2002 Pre Test Solv

2002

5. $G = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$는 곱셈에 대하여 순환군(cyclic group)이 된다. 이 사실을 이용하여 단위원시 10-제곱근(법11에 관한 원시근, primitive 10^{th} root of unity)을 모두 구하시오.

(pf) $ord_{11} 2 = r$ 라 하자.

(페르마 소정리)

$2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ 이므로 $r \mid 10$ 이다.

즉 $r = 1, 2, 5, 10$ 중 하나.

또한 $2^1, 2^2, 2^5$ 은 법 11에 관해 1과 합동이 아니므로 $r = 10$.

즉, 2는 11의 원시근.

따라서 $2^1, 2^2, \cdots, 2^{10}$ 을 재배열하여 $1, 2, \cdots, 10$ 중 하나와 유일하게 합동이 되게 할 수 있음.

그러므로 2^k $(k = 1, \cdots, 10)$ 중에서 위수가 10인 원소 찾으면 충분.

$ord_{11} 2^k = \dfrac{10}{gcd(k,10)}$ 이므로

$ord_{11} 2^k = 10$ 이 될 필요충분조건은 $gcd(k,10) = 1$.

↳ $k = 1, 3, 7, 9$

따라서 단위원시 10-제곱근은 $2^1, 2^3, 2^7, 2^9$ 이다. ■

NT

Def) $gcd(a,n) = 1$ 인 경우, $ord_n a = \phi(n)$ 이면

a를 n의 원시근 이라 함.

Thm) $ord_n a = k$, $h > 0 \Rightarrow ord_n a^h = \dfrac{k}{gcd(h,k)}$

Thm) $gcd(a,n) = 1$ 이고 $a_1, a_2, \cdots, a_{\phi(n)}$ 을 n과 서로 소이고 n보다 작은

양의 정수라 하자. a가 n의 원시근이면

$a, a^2, \cdots, a^{\phi(n)}$

은 법 n에 대해 어떤 순서로 $a_1, a_2, \cdots, a_{\phi(n)}$ 와 합동이다.

Thm) (페르마 소정리)

p가 소수, $p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

- 법 n에 대한 a의 위수

$n > 1$ 그리고 $gcd(a,n) = 1$ 이라 하자. 법 n에 대한 a의 위수는

$a^k \equiv 1 \pmod{n}$ 인 가장 작은 양의 정수 k 이다.

· $ord_n a^h = k$ 라 하면 다음이 성립

(1) $a^k \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow k \mid h$ 특히 $k \mid \phi(n)$

(2) $a^i \equiv a^j \pmod{n} \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{k}$

(3) $a, a^2, \cdots, a^k$ 는 법 n에 대해 서로 합동이 아니다.

$h > 0 \Rightarrow ord_n a^h = \dfrac{k}{gcd(h,k)}$

- 원시근

$gcd(a,n) = 1$ 이고 법 n에 관한 a의 위수가 $\phi(n)$ 이면

a를 정수 n의 원시근이라 함.

(4) 정수 $n > 1$ 에 대해 다음은 동치

(i) n의 원시근 존재

(ii) $n = 2, 4, p^k$ 또는 $2p^k$ (p는 홀수인 소수)

* 오일러함수 ϕ

$\phi(1) = 1$,

$\phi(n)$: 자연수 n과 서로소인 자연수의 개수

n이 소수이면 $\phi(n) = n - 1$

2002 Pre Test Solv

6) CA

복소평면 $\mathbb{C}$에서 해석적인 정함수(entire function) f가 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 $Re f(z) > 1$을 만족시킨다. 이 때, f는 상수함수임을 보이시오.

Pf) $Re(z) > 1 \Rightarrow$ 모든 $z \in \mathbb{C}$ 에 대해, $f(z) \neq 0$

그러므로 $\frac{1}{f(z)}$ 는 정함수이다.

