1. <집합 및 함수>

집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$의 임의의 부분집합 X에 대하여

$$X \sim (x_1, x_2, x_3, x_4)\text{는 } x_i = \begin{cases} 1, & i \in X \\ 0, & i \notin X \end{cases} (i=1, 2, 3, 4)$$

으로 정의한다. $X \sim (1, 1, 0, 1)$인 집합 X를 구하시오. [1995]

(sol) $x_1 = 1$

$x_2 = 1$ $\therefore X = \{1, 2, 4\}$

$x_3 = 0$

$x_4 = 1$

2.

자연수 n에 대하여 집합 $A_n = \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, \infty\right)$일 때,

집합 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$의 여집합 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$을 구하시오. [2009 모의평가]

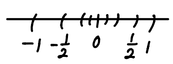
(sol) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$

de Morgan Law

$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

직관적 이해

(*) $= \{0\}$



(pf of (*)) $x \in \mathbb{R}$ 라 하자.

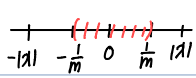
(i) $x = 0$ 인 경우

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x = 0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$\therefore x = 0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

(ii) $x \neq 0$ 인 경우

$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{m} < |x|$ (Archemidian Property)



$\Rightarrow x \notin \left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$

$\therefore x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

(i), (ii) 에 의하여 (*) 이 성립 ∎

3.

정수 전체의 집합을 $\mathbb{Z}$라 하고 모든 자연수 n에 대하여 집합 A_n과 B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \le n\},\ B_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \ge -n\}$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2010]

<보기>

ㄱ. $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \{-1, 0, 1\}$

ㄴ. $\mathbb{Z} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c \cup B_n^c)\right) = \varnothing$

ㄷ. $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \le -1\}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(pf) A_n … $n-2$ $n-1$ n

B_n $-n$ $-n+1$ $-n+2$ …

ㄱ. $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{-n, \cdots, n\}$

$= \{-1, 0, 1\} \cap \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cap \cdots$

$= \{-1, 0, 1\}$

ㄴ. $\mathbb{Z} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c \cup B_n^c)\right)$

$= \mathbb{Z} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n)^c\right)$

$= \mathbb{Z} \cap \left(\overbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{(A_n \cap B_n)}_{\{-n, \cdots, n\}}}^{\mathbb{Z}}\right)^c = \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}^c = \varnothing$

~~ㄷ.~~ $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n)$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty}\{-n-1, -n-2, \cdots\}$

$= \{-2, -3, \cdots\} \cup \{-3, -4, \cdots\} \cup \cdots$

$= \{-2, -3, \cdots\}$ 이므로 거짓.

(pf) ㄱ. $-n$ x n

$A_1 \cap B_1 = x \le 1 \ \& \ x \ge -1 \Rightarrow -1, 0, 1$

$x \le |n|$

$A_2 \cap B_2 = x \le 2 \ \& \ x \ge -2 \Rightarrow -2, -1, 0, 1, 2$

⋮

$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ ㄱ 은 참.

ㄴ. $\mathbb{Z} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n^c \cup B_n^c)\right) = \varnothing$?

↓ de Morgan Law

$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n)^c\right)$ 한번 더 demorgan 쓰기

$|x| > n$ $(x > n, x < -n)$

$-n$ -2 -1 1 2 n → ㄴ 은 참.

ㄷ. $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \le -1\}$

$x \le n - x \ge -n$

$-n$ n

$A_1 - B_1 \Rightarrow x \le 1 - x \ge -1$

$A_2 - B_2 \Rightarrow x \le 2 - x \ge -2$

-1 1 → ㄷ ~~은~~ 참. -1은 포함X -2, -3, …

4.

함수 $f: X\to Y$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 모두 고른 것은? [2011]

〈보기〉

ㄱ. 임의의 $B\subseteq Y$에 대하여 $f(f^{-1}(B))\subseteq B$이다.

ㄴ. 임의의 $A\subseteq X$와 $B\subseteq Y$에 대하여 $f^{-1}(f(A)\cap B)=A\cap f^{-1}(B)$이다.

