정동명 해석학

4.1 수열의 수렴성

문 1. 다음의 수열 $\langle x_n \rangle$ 중에서 어느 것이 수렴하는가를 조사하여라. 또, 그 이유를 밝혀라.

(1) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

풀 이 수렴한다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

아르키메데스 성질에 의하여 $2 < \epsilon n_0$을 만족하는 $n_0 \in N$을 택하면

$n > n_0$일 때, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$ 이 성립한다.

여기서 $x_n = \dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+1}$이므로 $|x_n - 1| = \dfrac{2}{n+1} < \epsilon$ 이 성립한다.

따라서 x_n은 1로 수렴한다.

(2) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

풀 이 수렴한다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

아르키메데스 성질에 의하여 $2 < \epsilon n_0$을 만족하는 $n_0 \in N$을 택하면

$n > n_0$일 때, $|x_n| = \left|\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right| < \dfrac{2}{n} < \dfrac{2}{n_0} < \epsilon$ 이 성립한다.

따라서 x_n은 0으로 수렴한다.

(3) $x_n = \dfrac{5n^2}{2n^3+3}$

풀 이 수렴한다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

아르키메데스 성질에 의하여 $5 < 2\epsilon n_0$을 만족하는 $n_0 \in N$을 택하면

$n > n_0$일 때, $|x_n| = \left|\dfrac{5n^2}{2n^3+3}\right| < \left|\dfrac{5n^2}{2n^3}\right| < \dfrac{5}{2n} < \dfrac{5}{2n_0} < \epsilon$ 이 성립한다.

따라서 x_n은 0으로 수렴한다.

(4) $x_n = \dfrac{3n^2+1}{n^2+1}$

풀 이 수렴한다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

아르키메데스 성질에 의하여 $1 < \epsilon n_0$을 만족하는 $n_0 \in N$을 택하면

$n > n_0$일 때, $|x_n - 3| = \left|\dfrac{3n^2+1}{n^2+1} - 3\right| < \left|\dfrac{3n^2+1-3n^2}{n^2}\right| < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n_0^2} < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$ 이 성립한다.

따라서 x_n은 3으로 수렴한다.

(5) $x_n = \dfrac{n^3}{n+1}$

풀 이 수렴하지 않는다. 즉, 발산한다.

$x_n = \dfrac{n^3}{n+1} = n^2 - n + 1 - \dfrac{1}{n+1} > n^2 - n$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty$ 이다.

따라서 x_n 또한 ∞로 발산한다.

(6) $x_n = 1 + (-1)^n$

풀 이 수렴하지 않는다. 즉, 발산한다.

n이 홀수일 때, $x_n = 1 + (-1)^n = 1 - 1 = 0$ 이고,

n이 짝수일 때, $x_n = 1 + (-1)^n = 1 + 1 = 2$ 임을 알 수 있다.

즉, x_n은 진동한다. 따라서 $_n$은 수렴하지 않는다.

(7) $x_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$

풀 이 수렴한다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

아르키메데스 성질에 의하여 $\dfrac{1}{2} < \epsilon n_0$을 만족하는 $n_0 \in N$을 택하면

$n > n_0$일 때, $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{n^2+n}{2n^2} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{n}{2n^2} = \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{2n_0} < \epsilon$ 이 성립한다.

($\because$ $x_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2n^2}$)

따라서 x_n은 $\dfrac{1}{2}$에 수렴한다.

(8) $x_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{2^n}$

풀 이 수렴한다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$1 < \epsilon n_0$인 $n_0 \in N$을 택하면 ($\because$아르키메데스 성질에 의하여 n_0는 존재한다.)

$n > n_0$일 때, $|x_n - 1| = \left|\dfrac{2^n - (-1)^n}{2^n} - 1\right| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{(1+1)^n} \le \dfrac{1}{1+n} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$ ($\because$ $(1+1)^n \ge 1+n$)

이 성립한다. 따라서 x_n은 1로 수렴한다.

