31.

$V$와 $W$가 $n$차원 실벡터 공간이라 하자.
선형사상 $L: V \to W$에 대하여 $\ker L = \{0\}$이면 $L$은 동형사상 (isomorphism)임을 보이시오. [2002]

(Sol) L 은 선형사상이므로 전단사임을 보이면 충분하다.

(I) L : 단사

$u, v \in V$ 에 대하여 $L(u) = L(v)$ 라 하면 L은 선형사상이므로 $L(u-v) = 0$ 이 성립.

따라서 $u - v \in \ker L = \{0\}$ 이다. 그러므로 $u = v$ 이다.

(II) L : 전사

$\ker L = \{0\}$ 이므로 $\dim(\ker L) = 0$ 이다. 차원정리에 의하여 $\overset{0}{\overset{\uparrow}{\dim(\ker(L))}} + \dim(\text{range}(L)) = n$ 이므로

$\dim(\text{range}(L)) = n$ 이 성립한다. range L 은 W 의 부분공간이고 W 와 차원이 같으므로 range L = W 이 성립.

⊛ $T: V \to W$ 가 n 차원 벡터공간 V 에서 W 로의 선형변환이면 $\text{rank}(T) + \text{null}(T) = n$ 이 성립한다.

32.

실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 서로 다른 벡터 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$로 생성되는 벡터공간

$$V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

ㄱ. 벡터공간 $V$와 $\mathbb{R}^n$이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 $n$이 존재한다. T

ㄴ. 집합 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 $V$의 기저(basis)인 벡터 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$가 존재한다. F

ㄷ. $\dim V = 2$인 벡터 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$가 존재한다. T

(Sol) ㄱ. True ㄴ. ~~True~~ False ㄷ. ~~False~~ True

ㄱ. $\dim V = n$ 이고 S 를 V 의 기저라 할 때, $T: V \to \mathbb{R}^n$ 을 $T(v) = [v]_S$ 라 정의하면 T 는 동형사상이 된다.

ㄴ. $\dim V \le \dim \mathbb{R}^4 = 4$ 이므로 V 에 대한 임의의 기저의 원소의 개수는 4개 이하.

ㄷ. (1,0,0) (2,0,0,0) (3,0,0,0) (4,0,0,0) (0,1,0,0)

## 33. < 고윳값, 고유벡터 >

실벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 에서의 벡터 $a$에 대하여 선형사상

$$T(p) = a \times p + (p \cdot a)a \quad (p \in \mathbb{R}^3)$$

가 정의되었다. 벡터 $a$의 크기가 $\sqrt{2}$일 때 $T$의 고유치를 구하고, $T$의 고유치는 그것뿐임을 보이시오. 단, $u \times v$와 $u \cdot v$는 각각 벡터 $u, v$의 외적(cross product)과 내적(inner product)을 나타낸다. [1997]

(sol) claim 1) $a$와 수직인 $p$는 고유벡터가 아니다.

(귀류) $a$와 수직인 고유벡터 $p$가 존재한다 가정.

그러면 $a \times p = a \times p + (p \cdot a) \cdot a = T(p) = \lambda p$ - $(*)$ 이 성립한다.

양변의 오른쪽에 $p$의 내적을 취하면 $\lambda p \cdot p = (a \times p) \cdot p$

$\Rightarrow \lambda \|p\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad (\because \|p\|^2 \neq 0)$ 이 성립한다.

그러면 $(*)$ 에 의하여 $a \times p = 0$ 이다.

$\Rightarrow 0 = \|0\| = \|a \times p\| = \|a\| \cdot \|p\| \cdot \sin\theta = \sqrt{2}\|p\|$

$\Rightarrow \|p\| = 0 \Rightarrow p = 0$

고유벡터 $p$는 $0$일 수 없으므로 모순이다.

claim 2) 2는 $T$의 고윳값이다.

$a$의 크기는 $\sqrt{2}$ 이므로 $a \neq 0$ 이므로 $T(a) = a \times a + (a \cdot a)a = 2a$ 이므로 2는 $T$의 고윳값이다.

claim 3) 2는 $T$의 유일한 고윳값이다.

