2006 PTS

1)

다음은 폴리아(G. Polya)가 문제해결과 관련하여 말한 '보조문제'에 대한 설명이다.

제시된 문제에 대한 풀이의 발견은 원래의 문제를 해결하는 데 도움을 줄 수 있는 적절한 보조문제에 좌우되는 경우가 많다. 보조문제를 생각함으로써 여러 가지 이득을 얻을 수 있다. 보조문제의 결과가 현재의 문제 해결의 실마리가 될 수도 있고, 보조문제를 해결한 방법이 현재의 문제해결에 이용될 수도 있다.

<보기>에서 ①이 ②의 보조문제가 될 수 있는지 판단하고, 그 이유를 구체적으로 쓰시오. (4점)

<보기>

① 1부터 100까지의 자연수의 합 구하기
② 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 구하기

○ 판단 :

○ 이유 :

2)

다음은 8-가 단계 수학에 있는 '유리수와 소수' 단원의 수업 계획을 교사의 관점에서 제시한 것이다.

<보기>

학습 목표 : 유한소수로 나타내어지는 분수의 특징을
학습 목표 : 알 수 있다.
수업 계획 :
① 칠판에 학습 목표를 쓴다.
② 여러 가지 분수를 제시하고 그것을 소수로 나타내 보게 한 후, 유한소수와 무한소수의 뜻을 설명한다.
③ 위의 분수 중에서 유한소수로 나타내어지는 분수와 무한소수로 나타내어지는 분수를 각각 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 어떤 특징을 가지는지 알아보도록 한다.

위의 수업 계획 중에서 ③을 사회적 구성주의의 지식관을 반영하여 진행하고자 한다. 이 때, 학생들이 객관화된 수학적 지식을 얻기까지 거쳐야 할 활동 과정을 쓰고, 그 결과 얻어져야 할 지식을 학습 목표와 관련하여 쓰시오. (5점)

○ 활동 과정 :

○ 지식 :

사회적 구성주의는 사회적 상호작용, 의사소통, 협동학습이 지식 습득의 가장 중요한 수단이라고 주장하는 구성주의의 한 갈래이다.

2006 PTS

[3~4] 다음 두 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

김 교사 : 저는 수학 수업에서 지식의 구조, 곧 기본적인 아이디어를 다루는 것이 중요하다고 생각합니다. 그러한 아이디어는 학생의 사고양식에 맞게 세 가지 표현으로 재구성할 수 있습니다. 세 가지 표현을 이용하면 어떤 지식이든 어떤 수준의 학습자라도 이해할 수 있도록 적절한 형태로 제시할 수 있습니다. 브루너

박 교사 : 저는 지식의 표현 방법도 중요하지만, 그 지식의 지도 순서도 중요하다고 생각합니다. 그래서 저는 학생들에게 일반적인 개념이나 원리를 먼저 지도하고, 이 개념을 발판으로 하여 이어지는 학습 내용을 점점 특수화하고 세분화하는 형태로 지도할 때 학생들에게 의미 충실한 학습이 될 수 있다고 생각합니다. 의미충실한 학습의 원리

김교사의 생각에 반영되어 있는 이론을 참고하여, 위의 대화에서 김 교사가 말한 '세 가지 표현'이 무엇인지 쓰시오. 그리고 김 교사가 "삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다."는 성질을 지도하고자 할 때, 가장 낮은 수준의 학생들도 이해할 수 있도록 삼각형 모양의 종이를 활용하여 이 성질을 표현하는 과정을 구체적으로 쓰시오. (4점)

○ 세 가지 표현 :

○ 과정 :

4. 박 교사는 다항식의 곱셈과 관련된 〈보기〉의 학습 내용을 ①에서부터 순서대로 지도하려고 한다. 이 때, 박 교사가 계획한 학습 내용의 지도 순서와 관련하여, 그의 생각에 반영되어 있는 학습 지도 원리를 쓰고, 그 원리에 입각하여 〈보기〉의 학습 내용 지도 순서를 구체적으로 해석하시오. (4점)

〈보기〉

① $(a+b)(c+d)$의 전개

② $(a+b)^2$의 전개

③ 101^2의 계산

○ 원리 :

○ 해석 :

브루너의 인지발달 구조이론

브루너는 피아제의 인지발달 이론을 기초로 하여 아동의 인지 발달은 사물이나 현상의 구조를 파악하는 방식에서 질적인 차이를 나타낸다고 보았으며, 이러한 차이를 지식의 표현양식으로 개념화하였다. 그는 아동이 세계를 고찰하는 방법의 질적인 차이에 해당하는 표현양식을 행동적 표현, 상징적 표현, 영상적 표현으로 나누었다.