(9) $x_n = (-1)^{2n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $1 < \epsilon n_0$인 $n_0 \in N$을 택하면($\because$아르키메데스 성질에 의하여 n_0는 존재한다.)

$n > n_0$일 때, $|x_n - (-1)| = \left|(-1)^{2n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + 1\right| = \dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$ 이 성립한다.

따라서 x_n은 -1로 수렴한다.

(10) $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

풀 이 수렴하지 않는다. 즉, 발산한다.

n이 홀수일 때, $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n} = -1$ 이고, n이 짝수일 때, $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n} = 1$ 임을 알 수 있다.

즉, x_n은 진동하므로 수렴하지 않는다.

문 2. 극한의 정의에서 $|x_n - x| < \epsilon$을 $|x_n - x| \le \epsilon$으로, $n > K$를 $n \ge K$로 바꾸어도 무방함을 설명하여 보아라.

풀 이

생략함.

문 3. 수열 $\langle x_n \rangle$이 어떤 자연수 K보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 $x_n = x$라고 하면, $\langle x_n \rangle$은 x에 수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 어떤 자연수 K를 택하면 $n > K$일 때, $|x_n - x| = |x - x| = 0 < \epsilon$이 성립한다.

따라서 x_n은 x에 수렴한다.

문 4. 두 수열 $\langle x_n \rangle$과 $\langle y_n \rangle$이 모두 x에 수렴한다고 하자. 어떤 자연수 K보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le z_n \le y_n$을 만족하면, 수열 $\langle z_n \rangle$은 x에 수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$x_n \to x \,(n \to \infty)$이므로

충분히 큰 자연수 n_1이 존재하여 $n > n_1$일 때, $|x_n - x| < \epsilon$이 성립한다. 즉, $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ 이다.

$y_n \to x \,(n \to \infty)$이므로

충분히 큰 자연수 n_2이 존재하여 $n > n_2$일 때, $|y_n - x| < \epsilon$이 성립한다. 즉, $x - \epsilon < y_n < x + \epsilon$ 이다.

이제 $n_0 = \max\{n_1, n_2, K\}$를 택하면,

$n > n_0$일 때, $x - \epsilon < x_n < z_n < y_n < x + \epsilon$이 성립한다. 즉, $|z_n - x| < \epsilon$ 이다.

따라서 z_n은 x에 수렴한다.

문 5. 수열 $\langle y_n \rangle$이 0 에 수렴하고, 어떤 자연수 K보다 큰 자연수 n에 대하여 $0 \le |x_n| \le y_n$을 만족하면, 수열 $\langle x_n \rangle$은 0 에 수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$y_n \to 0 \,(n \to \infty)$이므로 충분히 큰 자연수 L이 존재하여 $n > L$일 때, $|y_n| < \epsilon$을 만족한다.

즉, $-\epsilon < y_n < \epsilon$ 이다.

또한 가정에 의하여 어떤 자연수 K가 존재하여 $n > K$일 때, $0 \le |x_n| \le y_n$을 만족한다.

이제 $n_0 = \max\{K, L\}$을 택하면,

$n > n_0$일 때, $-\epsilon < 0 \le |x_n| \le y_n < \epsilon$ 이 성립한다. 즉, $|x_n - 0| < \epsilon$이다.

따라서 x_n은 0으로 수렴한다.

문 6. 수열 $\langle x_n \rangle$이 x에 수렴하고, 모든 자연수 n에 대하여 $|x_n| \le M$을 만족하면 $|x| \le M$임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$x_n \to x\,(n \to \infty)$이므로 충분히 큰 자연수 n_0이 존재하여 $n > n_0$일 때, $|x_n - x| < \epsilon$이 성립한다.

또한 가정에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $|x_n| \le M$이 성립한다.

$n > n_0$일 때, $|x| = |x - x_n + x_n| < |x - x_n| + |x_n| < \epsilon + M$

여기서 ϵ는 임의의 양수이므로 $|x| \le M$ 이 성립한다.

