SUBJECT: PS Analysis 상·하극한 Part   DATE: Thu Aug 19

8) 수열 $\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ 의 상극한(limit superior)?
[1991]

(Sol) (i) $\epsilon>0$ 라 하자.
A-P 에 의하여 $\frac{1}{N}<\epsilon$ 인 자연수 N 이 존재한다.

$n\ge N \ni x_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$

$\le 1+\frac{1}{N} < 1+\epsilon$

(ii) $\epsilon>0$ 라 하자.
임의 자연수 n에 대해
$1-\epsilon<1<(-1)^{2n}(1+\frac{1}{2n})$

By (i),(ii) $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n(1+\frac{1}{n})$

$= 1$ ∎

9) 진위를 판정하고 이유 설명하시오.
ㄱ. $\{a_n\}$: bdd 이고 실수열 $\{b_n\}$이 Cauchy 열이면 $\{a_nb_n\}$은 Cauchy 수열.
ㄴ. $\{a_n\}$: bdd 이고 수렴하지 않으면 $\{a_n\}$의 수렴하는 부분수열 중 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \ne \lim_{k\to\infty} a_{m_k}$ 인 부분수열 $\{a_{n_k}\}, \{a_{m_k}\}$가 존재.
[2013]

pf) ㄱ. 반례 : $a_n=(-1)^n$, $b_n=1$
ㄴ. $\{a_n\}$이 유계이므로 상극·하극한은 실수이고,
$\{a_n\}$이 수렴하지 않으므로 상극≠하극
상극한과 하극한으로 수렴하는 $\{a_n\}$의 부분수열을 $\{a_{n_k}\}\{a_{m_k}\}$라 하면
$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \ne \lim_{k\to\infty} a_{m_k}$. ∎

or (pf2) By B-W-T.
$\{a_n\}$의 수렴하는 부분열 존재.
$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}= a$ 라 하자.

$\lim_{n\to\infty} a_n \ne a$ 이므로 모든 $l\in\mathbb{N}$에 대해 $|a_{n_l}-a|\ge\epsilon_0$ 가 되는 $\epsilon_0>0$ 와 $\{a_n\}$의 부분열 $\{a_{n_l}\}$이 존재한다.
$\{a_{n_l}\}$ 역시 bdd 이므로 B-W-T 에 의해 $\{a_{n_l}\}$의 수렴하는 부분열 $\{a_{m_k}\}$가 존재.
부분수열의 부분열은 원수열의 부분열이므로 $\{a_{m_k}\}$는 $\{a_n\}$의 부분열.
또한 $\{a_{m_k}\}$의 수렴 값 b라 하면 모든 $k\in\mathbb{N}$에 대해 $|a_{m_k}-a|\ge\epsilon_0$ 이므로 $|b-a|\ge\epsilon_0$ 가 되어 $\{a_{n_k}\}$와 $\{a_{m_k}\}$는 서로 다른 값으로 수렴하는 $\{a_n\}$의 부분열. ∎

상·하극한 Part

(10) 진위를 판정하고 이유를 설명하시오
$\{a_n\}$ 의 상극한 (= limit superior, $\overline{\lim}\, a_n$, $\limsup a_n$) 이 1이면, 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해 $a_n < 1-\varepsilon$ 을 만족시키는 n 의 개수는 유한.
[2013]

거짓이다.

(pf) 반례: $a_n = (-1)^n$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$

(11) 모든 항이 양수인 급수 $\sum^{\infty} a_n$ 이 수렴할 때, <보기> 급수에 대해 수렴 여부 판정하고 이유 설명하시오
[2013]

ㄱ. $\sum (-1)^{n+1} a_n$ Conv

ㄴ. $\sum \sqrt{a_n^2+1}$ Div

ㄷ. $\sum (e^{a_n}-1)$ Conv

(pf) ㄱ. 절대수렴하므로 수렴.

ㄴ. $\sum a_n$ 이 수렴하므로 $\lim a_n = 0$
그러면 $\lim \sqrt{a_n^2+1} = 1$ 이므로 발산

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$
이고 $\lim a_n = 0$ 이므로
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ (극한비교판정)

연속 Part

(12) 함수 $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$x=0$ 에서 연속성 판정 [1996]

(pf) Conti

$\forall x(\neq 0) \in \mathbb{R}$,

$|x\sin\frac{1}{x}| = |x||\sin\frac{1}{x}| \le |x|$

$\exists \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to 0} |x\sin\frac{1}{x}| = 0$

$\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

그러므로 $f(x)$: Conti at $x=0$

SUBJECT: 연속 Part　　DATE:

13) 연속함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 에 대해

$$L-\frac{1}{n} < f(x_n) < L+\frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

을 만족하는 수열 $\{x_n\}$

이 때, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ 라 하면

$f(c)=L$ 임을 보여라 [1999]

(pf) $\lim_{n\to\infty}\left(L-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(L+\frac{1}{n^2}\right)$

$= L$ 이므로 squeeze Thm 에 의해

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ 이다.