$\lambda$는 $T$의 고윳값이고 $p$는 $\lambda$에 대응하는 고유벡터라 하자.

$\lambda p = T(p) = a \times p + (p \cdot a)a$

양변의 오른쪽에 $a$의 내적을 취하면

$(\lambda p) \cdot a = (a \times p + (p \cdot a)a) \cdot a \Rightarrow \lambda(p \cdot a) = 2(p \cdot a)$ 가 성립하고

Claim 1 에 의하여 $p \cdot a \neq 0$ 이므로 $\lambda = 2$ 이다.

34.

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 대하여 선형사상 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$을

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z,\ y,\ x - 2z)$$

로 정의하자. $T$의 상(image) $\text{im}(T)$와 $T$의 핵(kernel) $\ker(T)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. $\text{im}(T)$의 차원은 1이다.

ㄴ. 벡터 $(1, 0, 0)$의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영 (orthogonal projection)은 $\frac{2}{5}(2, 0, 1)$이다.

ㄷ. 벡터 $(x, y, z)$의 $\ker(T)$ 위로의 직교정사영을 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 행렬 $A$의 고유치(eigenvalue, (characteristic value)를 모두 더한 값은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(sol) ㄱ. False ㄴ. True ㄷ. True

ㄱ 거짓인 이유 :

$\ker T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0) \}$

$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y - 2z,\ y,\ x - 2z) = (0, 0, 0) \} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \{ (2t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ put $z = t$

$\Rightarrow y = 0,\ x = 2t$

$\dim(\text{Im}(T)) = \dim \mathbb{R}^3 - \underset{\downarrow 1}{\dim(\ker T)} = 2$

ㄴ 참인 이유 :

$\ker(T)$ 의 기저는 $\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1) \}$ 이므로

$\text{proj}_{\ker(T)}(1, 0, 0) = \left( (1, 0, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1) \right) \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$

$= \frac{2}{5}(2, 0, 1)$

ㄷ 참인 이유 :

(pf 1) $\ker(T)$ 에서 0이 아닌 모든 벡터는 고유치 1을, $\ker(T)^{\perp}$ 에서 0이 아닌 모든 벡터는 0을 가지고 그 외 모든 벡터는 고유치를 갖지 않는다. 따라서 모든 고유치를 더한 값은 1이다.

35.

다음 행렬의 고유치(eigen value)와 고유공간(eigenspace)을 구하시오. [2004]

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(sol) $\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ \lambda=1, \ \lambda=2$

$\lambda=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0&-1&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&1\\0&+1&0\\0&0&+1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$x=t, \ y=0, \ z=0 \quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

put $y=t, \ z=s$ $\quad \begin{bmatrix}t-s\\t\\s\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$x-t+z=0 \quad x=t-s$

$\Rightarrow E_{\lambda=1} = \left\{\begin{bmatrix}t\\0\\0\end{bmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}, \quad E_{\lambda=2} = \left\{\begin{bmatrix}t-s\\t\\s\end{bmatrix} \middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}$ $\blacksquare$

36.

$3\times3$행렬 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$에 대하여, $A^{10}$의 고윳값(eigen values)과 고유벡터(eigenvector)를 모두 구하시오. [2000]

(sol) $\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}$

$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$\begin{matrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{matrix}$

$\Leftrightarrow \ \lambda=1$ or $\lambda=2$ or $\lambda=3$

$\lambda=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0$

$x_3=0$, $x_2=0$, $x_1=t \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_1-x_3=0 \Rightarrow x_1=0$

$x_2=t, \ x_3=0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\lambda=3 \Rightarrow \begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$2x_1-x_3=0 \Rightarrow 2x_1=t$

$x_2=0, \quad x_1=\frac{1}{2}t$

$x_3=t$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

37.

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

(1) $A$의 고유다항식(characteristic polynomial)은 $x^3-6x^2-9x+54$이다.

(2) $A^2$의 모든 고윳값(eigenvalue, characteristic value)들의 합은 $36$이다.

