1. <복소수>

$z_1 = 2i$, $z_2 = 1+i$일 때, 두 복소수의 몫 $\frac{z_1}{z_2}$의 편각은? [1990]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π

(sol) $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg\, z_2$

$= Arg(2i) - Arg(1+i)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ //

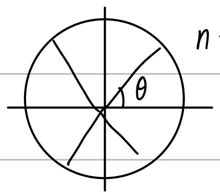
$2(0,1)$ $(1,1) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2.

방정식 $z^n = 1$의 모든 해를 극형식으로 나타낼 때 편각θ들의 합을 S_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$의 값은? (단, $0 \le \theta < 2\pi$) [1992]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π

(sol) $z^n = 1 = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ $\begin{cases} r=1 \\ n\theta = \cancel{2\pi} + 2k\pi \quad (k=0, \pm1, \cdots) \end{cases}$



n 등분 $\Sigma\theta = S_n$

$(1,0) \Rightarrow \cancel{2\pi}$ 0 이후 $\Rightarrow$ $\begin{cases} r=1 \\ \theta = \cancel{\frac{2\pi}{n}} + \frac{2k}{n}\pi \quad (k=0, \pm1, \cdots) \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}\pi = S_n = 2\pi\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 2\pi\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow$ 틀림 2π

$\begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{2k}{n}\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2 \cdots) \end{cases}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}} = (n+1)\pi$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n}\pi = \pi$

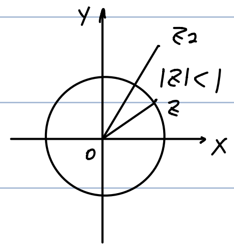
3.

복소수 z가 $0<|z|<1$을 만족할 때, 복소평면 위의 무한 개의 점 $z, z^2, z^3, z^4, \cdots$를 차례로 연결해서 만들어지는 선분들의 길이의 합은? [1993]

① $\dfrac{|z|}{1-|z|}$ ② $\left|\dfrac{z}{1-z}\right|$

③ $\dfrac{|1-z^4|}{1-|z|}$ ④ $\dfrac{|z-z^2|}{1-|z|}$

(sol)



$z = re^{i\theta}$ 라 두면 $|z^{n+1} - z^n| = |z^n||z-1|$

$= |z-1|\cdot r^n \underbrace{e^{in\theta}}_{1} = r^n|z-1|$

따라서 선분들 길이의 합은 $\dfrac{r}{1-r}|z-1|$

$= |z-1|\dfrac{|z|}{1-|z|} = \dfrac{|z-z^2|}{1-|z|}$

4. 몰라서 풀이 봄

$w=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$ $(i=\sqrt{-1})$일 때,

$$\frac{1}{|w+2w^2+3w^3+\cdots+18w^{18}|}$$

의 값은? [1994]

① $\dfrac{1}{9}\sin 10^\circ$ ② $\dfrac{1}{18}\sin 20^\circ$

③ $\dfrac{2}{9}\sin 10^\circ$ ④ $\dfrac{1}{9}\sin 20^\circ$

(sol) $w = e^{i20^\circ}$ ⇒ $w^{18} = (e^{i20^\circ})^{18} = e^{i360^\circ}$

$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

⇒ $w^{18} = 1$, $w \neq 1$ ⇒ $1+w+w^2+\cdots+w^{17} = 0$

$S = w+2w^2+3w^3+\cdots+17w^{17}+18w^{18}$ 라 두면.

$-)\ wS = w^2+2w^3+\cdots+17w^{18}+18w^{19}$

$S-wS = \underbrace{w+w^2+w^3+\cdots+w^{18}}_{=0} - 18w^{19}$

$(1-w)S = -18w^{19}$

$S = \dfrac{-18w^{19}}{1-w} = \dfrac{-18w}{1-w} = \dfrac{18w}{w-1}$

$w = \cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$ 이므로

$\dfrac{1}{|S|} = \dfrac{|w-1|}{|18w|} = \dfrac{1}{18}\sqrt{(\cos 20^\circ - 1)^2 + \sin^2 20^\circ}$

$= \dfrac{1}{18}\sqrt{\cos^2 20^\circ - 2\cos 20^\circ + 1 + \sin^2 20^\circ}$

$= \dfrac{1}{18}\sqrt{2 - 2\cos 20^\circ}$

$= \dfrac{1}{18}\underbrace{\sqrt{2(1-\cos 20^\circ)}}_{2\sin 10^\circ} = \dfrac{1}{9}\sin 10^\circ$

$\cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$= \underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta} - \sin^2\theta$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$

$2\sin^2 10 = 1 - \cos 20^\circ$

$\sin^2 10 = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 20^\circ)$

$4\sin^2 10^\circ = 2(1 - \cos 20^\circ)$

5.

$|z-10i|=6$을 만족하는 복소수 z의 편각을 θ라고 할 때, $8\sin\theta+6\cos\theta$의 최댓값과 최솟값의 곱은? [1995]

① 7 ② 14 ③ 21 ④ 28

(sol) $(8\sin\theta + 6\cos\theta)' = 8\cos\theta_0 - 6\sin\theta_0 = 0$

$\Leftrightarrow 8\cos\theta_0 = 6\sin\theta_0$

$\dfrac{8}{6} = \dfrac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = \tan\theta_0 = \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{\pi}{2} - \theta_0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} + \theta_0$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta_0$, $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$, $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ 일 때 최댓값, $8\cdot\dfrac{4}{5} + 6\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{32+18}{5} = 10$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} + \theta_0$, $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$, $\cos\theta = \dfrac{-3}{5}$ 일 때 최솟값, $8\cdot\dfrac{4}{5} - 6\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{32-18}{5} = \dfrac{14}{5}$

$\Rightarrow 10\cdot\dfrac{14}{5} = 28$

6.