아동의 인지발달이 낮은 수준에서 보다 높은 수준으로 연속적인 진행 과정을 거친다는 점에서는 피아제와 일치한다. 그러나 브루너는 아동의 인지발달은 환경을 이해하고 표현하는 능력의 증가에 의해서 이루어지며, 이러한 능력의 증가는 아동과 상호작용 하는 환경의 질에 의해 결정된다고 보았다. 그래서 브루너는 아동의 인지발달 수준과 학습의 형태를 관련 지우려고 노력했으며, 그 결과 그는 '어떤 학습 과제이든지 어린이의 발달 정도에 맞도록 구조화하여 제시한다면 어떤 어린이라도 효과적으로 학습할 수 있다' 라는 명제를 발표했다. 이것은 일정한 수업방법에 아동이 적응하도록 하는 전통적인 교수방법이 아니라 아동의 발달수준에 적응하는 새로운 형태의 교수방법을 개발하도록 촉진했다. 즉, 수업장면에서 아동에게 제시되는 지식은 아동의 인지발달 수준이나 성장환경에 맞추어 적당한 표현양식을 채택해야 효과적인 학습이 이루어질 수 있다는 것이다.

브루너에 의하면 어떤 종류의 지식이든 그것은 세 가지 양식으로 표현될 수 있다는 것이다. 이에 따라 그는 '어떤 교과 내용이든지 그 내용의 지적 성격에 충실한 형태로 어떤 발달단계에 있는 아동에게도 가르칠 수 있다'는 가설을 설정하게 된다

5)

(1) 선행조직자 : 이미 알고 있는것과 알고 싶은 것 사이를 연결
(2) 점진적 분화의 원리 : 포괄적 일반적인 통합 개념을 머저 제시하고 점차로 특수화되고 세분화되는 방안으로 교수학습지도를 조직
(3) 통합적 조정의 원리 : 새롭게 학습하는 개념이나 원리는 학생의 인지구조에 맞게 이미 학습한 개념과 관련을 지어 그 구조를 조정할 때 비로소 의미있는 학습

※ 딘즈의 수학 학습 원리

○ 역동적 원리
- 목표가 불분명하며 그 자체로 즐기는 예비 놀이 단계
- 좀 더 방향이 정해지고 목적을 지향하지만 추구하고 있는 것에 대한 명확한 인식은 없는 구조화된 놀이 단계
- 형성된 개념을 고정시키고 적용하기 위한 실습 놀이 단계

○ 구성의 원리
- 분석보다는 구성을 요구하는 것이 우선되어야 함
- 논리적 판단을 할 준비가 되어 있지 않더라도 많은 수학적 개념을 잘 구성할 수 있음 → 구성한 것에 대한 논리적 탐구는 후에 가능하게 됨

[예] 정육면체의 성질을 논리적으로 설명하는 것은 어려울 수 있으나 전개도를 통해 정육면체를 구성하는 활동은 할 수 있음

○ 수학적 다양성의 원리
- 개념의 성장을 돕기 위해 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 한 많은 변인을 변화시켜야 함

[예] 평행사변형의 개념 학습을 위해 대변이 평행이 되도록 유지하면서 각의 크기나, 대변의 길이, 위치 등을 변화시킴으로써 모양을 변화시키는 것

[예] 일차함수 $y=ax+b$를 설명하기 위해 a, b를 여러 가지로 변화시켜 설명함

○ 지각적 다양성의 원리
- 동일한 개념적 주제에 대한 다양한 수단을 사용하여 가능한 한 많은 변화를 주자는 것
- 다르게 보이지만 근본적으로 동일한 개념 구조를 가지는 과제를 제공하자는 것

[예] 평행 사변형을 종이 위해 그릴 수도 있고, 두 개의 합동인 나무로 된 삼각형을 만들 수도 있고, 점판 위에 표시할 수도 있고, 벽지의 패턴에서도 찾을 수 있다.