(sol) (1) $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 0 \\ -7 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-3) + 2(-7\lambda+21)$

$= (\lambda^2-3\lambda-4)(\lambda-3) - 14\lambda + 42$

$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 4\lambda + 12 - 14\lambda + 42$

$= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda + 54$ → (1)은 참.

(2) $\cancel{A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

$\cancel{= \begin{pmatrix} 1+14 & -2+8 & 0 \\ -7+28 & 14+16 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 0 \\ 21 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$

그냥 A 고윳값 구해서 제곱 하면 된다.

$(\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-3) + 2(-7\lambda+21) = 0$

$-14(\lambda-3) = 0$

$(\lambda-3)(\underbrace{\lambda^2-3\lambda-4-14}) = 0$

$(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda-18) = 0$

$(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda+3) = 0$

$\lambda = \pm 3,\quad \lambda = 6$

⇒ $A^2$ 의 고윳값 $9,\ 36$ → 합이 45 이므로 (2)는 거짓.

38.

두 행렬 $A, B$가 유사(similar)행렬이고, $A$의 고유치(eigen value)가 $1, 2, 3$이면 행렬 $B$의 고유치는? [1994]

㊉ Def) $A, B$가 정사각 행렬일 때 $B = P^{-1}AP$를 만족하는 가역행렬 $P$가 존재하면 $B$는 $A$와 닮음 (similar) 이다.

(sol) $A, B$는 유사행렬이므로 $A = PBP^{-1}$인 가역행렬 $P$가 존재한다.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - PBP^{-1}) \\ &= \det(P(\lambda I - B)P^{-1}) \\ &= \cancel{\det P} \cdot \det(\lambda I - B) \cdot \cancel{\det(P^{-1})} \\ &= \det(\lambda I - B) \end{aligned}$$

$P$는 가역이므로 $\det(P) \neq 0$ $\therefore \det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

고유치는 특성방정식의 해이고 $A, B$의 특성 방정식이 같으므로 $A, B$는 같은 고유치를 가짐.

39.

각 성분이 실수인 $4 \times 4$ 행렬 $A$의 고윳값(eigenvalue)이 $1, -1, 2, 4$일 때, <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2009]

<보기>

ㄱ. $A$의 행렬식(determinant)은 $-8$이다. T
ㄴ. $A$의 자취(trace)는 $6$이다. T
ㄷ. $A$는 대칭행렬(symmetric matrix)이다. F
ㄹ. $A$의 계수(rank)는 $4$이다. T

ㄹ. 참

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(P^{-1}AP) = \text{rank}(D) = 4$$

(sol) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ㄱ. 참

$$\det(A) = \det(P^{-1}AP) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -8$$

ㄴ. 참

$$tr(A) = tr(P^{-1}AP) = tr(D) = 1 - 1 + 2 + 4 = 6$$

ㄷ. 거짓

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 는 고윳값이 $1, -1, 2, 4$ 인데 대칭행렬이 아니다.

40.

$P^{-1}AP$가 대각행렬이 되도록 적당한 정칙행렬 $P$를 사용하여,

행렬 $A=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{pmatrix}$을 대각화하시오. [1999]

(sol) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda+5 & -9\\ 6 & \lambda-10\end{vmatrix}$

$= (\lambda+5)(\lambda-10) - (-9)\times 6$

$= \lambda^2 - 5\lambda - 50 + 54 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

$= (\lambda-4)(\lambda-1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 4, \quad \lambda = 1$

$\lambda = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix}9 & -9\\ 6 & -6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \overset{\text{e vector}}{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}$

$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix}6 & -9\\ 6 & -9\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2x_1 = 3x_2\\ \frac{2}{3}x_1 = x_2\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}t\\ \frac{2}{3}t\end{bmatrix} = \overset{\text{e vector}}{\begin{bmatrix}1\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}}$

diagonalize $\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-\frac{10}{3}+6 & \frac{18}{3}-10\\ 5-6 & -9+10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{8}{3} & \cancel{\frac{-12}{3}}\ -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\frac{8}{3}-4 & \frac{8}{3}-\frac{8}{3}\\ -1+1 & -1+\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-4}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$