ㄷ. 임의의 $A\subseteq X$와 $B\subseteq Y$에 대하여 $f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(pf) ㄱ. $y\in f(f^{-1}(B))$ 라 하자.

↓ 상의 정의에 의해.

⇒ $y=f(x)$ 인 $x\in f^{-1}(B)$ 존재

↓ 역상의 정의에 의해

$y=f(x)\in B$

∴ $f(f^{-1}(B))\subset B$

ㄴ. $x\in f^{-1}(f(A)\cap B)$

↓ 역상의 정의에 의해

⇒ $f(x)\in f(A)\cap B$

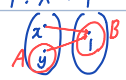
↓ 교집합의 정의에 의해

⇒ $f(x)\in f(A)$, $f(x)\in B$

↓ ? No　　↓ 역상의 정의에 의해

$x\in A$　　$x\in f^{-1}(B)$

$f: X\to Y$



$f^{-1}(f(A)\cap B)$ | $A\cap f^{-1}(B)$

$=f^{-1}(\{1\}\cap\{1\})$ | $=\{y\}\cap\{x,y\}$

$=\{x,y\}$ | $=\{y\}$

ㄷ. (⊂) $y\in f(A\cap f^{-1}(B))$

↓ 상의 정의에 의해

⇒ $y=f(x)$ 인 $x\in A\cap f^{-1}(B)$ 존재.

↓

$x\in A$, $x\in f^{-1}(B)$

↓ 역상의 정의에 의해.

$f(x)\in f(A)$, $f(x)\in B$

⇒ $f(x)\in f(A)\cap B$

$f(x)=y$

$y\in f(A)\cap B$

(⊃) $y\in f(A)\cap B$

⇒ $y\in f(A)$, $y\in B$ ($y=f(x)$) ⇒ $x\in f^{-1}(B)$

↓

$y=f(x)$ 인 $x\in A$ 존재 → 상의 정의에 의해

⇒ $x\in A\cap f^{-1}(B)$

↓ 상을 취하자.

⇒ $y=f(x)\in f(A\cap f^{-1}(B))$

⇒ $y\in f(A\cap f^{-1}(B))$ ■

5. < 동치관계 >

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$와 $A=\{2, 4, 6\}$에 대하여

$$R=\{(a, b) \mid a, b\in A\}\cup\{(x, x) \mid x\in X\}$$

라 하자. 임의의 $x\in X$에 대하여

$$[x]=\{y\in X \mid (x, y)\in R\}$$

라 할 때, 집합 $X/R=\{[x] \mid x\in X\}$의 원소의 개수를 구하시오. [2009]

(pf) $\{(a,b) \mid a,b\in A\} = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,4), (4,6), (4,2), (6,6), (6,4), (6,2)\}$

$\{(x,x) \mid x\in X\} = \{(1,1), (2,2), \cdots, (8,8)\}$

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,4), (4,6), (4,2), (6,6), (6,4), (6,2)\} \cup \{(1,1), (2,2), \cdots, (8,8)\}$

$[1] = \{y\in X \mid (1,y)\in R\} = \{1\}$

$[2] = \{y\in X \mid (2,y)\in R\} = \{2, 4, 6\}$

$[3] = \{y\in X \mid (3,y)\in R\} = \{3\}$

$[4] = \{y\in X \mid (4,y)\in R\} = \{2, 4, 6\}$

$[5] = \{5\}$ $[7] = \{7\}$

$[6] = \{2, 4, 6\}$ $[8] = \{8\}$ 따라서 원소 갯수는 6개 ∎

6.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set) $P(\mathbb{R})$에 대하여 $X=P(\mathbb{R})-\{\varnothing\}$이라 하자. 집합 X에서의 관계(relation) $\sim$을

$$A\sim B \Leftrightarrow A\cap B\neq\varnothing \quad (A, B\in X)$$

[틸다]

로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. 관계 $\sim$은 반사적(reflexive)이다.

ㄴ. 관계 $\sim$은 대칭적(symmetric)이다.

