21.

유한차원 내적공간 V의 부분공간 W ($W \neq V$)에 대하여 선형 사상 P를 V에서 W로의 정사영(orthogonal projection)이라 하자. P에 관한 설명 중 옳지 않은 것은? [2009]

① $\mathrm{Im}(P) = W$이다.
② $\mathrm{Ker}(P) \cap W = \{0\}$이다.
③ 임의의 $w \in W$에 대하여 $P(w) = w$이다.
④ 임의의 $v \in V$에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$이다.
⑤ P를 나타내는 행렬은 가역행렬~~이다~~. 아니다

(pf) 임의의 $v \in V$에 대하여 $v = w_1 + w_2$인 $w_1 \in W$, $w_2 \in W^{\perp}$가 유일하게 존재한다.

이 때 w_1을 W로의 v에 대한 정사영이라 한다.

① (C) 정사영의 정의에 의하여 $Im(P) \subset W$

(⊃) 임의의 $w \in W$에 대하여 $w = w + 0$이고 $0 \in W^{\perp}$이므로 $P(w) = w \in W$이다.

② $ker(P) \cap W = \{0\}$

($\because$ $v \in ker(P) \cap W \Rightarrow P(v) = 0,\ v \in W$

$\Rightarrow v = v - P(v) \in W^{\perp}$

$\Rightarrow v \in W \cap W^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow v = 0$)

③ 임의의 $w \in W$에 대하여 $P(w) = w$이다.

($\because$ $w \in W$, $0 \in W^{\perp}$에 대해 $w = w + 0$이므로 $P(w) = w$이다.)

④ 임의의 $v \in V$에 대하여 $P(P(v)) = P(v)$이다.

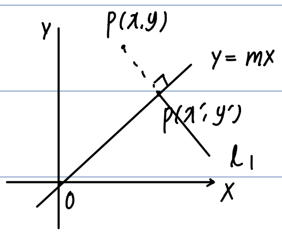
($\because$ $P(v) \in W$이므로 ③에 의하여 $P(P(v)) = P(v)$이다.)

⑤ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ 가역행렬 아님. ∎

22.

직교좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 직선 $y = mx\,(m \neq 0)$에 내린 수선의 발을 $P'(x', y')$이라고 할 때, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족하는 일차변환의 행렬 A는? [1993]

(sol)



l_1 은 기울기가 $-\frac{1}{m}$ 이고 $P'(x', y')$ 지남

$\{ x(1, m) \mid x \in \mathbb{R} \}$ 의 정규직교 기저는

$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) \right\}$ 이므로 직선 $y = mx\ (m \neq 0)$ 에 내린 수선의 발 $P'(x', y')$ 는

$P(x', y')$

$= \left\langle (x, y), \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \right)$

$= \frac{x}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{my}{\sqrt{m^2+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \right)$

$= \frac{1}{m^2+1} (x + my,\ mx + m^2 y)$

$= \frac{1}{m^2+1} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

따라서 $A = \frac{1}{m^2+1} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$

23.

다음 중 선형사상인 것은? [1990]

① $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F_1(x, y, z) = (x+1, z-2)$
② $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F_2(x, y) = xy$
③ $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F_3(x, y) = (y, x^2)$
④ $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F_4(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

(sol) ④ 함수 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 에 대하여 다음이 성립한다.

F 가 선형사상일 필요충분조건은

$F(x_1, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n,\ \cdots,\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)$

인 실수 a_{ij} 가 존재하는 것이다.

24.

선형 사상 T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$이

$$T(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 4x+5y+6z,\ 7x+8y+9z)$$

로 정의될 때, $T(\mathbb{R}^3)$의 차원(dimension)을 구하시오. [1996]

⊛ Dimension Thm

$T: V \to W$ 가 n 차원 벡터공간 V 에서 벡터공간 W 로의 선형변환이면

$\text{rank}(T) + \text{null}(T) = n$ 이 성립

rank(T) ↓ 기저 갯수 = dim(T)

null(T) ↓ 자유변수 갯수 (= leading 1 갯수)