문 7. 수열 $\langle x_n \rangle$이 0 에 수렴하고, 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ge 0$이면 $\langle \sqrt{x_n} \rangle$은 0 에 수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

수열 x_n이 0 으로 수렴하므로 적당한 n_0가 존재하여 $n > n_0$일 때, $|x_n - 0| = x_n < x_{n_0} < \epsilon^2$을 만족한다.

또한 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ge 0$이고 $y = \sqrt{x}$는 $x \ge 0$에서 증가함수이므로

$n > n_0$일 때, $|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} < \sqrt{x_{n_0}} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$ 이 성립한다.

따라서 $\sqrt{x_n}$은 0으로 수렴한다.

문 8. 실수 a가 $0 < a < 1$일 때는 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ 이고 $a > 1$일 때는 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$임을 보여라.

[힌트: 부등식 $(1+h)^n > 1+nh\ (h>0)$을 이용하여라.]

풀 이

① $0 < a < 1$인 경우

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$\frac{1}{a} = 1 + h$라 하자. 단, $h > 0$

이제 $\frac{1}{h} < \epsilon n_0$인 $n_0 \in N$을 택하면

(∵ 존재성: 아르키메데스 성질)

$n > n_0$일 때 $|a^n - 0| = a^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+hn} < \frac{1}{hn} < \frac{1}{hn_0} < \epsilon$ 이 성립한다.

(∵$(1+h)^n > 1+nh\ (h>0)$)

따라서 실수 a가 $0 < a < 1$일 때는 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$이 성립한다.

② $a > 1$인 경우

$a = 1 + h$라 하자. 단, $h > 0$

그러면 $a^n = (1+h)^n > 1 + nh$이 성립한다.

여기서 $b_n = 1 + nh$라 할 때 b_n은 ∞로 발산함은 자명하므로 a_n 또한 ∞로 발산한다.

문 9. 수열 $\langle x_n \rangle$에 있어서, 각 자연수 n에 대하여 $\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$으로 정의되었을 때, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ 이면 수열 $\langle \sigma_n \rangle$은 수렴하고 $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = x$임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$이면 적당한 자연수 n_1가 존재하여 $n > n_1$일 때, $|x_n - x| < |x_{n_1} - x| < \frac{\epsilon}{2}$이 성립한다.

또한 $M = \max\{|x_1 - x|, |x_2 - x|, \cdots, |x_{n_0 - 1} - x|\}$라 할 때

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$이므로 적당한 자연수 n_2가 존재하여 $n > n_2$일 때, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{M\epsilon}{2(n_2 - 1)}$이 성립한다.

이제 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$로 택하면

$$
\begin{aligned}
n > n_0 \text{일 때 } |\sigma_n - x| &= \left|\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - x\right| \\
&< \frac{1}{n}\{|x_1 - x| + |x_1 - x| + \cdots + |x_{n_0} - x| + |x_{n_0 + 1} - x| + \cdots + |x_n - x|\} \\
&< \frac{1}{n}\left\{(n_0 - 1)M + (n - n_0 + 1)\frac{\epsilon}{2}\right\} < \frac{n_0 - 1}{n}M + \frac{n - n_0 + 1}{2n}\epsilon \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

따라서 $\lim_{n \to \infty} \sigma_n = x$임을 알 수 있다.

문 1. 수열 $\langle x_n \rangle$과 $\langle y_n \rangle$에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ $\left[\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)\right]$이 존재한다고 해서 일반적으로 극한 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 또는 $\lim_{n\to\infty}y_n$이 존재하는가? 존재하지 않으면 그 예를 들어 보여라.

풀 이 존재하지 않는다.

$x_n=1+(-1)^n, y_n=1-(-1)^n$라 하자.