또한 $\forall n\in\mathbb{N}$, $a\le x_n\le b$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} x_n = c \in [a,b]$ 가 성립.

f는 $[a,b]$ 에서 연속이므로

$x=c$ 에서 점열연속. 즉 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(c)$

따라서 $f(c)=L$ ■

14) 실수 집합 $\mathbb{R}$ 이라 하고 폐구간 I $=[0,1]$ 에서 정의된 연속함수

$f: I\to\mathbb{R}$ 가 다음 조건 만족

< 임의의 $x\in I$ 에 대해 적당한 $y\in I$ 가 존재하여 다음이 성립.

$|f(y)| \le \frac{1}{5}|f(x)|$ >

이 때, $f(c)=0$ 을 만족하는 $c\in I$ 가 존재함을 증명. [2008]

(pf) (귀류법)

$\forall x\in[0,1]$, $f(x)\ne 0$ 라 가정 $-(*)$

f가 연속이므로 $|f|$도 I에서 연속.

$\Rightarrow \exists a\in[0,1]$ s.t

$\forall x\in[0,1]$, $|f(a)|\le|f(x)|$

또한 $(*)$에 의해 $|f(a)|>0$

주어진 조건에 의해

$|f(b)|\le\frac{1}{5}|f(a)|$ 만족하는 $b\in I$

가 존재.

그러면 $|f(a)|\le|f(b)|\le\frac{1}{5}|f(a)|<|f(a)|$

가 되어 모순.

따라서 $f(c)=0$ 을 만족하는 $c\in I$ 존재. ■

15) 진위를 판정하고 이유를 설명하시오

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 연속함수, 실수열 $\{x_n\}$ 이 코시열이면 $\{f(x_n)\}$ 도 코시열

True

(pf) $\{x_n\}$ 은 코시열이므로 수렴.

수렴값을 x 라 하자.

그러면 f는 x 에서 연속이므로

$\{f(x_n)\}$ 는 $f(x)$ 에 수렴한다.

따라서 $\{f(x_n)\}$ 은 코시수열. ■

SUBJECT: Analysis PS　　　　DATE: 21. Aug

* Darboux Thm

f: Diff on $I = [a,b]$ 이고
k 가 $f'(a)$ 와 $f'(b)$ 사이의 수이면
$f'(c) = k$ 가 되는 적어도 한 점 c 가
(a,b) 에 존재.

[2009]

37) 실수 전체 집합 $\mathbb{R}$. 다음 정리 증명서 (가)(나)(다) 에 알맞은 것은?

<정리>

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 가 diff on closed interval $[a,b]$ 이고 $f'(a) > f'(b)$ 이면, $f'(a) > k > f'(b)$ 인 실수 k 에 대하여 $f'(c) = k$ 을 만족시키는 점 $c \in (a,b)$ 가 존재.

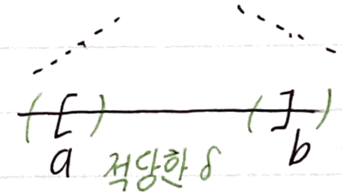
* 참고 : f 가 열린구간 (a,b) 에서 미·가 이고 a 에서의 우미분계수와 b 에서의 좌미분계수가 존재할 때 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 가 $[a,b]$ 에서 미·가

<증명>

함수 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 을 $g(x) = f(x) - kx$ 로 정의하면, g 는 연속이므로 점 $c \in [a,b]$ 에서 $\boxed{가}$ 을 갖는다. 그런데 $\boxed{나}$ 이(하)므로 $g(x_1) > g(a)$ 와 $g(x_2) > g(b)$ 를 각각 만족시키는 점 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 가 존재하게 되어 a 와 b 에서 g 는 $\boxed{가}$ 을 가질수 없다.
따라서 g 는 점 $c \in (a,b)$ 에서 $\boxed{가}$ 를 갖고 $\boxed{다}$ 이(하)므로 $g'(c) = 0$ 이다.
그러므로 $f'(c) = k$ 를 만족시키는 점 $c \in (a,b)$ 가 존재한다.