(sol) 차원 = 기저가 몇개냐? 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

rank + null = n

rank ↓ dim = 2, null ↓ 1

기저는 $x(1,4,7) + y(2,5,8) + z(3,6,9)$

$(1,4,7)\ (2,5,8)$ 이 기저 ⇒ 2차원

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

~~$x = t,\ y = s,\ z = -\frac{1}{3}(t+2s),\ t, s \in \mathbb{R}$~~

$x = t,$
$y = 2t,$
$z = -t$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 기저 1개 ⇒ $\text{null}(T) = 1$

~~$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 기저 2개 이므로 2차원~~

⇒ $\dim(T) = \text{rank}(T)$,

$\text{rank}(T) + \text{null}(T) = 3$, $\text{rank}(T) = 2$

$\therefore \dim(T) = 2$

25.

선형사상 T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$는 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$에 의한 곱이다.

즉, $x \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $Tx = Ax$이다. T의 핵(kernel)의 차원(dimension)과 T의 상(image)의 차원을 각각 구하시오. [2005]

(sol) $\dim(\ker(A)) = \text{null}(A) = 1$

$\dim(\text{Im}(A)) = \text{rank}(A) = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{null}(T) = 1$

26.

실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^3$에 관련된 <보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오 [2010]

<보기>

선형사상 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x-y, 2y, x-3z)$에 대하여 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 차원은 1이다.

(sol) $\dim(\ker(T)) = 1$? No. zero.

$x(1,0,1) + y(-1,2,0) + z(0,0,-3) = 0$ 이려면,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 셋 다 일차독립 $\Rightarrow$ 기저 3개, $\mathrm{rank}(T) = 3$

$\dim(\ker(T)) = \mathrm{null}(T) = 0$

27.

실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

와 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L: V \to V$를

$$L(B) = AB - BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace)

$$\mathrm{im}(L) = \{L(B) \mid B \in V\}$$

의 차원은? [2012]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

(sol) $L(B) = AB - BA$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하자.

$L(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+3b \\ c & 2c+3d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2c & -2a-2b+2d \\ 2c & -2c \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 기저는 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2개 $\Rightarrow$ $\mathrm{null}(T) = 2$ $\rightarrow$ 두 기저는 일차독립집합이므로, $\dim(\mathrm{im}(T)) = \mathrm{rank}(T) = 2$

28.

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\7&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$에 대한 보기의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2010]

〈보기〉

함수 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$를 임의의 $v \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $T(v)=Av$로 정의할 때, T는 정칙선형사상이다.

(sol) $\det(A) \neq 0$ 이면 T는 정칙선형사상

$\det(A) = \begin{vmatrix}-1&2&0\\7&4&0\\0&0&3\end{vmatrix}$

$= -1(12)-2(21) = -12-42 = -54 \neq 0$ 이므로 정칙선형사상.

29.

2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$의 단위벡터(unit vector) u에 대하여 선형사상 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$을

$$T(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x}\cdot\mathrm{u})\mathrm{u} \quad \text{I)}$$

로 정의하자. 모든 벡터 x에 대하여 $\|T(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{x}\|$임을 보이시오. 또한, $\mathrm{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때, $\mathbb{R}^2$의 기저(basis) $B=\{(1,0),(1,1)\}$에 대한 T의 행렬 $[T]_B$를 (II) 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, 두 벡터 x, y에 대하여 x·y는 x와 y의 점곱(유클리드 내적, dot product, Euclidean inner roduct)이고, $\|\mathrm{x}\|$은 x의 유클리드 노름(Euclidean norm)이다.) [2016]

(sol) (I) $\|T(X)\| = \|X\|$

$\|T(X)\|^2 = T(X)\cdot T(X)$

$= (x-2(x\cdot u)u)\cdot(x-2(x\cdot u)u)$

$= x\cdot x - 2x(x\cdot u)u - 2x(x\cdot u)u + 4(x\cdot u)^2u^2$

$= x\cdot x - 4(x\cdot u)^2 + 4(x\cdot u)^2$

$= x\cdot x = \|X\|^2$ 이므로 $\|T(X)\| = \|X\|$

(II) $[T]_B = ?$

$T(X) = X - 2(X\cdot u)u$

$[T]_B = \left[\ [T((1,0))]_B \mid [T((1,1))]_B\ \right]$

$X=(1,0) \quad u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$T((1,0)) = (1,0) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= (1,0) - (1,1) = (0,-1)$

$X=(1,1) \quad u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$T((1,1)) = (1,1) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$= (1,1) - (2,2) = (-1,-1)$

$= \left[\ [(1,0)-(1,1)]_B \mid [-(1,1)]_B\ \right]$

$= \begin{bmatrix}-1&0\\-1&-1\end{bmatrix}$?

