11.

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^5$에 속하는 벡터 v_1, v_2, v_3에 대하여 옳은 것만을 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2013]

ㄱ, ㄴ, ㄷ

<보기>

ㄱ. v_1, v_2, v_3이 일차독립이면 $v_1+v_2+v_3$, v_2+v_3, v_3도 일차독립이다.

ㄴ. 집합 $\{av_1+bv_2+cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$는 $\mathbb{R}^5$의 부분 공간이다.

ㄷ. 5차 정사각행렬 A에 대하여 두 방정식 $Ax=v_1$, $Ax=v_2$가 모두 해를 가지면 방정식 $Ax=2v_1+v_2$도 해를 가진다.

(sol) ㄱ. 참.

$c_1(v_1+v_2+v_3) + c_2(v_2+v_3) + c_3v_3 = 0$

$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3$

$\underbrace{c_1}_{0}v_1 + \underbrace{(c_1+c_2)}_{0}v_2 + \underbrace{(c_1+c_2+c_3)}_{0}v_3 = 0$

$\Rightarrow \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$

ㄴ. 참.

$\{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 는 $\mathbb{R}^5$ 의 부분공간

합 · 스칼라배 만족하므로 부분공간 O.

ㄷ. ? 참

5×5 행렬 A. $Ax=v_1$, $Ax=v_2$ 가 모두 해를 가지면 $Ax=2v_1+v_2$ 도 해 가짐.

$Ax_1 = v_1$, $Ax_2 = v_2$ 라 하면 $A(2x_1+x_2) = 2Ax_1 + Ax_2 = 2v_1+v_2$

이므로 $2x_1+x_2$ 는 $Ax=2v_1+v_2$ 의 해이다. ∎

12.

다음 벡터 중에서 실수체 $\mathbb{R}$위에서 일차종속인 ? [1991]

① e^t, e^{2t}
② (1, 1, 1), (0, 1, 2)
③ (−1, −1, 0), (0, 1, 2)
④ (−1, 2, −4), (2, −4, 8)

(sol) ① $ae^t + be^{2t} = 0$

$\Rightarrow$ $a = b = 0$: linearly indpt.

② $a(1,1,1) + b(0,1,2) = 0$

$a = 0,$
$a + b = 0 \Rightarrow b = 0$: linearly indpt.
$a + 2b = 0$

③ $a(-1,-1,0) + b(0,1,2) = 0$

$-a = 0 \Rightarrow a = 0$: linearly indpt.
$-a + b = 0 \Rightarrow b = 0$

④ $a(-1,2,-4) + b(2,-4,8) = 0$

$\times(-2)$ $\Rightarrow$ linearly dpt. ∎

13. **〈차원〉**

벡터공간 $Mat_2(\mathbb{R})$의 부분공간

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - 3b + 2c + d = 0 \right\}$$

의 차원 $\dim(W)$는? [1993]

(sol) $d = -a + 3b - 2c$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d = -a + 3b - 2c \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a+3b-2c \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

일차독립인지 확인

$b + c = 0$

$c = 0 \Rightarrow b = 0$: 일차독립.

따라서 기저가 3개 $\rightarrow$ $\dim(W) = 3$ ∎

14.

U, V는 두 벡터 공간(vector space)이고,

$$\dim(U)=7,\ \dim(V)=8,\ \dim(U+V)=10$$

일 때, 벡터 공간 $U\cap V$의 차원(dimension)은? [1994]

$\dim(U\cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U+V)$

$= 7+8-10 = 5$ ∎

15. **< 내적 공간 >**

실수의 집합 $\mathbb{R}$위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 두 벡터

$$a=(a_1, a_2, a_3, a_4), b=(b_1, b_2, b_3, b_4)$$

에 대하여 내적 a · b를 $a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$로 정의하자. 두 벡터 $(1, 0, 1, -1)$과 $(1, 2, 2, 0)$이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은? [2009 모의평가]

(sol) $\cos\theta = \dfrac{a\cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|} = \dfrac{1+2}{\sqrt{1+1+1}\ \sqrt{1+4+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ∎

16.