(가) : ~~최솟값~~ 최댓값
(나) : $g'(a) > 0$ 이고 $g'(b) < 0$
(다) : g 가 미가

정T 풀이) $g'(x) = f'(x) - k$
$g'(a) = f'(a) - k > 0$
$g'(b) = f'(b) - k < 0$



$\exists\ \frac{b-a}{2} > \delta_1, \delta_2 > 0$ s.t

$a < x < a + \delta_1 \Rightarrow g(a) < g(x)$
$b - \delta_2 < x < b \Rightarrow g(x) > g(b)$ → 최댓값
$g : [a,b]$ 에서 연속이므로
$\exists c \in [a,b]$ s.t $\forall x \in [a,b]$,
a.b✗ $g(x) \le g(c)$ $\therefore c \in (a,b)$
내점. 극댓값. 미·가

$g'(c) = 0$
$\| $
$f'(c) - k$
$\therefore f'(c) = k$.

SUBJECT: Analy PPS Darboux Thm 파트 DATE:

38) 미가 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 에 대해 <보기>의 진위 판정 및 이유 설명.

<보기>

(1) f'이 M-I 이면 f'은 연속 함수이다. [2010] T

(2) $(f')^3$이 M-I 이면 f'은 연속함수이다. [2013] T

(pf) (1) Supp) f' 단조증가 & $\exists c$, f'가 불연속인 점.

Since f': M-I, $j_{f'}(c) > 0$.

Since $j_{f'}(c) > 0$,

$\sup\{f'(x) \mid x<c\} = \alpha$

$\inf\{f'(x) \mid x>c\} = \beta$ 라 하면

$k\in(\alpha,\beta) - \{f'(c)\}$인 k가 존재.

Since f': M-I, $f'(c-1)<k<f'(c+1)$

(Darboux 정리)

$f'(d)=k$ 인 $d\in(c-1,c+1)$ 존재.

(I) $c-1<d<c$

$f'(d) \le \sup\{f'(x) \mid x<c\} = \alpha < f'(d)$

이므로 모순.

(II) $c<d<c+1$

$f'(d) < \inf\{f'(x) \mid x>c\} = \beta \le f'(d)$

이므로 모순.

따라서 f'은 연속.

(2) $a<b$

$\Rightarrow \{f'(a)\}^3 \le \{f'(b)\}^3$

$\Rightarrow (f'(a)-f'(b))\cdot(\{f'(a)\}^2 + f'(a)f'(b) + \{f'(b)\}^2) \le 0$

$\Rightarrow f'(a) \le f'(b)$

따라서 f'은 $\mathbb{R}$에서 증가함수이고

(1)에 의해 f'은 연속. ■

SUBJECT: Analysis PS Cauchy M-V-T 파트 DATE: L'Hospital 파트

39) <보기> 진위를 판정 이유 설명

<보기>

(1) 벡터함수 $F:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 이 연속함수이고 구간 $(0,1)$에서 미가이면 $F(1)-F(0)=F'(c)$를 만족시키는 점 $c\in(0,1)$이 존재. [2011] F

(2) 실수 전체 집합에서 미가한 함수 f에 대해 $f(1)-f(0)=\dfrac{f'(c)}{2c}$ 을 만족시키는 실수 c가 0과 1 사이에 존재. [2013] T

(pf) (1) $F:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $F(x)=(x^2,x^3)$ 라 하면 $F(1)-F(0)=(1,1)$,

$F'(x)=(2x,3x^2)$

이므로 $F(1)-F(0)=F'(c)$를 만족시키는 점 $c\in(0,1)$은 존재하지 않음.

(2) $g(x)=x^2$ 라 하면 g는 $[0,1]$에서 연속, $(0,1)$에서 미분가능 $\underset{\in(0,1)}{\forall x}$ $g'(x)\neq 0$ 이므로 (Cauchy M-V-T)

$$f(1)-f(0)=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f'(c)}{2c}$$

인 c가 $(0,1)$에 존재. ■

40) 미가함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 와 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 에 대한 다음 명제의 참 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오 [2010]

$L\in\mathbb{R}$ 일 때, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ 이면

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ 이다. F

(pf) $f(x)=1$, $g(x)=x+1$ 라 하면 다음이 성립.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{0}{1}=0$$

* L'Hospital Law

f, g: diff on (a,b), $\forall x\in(a,b)$ $g'(x)\neq0$ 라 하자.

그리고 $\displaystyle\lim_{x\to a+}f(x)=0=\lim_{x\to a+}g(x)$

라 가정하자.

