21.

자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$과 자연수 n에 대하여 $A_n=\{k\in\mathbb{N}\mid k\ge n\}$이라 하고, $\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$을 기저(base)로 하는 $\mathbb{N}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. $X=(\mathbb{N},\mathfrak{I})$라 하고 $Y=[0,1]$을 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)이라 할 때, 적공간(product space) $X\times Y$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오.
(단, $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$이고, $\mathfrak{I}_u$는 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이다.) [2013]

집합 $\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}\times(Y\cap\mathbb{Q})$는 $X\times Y$에서 조밀(dense)하다. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)

(pf) C: 폐집합 $\Leftrightarrow$ $C\in\{\{1,2,\cdots,n\}\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ 이므로

$$\overline{\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}\times(Y\cap\mathbb{Q})}=\overline{\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}}\times\overline{(Y\cap\mathbb{Q})}_Y$$

$$=\mathbb{N}\times[\overline{(Y\cap\mathbb{Q})}_{\mathbb{R}}\cap Y]$$

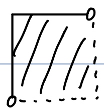
$$=\mathbb{N}\times[0,1]$$

22.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 $\{[a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_l$이라 하고, $\{(a,b]\mid a,b\in\mathbb{R}\}$를 기저로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_u$라 하자.
적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_l)\times(\mathbb{R},\mathfrak{I}_u)$에서 집합

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x^2+y^2\le 1\}$$

의 내부(interior) A°를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 A의 폐포(closure) $\overline{A}$와 A의 경계(boundary) $b(A)$를 구하시오.
(단, $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$, $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$이다.) [2016]

(pf) 적공간에서 기저의 형태는  모양이다.

$$A^\circ=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid \tfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\}$$

$$\overline{A}=A$$

$$b(A)=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid -\pi\le\theta\le\tfrac{\pi}{2}\}$$

23.

공집합이 아닌 위상공간 X의 두 부분집합 A와 B가 각각 X에서 조밀(dense)하다고 하자. 이 때, B가 X에서 열린집합이면 $A\cap B$가 X에서 조밀함을 증명하시오. [2008]

(pf) A, B가 X에서 dense ⇒ $\overline{A}=X$, $\overline{B}=X$

⇒ $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cap\overline{B} = X\cap X = X$

$\therefore$ $A\cap B$는 dense in X

※ Def) $\overline{A}=X$ 일 때, A는 X의 조밀 부분집합이라 함.
(dense subset)

※ 추가 풀이 임의의 $x\in X$ 와 x를 포함하는 임의의 열린집합 G를 생각.

$x\in X=\overline{B}$ 이므로 $B\cap G\neq\varnothing$.

$B\cap G$ 의 한 원소 y 라 하면

$y\in X=\overline{A}$ 이고 $B\cap G$는 y를 포함하는 열린 집합이므로

$A\cap(B\cap G)\neq\varnothing$ 이다. 즉 $(A\cap B)\cap G\neq\varnothing$

따라서 $x\in\overline{A\cap B}$. 따라서 $\overline{A\cap B}=X$.

24.

정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의한다.

$\mathfrak{I}=\{U\subset\mathbb{Z}\mid U=\varnothing$ 또는 U^c는 유한집합$\}$

이 때 서로 다른 정수 a_n들로 이루어진 수열 $\{a_n\}$은 위상공간 $(\mathbb{Z},\mathfrak{I})$에서 각각의 정수 m에 수렴함을 증명하시오. [1997]

(pf) (귀류법) $\{a_n\}$이 수렴하지 않는 정수 m이 존재한다고 가정하자.

그러면 m을 포함하는 적당한 열린 집합 G가 존재하여 임의의 자연수 k에 대하여 $a_l\notin G$인 $l>k$이 존재한다.

즉 $k=1$ 인 경우 $a_{n_1}\notin G$ 인 $n_1>1$ 가 존재.

$k=n_1$ 인 경우 $a_{n_2}\notin G$ 인 $n_2>n_1$ 가 존재.

$k=n_2$ 인 경우 $a_{n_3}\notin G$ 인 $n_3>n_2$ 가 존재.

⋮

그러면 $\{a_{n_k}\mid k\in\mathbb{N}\}\subset G^c$ 이 성립한다.

수열 $\{a_n\}$은 서로 다른 정수들로 이루어진 수열이므로 $\{a_{n_k}\mid k\in\mathbb{N}\}$는 무한집합.

따라서 G^c은 무한집합.

한편 G는 공집합 아닌 열린집합이므로 G^c은 유한집합이 되어 모순 $(\to\leftarrow)$

25.

임의의 위상공간의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 닫힌집합들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. X와 Y가 위상공간이고 f가 X에서 Y로의 함수일 때, f의 연속성과 동치가 아닌 것은? [1994]

① Y의 각 부분집합 B에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$
② X의 각 부분집합 A에 대하여 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ 이다.
③ Y의 각 닫힌집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$는 X에서 닫힌집합이다.
④ X의 각 열린집합 A에 대하여 $f(A)$는 열린집합이다.

(pf) ① ⇔ ③

⇒) B: Closed set in Y 라 하자. 그러면 $\overline{B} = B$ 이다.

가정에 의하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$ 이다.

따라서 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ 이므로 $f^{-1}(B)$는 closed set in X.

⇐) $B \subset Y$ 라 하자.

가정에 의하여 $f^{-1}(\overline{B})$은 closed set in X.

$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ 이고 $f^{-1}(\overline{B})$는 폐집합이므로 $f^{-1}(B)$를 포함하는 가장 작은 폐집합인 $\overline{f^{-1}(B)}$는 $f^{-1}(\overline{B})$에 포함된다. ■

26.