이 때, $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(1+(-1)^n+1-(-1)^n)=2$ 이지만 극한 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 와 $\lim_{n\to\infty}y_n$은 존재하지 않는다. 마찬가지로 $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}((1+(-1)^n)(1-(-1)^n))=1^2-1^2=0$ 이지만 극한 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 와 $\lim_{n\to\infty}y_n$은 존재하지 않는다.

문 2. 수열 $\langle x_n \rangle$이 유계이고, 수열 $\langle y_n \rangle$이 0 에 수렴하면 수열 $\langle x_n y_n \rangle$은 수렴하고 0 에 수렴함을 보여라. 여기서, 만일 $\lim_{n\to\infty}y_n=y\,(\neq 0)$이라도 수열 $\langle x_n y_n \rangle$은 일반적으로 수렴하는가?

풀 이

① 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 x_n이 유계이므로 적당한 실수 M이 존재하여 $|x_n|<M$을 만족한다.

또한 y_n이 0 으로 수렴하므로 적당한 n_0가 존재하여 $|y_n-0|<|y_{n_0}|<\dfrac{\epsilon}{M}$이 성립한다.

그러면 $n>n_0$일 때, $|x_n y_n-0|=|x_n||y_n|<M|x_n|<M\dfrac{\epsilon}{M}=\epsilon$ 이 성립한다.

② $x_n=(-1)^n, y_n=1-\dfrac{1}{n}$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}x_n y_n=(-1)^n(1-\dfrac{1}{n})=(-1)^n$이다. 즉, 진동한다.

따라서 일반적으로 $x_n y_n$은 수렴하지 않는다.

문 3. 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\geq 0$이고, 수열 $\langle x_n \rangle$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}x_n\geq 0$임을 보여라. 또, 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\geq y_n$이고, 수열 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}x_n\geq \lim_{n\to\infty}y_n$임을 보여라.

풀 이

① 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}x_n\geq 0$이 아니라고 가정하자. 즉, $x=\lim_{n\to\infty}x_n<0$라 하자.

그러면 적당한 n_0가 존재하여 $x_{n_0}<0$을 만족한다. 이는 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\geq 0$인 가정에 모순이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}x_n\geq 0$이다.

[다른 풀이]

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $x=\lim_{n\to\infty}x_n$이고 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\geq 0$이므로 적당한 자연수 n_0가 존재하여 $n>n_0$일 때, $0\leq x_n<x+\epsilon$이다. 여기서 ϵ는 임의의 양의 정수이므로 $x\geq 0$가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}x_n\geq 0$이다.

② 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}x_n\geq \lim_{n\to\infty}y_n$이 아니라고 가정하자. 즉, $x=\lim_{n\to\infty}x_n<\lim_{n\to\infty}y_n=y$라 하자.

그러면 적당한 n_0가 존재하여 $x_{n_0}<y_{n_0}$을 만족한다. 이는 모든 자연수 n에 대하여 $x_n\geq y_n$인 가정에 모순이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}x_n\geq \lim_{n\to\infty}y_n$이다.

[다른 풀이]
$z_n = x_n - y_n$이라 하자. 그러면 x_n, y_n이 수렴하므로 z_n 또한 수렴한다.
모든 자연수 n에 대하여 $x_n \geq y_n$이므로 $z_n = x_n - y_n \geq 0$이고
따라서 ①에 의하여 $\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n \geq 0$이다. 즉, $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$이 성립한다.

문 4. 수열 $\langle x_n \rangle$과 $\langle y_n \rangle$이 각각 x와 y에 수렴할 때, 수열 $\langle \max\{x_n, y_n\} \rangle$은 $\max\{x, y\}$에 수렴하고, 또한 $\langle \min\{x_n, y_n\} \rangle$은 $\min\{x,y\}$에 수렴함을 보여라.

