x - 2x(x \cdot u)u - 2x(x \cdot u)u + 4(x \cdot u)^2 u^2$

$= x \cdot x - 4(x \cdot u)^2 + 4(x \cdot u)^2$

$= x \cdot x = \|X\|^2$ 이므로 $\|T(X)\| = \|X\|$

(II) $[T]_B = ?$

$T(X) = X - 2(X \cdot u)u$

$[T]_B = \left[\, [T((1,0))]_B \,\middle|\, [T((1,1))]_B \,\right]$

$X = (1, 0) \quad u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$X = (1,1) \quad u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \left[\, [(1,0) - (1,1)]_B \,\middle|\, [-(1,1)]_B \,\right]$

$T((1,0)) = (1,0) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$T((1,1)) = (1,1) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$?

$= (1,0) - (1,1) = (0,-1)$

$= (1,1) - (2,2) = (-1,-1)$

30.

3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,1)$, $v_3=(0,-1,1)$에 대하여, 두 벡터 v_1, v_2로 생성된 부분공간을 W_{12}라 하고 두 벡터 v_1, v_3으로 생성된 부분공간을 W_{13}이라 하자. $\mathbb{R}^3$의 벡터 u에 대하여 부분공간 W 위로의 u의 정사영(orthogonal projection)을 $\mathrm{proj}_W u$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을

$$T_k(u)=\mathrm{proj}_{W_{12}}u+\mathrm{proj}_{W_{13}}u+ku$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오. (단, 두 벡터 $u_1=(a_1,a_2,a_3)$, $u_2=(b_1,b_2,b_3)$의 유클리드 내적은 $u_1\cdot u_2=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$이다.) [2019]

(sol) $V_2\notin \mathrm{span}\{V_1,V_3\}$ 이므로 $B=\{V_1,V_2,V_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

$\{V_1,V_3\}$는 직교집합이므로 $\mathrm{proj}_{W_{13}}V_2=\dfrac{V_1\cdot V_2}{V_1\cdot V_1}\cdot V_1+\dfrac{V_3\cdot V_2}{V_3\cdot V_3}\cdot V_3$

$$=\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{1}\cdot(1,0,0)+\frac{\overbrace{(0,-1,1)\cdot(1,1,1)}^{0}}{V_3\cdot V_3}\cdot V_3=(1,0,0)=V_1 \text{ 이다.}$$

$U_1=V_1$.

$$U_2=V_2-\frac{\langle U_1,V_2\rangle}{\langle U_1,U_1\rangle}U_1=(1,1,1)-\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}(1,0,0)=(0,1,1) \text{ 라 하면}$$

$B_{1,2}=\{U_1,U_2\}$는 W_{12}의 직교기저이므로

$$\mathrm{proj}_{W_{12}}V_3=\frac{U_1\cdot V_3}{U_1\cdot U_1}\cdot U_1+\frac{U_2\cdot V_3}{U_2\cdot U_2}\cdot U_2$$

$$=\frac{(1,0,0)\cdot(0,-1,1)}{1}\cdot(1,0,0)+\frac{(0,1,1)\cdot(0,-1,1)}{\sqrt2}(0,1,1)=0 \text{ 이 성립한다.}$$

그러면 $T_k(V_1)=\mathrm{proj}_{W_{12}}V_1+\mathrm{proj}_{W_{13}}V_1+kV_1=V_1+V_1+kV_1=(k+2)V_1$

$T_k(V_2)=\mathrm{proj}_{W_{12}}V_2+\mathrm{proj}_{W_{13}}V_2+kV_2=V_2+V_1+kV_2=V_1+(k+1)V_2$

$T_k(V_3)=\mathrm{proj}_{W_{12}}V_3+\mathrm{proj}_{W_{13}}V_3+kV_3=0+V_3+kV_3=(k+1)V_3$