X를

$\mathscr{B} = \{V \subset X \mid V$와 V^c는 모두 열린집합(open set)$\}$

을 기저(basis)로 갖는 위상공간이라 하자. 그리고 F를 닫힌집합(closed set), p를 F에 속하지 않는 X의 점이라고 할 때 $f(p) = 0$이고, $f(F) = \{1\}$인 연속함수 $f: X \to \mathbb{R}$가 존재함을 보이시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [2007]

(pf) $p \in X - F$ 이고, $X - F$는 열린집합이므로 $p \in V \subset X - F$ 인 basis element $V \in \mathscr{B}$가 존재.

함수 $f: X \to \mathbb{R}$ 을 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in V^c \\ 0, & x \in V \end{cases}$ 라 정의하면 $\mathbb{R}$에서 임의의 열린집합 G에 대하여

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} X, & 0, 1 \in G \\ V, & 0 \in G, 1 \notin G \\ V^c, & 0 \notin G, 1 \in G \\ \emptyset, & 0, 1 \notin G \end{cases}$$

이므로 f는 $f(p) = 0$ 이고 $f(F) = \{1\}$을 만족하는 연속함수이다.

27.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{I}_u$에 대하여 $X=(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$라 할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. (단, $(a, b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$이다.) [2013]

> $Y=\{1, 2, 3, 4\}$가 X의 부분공간일 때, $f(5)\neq f(6)$인 연속함수 $f: X\to Y$가 존재한다.

(pf) (거짓)

임의의 $y\in Y$에 대하여 $(y-\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2})\cap Y=\{y\}$ 이므로 Y는 이산위상공간이다.

$f(5)\neq f(6)$ 인 연속함수 f 존재한다고 가정하면 $G=\{f(5)\}$, $H=Y-\{f(5)\}$는 Y에서 서로 소이고 합집합이 Y인 열린집합이므로 $f^{-1}(G), f^{-1}(H)$는 $\mathbb{R}$의 분리이다.

그러면 $\mathbb{R}$은 비연결이 되어 모순이다.

28.

위상공간 X, Y에 대하여 사상 $f: X\to Y$가 다음 조건을 만족할 때, f를 폐사상(closed map)이라 한다.

> 임의의 폐집합(closed set) $A(\subset X)$에 대하여, $f(A)$는 폐집합이다.

보통위상(usual topology)공간 $\mathbb{R}$에 대하여 사상 $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를 $f(x, y)=x$로 정의할 때, f는 연속사상임을 보이고 폐사상은 아님을 보이시오. [2006]

(sol) $\mathbb{R}$에서 임의의 열린집합 G에 대하여 $f^{-1}(G)=G\times\mathbb{R}$은 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에서 열린집합이므로 f는 연속함수.

$C=\{(x, \frac{1}{x}) \mid x>0\}$은 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에서 닫힌 집합이지만 $f(C)=(0, \infty)$는 $\mathbb{R}$에서 닫힌 집합이 아니다. ■

29.

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$, 유리수 전체의 집합을 $\mathbb{Q}$라 하자. $\mathfrak{I}$를 $\mathbb{R}$위의 보통위상(usual topology)이라 하고$(\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$를 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I})$의 부분공간이라 하자. 함수 $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$를 임의의 $r \in \mathbb{Q}$에 대하여 $j(r) = r$로 정의할 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오. [2009]

ㄱ. 함수 $j : (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.
ㄴ. 임의의 위상공간 X와 함수 $f : X \to (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$에 대하여 $j \circ f : X \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$가 연속이면 $f : X \to (\mathbb{Q}, \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}})$가 연속이다.

ㄱ.ㄴ 둘 다 참.

(pf) ㄱ. $\forall G \in \mathfrak{I},\ j^{-1}(G) = G \cap \mathbb{Q} \in \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}$

ㄴ. $G \in \mathfrak{I}_{\mathbb{Q}}$ 라 하면 $G = U \cap \mathbb{Q}$ 인 $U \in \mathfrak{I}$ 가 존재한다.

$j \circ f : X \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$ 는 연속이므로 $(j \circ f)^{-1}(U)$ 는 X 에서 열린집합이다.

또한 $f^{-1}(G) = f^{-1}(U \cap \mathbb{Q}) = f^{-1}(j^{-1}(U)) = (j \circ f)^{-1}(U)$ 이므로 $f^{-1}(G)$ 는 X 에서 열린집합이다. ■

30.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$라 하고, 함수 $f : \mathbb{R} \to [0, 1)$을 $f(x) = x - [x]$로 정의하자. 집합 $[0, 1)$위의 위상 $\mathfrak{I}_0$을

$$\mathfrak{I}_0 = \{G \subseteq [0, 1) \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}\}$$

로 정의하자. 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 이유를 설명하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이고, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$이다.) [2011]

함수 $h : [0, 1) \to \mathbb{R}$를 $h(x) = 1 - x$로 정의하면 $h : ([0, 1), \mathfrak{I}_0) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{I})$는 연속이다.

거짓

(pf 1) h 가 연속이라 가정하면 $[0, \frac{1}{2}) = h^{-1}(\frac{1}{2}, 2) \in \mathfrak{I}_0$ 이다. $(\to\leftarrow)$

Contradicts to #47.

(pf 2) h가 연속 가정하면

$h \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(h \circ f)(x) = 1 - (x - [x])$ 역시 연속.

정의역, 공역이 모두 보통위상이므로 실해석에서의 연속과 같이 생각할 수 있다.

그래프가 이어져있지 않으므로 불연속이 되어 모순이다. 따라서 h는 불연속. ■