ㄷ. 관계 $\sim$은 추이적(transitive)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(pf) O 반사적 : $\forall A\in X,\ A\sim A$

O 대칭적 : $A\sim B \Rightarrow B\sim A$

X 추이적 : $\underbrace{A\sim B}_{A\cap B\neq\varnothing}, \underbrace{B\sim C}_{B\cap C\neq\varnothing} \Rightarrow A\sim C$

$A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$ $C=\{3,4\}$

$\therefore A\sim C$ X ∎

7.

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 할 때, 가산집합(countable set)만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$

ㄴ. $\{F \mid F$는 $\mathbb{Q}$의 유한부분집합$\}$

ㄷ. 상집합(quotient set) $\mathbb{R}/\sim$
(단, $\sim$은 $\mathbb{R}$에서 $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$로 정의된 동치관계(equivalence relation)이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

(pf) ~~ㄱ~~. $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ 무리수 는 비가산이므로 X

ㄴ. $\mathcal{F} = \{F \mid F(\subset\mathbb{Q}) : \text{유부}\}$
[Curly F]

$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 에 대하여 $A_n \overset{let}{=} \{A\subset\mathbb{Q} \mid |A|=n\} \subset \mathcal{F}$

$\Rightarrow \mathcal{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

$\begin{pmatrix} (\supset)\,! \\ (\subset)\ B\in\mathcal{F} \Rightarrow |B| = m \text{ 이라 하면 } B\in A_m \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \end{pmatrix}$

A_n 이 가산임을 보이자. 먼저 $A_0 = \{\emptyset\}$: 가산!

$n\in\mathbb{N}$ 인 경우 : 함수로 생각

$f : A_n \to \overbrace{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}}^{n\text{th}}$

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \mapsto (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$\{1, 2\} \mapsto (1, 2)$ 이므로 순서 부여
$\{2, 1\}$ $(1, 2)$

$f(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) = f(\{b_1, b_2, \cdots, b_n\})$

$\Rightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n)$

$\Rightarrow a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$

$\Rightarrow \{a_1, \cdots, a_n\} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ $\therefore f$: 단사

$\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}$: 가산이므로 가산보다 작거나 같은 A_n 은 가산.

~~ㄷ~~. $[x] = \{y\in\mathbb{R} \mid \underbrace{y\sim x}_{\exists\,(y-x=r\in\mathbb{Q})}\}$

$\cap\cup$

$= \{x+r \mid r\in\mathbb{Q}\} = x+\mathbb{Q}$: 가산!

$x+r-x = r\in\mathbb{Q} \Rightarrow \{x+r \mid r\in\mathbb{Q}\}\subset[x]$

서로 다른 것들만 모아두자는 뜻

$\mathbb{R}/\sim = \{[x] \mid x\in\mathbb{R}\} = \{[x_i] \mid i\in\underset{\exists}{I}\}$ s.t $i\neq j \Rightarrow [x_i]\cap[x_j]=\emptyset$

$[1] = [\frac{1}{2}] = [-\frac{7}{3}]$ 관계가 있으면 동치류

$1-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $1 \sim \frac{1}{2}$

$\underset{\text{비가산}}{\mathbb{R}} = \bigcup_{[x]\in\mathbb{R}/\sim} [x] = \underbrace{\bigcup_{i\in I}}_{\text{가산}} \underbrace{[x_i]}_{\text{가산}}$ (*)

I : 가산이라 가정하면 (*) 는 가산집합의 가산 합집합이므로 가산!