3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 벡터 $v_1=(1, 2, 2)$, $v_2=(1, -1, 2)$로 생성된 부분공간을 V라 하자. V의 임의의 정규직교기저(orthonormal basis) $B=\{u_1, u_2\}$에 대하여 B에 의해 결정되는 네 실수 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$가 존재하여

$$v_1=a_{11}u_1+a_{12}u_2,\quad v_2=a_{21}u_1+a_{22}u_2$$

일 때, $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 $u=(x_1, y_1, z_1)$, $v=(x_2, y_2, z_2)$의 유클리드 내적은 $u\cdot v=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$이다.) [2017]

(sol) $|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$은 두 벡터 (a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})으로 만들어지는 평행사변형의 넓이이고 그 값은 인접한 두 변을

v_1, v_2로 갖는 평행사변형의 넓이와 같다.

$\|v_1\times v_2\| = \|v_1\|\|v_2\|\sin\theta$

이고 $\|v_1\times v_2\| = \|(1,2,2)\times(1,-1,2)\| = \|(6,0,-3)\| = 3\sqrt{5}$ ∎

17. < 선형변환 >

실수 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 선형변환(linear tansformation) $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$은 $\mathbb{R}^n$의 임의의 두 점 $x, y\,(x \neq y)$를 잇는 선분 $\{(1-t)x+ty \mid 0 \le t \le 1\}$을 $\mathbb{R}^m$에 포함되는 선분(또는 점)으로 보내는 것을 보이시오. [2006]

(sol) 임의의 $0 \le t \le 1$에 대하여 L은 선형변환이므로

$$L((1-t)x+ty) = (1-t)L(x) + tL(y) \quad -(*)$$

이고 다음이 성립.

(i) $L(x) = L(y)$

$(*) = L(x)$ 인 한 점으로 변환된다.

(ii) $L(x) \neq L(y)$

$(*)$는 $L(x)$와 $L(y)$를 잇는 선분이다. ∎

18.
실수체 $\mathbb{R}$위의 벡터공간

$$P_2 = \{a+bx+cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

에 대하여 선형변환(linear transformation) $T: P_2 \to P_2$가 다음을 만족한다고 하자.

$$T(1+x) = 1+x^2$$
$$T(x+x^2) = x-x^2$$
$$T(1+x^2) = 1+x+x^2$$

이 때, $T(4+2x+3x^2)$을 구하시오. [2008]

(sol) $4+2x+3x^2 = a(1+x) + b(x+x^2) + c(1+x^2)$

$= (a+c) + (a+b)x + (b+c)x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 4 \\ a+b = 2 \\ b+c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \frac{5}{2},$$

$$b = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$\therefore\ T(4+2x+3x^2) = aT(1+x) + bT(x+x^2) + cT(1+x^2)$

$= \frac{3}{2}(1+x^2) + \frac{1}{2}(x-x^2) + \frac{5}{2}(1+x+x^2)$

$= \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)x^2$

$= 4 + 3x + \frac{7}{2}x^2$

19.

점 (x, y)를 점 (ry, rx)로 옮기는 일차변환 f와 점 (x, y)를 점 $(x\sin\theta + y\cos\theta, x\cos\theta - y\sin\theta)$로 옮기는 일차변환 g에 의한 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [1994]

(sol) $[g \cdot f] = [g][f] = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$

※ Thm) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 이 선형변환이고 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 이 $\mathbb{R}^n$의 표준기저벡터일 때, T의 표준행렬은

$[T] = [\,T(e_1) \mid T(e_2) \mid \cdots \mid T(e_n)\,]$ 이다.

20.

$\mathbb{R}^2$의 두 기저(basis),

$\alpha = \{v_1, v_2\}, \beta = \{u_1, u_2\}$

에 대하여

$v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 0), \ u_1 = (1, -2), u_2 = (2, 3)$

일 때, 다음 물음에 답하시오. [2001]

(1) 선형변환 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$를 나타내는 행렬 A를 구하시오.

(2) 이 선형변환에 의하여 세 점

$P(-1, 0), Q(1, -1), R(2, 3)$

이 옮겨지는 점을 각각 P', Q', R'이라 할 때, $\triangle P'Q'R'$의 넓이를 구하시오.

(sol)

(1)

$A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{0-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(2) $P(-1, 0) \quad Q(1, -1) \quad R(2, 3)$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 \\ 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\triangle P'Q'R' = \frac{1}{2}\left| \begin{matrix} 7 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{matrix} \right|$

$= \frac{1}{2}\left| -21 - 10 - (-3+35) \right| = \frac{1}{2}\left| -31 - 32 \right| = \frac{63}{2}$