$f(z) = Re\, z + Im\, z$ 이니까 $f(z) \geq Re\, z$

$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{1}{Re(z)}\right| < 1$ 이므로, (복소 평면에서 유계) 리우빌 정리에 의해

$\frac{1}{f(z)}$ 는 상수함수.

$\therefore$ $f(z)$ 는 상수함수.

- 리우빌 정리

함수 f가 전해석 함수이고 복소평면에서 유계이면

$f(z)$는 복소평면 전체에서 상수이다.

(3) f : 정함수(entire function)

$\Leftrightarrow f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s.t. (29) $\mathbb{C}$상에서 해석적 (즉 $\forall z \in \mathbb{C}$, f : z에서 해석적)

$\Leftrightarrow f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s.t. $\mathbb{C}$상에서 미분가능(즉 $\forall z \in \mathbb{C}$, f : z에서 미분가능)

2002 Pre Test Solv

7) Analysis

자연수 n에 대하여 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$을

$$f_n(x) = n(1-x)x^n$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수열 $\{f_n\}$이 점별수렴(pointwise convergence)하는 함수 f를 구하시오.

(2) 함수열 $\{f_n\}$이 평등수렴(uniform convergence)하는지를 판별하시오.

(pf) (1) $f(x) = 0$ on $[0,1]$

(i) $x = 0, 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

(ii) $0 < x < 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1-x)nx^n = 0$$

$$\left(\lim_{t\to\infty} t x^t = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\left(\frac{1}{x}\right)^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^t \ln\frac{1}{x}} = 0 \right)$$

$\therefore f \equiv 0$ on $[0,1]$

(2) 평등수렴 X

$$\sup\{\, |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{0}| \mid x \in [0,1] \,\}$$

$$= \sup\{\, n(1-x)x^n \mid x \in [0,1] \,\}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \quad (*)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\left(1+\cancel{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{e}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sup\{\, |f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0,1] \,\} = \frac{1}{e}$$

(*) $f_n'(x) = -nx^n + n^2(1-x)x^{n-1}$

$= nx^{n-1}(n - (n+1)x)$

이므로 $x = 0, \frac{n}{n+1}, 1$ 중에서 최댓값이 존재함.

$f_n(0) = f_n(1) = 0, \quad f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$

- 점별수렴

(f_n)을 $A \subseteq \mathbb{R}$ 에서의 $\mathbb{R}$로의 함수열이라 하고 $A_0 \subseteq A$ 라 하자.

또 $f: A_0 \to \mathbb{R}$ 라 하자.

각 $x \in A_0$ 에 대해 수열 $(f_n(x))$가 $\mathbb{R}$에서 $f(x)$로 수렴하면 함수열 (f_n)은 A_0 에서 f로 수렴한다.

이 경우 f를 A_0 에서 함수열 (f_n)의 극한이라 함.

그러한 함수 f가 존재할 때, 함수열 (f_n)은 A_0 에서 수렴 or (f_n)은 A_0 에서 점별수렴.

- 균등수렴

(f_n)을 $A \subseteq \mathbb{R}$ 에서 $\mathbb{R}$로의 함수열.

각 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $n \geq K(\varepsilon)$ 이면 모든 $x \in A_0$에 대해

$|f_n(x) - f(\varepsilon)| < \varepsilon$ 이 되는 자연수 $K(\varepsilon)$ 이 존재하면 (f_n)은 $A_0 \subseteq A$ 에서

함수 $f: A_0 \to \mathbb{R}$ 로 균등수렴.

때때로 A_0 에서 $f_n \rightrightarrows f$ or $x \in A_0$에 대해 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ 로 씀.

Thm) $A \subseteq \mathbb{R}$ 에 대해 함수열 $f_n : A \to \mathbb{R}$ 이 A에서 f로 균등수렴하기 위한

필충 조건은

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\, |f_n(x) - f(x)| \mid x \in A \,\} = 0$$

인 것이다.

2002 Pre Test Solv

Analysis

8)

함수 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$가 연속일 때, 리만적분의 정의를 이용하여 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$가 존재함을 보이시오.