$\therefore$ I : 비가산 $\therefore$ $\mathbb{R}/\sim$: 비가산

8. <근방>

집합 $X=\{a, b, c, d\}$에 대하여 $(X, \mathfrak{T})$를 위상공간이라 하고, 임의의 $x\in X$에 대하여

$$N(x)=\{V\subseteq X \mid V\text{는 } (X, \mathfrak{T})\text{에서 } x\text{의 근방}\}$$

이라 할 때, 다음이 성립한다고 하자.

$$N(a)=\{V\subseteq X \mid \{a, c\}\subseteq V\}$$
$$N(b)=\{V\subseteq X \mid \{b, c\}\subseteq V\}$$
$$N(c)=\{V\subseteq X \mid \{c\}\subseteq V\}$$
$$N(d)=\{X\}$$

단, 'V는 $(X, \mathfrak{T})$에서 x의 근방'이란 $x\in U\subseteq V$를 만족시키는 $U\in\mathfrak{T}$가 존재함을 의미한다. 이 때, $\mathfrak{T}$를 구하시오. [2009]

(pf) $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$

$\{a,c\} \in N(a)$ 이므로 $\{a,c\}$는 a의 근방이다.

$a \in G \subset \{a,c\}$ 인 $G \in \mathfrak{T}$ 존재.

equal 이지만 문제에 근방 모양 맞춰주려고

$\Rightarrow$ $G = \{a\}$ or $G = \{a,c\}$

$G = \{a\}$ 라 가정하면 $a \in \underset{\in\mathfrak{T}}{G} \subset \{a\}$ 이므로 $\{a\}$: a의 근방

라 해서 모순 발생

$\therefore$ $\{a\} \in N(a)$

$\Rightarrow$ $\{a,c\} \subset \{a\}$ (→←)

마찬가지로 b를 포함하는 열린집합은 $\{b,c\}$ 뿐.

$d \in H$ 인 $H \in \mathfrak{T}$ 고려.

$\Rightarrow$ $d \in \underset{\in\mathfrak{T}}{H} \subset H$. 즉, H : d의 근방

$\Rightarrow$ $H \in N(d) = \{X\}$ $\therefore$ $H = X$

즉, d 포함 열린집합은 X 뿐!

$\{a,b\} \in \mathfrak{T}$ 가정

$\Rightarrow$ $\{a\} = \{a,b\} \cap \{a,c\} \in \mathfrak{T}$ (→←)

$\therefore$ $\{a,b\} \notin \mathfrak{T}$

$\emptyset$ ~~$\{a\}$~~ ~~$\{b\}$~~ $\{c\}$ ~~$\{d\}$~~ ~~$\{a,b\}$~~ $\{a,c\}$ ~~$\{a,d\}$~~ $\{b,c\}$ ~~$\{b,d\}$~~ ~~$\{c,d\}$~~

$\{a,b,c\}$ ~~$\{a,b,d\}$~~ ~~$\{a,c,d\}$~~ ~~$\{b,c,d\}$~~ X

$\therefore$ $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$

9. (내부, 외부, 폐포, 경계)

위상 공간 X의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 닫힌집합(closed set)들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. A와 B가 위상공간 X의 부분집합일 때, 옳지 않은 것은? [1993]

① $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ ② $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
③ $A-\overline{B}\subset\overline{A-B}$ ④ $\overline{\varnothing}=\varnothing$

· $\overline{A}$: 폐집합

. A : 폐집합 ⟺ $\overline{A}=A$

① $\overline{A}$: 폐집합이므로 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

③ $A-\overline{B}\subset A-B\subset\overline{A-B}$

$(B\subset\overline{B})$

B를 포함하므로

② $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{Q}^c$

$\overline{A\cap B}=\overline{\varnothing}=\varnothing$

④ $\overline{\varnothing}=\varnothing$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$

$\varnothing\subset\varnothing$ 폐집합

10.

위상공간 X에서 부분집합 A의 내부(interior)와 폐포(closure)를 각각 $\text{int}(A)$, $\overline{A}$로 나타낼 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012]

<보기>

ㄱ. $\text{int}(X-A)=X-\overline{A}$
ㄴ. $\overline{\text{int}(\overline{A})}=\overline{A}$
ㄷ. $X-\overline{A\cap B}=(X-\overline{A})\cup(X-\overline{B})$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

(pf) Thm) $(X,\mathfrak{I})$, $A\subset X$

$X=\underbrace{\text{int}(A)\cup b(A)}_{=\overline{A}}\cup\text{ext}(A)$ 서로 소라는 뜻