이므로 $[T_k]_B=\left[\,[T_k(V_1)]_B\,\middle|\,[T_k(V_2)]_B\,\middle|\,[T_k(V_3)]_B\,\right]$

$$=\begin{bmatrix}k+2&1&0\\0&k+1&0\\0&0&k+1\end{bmatrix}$$ 이다. $\det([T_k]_B)=0$ 이면 T_k의 역변환이 존재하지 않으므로

$\det([T_k]_B)=(k+2)(k+1)^2=0$

$\Leftrightarrow$ $k=-2$ 또는 $k=-1$. 그리고 $k=-2\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\to \mathrm{rank}(T_{-2})=2$ 이다 ∎

31.

V와 W가 n차원 실벡터 공간이라 하자.
선형사상 $L: V \to W$에 대하여 $\ker L = \{0\}$이면 L은 동형사상 (isomorphism)임을 보이시오. [2002]

(Sol) L 은 선형사상이므로 전단사임을 보이면 충분하다.

(i) L : 단사

$u, v \in V$ 에 대하여 $L(u) = L(v)$ 라 하면 L은 선형사상 이므로 $L(u-v) = 0$ 이 성립.

따라서 $u - v \in \ker L = \{0\}$ 이다. 그러므로 $u = v$ 이다.

(ii) L : 전사

$\ker L = \{0\}$ 이므로 $\dim(\ker L) = 0$ 이다. 차원정리에 의하여 $\underset{0}{\dim(\ker(L))} + \dim(\mathrm{range}(L)) = n$ 이므로

$\dim(\mathrm{range}(L)) = n$ 이 성립한다. range L 은 W 의 부분공간이고 W 와 차원이 같으므로 range L = W 이 성립.

㊟ $T: V \to W$ 가 n 차원 벡터공간 V 에서 W 로의 선형변환이면 $\mathrm{rank}(T) + \mathrm{null}(T) = n$ 이 성립한다.

32.

실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 서로 다른 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5로 생성되는 벡터공간

$$V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

ㄱ. 벡터공간 V와 $\mathbb{R}^n$이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 n이 존재한다. T

ㄴ. 집합 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 V의 기저(basis)인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다. F

ㄷ. $\dim V = 2$인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다. T

(Sol) ㄱ. True ㄴ. ~~True~~ False ㄷ. ~~False~~ True

ㄱ. $\dim V = n$ 이고 S 를 V의 기저라 할 때, $T: V \to \mathbb{R}^n$ 을 $T(v) = [v]_S$ 라 정의하면 T는 동형사상이 된다.

ㄴ. $\dim V \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$ 이므로 V 에 대한 임의의 기저의 원소의 개수는 4개 이하.

ㄷ. (1,0,0) (2,0,0,0) (3,0,0,0) (4,0,0,0) (0,1,0,0)

33. < 고윳값 , 고유벡터 >

실벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 에서의 벡터 a에 대하여 선형사상

$$T(p) = a \times p + (p \cdot a)a \quad (p \in \mathbb{R}^3)$$

가 정의되었다. 벡터 a의 크기가 $\sqrt{2}$일 때 T의 고유치를 구하고, T의 고유치는 그것뿐임을 보이시오. 단, $u \times v$와 $u \cdot v$는 각각 벡터 u, v의 외적(cross product)과 내적(inner product)을 나타낸다. [1997]

(Sol) claim 1) a와 수직인 p는 고유벡터가 아니다.

(귀류) a와 수직인 고유벡터 p가 존재한다 가정.

그러면 $a \times p = a \times p + (p \cdot a) \cdot a = T(p) = \lambda p$ $-(*)$ 이 성립한다.

양변의 오른쪽에 p의 내적을 취하면 $\lambda p \cdot p = (a \times p) \cdot p$

$\Rightarrow \lambda \|p\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad (\because \|p\|^2 \neq 0)$ 이 성립한다.

그러면 $(*)$에 의하여 $a \times p = 0$ 이다.