(pf 1) f는 유계, 폐구간에서 연속이므로 균등연속.

즉 $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ s.t $\begin{cases} |x-y|<\delta \\ x,y\in[0,1] \end{cases} \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

또 아르키메데스 원리에 의해 $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t $\frac{1}{N}<\delta$, $n\ge N$ 인

N에 대하여 $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1\}$ 을 생각하자.

f는 유계, 폐구간 I_k 에서 연속이므로 $M(f,I_k)=f(x_k^M)$, $m(f,I_k)=f(x_k^m)$

을 만족하는 $x_k^M, x_k^m\in I_k$ 가 존재.

따라서 $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\{M(f,I_k)-m(f,I_k)\}\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k^M)-f(x_k^m)\}$

$<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon=\varepsilon$ 이 성립.

또한 f는 유계, 폐구간에서 연속이므로 리만적분 가능.

그러면 $\begin{cases} L(f,P_n)\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\le U(f,P_n) \\ L(f,P_n)\le \underline{\int_0^1} f\,dx=\int_0^1 f\,dx=\overline{\int_0^1} f\,dx\le U(f,P_n) \end{cases}$

이므로 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})-\int_0^1 f\,dx\right|\le U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$

이 성립.

아니면,

(pf 2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 는 연속이므로 리만적분가능하다.

$[0,1]$ 의 n 등분할을 P_n 이라 하자.

$k=1,2,\cdots,n$ 에 대해 f는 연속이므로

$M_k=\sup\{f(x)\mid x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\}$

$m_k=\inf\{f(x)\mid x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\}$

을 만족하는 M_k, m_k 가 존재한다.

그러면 $m_k\le f(\frac{k}{n})\le M_k$ 가 성립한다.

따라서 $L(f,P_n)\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\le U(f,P_n)$

가 성립.

f는 $[0,1]$ 에서 리만적분 가능하므로 $\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\int_0^1 f\,dx$ 이 성립

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f\,dx$ 가 성립.

2002 Pre Test Solv

91 **LA**

V와 W가 n차원 실벡터 공간이라 하자.
선형사상 $L: V \to W$에 대하여 $\ker L = \{0\}$이면 L은
동형사상 (isomorphism)임을 보이시오.

(pf) L은 선형사상이므로 '전단사'임을 보이면 충분하다.

(I) L: 단사

$u, v \in V$ 에 대해 $L(u) = L(v)$ 라 하면

L은 선형사상이므로 $L(u-v) = 0$ 이 성립.

따라서 $u-v \in \ker L = \{0\}$ 이다. 그러므로 $u = v$ 이다.

(II) L: 전사

$\ker L = \{0\}$ 이므로 $\dim(\ker L) = 0$ 이다.

차원정리에 의하여

$$\dim(\ker L) + \dim(\text{range } L) = \dim V = n$$

이므로 $\dim(\text{range } L) = n$ 이 성립.

$\text{range } L$ 은 W의 부분공간이고 W와 차원이 같으므로

$\text{range } L = W$ 이 성립한다. ∎

Thm) $T: V \to W$가 n차원 벡터공간 V에서 벡터공간 W로의 선형변환이면

$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = n$ 이 성립.

2002 Pre Test Solv

10) A A

체(field) F위의 기약 다항식(irreducible polynomial)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[x]$$

(단, $a_n \neq 0$)에 대하여 $f(x)$의 한 개의 근(root)을 포함하는 F의 확대체(extension field)가 존재함을 보이시오.

pf) $f(x)$는 $F[x]$에서 기약다항식이므로 $F[x]/\langle f(x)\rangle$는 체

F는 $F' = \{a + \langle f(x)\rangle \mid a \in F\}$와 환동형이고

$F[x]/\langle f(x)\rangle$는 F'을 포함하므로

$F[x]/\langle f(x)\rangle$는 F를 포함하는 확대체로 생각할 수 있다.