복소함수 $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$에 대하여, 집합 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\}$에서 $|f(z)|$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [2021]

(sol) $f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)$

~~최대 : $\frac{1}{2}\left(\frac{4+1}{2}\right)=\frac{5}{4}$~~

~~최소 : $\frac{1}{2}\left(\frac{0+1}{z}\right)=\frac{1}{2z}$~~ ?

put $z=x+iy$, $|z|^2=x^2+y^2=4$

$f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{4z+\bar{z}}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{4x+4iy+x-iy}{4}\right)$

$=\frac{1}{8}(5x+3iy)$

$|f(z)|^2=\frac{1}{64}(25x^2+9y^2)=\frac{1}{64}(16x^2+\underbrace{9x^2+9y^2}_{9(x^2+y^2)=9\times4=36})=\frac{1}{64}(16x^2+36)=\frac{1}{16}(4x^2+9)$

$-2\le x\le 2$ 이므로 $x=0\rightarrow$ 최댓값 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$x=\pm2\rightarrow$ 최솟값 $\frac{25}{16}=\frac{5}{4}$

7.

40보다 작은 양의 정수 n에 대하여

$$(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta$$

를 만족하는 n의 값들의 합은? [1995]

① 171 ② 180 ③ 190 ④ 200

(sol) $\theta\rightarrow\frac{\pi}{2}-\theta$

$(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^n$

$=\left(\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$=\sin n\theta+i\cos n\theta$

$\therefore\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)=\sin n\theta$

$\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\theta\right)=\cos n\theta$

$n=4k+1 \Rightarrow 1+5+\cdots+37=4\cdot\frac{9\cdot10}{2}+10=190$

8.

방정식 $x^3+ax+b=0$ (a, b는 실수)의 한 근이 $x=u+v$이다. 이때, $\omega u+\omega^2 v$와 $\omega^2 u+\omega v$도 이 방정식의 근이 됨을 보이시오. [2000]
단,

$$u=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}},$$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}},\ \omega^3=1,\ \omega\neq 1$$

이다.

(sol) $u^3+v^3=-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=-b$

$\Rightarrow\ u^3+v^3+b=0$

$u\cdot v=\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{a}{3})^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{b^2}{4}-(\frac{b}{2})^2-(\frac{a}{3})^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(-(\frac{a}{3})^3\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{a}{3}\ \Rightarrow\ uv=-\frac{a}{3}$

$3uv+a=0$

$$\begin{aligned}\therefore (wu+w^2v)^3+a(wu+w^2v)+b&=(u+wv)^3+a(wu+w^2v)+b\\&=u^3+3wu^2v+3w^2uv^2+v^3+a(wu+w^2v)+b\\&=w^2(3uv^2+av)+w(3u^{2v}+au)+u^3+v^3+b\\&=w^2v(3uv+a)+wu(2uv+a)+u^3+v^3+b=0.\end{aligned}$$

9. **<해석함수>**

$f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$일 때, $\frac{\partial f}{\partial x}$는? [1990]

① $e^x(\cos y+i\sin y)$ ② $e^x(\cos y-i\sin y)$
③ $e^x(-\cos y+i\sin y)$ ④ $-e^x(\cos y+i\sin y)$

(sol) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y)$

10.

복소수 $z=x+iy$ (x, y는 실수)에 대한 함수

$$f(z)=(x^ny+xy^n+x+y)+iv(x, y)$$

가 $z=1$에서 해석적(analytic)이 되도록 하는 자연수 n의 값과 이때의 $f'(1)$의 값을 각각 구하시오.
(단, $v(x, y)$는 실숫값 함수이다.) [2017]

정답: $1-3i$

$u(x, y)=x^ny+xy^n+x+y$라 하면

$u_x=nx^{n-1}y+y^n+1,\ u_y=x^n+nxy^{n-1}+1.$

$\therefore\ v_y=u_x=nx^{n-1}y+y^n+1 \Rightarrow$

$v=\dfrac{n}{2}x^{n-1}y^2+\dfrac{y^{n+1}}{n+1}+y+h(x).$

$n\ge 2$이면

$v_x=\dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+h'(x)=-x^n-nxy^{n-1}-1=-u_y$

x, y가 모두 포함된 항의 부호가 다르므로 모순.

$\therefore\ n=1$이고 $u=2xy+x+y.$

$u_x=2y+1=v_y \Rightarrow v=y^2+y+h(x)$이고

$v_x=h'(x)=-u_y=-2x-1 \Rightarrow h(x)=-x^2-x+c.$

$\therefore\ f'(1)=u_x(1)+iv_x(1)=1-3i.$

(sol) $z=1$ 에서 해석적 $\Leftrightarrow$ Satisfying C-R-Eq at $z=1$

$u(x,y) = x^ny + xy^n + x + y,\quad v(x,y)$

$$\begin{cases} u_x = v_y = nx^{n-1}y + y^n + y \\ v_x = -u_y,\quad u_y = x^n + nxy^{n-1} + 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ v(x,y) = \frac{n}{2}x^{n-1}y^2 + \frac{1}{n+1}y^{n+1} + \frac{1}{2}y^2 + \phi(x) + c$

$v_x = \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \phi'(x) = -x^n - nxy^{n-1} - 1$

$n = 3$ 되어야.

$\Rightarrow\ u_x = 3x^2y + y^3 + y$

$v_x = -x^3 - 3xy^2 + 1$

$f'(1) = f'(1,0)$

$= u_x(1,0) + iv_x(1,0)$

$= 0 + i(-1) = -i$

$n = -3,\quad f'(1) = -i$