※ 딘즈의 수학 학습 원리의 예

○ 역동적 원리
- 직육면체 모양의 다양한 구체물을 이용하여 3단계의 놀이 경험을 제공할 것

○ 구성의 원리
- 쌓기 나무나 마분지에 그린 전개도 등을 이용하여 직육면체를 구성해 봄

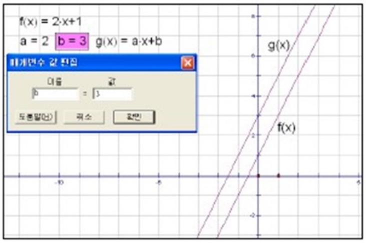
○ 수학적 다양성의 원리
- 밑면이 정사각형인 경우와 아닌 경우, 가로의 길이보다 높이가 큰 경우와 작은 경우의 직육면체 등 수학적으로 다양한 모양의 직육면체를 제공할 것

○ 지각적 다양성의 원리
- 쌓기 나무로 만든 직육면체, 플라스틱 빨대를 연결하여 구성한 직육면체, 종이를 이용하여 만든 직육면체 등 지각적으로 다양한 소재를 이용하여 구성된 직육면체를 제시할 것

최 교사는 "기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다."는 학습 내용을 지도하려고 한다.
다음은 최 교사가 수업에 사용하기 위해 만든 학습 자료와 그 학습 자료를 활용한 학습 활동에 대한 계획이다.

〈학습 자료〉

탐구형 소프트웨어를 이용하여 컴퓨터 화면에 함수 $f(x)=2x+1$의 그래프를 그린다. 매개변수 입력창에 a, b의 값을 입력하면 그 값에 따라 새로운 함수$g(x)=ax+b$의 그래프가 동일한 화면에 그려지도록 한다.



〈학습 활동〉

활동 ① : 위 학습 자료에서 a의 값을 2로 입력하여 고정한다.

활동 ② : b의 값에 3을 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.

활동 ③ : b의 값을 바꾸어 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.

활동 ④ : 활동 ③의 과정을 여러 번 반복해서 실행한다.

딘즈(Z. P. Dienes)가 제시하는 수학 학습 원리 중 '수학적 다양성의 원리'를 쓰고, 지도하려는 학습 내용에 대한 최 교사의 수업 계획을 수학적 다양성의 원리의 관점에서 평가하시오. (5점)

○ 수학적 다양성의 원리 :

○ 평가 :

6)

다음은 제7차 수학과 교육과정의 '평가' 항목에서 제시하고 있는 내용의 일부이다.

① 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고, ② 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가가 이루어질 수 있게 한다.

제7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학 학습 평가의 목적을 학생과 교사의 측면에서 각각 쓰고, 수학 학습 평가에서 ①에 비해 ②가 갖는 장점을 인지적 영역과 정의적 영역의 측면에서 각각 쓰시오. (4점)

○ 목적 : (학생)
(교사)

○ 장점 : (인지적 영역)
(정의적 영역)

수학과 평가

핵심키워드 - 발달적 교육관, 정의적 영역 능력, 수학과 평가절차, 수학과 평가 방법, 객관식 문항, 서술형 문항, 분석적 점수화하기, 총체적 점수화하기, 서술형 문항의 채점 절차, 프로젝트, 관찰 및 면담, 일화기록법, 체크리스트, 평정척도법, 평가도구와 평가틀.

<우리나라 수학과 평가의 동향/특징 3가지 - ★★★★>

평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 **학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있다.**

최종 결과에 대한 평가보다 **과정에 대한 평가를 강조하고 있다.**

객관식 선다형의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰 면담 등 **다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다.**

<수학과 평가의 원리 4가지 >

1. 발달적 교육관을 지향하는 평가.
2. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가.
3. 문제해결 과정을 중시하는 평가.
4. 정의적 영역 능력을 중시하는 평가.

<수학과 평가에서 관찰 및 면담의 특징>

1. 관찰 및 면담은 수학적 수행 능력과 같은 인지적 영역 뿐만 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등의 정의적 영역까지 평가할 수 있다.
2. 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다.
3. 독자적인 평가기법의 역할 보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할을 한다.
4. 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제집착력과 의지, 청의력 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역의 평가를 하는데 용이하다.