그러면 $f(x + \langle f(x)\rangle) = (a_n + \langle f(x)\rangle)(x + \langle f(x)\rangle)^n + \cdots$

$+ (a_1 + \langle f(x)\rangle)(x + \langle f(x)\rangle) + (a_0 + \langle f(x)\rangle)$

$= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 + \langle f(x)\rangle$

$= \langle f(x)\rangle$

즉, $F[x]/\langle f(x)\rangle$는 $f(x)$의 근 $x + \langle f(x)\rangle$를 포함하는 F의 확대체!

Thm) 체 F에 대하여 $p(x) \in F[x]$는 상수가 아닌 다항식이라 하자.

그러면 다음은 서로 동치이다.

① $p(x)$는 $F[x]$에서 기약이다.

② $F[x]/\langle p(x)\rangle$는 체이다.

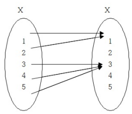
2002 Pre Test Solv

11)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$이고,

$$\mathfrak{I} = \{X, \varnothing, \{1, 2\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 4\}\}$$

이라 하자. 함수 $f : X \to X$를 아래와 같이 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) $f : (X, \mathfrak{I}) \to (X, 2^X)$가 연속임을 보이시오.

(2) $(X, \mathfrak{I})$에서 $\{2\}$와 $\{4\}$의 폐포(closure)를 각각 구하시오.

(3) 집합 $\{h \mid h : (X, \mathfrak{I}) \to (X, 2^X)$는 연속, $h(2) = 1, h(4) = 3\}$의 원소의 개수를 구하고, 그 이유를 설명하시오.

(pb) (1) 2^X 의 기저의 원소 $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ 의 역상이 열린집합임을 보이면 충분하다.

$f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\} \in \mathfrak{I}$

$f^{-1}(\{2\}) = f^{-1}(\{4\}) = f^{-1}(\{5\}) = \emptyset \in \mathfrak{I}$

$f^{-1}(\{3\}) = \{3, 4, 5\} \in \mathfrak{I}$

이므로 f는 연속이다. ∎

(2) 모든 폐집합을 구해보면 다음과 같다.

$\emptyset$, X, $\{3,4,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{3,5\}$, $\{1,3,5\}$

따라서 폐포는 $\overline{\{2\}} = X \cap \{1,2\} \cap \{1,2,3,5\} = \{1,2\}$

$\overline{\{4\}} = X \cap \{3,4,5\} \cap \{1,3,4,5\} = \{3,4,5\}$ 이다. ∎

(3) $A = \{h \mid h : (X, \mathfrak{I}) \to (X, 2^X)$ 는 연속, $h(2)=1$, $h(4)=3\}$ $h \in A$ 라 하자.

h는 연속이고 공역은 이산위상이므로

$h(\{1,2\}) = h(\overline{\{2\}}) \subset \overline{h(\{2\})} = \overline{\{h(2)\}} = \overline{\{1\}} = \{1\}$

$h(\{3,4,5\}) = h(\overline{\{4\}}) = \overline{h(\{4\})} = \overline{\{h(4)\}} = \overline{\{3\}} = \{3\}$

이 성립한다.

그러면 $h = f$ 이므로 $A = \{f\}$ 이다.

따라서 원소의 개수는 1 이다.

2002 Pre Test Solv

12)

Diff Geo

곡선 $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$을

$$\alpha(t) = (2t,\, t^2,\, \frac{1}{3}t^3)$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $t=0$에서 곡선 α의 비꼬임(torsion)을 구하시오.

(2) $\Phi = y\,dx + z\,dy + xy\,dz$일 때, $\int_\alpha \Phi$를 계산하시오.

