1. <군의 기본정리>

집합 $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$의 임의의 원소 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

로 정의할 때, $\triangle$에 대한 $\{1\}$의 역원을 구하시오. [1993]

(pf) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} = X$ 라 하자.

$\forall A \in X,$ $\begin{cases} A \triangle \varnothing = (A \cup \varnothing) - (A \cap \varnothing) = A \\ \varnothing \triangle A = (\varnothing \cup A) - (\varnothing \cap A) = A \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\varnothing$: 집합 X 에서 연산 $\triangle$ 에 대한 항등원

$\forall A \in X,$ $A \triangle \underset{\uparrow}{A} = (A \cup A) - (A \cap A) = \varnothing$

집합 X 에서 $\triangle$ 에 대한 A 의 역원

따라서 $\triangle$ 에 대한 $\{1\}$의 역원은 자기 자신 $\{1\}$ 이 된다.

2.

다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [1994]

"모든 군에서 교환법칙이 성립한다."

(pf) 거짓.

※ 위수가 6일 때 처음으로 비가환군이 존재.

위수	동형군
2	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_3$
4	$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5	$\mathbb{Z}_5$
6	$\mathbb{Z}_6, S_3$

$(S_3, \cdot)$

$(1\ 2) \cdot (2\ 3) = (1\ 2\ 3)$

$\qquad\qquad\qquad\quad \#$

$(2\ 3) \cdot (1\ 2) = (1\ 3\ 2)$

3.

군 G의 임의의 원소 g에 대하여 $g^{-1}=g$이면, G는 가환군임을 보이시오. [1999]

(pf) $a, b \in G$ 라 하자. $ab=ba$ 임을 보이면 된다.

$\Rightarrow$ $a^{-1}=a$, $b^{-1}=b$, $(ab)^{-1}=ab$

$\| \leftarrow$ 기본성질에 의해

$b^{-1}a^{-1}=ba$ $\therefore ab=ba$ 이므로 G는 가환군.

4.

다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

"$G=\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_7$의 원소 $(3,1)$의 위수(order)는 28이다."

참.

(pf) $\mathbb{Z}_{12}$ 에서 $3k\equiv 0 \pmod{12}$ k는 4

$\mathbb{Z}_7$ 에서 $k\equiv 0 \pmod 7$ k는 7

$\rightarrow 28$

5.

대칭군(symmetric group) S_5와 덧셈 순환군(additive cyclic group) $\mathbb{Z}_{12}$의 직접곱(직적, direct product) $S_5\times\mathbb{Z}_{12}$에 대하여, S_5의 원소 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$의 위수(order)와① $S_5\times\mathbb{Z}_{12}$의② 원소 $(\sigma, 9)$의 위수를 각각 구하시오. [2020]

(pf) ① $\sigma=(1\ 2\ 4)(3\ 5)$ 이 사이클의 위수

이 사이클의 위수

$|\sigma| = 3\times 2$

$=6.$

② $|(\sigma, 9)| = ?$ $\mathbb{Z}_{12}$ 에서 9의 위수 구하자.

$9k\equiv 0 \pmod{12}$ $\Rightarrow$ $k=4$

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

$|(\sigma, 9)| = \mathrm{lcm}(6, 4) = 12$ ■

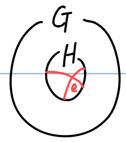
6. < 부분군 >

군 G가 유한군(finite group)이고 H가 G의 부분군일 때, 다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

(1) G와 H의 부분군의 개수가 같으면 $G=H$이다.

(2) $H^{-1}=\{a^{-1} \mid a \in H\}$는 G의 부분군이다.

(pf) (1)



G와 H의 부분군의 갯수는 같고 $G \neq H$ 라고 가정

G는 G 자기자신도 부분군으로 갖고 있으므로 H보다는 최소 1개 더 많은 부분군을 가지고 있다.

이는 G와 H의 부분군 갯수가 같음에 모순 $(\rightarrow\leftarrow)$

$\therefore$ $G=H$ 이다. ■

(2) pf 1) $H^{-1}=H$ 이다.

($\because$ ($\subset$) $x \in H^{-1} \Rightarrow \exists h \in H$ s.t $x = h^{-1}$

↓ 부분군이므로 역원 존재

$x = h^{-1} \in H$, $\therefore x \in H$

$\therefore H^{-1} \subset H$

부분군 정의에 의해 역원 존재.

($\supset$) $h \in H \leq G \Rightarrow h^{-1} \in H$

$\Rightarrow h = (h^{-1})^{-1} \in H^{-1}$

$\in H$

$\therefore H^{-1} \supset H$)

pf 2) $H \leq G$ 이므로 $H \neq \emptyset$

$\therefore H^{-1} \neq \emptyset$

(부분군 테스트) $x, y \in H^{-1}$ 라 하자. $\exists a, b \in H$ s.t $\begin{cases} x = a^{-1} \\ y = b^{-1} \end{cases}$

$xy^{-1} = a^{-1}(b^{-1})^{-1}$

$= a^{-1}b$ 기본공식

$= (b^{-1}a)^{-1} \in H^{-1}$

$\in H$ ($a, b \in H$이고 $H \leq G$ 이므로 $b^{-1}a \in H$)

$\varphi(18) = \varphi(2 \times 9)$

$= 1 \times \varphi(9)$

$= \varphi(3^2) = (3^2 - 3^1) = 6$

7.