7) LA

실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 선형변환(linear tansformation) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 $\mathbb{R}^n$의 임의의 두 점 $x, y\,(x \neq y)$를 잇는 선분 $\{(1-t)x+ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$을 $\mathbb{R}^m$에 포함되는 선분(또는 점)으로 보내는 것을 보이시오.

(pf) 임의의 $0 \le t \le 1$ 에 대하여 L은 선형변환이므로

$L((1-t)x+ty) = (1-t)L(x) + tL(y)$ – $(*)$

이고 다음이 성립한다.

(i) $L(x) = L(y)$

$(*) = L(x)$ 인 한 점으로 변환된다.

(ii) $L(x) \neq L(y)$

$(*)$는 $L(x)$와 $L(y)$를 잇는 선분이다. ∎

8) **Analysis**

평균값 정리를 이용하여, 임의의 두 실수 x, y에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오.

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

(pf) (i) $x = y$ 인 경우

$\sin x - \sin y = 0 = x - y$ 이므로

$0 \leq 0$

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ 이 성립.

(ii) $x \neq y$ 인 경우

x, y 를 양 끝점으로 하는 폐구간을 I라 하면 $[x, y]$

$\underset{= f(t)}{\sin t}$ 는 I 에서 연속이고 $\underset{(x, y)}{I - \{x, y\}}$ 에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여 $\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos z$ 인 z가 x와 y 사이에 존재.

따라서 다음이 성립.

$\dfrac{|\sin x - \sin y|}{|x - y|} = |\cos z| \leq 1 \Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ∎

Thm) (평균값 정리)

f가 폐구간 $I = [a, b]$ 에서 연속이고 개구간 (a, b) 에서 미·가라 가정 (= 도함수 갖는다)

그러면 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 가 되는 적어도 한 점 c가 (a, b)에 존재.

9)

정수환 $\mathbb{Z}$에서 가환환 $\mathbb{Z}_6$으로 가는 환 준동형사상 (ring homomorphism) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_6$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(n)\equiv 4n \pmod 6$$

위의 f를 이용하여, 두 개의 환 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$와 $2\mathbb{Z}_6$이 동형(isomorphic)임을 보이시오. (단, $\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$는 6을 법(modulo)으로 하는 덧셈과 곱셈 연산을 가지는 가환환이다.)

(pb) 두 개 환이 동형임을 보이려면 $\phi:\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to 2\mathbb{Z}_6$ 인 bijection ϕ 존재함을 보이면 됨. 순서는 ① 잘정의되었는가 ② one to one 인가 ③ 준동형인가 ④ onto 인가

이건 군에서 … 환에서 : 제 1 동형정리 사용! 외울것

$f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_6$, $n\mapsto 4n \pmod 6$ 이다.

$\phi: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to 2\mathbb{Z}_6$

$\ker\phi = 3\mathbb{Z}$ 으로 잡을 것.

(정현인 풀이) 임의의 $k\in\mathbb{Z}$ 에 대하여

$f(3k)\equiv \overset{4(3k)}{12k}\equiv 0 \pmod 6$

$f(3k+1)= \overset{4(3k+1)}{12k+4}\equiv 4 \pmod 6$

$f(3k+2)= \overset{4(3k+2)}{12k+8}\equiv 2 \pmod 6$

이으로 $\ker f=\{n\in\mathbb{Z}\mid f(n)\equiv 0 \pmod 6\}=3\mathbb{Z}$

$\mathrm{Im} f=\{0,2,4\}=2\underset{\{0,1,2,3,4,5\}}{\mathbb{Z}_6}$ 이다.

$2\mathbb{Z}_6=\{0,2,4,\cancel{6},\cancel{8},\cancel{10}\}$ (0, 2, 4)
mod 6 → $\{0,2,4\}$

그러면 제 1 동형정리에 의하여 $\mathbb{Z}/\ker f \cong \mathrm{Im} f$ 이 성립한다.

$\ker f = 3\mathbb{Z}$, $\mathrm{Im} f = 2\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\cong 2\mathbb{Z}_6$

Thm) (제 1 동형정리)

환 준동형사상 $f: R\to S$ 에 대하여

$R/\ker f \cong \mathrm{im} f$ 이 성립한다.