(pf) (1) $\alpha'(t) = (2, 2t, t^2) \Rightarrow \alpha'(0) = (2, 0, 0)$

$\alpha''(t) = (0, 2, 2t) \Rightarrow \alpha''(0) = (0, 2, 0)$

$\alpha'''(t) = (0, 0, 2) \Rightarrow \alpha'''(0) = (0, 0, 2)$

$$\therefore\ \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\| \alpha' \times \alpha'' \|^2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \ \blacksquare$$

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 4)$$

$$\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = (0,0,4)\cdot(0,0,2) = 8$$

$\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ 이니까

$(2t, t^2, \frac{1}{3}t^3)$ diff

$$(2)\ \int_{-1}^{1} (y, z, xy)\cdot(2, 2t, t^2)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (2\underbrace{y}_{t^2} + 2\underbrace{z}_{\frac{1}{3}t^3}t + \underbrace{xy}_{2t\cdot t^2}t^2)\, dt \quad \text{대입}$$

$$= \int_{-1}^{1} (2t^2 + \frac{2}{3}t^4 + 2t^5)\, dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{3}t^6 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}(1-(-1)) + \frac{2}{15}(1-(-1)) + \cancel{\frac{1}{3}(1-1)}$$

$$= \frac{4^{\times 5}}{3_{\times 5}} + \frac{4}{15} = \frac{20+4}{\cancel{15}_{5}} = \frac{\cancel{24}\,8}{5} = \frac{8}{5} \ \blacksquare$$

* α가 정칙곡선(regular curve)일 때 다음이 성립.

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\| \alpha' \times \alpha'' \|^2}$$

13)

PAS

동전 2개를 던질 때 앞면이 나오는 개수를 확률 변수 X라 하고, 확률 변수 Y를

$$Y=\begin{cases}0, & X=0, 2\\ 1, & X=1\end{cases}$$

으로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 다음 표를 완성하시오.

X의 확률분포

X	$P(X)$
0	
1	
2	
합	1

Y의 확률분포

Y	$P(Y)$
0	
1	
합	1

X와 Y의 결합 확률분포

X \ Y	0	1	합
0			
1			
2			
합			1

(2) X와 Y의 공분산(covariance) σ_{XY}를 구하시오.

(3) X와 Y의 독립성 여부를 판별하시오.

pf) (1)

X의 확률분포

X	$P(X)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
합	1

Y의 확률분포

Y	$P(Y)$
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$
합	1

X와 Y의 결합 확률분포

X \ Y	0	1	합
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	1/2
2	1/4	0	1/4
합	1/2	1/2	1

(2) $\mu_X = 1.$ $\mu_Y = \frac{1}{2}.$ $\mu_{XY} = \frac{1}{2}$

$\sigma_{XY} = \mu_{XY} - \mu_X\mu_Y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ■

* PAS 풀이의 결합확률분포 참조.

공부할 것

14)

크기가 $100KB$, $150KB$, $200KB$, $250KB$, $300KB$인 다섯 개의 파일을 용량이 각각 $1440KB$인 같은 색의 구별이 안되는 세 장의 플로피 디스켓에 저장하려고 한다. 디스켓 세 장 모두를 사용하여 다섯 개의 파일을 저장하는 방법의 수를 구하시오. (단, 디스켓에 저장하는 파일의 순서는 생각하지 않는다.)

(pf) 디스켓을 모두 사용해야 하므로 5개의 파일을 디스켓에 넣는 방법은 (3,1,1) (2,2,1) 두 가지 경우가 나온다.

(i) (3,1,1) 인 경우

3개 파일을 선택하면 나머지 두개는 자동적으로 두 개의 디스켓에 저장하면 되므로 $_5C_3$ 이다.

(ii) (2,2,1) 의 경우

5개 중 2개를 선택한 후, 3개 중 두개를 선택하면 하나는 자동으로 마지막 디스켓에 저장하면 됨.

먼저 선택한 두 개와 나중에 선택한 두 개는 같은 경우가 나올 수 있으므로 $_5C_3 \times {_3C_2} \times \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 총 경우의 수는 $_5C_3 + {_5C_2} \times {_3C_2} \times \frac{1}{2} = 25$ 이다.