30.

3차원 유클리드 내적 공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,1)$, $v_3=(0,-1,1)$에 대하여, 두 벡터 v_1, v_2로 생성된 부분공간을 W_{12}라 하고 두 벡터 v_1, v_3으로 생성된 부분공간을 W_{13}이라 하자. $\mathbb{R}^3$의 벡터 u에 대하여 부분공간 W 위로의 u의 정사영(orthogonal projection)을 $\mathrm{proj}_W u$라 하고, 실수 k에 대하여 선형변환 $T_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$을

$$T_k(u)=\mathrm{proj}_{W_{12}}u+\mathrm{proj}_{W_{13}}u+ku$$

로 정의하자. T_k의 역변환(inverse transformation)이 존재하지 않도록 하는 모든 k의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 T_k의 랭크(계수, 계급수, 유효차수, rank)가 2인 k의 값을 구하시오. (단, 두 벡터 $u_1=(a_1,a_2,a_3)$, $u_2=(b_1,b_2,b_3)$의 유클리드 내적은 $u_1\cdot u_2=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$이다.) [2019]

(sol) $v_2 \notin \mathrm{span}\{v_1,v_3\}$ 이므로 $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ 는 $\mathbb{R}^3$의 기저이다.

$\{v_1,v_3\}$ 는 직교집합이므로 $\mathrm{proj}_{W_{13}}v_2=\dfrac{v_1\cdot v_2}{v_1\cdot v_1}\cdot v_1+\dfrac{v_3\cdot v_2}{v_3\cdot v_3}\cdot v_3$

$$=\frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{1}\cdot(1,0,0)+\frac{\overbrace{(0,-1,1)\cdot(1,1,1)}^{0}}{v_3\cdot v_3}\cdot v_3=(1,0,0)=v_1 \text{ 이다.}$$

$u_1=v_1$.

$u_2=v_2-\dfrac{\langle u_1,v_2\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1=(1,1,1)-\dfrac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}(1,0,0)=(0,1,1)$ 라 하면

$B_{1,2}=\{u_1,u_2\}$ 는 W_{12} 의 직교기저이므로

$\mathrm{proj}_{W_{12}}v_3=\dfrac{u_1\cdot v_3}{u_1\cdot u_1}\cdot u_1+\dfrac{u_2\cdot v_3}{u_2\cdot u_2}\cdot u_2$

$=\dfrac{(1,0,0)\cdot(0,-1,1)}{1}\cdot(1,0,0)+\dfrac{(0,1,1)\cdot(0,-1,1)}{\sqrt{2}}(0,1,1)=0$ 이 성립한다.

그러면 $T_k(v_1)=\mathrm{proj}_{W_{12}}v_1+\mathrm{proj}_{W_{13}}v_1+kv_1=v_1+v_1+kv_1=(k+2)v_1$

$T_k(v_2)=\mathrm{proj}_{W_{12}}v_2+\mathrm{proj}_{W_{13}}v_2+kv_2=v_2+v_1+kv_2=v_1+(k+1)v_2$

$T_k(v_3)=\mathrm{proj}_{W_{12}}v_3+\mathrm{proj}_{W_{13}}v_3+kv_3=0+v_3+kv_3=(k+1)v_3$

이므로 $[T_k]_B=\left[\,[T_k(v_1)]_B \mid [T_k(v_2)]_B \mid [T_k(v_3)]_B\,\right]$

$=\begin{bmatrix} k+2 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$ 이다. $\det([T_k]_B)=0$ 이면 T_k 의 역변환이 존재하지 않으므로

$\det([T_k]_B)=(k+2)(k+1)^2=0$

$\Leftrightarrow$ $k=-2$ 또는 $k=-1$. 그리고 $k=-2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \mathrm{rank}(T_{-2})=2$ 이다 ■