정수론 기초

1.

피보나치 수열 $\{f_n\}$은 다음과 같이 정의된다.

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,(n \geq 3)$$

피보나치 수열의 유래를 간단히 쓰고 다음 등식이 성립함을 보이시오. [1998]

$$f_{n+1}f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n \ (n \geq 2)$$

2.

(참, 거짓 판정문제) p가 소수일 때, $p!+1$을 나누는 소수는 p보다 크다. [2011]

3.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2009]

<보기>

ㄱ. 정수 a, b가 서로소이기 위한 필요충분조건은 적당한 정수 s, t에 대하여 $as+bt=1$이 성립하는 것이다.

ㄴ. 양의 정수 m과 n에 대하여 2^m-1과 2^n-1이 서로소이기 위한 필요충분조건은 m과 n이 서로소인 것이다.

ㄷ. 양의 정수가 25진법으로 표현될 때 3자리 수이기 위한 필요충분조건은 5진법으로 표현될 때 6자리 수 인 것이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

디오판투스 방정식

4.

(참, 거짓 판정문제) 부정방정식 $7x+31y=2$의 정수해가 존재한다. [2010]

5.

방정식 $2x+3y=55$를 만족하는 양의 정수해 (x,y)의 개수를 구하시오. [1992]

6.

절댓값이 10이하인 두 정수 x, y가 $32x+14y=(32,14)$를 만족시킬 때, $|x|+|y|$의 값을 구하시오. (단, (a,b)는 a와 b의 최대공약수이다.) [2009 모의평가]

7.

정수 x, y, z에 관한 다음 방정식의 일반해를 구하시오. [2008]

$$3x+4y+5z=2$$

선형합동식 관련

8.

정수 x, y, z에 관한 합동식 $x^2 + y^2 \equiv 3z^2 \pmod 4$의 해집합은

$$\{(x,\, y,\, z) \mid x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod 2\}$$

임을 보이시오. [2007]

9.

(참, 거짓 판정문제) 합동식 $6x \equiv 22 \pmod{32}$의 정수해는 법 32에 대하여 1개 뿐이다. [2010]

중국인의 나머지 정리

10.

K고등학교의 전체 학생을 같은 인원수의 9팀으로 나누면 1명이 남고, 같은 인원수의 10팀으로 나누면 2명이 남으며, 같은 인원수의 11팀으로 나누면 10명이 남는다. K고등학교 전체 학생수 x가 $x \equiv a \pmod{990}$을 만족할 때, 정수 a의 값을 구하시오. (단, $0 \le a < 990$) [2006]

11.

다음 연립일차합동식의 해를 구하시오. [2003]

$$\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{22} \\ 3x \equiv 5 \pmod{25} \end{cases}$$

12.

<보기>의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

<보기>

연립합동식 $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{28} \\ x \equiv 6 \pmod{36} \end{cases}$의 정수해가 존재한다.

Fermat 정리

13.

다음 합동식을 만족하는 정수 x, y는 어느 것인가? [1995]

$$9^x \equiv y \pmod{19}$$

① $x = 35, y = 1$

② $x = 36, y = -1$

③ $x = 36, y = 1$

④ $x = 35, y = -1$

14.

정수 $2^{15}14^{10}+2$를 11로 나누었을 때의 나머지는? [1992]

15.

(참, 거짓 판정문제) 홀수인 소수 p $(p \neq 3)$은 합동식 $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$를 만족시킨다. [2011]

16.

오늘부터 n^7째 되는 날이 금요일이면 오늘부터 $(n+2)^7$째 되는 날은 무슨 요일인가? [1995]

17.

합동방정식 $x \equiv 25^{99} \pmod{19 \cdot 13}$과 연립합동방정식 $\begin{cases} x \equiv a \pmod{19} \\ x \equiv b \pmod{13} \end{cases}$이 동치가 되도록 하는 정수 a, b의 값을 각각 구하시오. 또한 합동방정식의 정수해 x의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

(단, $0 \le a < 19$, $0 \le b < 13$, $0 \le x < 247$) [2020]

Wilson 정리

18.

$100!$를 101로 나누었을 때 나머지를 구하시오. [1994]

19.

(참, 거짓 판정문제) 홀수인 소수 p는 합동식

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$$

를 만족시킨다. [2011]

$p^m|n!$을 만족하는 m의 최댓값

20.

$500! \times 200!$이 35^n으로 나누어 떨어질 때 정수 n의 최댓값을 구하시오. [1993]

Euler 정리

21.

10과 서로소인 양의 정수 m에 대하여 m^{18}의 마지막 두 자리 수가 21이다. m^{294}의 마지막 두 자리 수를 구하시오. [2014]

22.

자연수 m에 대하여 집합 T_m을

$$T_m = \{a \in \mathbb{N} \mid a^{\phi(8m)} \equiv 1 \pmod{8m},\ 1 \le a \le 8m\}$$

으로 정의할 때, 집합 T_m의 원소의 개수가 $4\phi(m)$이 되도록 하는 100이하의 자연수 m의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{N}$은 자연수 전체의 집합이고, $\phi(n)\ (n \in \mathbb{N})$은 n 이하의 자연수 중에서 n과 서로소인 수의 개수로 정의되는 오일러 ϕ-함수이다.) [2019]

위수

23.