ㄱ. $\text{int}(X-A)=\text{ext}(A)$

$=X-\overline{A}$

ㄷ. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{Q}^c$

$\cdot\ X-\overline{A\cap B}=\mathbb{R}-\overline{\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}^c}$

$=\mathbb{R}-\overline{\varnothing}=\mathbb{R}$ ≠

ㄴ. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$, $A=\{1\}$

보통위상에서 한점 집합에서 interior pt는 $\varnothing$

$\overline{\text{int}(\overline{A})}=\overline{\text{int}\{1\}}=\overline{\varnothing}=\varnothing$

$\cdot\ (X-\overline{A})\cup(X-\overline{B})=(\mathbb{R}-\overline{\mathbb{Q}})\cup(\mathbb{R}-\overline{\mathbb{Q}^c})=\varnothing$ ($\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}^c}=\mathbb{R}$)

A는 한점집합 $\{1\}$이므로 폐포는 자기 자신 폐집합

≠ $\overline{A}=\overline{\{1\}}=\{1\}$

11.

위상공간 X의 부분집합 A의 내부(interior)와 경계(boundary)를 각각 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Bd}(A)$라고 할 때, 다음은 희수가 $\mathrm{Int}(A) = A - \mathrm{Bd}(A)$ 임을 증명한 답안이다.

> (경우 1) A가 열린 집합(open set)일 때:
> 집합 A의 외부(exterior)를 $\mathrm{Ext}(A)$라 하면
> $\mathrm{Int}(A) = A$이므로 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이다.
> 따라서 $A - \mathrm{Bd}(A) = A = \mathrm{Int}(A)$이다.
>
> (경우 2) A가 닫힌 집합(closed set)일 때:
> 이 경우 집합 A의 폐포(closure) $\overline{A}$는 A와 같으므로
> $A = \overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Bd}(A)$이다. 그런데 일반적으로 집합 B, C에 대하여 $D = B \cup C$이면 $B = D - C$이므로
> $\mathrm{Int}(A) = A - \mathrm{Bd}(A)$이다.

희수의 답안을 보고 옳게 말한 학생을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2009 모의평가]

<보기>

(현정) 희수가 맞게 풀었네.
(기태) 위와 같이 (경우 1)과 (경우 2)로 나누어 증명하는 것은 옳지 않아.
(수연) '$D = B \cup C$이면 $B = D - C$'는 일반적으로 성립하지 않아.
(영호) $\mathrm{Int}(A) = A$인 경우는 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이 아니라 $\mathrm{Bd}(A) = \varnothing$이야.

① 현정 ② 기태, 수연 ③ 기태, 영호
④ 수연, 영호 ⑤ 기태, 수연, 영호

12.

집합 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$상에 다음과 같은 위상이 주어졌다.

$$\mathfrak{I} = \{X, \varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_5\}\}$$

이 때, 집합 $\{x_2\}$의 폐포(closure)를 구하시오. [1998]

집합 $X=\{a, b, c, d, e\}$위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$가 다음과 같이 주어졌다.

$\mathfrak{I}=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}\}$

이 때, 집합 $A=\{b, c\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [2000]

14

실수 전체 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set)의 부분집합

$$\mathscr{F}=\{\mathbb{R}-\{p\} \mid p\in\mathbb{R}\}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [2004]

(1) $\mathscr{F}$를 부분기저(subbase)로 갖는 위상(topology) $\mathfrak{I}$를 구하시오.

(2) 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$에서 자연수 전체 집합 N의 도집합(derived set)을 구하시오.

$\mathbb{R}$을 실수 집합이라 하고 $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$위에서의 여가산 위상(cocountable topology)이라 하자. 즉,

$$\mathfrak{I} = \{ U \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - U\text{는 가산집합(countable set)} \} \cup \{\varnothing\}$$

이다. $\mathbb{Q}$를 유리수 집합이라 하고 $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$를 무리수 집합이라 할 때 A의 내부(interior), 유도집합(derived set), 폐포(closure), 경계(boundary)를 증명 없이 각각 구하시오. [2008]