10)

행렬식 1인 GL

주어진 벡터공간의 가역 선형변환들이 이루는 군

복소수 집합을 $\mathbb{C}$라 하고, 2차 정사각행렬의 일반선형군을 $GL(2, \mathbb{C})$라고 하자. 행렬의 사원수군(quaternion group) Q는 $GL(2, \mathbb{C})$의 부분집합

$$\{I, A, A^2, A^3, B, BA, BA^2, BA^3 = AB\}$$

으로, 위수 8인 부분군이다. 이때, Q의 모든 부분군이 정규부분군임을 보이시오.

(단, $GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc \neq 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$,

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$이다.)

GL

↳ 항상 $\{I, i, j, k, -i, -j, -k, -I\}$ 이런식으로 가짐.

가역

위수 8이니까 위수 1, 2, 4, 8인 부분군 가짐.

(pf) H가 Q의 부분군이라 하면,

(Lagrange 정리)에 의하여 $|H| \mid |Q|$ 이므로 $|H|$는 1, 2, 4, 8 중 하나이다.

(i) $|H| = 1$

$H = \{I\}$ 이므로 Q의 정규부분군이다.

(ii) $|H| = 2$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$

Q 에서 위수 2인 원소는 $A^2 = -I$ 뿐이므로

$H = \{I, -I\}$ 이다. ($-I = A^2$)

임의의 $P \in Q$ 에 대하여 $PHP^{-1} = \{PIP^{-1}, PAP^{-1}\} = \{I, -I\} = H$

이므로 H는 Q의 정규부분군이다.

(iii) $|H| = 4$

$[Q : H] = \frac{|Q|}{|H|} = \frac{8}{4} = 2$ 이므로 thm 에 의해 H는 Q의 정규부분군이다.

둘 다 유한군이므로 분수로 O.K

(iv) $|H| = 8$

$H = Q$ 이므로 H는 Q의 정규부분군이다.

→ 따라서 Q의 모든 부분군이 정규부분군이다.

Thm 14.13 H가 G의 부분군이라 하자.

→ $H \triangleleft G$의 3가지의 동치조건은 다음과 같다.

① 모든 $g \in G$에 대해 $gH = Hg$

② 모든 $g \in G$에 대해 $gHg^{-1} = H$ 이다.

③ 모든 $g \in G$, $h \in H$에 대해 $ghg^{-1} \in H$ 이다.

이것만 기억

Claim Procedure

① ab^{-1} 통해 부분군임

② ghg^{-1} 통해 정규부분군임

→ 쓸 줄 알았는데 아니었음

Thm) (Lagrange 정리)

G가 유한군이면 G의 부분군 K에 대해 $|K| \mid |G|$ 이다.

Thm) 군 G의 부분군 N에 대하여 $[G : N] = 2$ 이면 N은 G의 정규부분군이다.

보자마자 중국인 나머지 정리 떠올랐음

11) 2005 에서 푸는 법 복습해서 개쉬웠음 NT

K고등학교의 전체 학생을 같은 인원수의 9팀으로 나누면 1명이 남고, 같은 인원수의 10팀으로 나누면 2명이 남으며, 같은 인원수의 11팀으로 나누면 10명이 남는다. K고등학교 전체 학생수 x가 $x \equiv a \pmod{990}$을 만족할 때, 정수 a의 값을 구하시오. (단, $0 \le a < 990$)

(pb)

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 9 \\ x \equiv 2 \pmod{10} \\ x \equiv 10 \pmod{11} \end{cases}$$

$X = x_1 \cdot 1 \cdot 110 + x_2 \cdot 2 \cdot 99 + x_3 \cdot 10 \cdot 90 \pmod{990}$

i) $110 x_1 \equiv 1 \pmod 9$ ii) $99 x_2 \equiv 1 \pmod{10}$ iii) $90 x_3 \equiv 1 \pmod{11}$

$110 = 9 \cdot 12 + 2$, $220 = 9 \cdot 24 + 4$, $330 = 9 \cdot 36 + 6$ ... $440 = 9 \cdot 48 + 8$, $550 = 9 \cdot 61 + 1$

$99 \times 9 = 891$

$x_2 \equiv 9 \pmod{10}$

$90 = 11 \cdot 8 + 2$, $180 = 11 \cdot 16 + 4$, $270 = 11 \cdot 24 + 6$, $360 = 11 \cdot 32 + 8$, $450 = 11 \cdot 40 + 10$, $540 = 11 \cdot 49 + 1$