$\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$ 이면 $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=$

SUBJECT: Analy PS L'Hospital Part

DATE:

41) 다음 극한값 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ [1990]

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ [1990]

(3) $\lim_{x\to\infty} (\cos\frac{1}{x})^{x^2}$ [1993]

(pb) (1)

$$\lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

이므로 $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e$

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-\cos x\, e^{\sin x}}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+\sin x\, e^{\sin x}-\cos^2 x\, e^{\sin x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+\cos x\, e^{\sin x}+s\cdot c\cdot e^{\sin x} + 2\cos x\cdot \sin x\, e^{\sin x} - c^{3} e^{\sin x}}{\cos x}$$

$$= \frac{\overset{1}{e^{0}}+1\cdot e^{\sin 0}+0+0-0}{\cos 0 \to 1} = 1$$

(3) $$\lim_{x\to\infty} \ln(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{2}\ln(\cos\frac{1}{x})$$

put $x=\frac{1}{t}$. $x\to\infty \Rightarrow t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{2}}\cdot \ln(\cos t)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-\sin t}{\cos t}}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{2t\cos t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sec^{2} t}{2} = \frac{-1}{2}$$

이므로 $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ■

42) 매클로린 급수를 이용하여 다음 극한값을 구하시오. [2008]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{(x^2\cos x)^{5/2}}$$

(pf) doesn't exist.

$\boxed{\sin x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

이므로 다음이 성립

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{|x|^5(\cos x)^{5/2}} \quad -(*)$$

$$(*) = \lim_{\boxed{x\to 0+}}\frac{\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \cdots}{(\cos x)^{5/2}} = \frac{1}{5!}$$

\#

$$(*) = \lim_{\boxed{x\to 0-}}\frac{-\frac{1}{5!} + \frac{x^2}{7!} + \cdots}{(\cos x)^{5/2}} = -\frac{1}{5!}$$

Thus. there not exist.

43) 테일러 급수를 이용해 무한급수

$$1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

의 합을 구하시오 [1992] e^2

(pf) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}$ 이므로

$$e^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \cdots$$

44) 상수함수 아닌 함수 $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$가 무한번 미가하고 모든 실수 x와 자연수 n에 대해 $|f^{(n)}(x)| \le n^2(|x|+2)$ 를 만족시킬 때. 집합 $\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=0,\ |x|<1\}$ 이 유한집합임을 보이시오. [2017]

* 다음 정리들은 필요하면 증명없이 사용.

(가) $c\in(a,b)$ 이고 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 $(n+1)$번 미가할 때,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,$$

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

로 놓으면 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

이 되는 t_x가 c와 x 사이에 존재.

(나) 함수 $g(x)$가 $|x-c|<r$ ($r>0$, c는 상수)인 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대해

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$ 일 때.

모든 자연수 n에 대해 $x_n \ne c$, $g(x_n)=0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ 인 수열 $\{x_n\}$이 존재하면 $|x-c|<r$ 인 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대해 $g(x)=0$.

SUBJECT:

DATE:

(pb 1) $\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=0,\ |x|<1\}$ 이 무한집합이라 가정하자.
그러면 가부번 부분집합 $A=\{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$ 가 존재한다.
임의의 $n\in\mathbb{N}$ 에 대해 $|a_n|<1$ 이 되어 $\{a_n\}$ 은 유계수열이므로
(B-W-T)
수렴하는 부분열 $\{b_n\}$ 이 존재한다.
수렴값을 c 라 하고 $x\in\mathbb{R}$ 에 대해 $M=\max\{|c|, |x|\}$ 라 하자.

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right|$$

$$\le \frac{(n+1)^2(|t_x|+2)}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$$

$$\le \frac{(n+1)^2(M+2)}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$$

인 t_x 가 c와 x 사이에 존재.

$$C_n = \frac{(n+1)^2(M+2)}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$$

라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2}|x-c|$

$$= 0$$

이므로 임의의 실수 x 에 대해
$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ 이 성립.

임의의 $n\in\mathbb{N}$ 에 대해 $b_n\neq c$ 인 경우 $x_n=b_n$ 이라 하고, 적당한 $b_m=c$ 인 경우 $x_n=\begin{cases} b_n, & n<m \\ b_{n+1}, & n\ge m\end{cases}$ 라 하면
임의의 $n\in\mathbb{N}$ 에 대해 $x_n\neq c$
$x_n\in\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=0,\ |x|<1\}$
이므로 $f(x_n)=0$ 이 성립.
따라서 (나)에 의해 f는 치역이 0인 상수함수.
이는 모순이므로 $\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=0,\ |x|<1\}$ 는 유한집합.

(pb 2) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)=0,\ |x|<1\}$ 이 무한집합이라 가정하면
A의 집적점