정수의 곱셈에서 법 m에 대한 3의 위수(order of 3 modulo m)을 $\mathrm{ord}_m 3$으로 나타낸다.

$$r = \mathrm{ord}_5 3$$

$$s = \mathrm{ord}_7 3$$

$$t = \mathrm{ord}_{35} 3$$

일 때, 세 수 r, s, t의 곱 rst의 값은? [2009 모의평가]

① 48 ② 144 ③ 288

④ 24^2 ⑤ 35^2

24.

〈보기〉의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

〈보기〉

홀수 소수 p에 대하여 합동식 $x^4 \equiv -1 \pmod{p}$의 정수해가 존재하면 $p \equiv 1 \pmod{8}$이다.

원시근

25.

원시근(primitive root)과 관련된 <보기>의 명제 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2009]

<보기>

ㄱ. 19는 원시근을 갖는다.

ㄴ. 3은 8의 원시근이다.

ㄷ. 1보다 큰 정수 m의 원시근 g와 양의 정수 i, j에 대하여, $g^i \equiv g^j \pmod{m}$이면 $i \equiv j \pmod{\phi(m)}$이다. (단, $\phi(m)$은 $1, 2, \cdots, m$ 중 m과 서로소인 수의 개수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26.

$G = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$는 곱셈에 대하여 순환군(cyclic group)이 된다. 이 사실을 이용하여 단위원시 10-제곱근(법11에 관한 원시근, primitive 10^{th} root of unity)을 모두 구하시오. [2002]

27.

정수 2는 법 29에 대한 원시근(primitive root)이다. 1보다 크거나 같고 28보다 작거나 같은 정수 중 합동식 $x^4 \equiv 1 \pmod{29}$의 해를 모두 곱한 값을 m이라 할 때, $2^k \equiv m \pmod{29}$를 만족시키는 최소의 양의 정수 k는? [2010]

28.

정수 x_0과 27은 서로소이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$x_n \equiv 16x_{n-1} \pmod{27}, 0 < x_n < 27$$

이 성립할 때, $x_n \equiv x_0 \pmod{27}$이 되는 최소의 자연수 n의 값은? (단, 2는 법 27에 관한 원시근(primitive root)이다.) [2012]

29.

정수 23은 법(modulo) 89에 대한 원시근(primitive root)이고, 89는 소수이다. 정수 $a = 23^{41}$에 대하여 $a^n \equiv 23 \pmod{89}$를 만족하는 가장 작은 양의 정수 n의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2016]

30.

3은 법 50에 대한 원시근(primitive root)이다.
1보다 크거나 같고 25보다 작거나 같은 정수 중 합동식

$$x^{12} \equiv -9 \pmod{50}$$

의 해를 모두 더한 값은? [2013]

31.

합동식

$$x^{n+5} - x^n - x^5 + 1 \equiv 0 \pmod{131}$$

의 법 131에 대한 해의 개수가 5가 되도록 하는 130 이하의 자연수 n의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2018]

32.

합동방정식

$$(x^{10}-1)(x^{10}+x^5+1)(x^{36}-1) \equiv 0 \pmod{61}$$

의 법 61에 대한 해의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2021]

이차합동식

33.

다음 두 이차합동식의 해가 존재하는지 판별하시오. [2004]

(1) $x^2 \equiv 97 \pmod{101}$

(2) $x^2+2x \equiv 28 \pmod{89}$

34.

(참, 거짓 판정문제) 합동식

$$x^2+10x+20 \equiv 0 \pmod{17 \cdot 23}$$

의 정수해가 존재한다. [2010]

35.

이차합동식 $x^2+44 \equiv 0 \pmod{111}$의 정수해는 법 111에 대하여 m개다. m의 값은? [2011]

36.

$1 \le k \le 2016$인 자연수 k에 대하여

$$a_k = k! \times (2017-k)!$$

일 때, 르장드르 기호(Legendre symbol)의 합

$$\sum_{k=3}^{2014} \left(\frac{a_k}{2017} \right)$$

의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (참고:2017은 소수이다.) [2017]

37.

다음 삼차 합동방정식에 대하여 $\mathbb{Z}_{2015}$에 속하는 해의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2015]

$$x^3 - 8 \equiv 0 \pmod{2015} \quad \text{(참고 : } 2015 = 5 \times 13 \times 31\text{)}$$

38.

〈보기〉의 진위를 판정하고 이유를 설명하시오. [2012]

〈보기〉

부정방정식 $x^2+2x+5-65y^2=2011$의 정수해가 존재한다.

39.

소수 $p(p>2)$에 대하여 $-2p$가 $935(=5\times11\times17)$의 이차잉여(quadratic residue)일 때, p의 이차잉여만을 〈보기〉에서 있는 대로 고르시오. [2013]

〈보기〉

ㄱ. -11 ㄴ. 5 ㄷ. 17

40.

다항식환 $\mathbb{Z}_{2014}[x]$에서 $f(x)=x^2-14$를 두 일차식의 곱 $f(x)=(ax+b)(cx+d)$로 나타낼 수 없음을 증명하시오. [2014]