$x_3 \equiv 6 \pmod{11}$

$x_1 \equiv 5 \pmod 9$

$18 \times 99 = 100 \times 18 - 18 = 1800 - 18$

$\therefore X \equiv 5 \cdot 1 \cdot 110 + 9 \cdot 2 \cdot 99 + 6 \cdot 10 \cdot 90 \pmod{990}$

$\equiv 550 + 1782 + 5400$ (")

$\equiv 7732 \pmod{990}$

$\equiv 802 \pmod{990}$

$7732 = 990 \cdot 7 + 802$

$\therefore a = 802$

PAS

12)

자연수 $N=a\times10^4+b\times10^3+c\times10^2+d\times10+e$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 N의 개수를 구하시오.

(i) $\{a,b,c,d,e\}\subset\{1,2,3,4,5,6,7\}$
(ii) $\{1,3,5,7\}\subset\underbrace{\{a,b,c,d,e\}}_{\overset{\text{let}}{=}A}$

A에 무조건 포함

(풀) 주어진 조건에 의하여 $\{a,b,c,d,e\} \overset{\shortparallel}{A}$ 는

$\underbrace{\{1,3,5,7\}}_{\text{무조건 포함}}$, $\{1,3,5,7\}\cup\{x\}$ (단, $x\in\{2,4,6\}$) 들어갈 수도 있다.

둘 중 하나의 값을 가진다.

(I) $A=\{a,b,c,d,e\}=\{1,3,5,7\}$

$p\in\{1,3,5,7\}$ 에 대하여 p가 두번 나오고 p가 아닌 나머지가

한번 나오는 경우. 예를 들어

$\{a,b,c,d,e\}=\{1,1,3,5,7\}$ 에 대한 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}$ 이므로

(I)의 경우의 수는 $\underset{\substack{1,3,5,7 \\ \text{중 두번 나올 애 선택}}}{4}\times\frac{5!}{2!}=4\times\frac{120}{2}=240$ 이다.

(II) $\{a,b,c,d,e\}=\{1,3,5,7\}\cup\{x\}$, $x\in\{2,4,6\}$

x가 2, 4, 6 중 어느 값을 갖더라도 서로 다른 숫자로 이루어진 다섯자리

숫자를 만드는 경우이므로 경우의 수는 $\underbrace{3}_{\substack{2,4,6 \text{ 중} \\ x \text{ 될 애 고름}}}\times\underbrace{5!}_{\text{배열}}=360$ 이다.

따라서 총 경우의 수는 $240+360=600$ 이다. ∎

13) **Analysis**

실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 함수 f_n을 다음과 같이 정의하자.

$$f_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{3x^n}{2x^n+1}$$

함수열 (f_n)의 극한함수 f를 구하고, (f_n)이 f로 평등수렴(uniform convergence)하는지 판정하시오.

(pf) **(내 풀이)**

자세하게 쓸 것

$x=1$을 빼트림 !!

$x=0,\ 0<x<1 \to x^n = 0$ 이므로 $f_n(x) \to \dfrac{0}{0+1} = 0$

$x=1 \to f_n \to 1$

$1<x\leq 2$ 에서는 $f_n(x) \Rightarrow \dfrac{3}{2}$

$\neq$ 이므로 평등수렴 X

(정답) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x=1 \\ \frac{3}{2}, & 1<x\leq 2 \end{cases}$

각각의 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 f_n은 $[0,2]$ 에서 연속이지만

f는 $[0,2]$ 에서 연속이 아니므로 $\{f_n\}$은 $[0,2]$ 에서 균등수렴하지 않는다.

Thm) $\{f_n\}$을 집합 $A \subseteq R$ 에서 연속함수열이라 하고

$\{f_n\}$이 A에서 함수 $f: A \to \mathbb{R}$ 로 균등수렴한다고 가정하자.

그러면 f는 A 에서 연속이다.

14) (최대 최소 정리 / 중간값 정리) 가 키워드!! Analysis

실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. n차 다항식 x^n이 주어질 때, 함수 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$가 연속이면 다음 식을 만족하는 $c \in [0,1]$가 존재함을 보이시오.

$$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx = f(c)$$

(pf) f는 유계, 폐구간 $[0,1]$에서 연속이므로 최댓값, 최솟값을 갖는다.

