1.

< 행렬식 >

행렬식 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 의 값을 구하시오. [1990]

(sol) $3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(4-20) + (4-(-2))$

$= -48 + 6 = -42$

2.

3×3 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 의 역행렬을 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 라 할 때,

$a_{21} + a_{32}$ 의 값은? [1996]

2

(sol) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Downarrow$ $\mathbb{r}_1 \times (-3) + \mathbb{r}_2$
$\mathbb{r}_1 \times (-1) + \mathbb{r}_3$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 \end{array}\right]$

$\Downarrow$ $\mathbb{r}_3 \times 6 + \mathbb{r}_2$
$\mathbb{r}_3 \times (-2) + \mathbb{r}_1$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xRightarrow{\mathbb{r}_2 \times (-1) + \mathbb{r}_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right]$

a_{21}

a_{32}

$3 + (-1) = 2$

3.

연립방정식 $\begin{cases} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$ 이 $x=y=z=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 a의 값들의 합은? [1992] -1

(sol) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & -(a-1) \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{bmatrix}$

$2-a-a^2=0$

$\Leftrightarrow a^2+a-2=0$

$\Leftrightarrow (a+2)(a-1)=0$

$a=1$ or $a=-2$

$1+(-2) = \underline{-1}$ ∎

4.

행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

A는 항등행렬이 아닌 두 개의 가역행렬(정칙행렬)의 곱으로 나타낼 수 있다.

(pf) 이 말 ⇒ ~~일차종속~~

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\left.\begin{matrix} c_1=0 \\ c_2=0 \\ c_3=0 \end{matrix}\right)$ 일차독립

∴ 항등행렬 아닌 가역행렬 곱으로 ~~표현~~ 불가 !

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

표현 가능

→ 그냥 일차독립이면 항등행렬을 곱으로 표현 가능한거지

무조건 항등행렬곱으로만 나타내지는 것 X

5.

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 7 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

A는 수반행렬(adjoint matrix)의 행렬식(determinant)은 A의 행렬식의 제곱과 같다.

(pf) adjoint matrix = Cofactor 의 Transpose

여인수 → $(-1)^{i+j}M_{ij} = C_{ij}$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -21 & 0\\ -6 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -18\end{bmatrix}$$

Transpose

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 0\\ -21 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -18\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 12 & -6 & 0\\ -21 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -18\end{vmatrix} = 12\times 54 + 6(21\times 18) = 12\times 3\times 18 + 6\times 21\times 18 = 18(\underbrace{36+126}_{162}) = 2916$$

$$(\det A)^2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0\\ 7 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}^2 = (-(12)-2(21))^2 = (-12-42)^2 = (54)^2 = 2916$$

$(50+4)^2 = 2500+400+16 = 2916$

$\therefore |adj(A)| = |A|$ ∎

6.

각 성분이 실수인 3×3 정칙행렬(가역행렬) A의 수반행렬(adjoint matrix)을 $\mathrm{adj}\,A$라 할 때, 〈보기〉의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2011]

〈보기〉

ㄱ. 임의의 자연수 n에 대하여 $\mathrm{adj}(A^n)=(\mathrm{adj}A)^n$이다.

ㄴ. 행렬 A의 전치행렬(transpose matrix)을 A^T라 할 때, $\mathrm{adj}(A^T)=(\mathrm{adj}A)^T$이다.

ㄷ. $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)=A$

ㄱ. True ㄴ. True ㄷ. False

$A\cdot adj(A) = \det(A)\cdot I_3$ — (*)

ㄱ. True

(∵ (*) 의 양변을 n 제곱하면

$A^n\cdot (adj(A))^n = (\det(A))^n\cdot I_3$

(*) 에서 A 자리에 A^n을 대입하면

$A^n\cdot adj(A^n) = \det(A^n)\cdot I_3 = (\det A)^n\cdot I_3$

이므로 $A^n\cdot(adj(A))^n = A^n\cdot adj(A^n)$ 이 성립.

양 변에 A의 역행렬을 n번 취하면

$(adj\,A)^n = adj(A^n)$ 임을 알 수 있다.)

ㄴ. True

(∵ (*) 양변을 전치행렬로 만들어주면

$A^T(adj(A))^T = \det A\cdot I_3$

(*) 에서 A 자리에 A^T를 대입하면

$A^T\cdot adj(A^T) = \det(A^T)\cdot I_3 = \det A\cdot I_3$

이므로 $A^T(adj(A))^T = A^T\cdot adj(A^T)$

양변에 A^T의 역행렬을 취하면

$(adj\,A)^T = adj(A^T)$

c. False

(반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\nparallel$

$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7.

< 부분공간 >

벡터 공간(vector space) $\mathbb{R}^3$이 부분공간(subspace)이 아닌 것은? [1996]

④

① $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$
② $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$
③ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$
④ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$

(sol) $\mathbb{R}^3$의 부분공간은 다음중 한가지 형태임.

1. $\{(0, 0, 0)\}$
2. 원점을 지나는 직선
3. 원점을 지나는 평면
4. $\mathbb{R}^3$

8.

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 V에 대하여 W_1, W_2를 V의 부분공간이라 하자. $V = W_1 + W_2$일 때, 임의의 $v \in V$에 대하여

$$v = w_1 + w_2 (w_1 \in W_1, w_2 \in W_2)$$

로 유일하게 표현될 필요충분조건은 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$임을 증명하시오. [2003]

(p8) 몰라서 풀이 봄.

(⇒) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 을 보이자.

i) $W_1 \cap W_2 \subset \{0\}$

$v \in W_1 \cap W_2$ 이면, $v + 0 = v = 0 + v$ 이고 가정에서 v 는 유일하게 표현된다고 했으므로 $v = 0$ 이다.

ii) $W_1 \cap W_2 \supset \{0\}$

$\mathbb{R}$ 의 부분공간이란 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합으로서 그 자체가 벡터공간이라는 의미이다.

벡터공간은 항상 0 을 포함하므로 W_1, W_2 모두 0을 포함한다.

따라서 $0 \in W_1 \cap W_2$ 이 성립한다.

(⇐) $V = W_1 + W_2$ 이므로 임의의 $v \in V$ 에 대하여 $v = w_1 + w_2$ 인 $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ 가 존재한다.

이제 유일성만 보이면 충분하다.

$w_1, w_1' \in W_1$, $w_2, w_2' \in W_2$ 에 대하여 $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ 라 하자.

$w_1 - w_1' \in W_1$, $w_2' - w_2 \in W_2$ 이므로

$w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 이 성립한다.

따라서 $w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$ 이다. ■

9.

실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

<보기>

ㄱ. 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$에 대하여 $\mathbb{Q}^3$는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다.

ㄴ. $\mathbb{R}^3$의 부분공간 $U=\{(x, y, z) \mid z=x+5y\}$에 대하여 $\mathbb{R}^3$가 U와 W의 직합(direct sum) $U \oplus W$와 같게 되는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간 W가 존재한다. $\overset{\|}{U^{\perp}}$

(sol) ㄱ. ~~True~~ False ㄴ. True

ㄱ. False

Scalar $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}(1,1,1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^3$

이므로 $\mathbb{Q}^3$ 는 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간 아님.

ㄴ. True

$U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

10. < 일차독립, 일차종속 >

세 벡터 $(1,1,0), (1,x,1), (0,1,-1)$이 일차종속이 될 x의 값은? [1992]

(sol) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow x = 0$ ∎