21.

자연수 전체의 집합 N과 자연수 n에 대하여 $A_n = \{k \in \mathrm{N} \mid k \geq n\}$이라 하고, $\{A_n \mid n \in \mathrm{N}\}$을 기저(base)로 하는 N 위의 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자. $X = (\mathrm{N}, \mathfrak{I})$라 하고 $Y = [0, 1]$을 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$의 부분공간(subspace)이라 할 때, 적공간(product space) $X \times Y$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판정하고 설명하시오.
(단, $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$이고, $\mathfrak{I}_u$는 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology)이다.) [2013]

집합 $\{2n \mid n \in \mathrm{N}\} \times (Y \cap \mathbb{Q})$는 $X \times Y$에서 조밀(dense)하다. (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.)

(pf) C: 폐집합 ⟺ $C \in \{\{1, 2, \cdots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ 이므로

$$\overline{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \times (Y \cap \mathbb{Q})} = \overline{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}} \times \overline{(Y \cap \mathbb{Q})}_Y$$

$$= \mathbb{N} \times [\overline{(Y \cap \mathbb{Q})}_{\mathbb{R}} \cap Y]$$

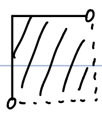
$$= \mathbb{N} \times [0, 1]$$

22.

실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$를 기저(base, basis)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_l$이라 하고, $\{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$를 기저로 하는 위상을 $\mathfrak{I}_u$라 하자.
적공간(곱공간, product space) $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_l) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{I}_u)$에서 집합

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

의 내부(interior) A°를 풀이 과정과 함께 쓰시오.
또한 A의 폐포(closure) $\overline{A}$와 A의 경계(boundary) $b(A)$를 구하시오.
(단, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$이다.) [2016]

(pf) 적공간에서 기저의 형태는  모양이다.

$$A^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \tfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\}$$

$$\overline{A} = A$$

$$b(A) = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid -\pi \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\}$$

23.

공집합이 아닌 위상공간 X의 두 부분집합 A와 B가 각각 X에서 조밀(dense)하다고 하자. 이 때, B가 X에서 열린집합이면 $A\cap B$가 X에서 조밀함을 증명하시오. [2008]

(pf) A, B가 X에서 dense $\Rightarrow$ $\overline{A}=X$, $\overline{B}=X$

$\Rightarrow$ $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cap\overline{B} = X\cap X = X$

$\therefore$ $A\cap B$는 dense in X

※ Def) $\overline{A}=X$ 일 때, A는 X의 조밀 부분집합이라 함. (dense subset)

※ 추가풀이 임의의 $x\in X$ 와 x를 포함하는 임의의 열린집합 G을 생각.

$x\in X=\overline{B}$ 이므로 $B\cap G\neq\emptyset$.

$B\cap G$ 의 한 원소 y 라 하면

$y\in X=\overline{A}$ 이고 $B\cap G$는 y를 포함하는 열린 집합이므로

$A\cap(B\cap G)\neq\emptyset$ 이다. 즉 $(A\cap B)\cap G\neq\emptyset$

따라서 $x\in\overline{A\cap B}$. 따라서 $\overline{A\cap B}=X$.

24.

정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$위에 위상(topology) $\mathfrak{I}$를 다음과 같이 정의한다.

$\mathfrak{I}=\{U\subset\mathbb{Z}\mid U=\varnothing$ 또는 U^c는 유한집합$\}$

이 때 서로 다른 정수 a_n들로 이루어진 수열 $\{a_n\}$은 위상공간 $(\mathbb{Z},\mathfrak{I})$에서 각각의 정수 m에 수렴함을 증명하시오. [1997]

(pf) (귀류법) $\{a_n\}$이 수렴하지 않는 정수 m이 존재한다고 가정하자.

그러면 m을 포함하는 적당한 열린 집합 G가 존재하여 임의의 자연수 k에 대하여 $a_l\notin G$ 인 $l>k$ 이 존재한다.

즉 $k=1$ 인 경우 $a_{n_1}\notin G$ 인 $n_1>1$ 가 존재.

$k=n_1$ 인 경우 $a_{n_2}\notin G$ 인 $n_2>n_1$ 가 존재.

$k=n_2$ 인 경우 $a_{n_3}\notin G$ 인 $n_3>n_2$ 가 존재.

$\vdots$

그러면 $\{a_{n_k}\mid k\in\mathbb{N}\}\subset G^c$ 이 성립한다.

수열 $\{a_n\}$은 서로 다른 정수들로 이루어진 수열이므로 $\{a_{n_k}\mid k\in\mathbb{N}\}$는 무한집합.

따라서 G^c은 무한집합.

한편 G는 공집합 아닌 열린집합이므로 G^c은 유한집합이 되어 모순 ($\rightarrow\leftarrow$)

25.

임의의 위상공간의 부분집합 S에 대하여, S를 부분집합으로 갖는 모든 닫힌집합들의 교집합을 $\overline{S}$로 나타낸다. X와 Y가 위상공간이고 f가 X에서 Y로의 함수일 때, f의 연속성과 동치가 아닌 것은? [1994]

① Y의 각 부분집합 B에 대하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$
② X의 각 부분집합 A에 대하여 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ 이다.
③ Y의 각 닫힌집합 B에 대하여 $f^{-1}(B)$는 X에서 닫힌집합이다.
④ X의 각 열린집합 A에 대하여 $f(A)$는 열린집합이다.

(pf) ① ⇔ ③

⇒) B: Closed set in Y 라 하자. 그러면 $\overline{B} = B$ 이다.

가정에 의하여 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$ 이다.

따라서 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ 이므로 $f^{-1}(B)$는 closed set in X.

⇐) $B \subset Y$ 라 하자.

가정에 의하여 $f^{-1}(\overline{B})$은 closed set in X.

$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ 이고 $f^{-1}(\overline{B})$는 폐집합이므로 $f^{-1}(B)$를 포함하는 가장 작은 폐집합인 $\overline{f^{-1}(B)}$는 $f^{-1}(\overline{B})$에 포함된다. ∎

26.

X를

$\mathscr{B} = \{V \subset X \mid V$와 V^c는 모두 열린집합(open set)$\}$

을 기저(basis)로 갖는 위상공간이라 하자. 그리고 F를 닫힌집합(closed set), p를 F에 속하지 않는 X의 점이라고 할 때 $f(p)=0$이고, $f(F)=\{1\}$인 연속함수 $f: X \to \mathbb{R}$가 존재함을 보이시오. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.) [2007]

(pf) $p \in X-F$ 이고, $X-F$는 열린집합이므로 $p \in V \subset X-F$ 인 basis element $V \in \mathscr{B}$가 존재.

함수 $f: X \to \mathbb{R}$ 을 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in V^c \\ 0, & x \in V \end{cases}$ 라 정의하면 $\mathbb{R}$에서 임의의 열린집합 G에 대하여

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} X, & 0,1 \in G \\ V, & 0 \in G,\ 1 \notin G \\ V^c, & 0 \notin G,\ 1 \in G \\ \emptyset, & 0,1 \notin G \end{cases}$$

이므로 f는 $f(p) = 0$ 이고 $f(F) = \{1\}$ 을 만족하는 연속함수이다.