즉, 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$ 이 성립하는

$x_m, x_M \in [0,1]$ 이 존재한다.

$\Rightarrow \int_0^1 f(x_m)x^n dx \le \int_0^1 f(x)x^n dx \le \int_0^1 f(x_M)x^n dx$

$\Rightarrow \frac{f(x_n)}{n+1} \le \int_0^1 f(x)x^n dx \le \frac{f(x_M)}{n+1}$

$\Rightarrow f(x_n) \le (n+1)\cdot\int_0^1 f(x)x^n dx \le f(x_M)$

$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx$ 의 값이 $f(x_m)$ 또는 $f(x_M)$이면 증명 완료.

$f(x_m) < (n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx < f(x_M)$ 이면, f는 연속이므로 중간값 정리에 의해

$(n+1)\int_0^1 f(x)x^n dx = f(c)$ 를 만족하는 c가 x_m과 x_M 사이에 존재한다.

$x_m, x_M \in [0,1]$ 이므로, $c \in [0,1]$ 이다. ∎

Thm) 함수 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$가 $[a,b]$에서 연속이면 f는 $[a,b]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

Thm) (중간값 정리)

구간 I에 대하여 $f: I \to \mathbb{R}$가 I에서 연속이라 하자.

$a, b \in I$ 이고 $k \in \mathbb{R}$가 $f(a) < k < f(b)$를 만족한다고 가정하면,

a와 b 사이에 $f(c) = k$가 되는 점 $c \in I$가 존재한다.

15) CA

복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역(domain) $D=\{z \mid |z|<2\}$에서 정의된 함수 $f: D \to \mathbb{C}$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z \in D$에 대하여 $|f(z)| \le \sqrt{5}$이다. $f(0)=2+i$일 때, $f(1)+f'(i)$의 값을 구하시오.

(pf) (내 풀이) $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ 라 하자.

일단 실수부 + 허수부로 나눠봄..

$\sqrt{(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = 5$ 이고,

$f(0) = f(0,0) = u(0,0) + i v(0,0) = 2+i$

$\Rightarrow u(0,0) = 2 \quad v(0,0) = 1$

$\Rightarrow f(1) = u(1,1)$

$f'(i) = v'(1,1)$? → 어차피 상수함수라 이렇게 할 필요 없었던 것..

(정답) $2+i$

($\because$ $f(0) = 2+i$ 이므로 $|f(0)| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

가정에 의해 $z \in D$ 에 대해, $|f(z)| \le |f(0)|$ 를 만족하므로 f는 D에서 상수함수

잘 이해 안되므로 다시 보기

$\therefore f(z) = 2+i \Rightarrow f(1) + f'(i) = (2+i) + 0 = 2+i$ ■

16)

DG

3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$에 있는 곡면 $\chi(\theta, \Phi)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\chi(\theta, \Phi) = ((2+\sin\Phi)\cos\theta,\ (2+\sin\Phi)\sin\theta,\ \cos\Phi)$$

이 때, 곡면 위의 점 $\chi(0, 0)$에서의 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하고, 그 접평면과 곡면 $\chi(\theta, \Phi)$의 교선의 방정식을 구하시오. (단, $-\infty < \theta < \infty, -\infty < \Phi < \infty$)

(pf) i) 일단 θ, Φ에 대해 편미분 한다.

$\chi_\theta = (-(2+\sin\Phi)\sin\theta,\ (2+\sin\Phi)\cos\theta,\ 0)$

$\chi_\Phi = (\cos\Phi\cdot\cos\theta,\ \cos\Phi\sin\theta,\ -\sin\Phi)$

ii) 점 $\chi(0,0)$ 이므로 대입하자.

$\Rightarrow\ \chi_\theta(0,0) = (0, 2, 0)$

$\chi_\Phi(0,0) = (1, 0, 0)$

대입한거 외적하자. $\Rightarrow\ \chi_\theta \times \chi_\Phi(0,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= (0, 0, -2)$

$\therefore\ \chi_\theta \times \chi_\Phi(0,0) = (0, 0, -2)$

$\chi(0,0) = (2, 0, 1)$ 이므로 접평면은 $-2(z-1) = 0 \Rightarrow z = 1$.

$-2z+2=0$ $\quad$ $2z=2$ $\quad$ $z=1$

iii) 교선의 방정식 : z 좌표 이용해서 교점 구하자.