$\Rightarrow 0 = \|0\| = \|a \times p\| = \|a\| \cdot \|p\| \cdot \sin\theta = \sqrt{2}\|p\|$

$\Rightarrow \|p\| = 0 \Rightarrow p = 0$

고유벡터 p는 0일 수 없으므로 모순이다.

claim 2) 2는 T의 고윳값이다.

a의 크기는 $\sqrt{2}$ 이므로 $a \neq 0$ 이므로 $T(a) = a \times a + (a \cdot a)a = 2a$ 이므로 2는 T의 고윳값이다.

claim 3) 2는 T의 유일한 고윳값이다.

λ는 T의 고윳값이고 p는 λ에 대응하는 고유벡터라 하자.

$\lambda p = T(p) = a \times p + (p \cdot a)a$

양변의 오른쪽에 a의 내적을 취하면

$(\lambda p) \cdot a = (a \times p + (p \cdot a)a) \cdot a \Rightarrow \lambda(p \cdot a) = 2(p \cdot a)$ 가 성립하고

Claim 1 에 의하여 $p \cdot a \neq 0$ 이므로 $\lambda = 2$ 이다.

34.

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을

$$T(x, y, z) = (x+y-2z,\ y,\ x-2z)$$

로 정의하자. T의 상(image) $\mathrm{im}(T)$와 T의 핵(kernel) $\ker(T)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. $\mathrm{im}(T)$의 차원은 1이다.

ㄴ. 벡터 $(1, 0, 0)$의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영 (orthogonal projection)은 $\frac{2}{5}(2, 0, 1)$이다.

ㄷ. 벡터 (x, y, z)의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영을 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 행렬 A의 고유치(eigenvalue, (characteristic value)를 모두 더한 값은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(Sol) ㄱ. False ㄴ. True ㄷ. True

ㄱ 거짓인 이유 :

$\ker T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y-2z,\ y,\ x-2z) = (0, 0, 0)\} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \{(2t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim \mathbb{R}^3 - \underset{\downarrow 1}{\dim(\ker T)} = 2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ put $z = t$
$\Rightarrow y = 0,\ x = 2t$

ㄴ 참인 이유 :

$\ker(T)$ 의 기저는 $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)\right\}$ 이므로

$\mathrm{proj}_{\ker(T)}(1, 0, 0) = \left((1, 0, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$

$= \frac{2}{5}(2, 0, 1)$

ㄷ 참인 이유 :

(pf 1) $\ker(T)$ 에서 0 이 아닌 모든 벡터는 고유치 1 을, $\ker(T)^{\perp}$ 에서 0 이 아닌 모든 벡터는 0 을 가지고 그 외 모든 벡터는 고유치를 갖지 않는다. 따라서 모든 고유치를 더한 값은 1 이다.

35.

다음 행렬의 고유치(eigen value)와 고유공간(eigenspace)을 구하시오. [2004]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(sol) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1, \ \lambda = 2$

$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x = t, \ y = 0, \ z = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

put $y = t, \ z = s \quad \begin{bmatrix} t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x - t + z = 0 \quad x = t - s$

$\Rightarrow E_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\}$ ∎

36.

3×3행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$에 대하여, A^{10}의 고윳값(eigen values)과 고유벡터(eigenvector)를 모두 구하시오. [2000]

(sol) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ or $\lambda = 2$ or $\lambda = 3$

$\begin{matrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{matrix}$

$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$

$x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = t \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_2 = t, \ x_3 = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$2x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 = t$

$x_2 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}t$

$x_3 = t$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

37.

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\7&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

(1) A의 고유다항식(characteristic polynomial)은 $x^3-6x^2-9x+54$이다.

(2) A^2의 모든 고윳값(eigenvalue, characteristic value)들의 합은 36이다.