군 G는 직접곱(직적, direct product) $\mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$이다. 위수(order)가 18인 G의 원소의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰고, 덧셈군 $\mathbb{Z}_{18}$과 군동형(group isomorphic)이 되는 G의 부분군의 개수를 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_{13}^*$과 $\mathbb{C}^*$은 각각 유한체 $\mathbb{Z}_{13}$과 복소수체 $\mathbb{C}$의 영이 아닌 원소들의 곱셈군이다.) [2021]

(pf) $(a,b) \in \mathbb{Z}_{13}^* \times \mathbb{C}^*$ 라 하자.

$|(a,b)| = \mathrm{lcm}(|a|,|b|) = 18$ 인 a, b를 찾자.

$\Rightarrow$ $|a| \mid 18$, $|b| \mid 18$

라그랑지 정리의 따름정리에 의해

$a \in \mathbb{Z}_{13}^* \cong \mathbb{Z}_{12}$ ($\because$ 13 : 소수) 이므로 $|a| \mid 12$

(13은 소수. $\mathbb{Z}_{13}$에서 원시근을 가지면 순환군)

$\therefore$ $|a| \mid 6$

※ $G_n := \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$: 위수 n인 순환군 ($=\mathbb{C}^*$의 순환 부분군)

$z_0 \in \mathbb{C}^*$, $|z_0| = n$ 인 z_0 고려

$\Rightarrow$ $z_0^n = 1$

$\Rightarrow$ $z_0 \in G_n$

$\mathbb{C}^*$에서 위수가 n인 원소를 가지고 오면 G_n에 속할 수 밖에 없으므로,

위수 n인 원소의 개수는 G_n의 원소의 개수이다.

$\rightarrow$ 따라서 $\varphi(n)$. ■

$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$		
1	18	$\varphi(1)\cdot\varphi(18)$	$1 \times \varphi(2\times 9) = \varphi(2)\cdot\varphi(3^2) = 1(3^2-3^1) = 6$
2	9, 18	$\varphi(2)(\varphi(9)+\varphi(18))$	$1(6+6) = 12$
3	18	$\varphi(3)\cdot\varphi(18)$	$2 \times 6 = 12$
6	9, 18	$+$ $\varphi(6)(\varphi(9)+\varphi(18))$	$\varphi(6)(6+6) = 2\cdot 12 = 24$

$= 54$

$\varphi(6) = \varphi(2)\cdot\varphi(3) = 1\cdot 2$

18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18

$*$ $\dfrac{\text{위수 18인 원소 개수}}{\varphi(18)}$ = 위수 18인 순환 부분군의 개수

$= \dfrac{54}{6} = 9$ ■

8. <순환군>

다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.
[2009 모의평가]
"위수가 소수 p인 군 G는 $p-1$개의 생성원(generator)을 갖는다."

(pf 1) 참, 위수가 소수 p인 군은 $\mathbb{Z}_p$와 동형이고,

$\mathbb{Z}_p$의 생성원의 개수는 $\varphi(p)$이므로, $\varphi(p)=p-1$이다.

(pf 2) $\forall a(\neq e) \in G$, $\underset{\substack{\| \\ \cancel{1} \text{ or } p}}{|a|} \,\big|\, |G|=p$

$\underbrace{\langle a\rangle \subseteq G}_{\text{위수 } p}$ $\therefore G=\langle a\rangle$

따라서 항등원을 제외한 모든 원소가 생성원이 된다. ■

9.

다음 명제의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오.
(1) 5는 군(group) $\mathbb{Z}_{12}$의 생성원(generator)이다. [1994]

(2) 위수(order)가 360인 순환군의 생성원(generator)은 모두 96개 이다. [2012]

※ Thm) a : $\mathbb{Z}_n$의 생성원 $\Leftrightarrow \gcd(a,n)=1$

Thm) 위수가 n인 순환군 G에 대하여 G의 생성원의 개수는 $\varphi(n)$이다.

(pf) (1) $\mathbb{Z}_{12}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

$\downarrow$: 5^{12} 5^5 5^{10} 5^3 5^8 5^1 5^6 5^{11} 5^4 5^9 5^2 5^7

이므로 $\mathbb{Z}_{12}$는 생성원 5에 의해 생성된다. → 참.

(2) $360=2^3\times 3^2\times 5$

$\varphi(360)=\varphi(2^3)\cdot\varphi(3^2)\cdot\varphi(5)$

$=(2^3-2^2)(3^2-3^1)\cdot 4$

$=(8-4)(9-3)\cdot 4 = 4\cdot 4\cdot 6 = \underline{96}$ → 참 ■

10.

군(group) $(\overline{Z_{20}}, +)$는 $\overline{1}$를 생성원(generater)으로 갖는 순환군(cyclic group)이다. $(\overline{Z_{20}}, +)$의 부분군의 개수를 구하시오. (단, 동형(isomorphic)인 것은 같은 것으로 본다.) [1996]

(pf) Thm) $\mathbb{Z}_n$

$d|n$ 인 d에 대해 위수 d인 부분군이 유일하게 존재.

그러한 부분군이 $\mathbb{Z}_n$의 전체 부분군이다. → (약수의 개수) = (부분군 개수)

$20 = 2^2 \cdot 5^1$

$(2+1)\cdot(1+1) = 3 \times 2 = 6$ 이므로 6개의 부분군을 가진다.