$\cos\Phi = 1 \Rightarrow$ 2π

이제 χ에 $\Phi = 2n\pi$ 모두 대입

$z=1 \Rightarrow \Phi = 2n\pi$ 이므로 교선 $\alpha(\theta) = ((2+\cancel{\sin\Phi})\cos\theta,\ (2+\cancel{\sin\Phi})\sin\theta,\ \cancel{\cos\Phi})$

$\underset{0}{\ }\ \ 2n\pi \qquad\qquad 2n\pi \qquad\qquad 1$

$= (2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 1)$ 이다.

17) TP

위상공간 X, Y에 대하여 사상 $f: X \to Y$가 다음 조건을 만족할 때, f를 폐사상(closed map)이라 한다.

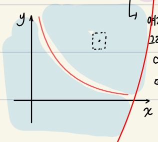
임의의 폐집합(closed set) $A(\subset X)$에 대하여, $f(A)$는 폐집합이다.

보통위상(usual topology)공간 $\mathbb{R}$에 대하여 사상 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 $f(x, y) = x$로 정의할 때, f는 연속사상임을 보이고 폐사상은 아님을 보이시오.

(pf) $\mathbb{R}$ 에서 임의의 열린 집합 G 에 대하여.

$f^{-1}(G) = G \times \mathbb{R}$ 은 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에서 열린집합이으로 f 는 연속함수.

$C = \{ (x, \frac{1}{x}) \mid x > 0 \}$ 은 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 에서 닫힌 집합 이지만



↳ 여가 왜 Closed 인가?

그래프 그리면 다음과 같은데. Closed 이면 Complement$(= C^c)$가 Open일 것.

Complement 내에서는 어떤 점에서도 ⬚ 형태의 open set 찾기 가능.

따라서 C는 Closed 이다. rectangle $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$f(C) = (0, \infty)$ 는 $\mathbb{R}$ 에서 닫힌 집합이 아니다.

따라서 f 는 연속이고, 폐사상은 아니다. ∎

18) Tp

집합 $X=[-1,1]=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\le x\le 1\}$에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{I}$를 정의할 때, 위상공간 $(X,\mathfrak{I})$는 컴팩트(compact, 긴밀) 공간임을 보이시오.

$$\mathfrak{I}=\{U\subset X \mid 0\not\in U\}\cup\{U\subset X \mid (-1,1)\subset U\}$$

내 생각 ~

(pf) Compact 하다 → 임의의 open covering 들로 위상공간을 Covering 가능하다.

(정답) 임의의 열린 피복 C에 대하여 $0\in G$인 C의 원소 G가 존재한다.

그러면 $(-1,1)\subset G$ 이므로 $-1, 1$을 포함하는 C의 원소

G_1, G_2를 선택하여 $\{G, G_1, G_2\}$라 하면

이것은 C에 대한 X의 finite 한 sub covering 이다.

따라서 $(X, \mathfrak{I})$는 Compact. ∎

19) 완전 100%. 1도 안보고 혼자 풂. 대박

PAS

정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위의 두 면에는 3, 나머지 네 면에는 $1, 2, 4, 5$가 각각 하나씩 적혀있다. 이 주사위를 288번 던질 때, 짝수 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $B(n, p)$를 따른다. 이 때, X의 평균 $E(X)$와 분산 $V(X)$를 구하고, 짝수 눈이 88번 이상 112번 이하로 나올 확률 $P(88 \le X \le 112)$를 정규근사시켜 구하시오. (단, $P(88 \le X \le 112)$를 구하는 과정에서 연속성 수정(continuity correction)은 하지 않는다.
그리고 Z가 표준정규 확률변수일 때,
$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이다.)

(풀) 288번, X = 짝수는 1, 2, 3, 3, 4, 5

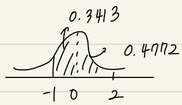
$B(n, p)$ ㅋ $B(288, \frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{6}\,3})$

$E(X) = np = \cancel{288}^{96} \times \frac{1}{\cancel{3}} = 96$

$V(X) = npq = \cancel{96}^{32} \times \frac{2}{\cancel{3}} = 64$

$P(88 \le X \le 112) = P\left(\frac{88-96}{8} \le Z \le \frac{112-96}{8}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 2)$



ㅋ $0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$ ∎