(sol) (1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & 0\\ -7 & \lambda-4 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-3) + 2(-7\lambda+21)$

$= (\lambda^2-3\lambda-4)(\lambda-3) - 14\lambda + 42$

$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 4\lambda + 12 - 14\lambda + 42$

$= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda + 54$ → (1) 은 참.

(2) $\cancel{A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}-1&2&0\\7&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&0\\7&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}}$

$\cancel{= \begin{pmatrix}1+14 & -2+8 & 0\\ -7+28 & 14+16 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15&6&0\\21&30&0\\0&0&9\end{pmatrix}}$

그냥 A 고윳값 구해서 제곱 하면 된다.

$(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-3) + 2(-7\lambda+21) = 0$

$-14(\lambda-3) = 0$

$(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda-4-14) = 0$

$(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda-18) = 0$

$(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda+3) = 0$

$\lambda = \pm 3,\quad \lambda = 6$

⇒ A^2 의 고윳값 $9,\ 36$ → 합이 45 이므로 (2)는 거짓.

38.

두 행렬 A, B가 유사(similar)행렬이고, A의 고유치(eigen value)가 $1, 2, 3$이면 행렬 B의 고유치는? [1994]

㊀ Def) A, B가 정사각 행렬일 때 $B = P^{-1}AP$를 만족하는 가역행렬 P가 존재하면 B는 A와 닮음 (similar) 이다.

(sol) A, B는 유사행렬이므로 $A = PBP^{-1}$인 가역행렬 P가 존재한다.

$$\Rightarrow \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - PBP^{-1})$$

$$= \det(P(\lambda I - B)P^{-1})$$

P는 가역이므로 $\det(P) \neq 0$ $\therefore \det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

$$= \cancel{\det P} \cdot \det(\lambda I - B) \cdot \cancel{\det(P^{-1})}$$

$$= \det(\lambda I - B)$$

고유치는 특성방정식의 해이고 A, B의 특성 방정식이 같으므로 A, B는 같은 고유치를 가짐.

39.

각 성분이 실수인 4×4 행렬 A의 고윳값(eigenvalue)이 $1, -1, 2, 4$일 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

<보기>

ㄱ. A의 행렬식(determinant)은 -8이다. T

ㄴ. A의 자취(trace)는 6이다. T

~~ㄷ.~~ A는 대칭행렬(symmetric matrix)이다. F

ㄹ. A의 계수(rank)는 4이다. T

ㄹ. 참

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(P^{-1}AP)$$

$$= \mathrm{rank}(D) = 4$$

(sol) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ㄱ. 참

$$\det(A) = \det(P^{-1}AP) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -8$$

ㄴ. 참

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(D) = 1 - 1 + 2 + 4 = 6$$

ㄷ. 거짓

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 는 고윳값이 $1, -1, 2, 4$ 인데 대칭행렬이 아니다.

40.

$P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 적당한 정칙행렬 P를 사용하여, 행렬 $A=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{pmatrix}$을 대각화하시오. [1999]

(sol) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda+5 & -9\\ 6 & \lambda-10\end{vmatrix}$

$= (\lambda+5)(\lambda-10) - (-9)\times 6$

$= \lambda^2 - 5\lambda - 50 + 54 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

$= (\lambda-4)(\lambda-1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 4, \quad \lambda = 1$

$\lambda = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix}9 & -9\\ 6 & -6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \overset{\text{e vector}}{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}$

$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix}6 & -9\\ 6 & -9\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2x_1 = 3x_2\\ \frac{2}{3}x_1 = x_2\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}t\\ \frac{2}{3}t\end{bmatrix} = \overset{\text{e vector}}{\begin{bmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}}$

diagonalize $\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-\frac{10}{3}+6 & \frac{18}{3}-10\\ 5-6 & -9+10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{8}{3} & \cancel{\frac{-12}{3}}\,{-4}\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{8}{3}-4 & \frac{8}{3}-\frac{8}{3}\\ -1+1 & -1+\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-4}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$