풀 이

$\max\{x_n, y_n\} = \frac{1}{2}\{x_n + y_n + |x_n - y_n|\}, \min\{x_n, y_n\} = \frac{1}{2}\{x_n + y_n - |x_n - y_n|\}$임을 통하여 수열 x_n, y_n이 각각 x, y에 수렴하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\{x_n + y_n + |x_n - y_n|\} = \frac{1}{2}\{x + y + |x - y|\} = \max\{x, y\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \min\{x_n, y_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\{x_n + y_n - |x_n - y_n|\} = \frac{1}{2}\{x + y - |x - y|\} = \min\{x, y\}$$

문 5. 수열 $\langle x_n \rangle$이 모든 자연수 n에 대하여 $x_n > 0$이고 $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$이라고 할 때, 수열 $\langle y_n \rangle = \left\langle \frac{1}{x_n} \right\rangle$은 0 에 수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $M = \frac{1}{\epsilon}$로 택하면
$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$이므로 적당한 자연수 n_0가 존재하여 $n > n_0$일 때, $|x_n| > M$을 만족한다.
그러면 $|y_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M} = \epsilon$ 이 성립한다.
따라서 y_n은 0 으로 수렴한다.

문 6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$임을 보여라. [힌트: $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$으로 놓고 이항정리를 이용하라.]

풀 이

$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$라 하자. 그러면 이항정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$n = (1 + h_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \Leftrightarrow 0 < h_n^2 < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 < h_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

여기서 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ 이므로 조임정리에 의하여 $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$이다.
따라서 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$이다.

문 7. 임의의 $x>0$에 대하여 $\lim x^{\frac{1}{n}}=1$임을 보여라.

[힌트: $x^{\frac{1}{n}}=1+h_n$으로 놓고 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$임을 보여라.]

풀 이

임의의 $x>0$에 대하여

① $x=1$이면 자명하다.

② $x>1$인 경우

$x^{\frac{1}{n}}=1+h_n$라 하자. 단, $h_n>0$

그러면 이항정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$x=(1+h_n)^n>1+nh_n>nh_n \Leftrightarrow 0<h_n<\frac{x}{n}$$

여기서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$ 이므로 조임정리에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$이다.

③ $0<x<1$인 경우

$\frac{1}{x}>1$이므로 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}=1+h_n$이라 하자. 단, $h_n>0$

그러면 이항정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{x}=(1+h_n)^n>1+nh_n>nh_n \Leftrightarrow 0<h_n<\frac{1}{xn}$$

여기서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{xn}=0$ 이므로 조임정리에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$이다.

[다른 풀이]

임의의 $a>0$에 대하여 $a=1$이면 자명하다. 그러므로 $a\neq 1$인 경우에만 보이면 충분하다.

$y=a^x$은 연속함수이다. 단, $a>0,\ a\neq 1$

그러면 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=f(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})=f(0)=1$ 이 성립한다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$이다.

4.3 부분수열

문 1. $\langle y_n \rangle$이 수열 $\langle x_n \rangle$의 부분수열이고, $\langle z_n \rangle$이 $\langle y_n \rangle$의 부분수열이면 $\langle z_n \rangle$은 $\langle x_n \rangle$의 부분수열임을 보여라.

풀 이

$\langle y_n \rangle \subseteq \langle x_n \rangle$이고 $\langle z_n \rangle \subseteq \langle y_n \rangle$이므로 $\langle z_n \rangle \subseteq \langle x_n \rangle$임은 자명하다.
따라서 $\langle z_n \rangle$은 $\langle x_n \rangle$의 부분수열이다.

문 2. 수열 $\langle x_n \rangle$의 두 부분수열 $\langle x_{2n} \rangle$과 $\langle x_{2n+1} \rangle$이 다같이 x에 수렴하면 원 수열 $\langle x_n \rangle$도 x에 수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여
x_{2k}와 x_{2k+1}이 다같이 x에 수렴하므로
적당한 자연수 k_1이 존재하여 $2n > k_1$일 때, $|x_{2n} - x| < \epsilon$이 성립하고
적당한 자연수 k_2이 존재하여 $2n+1 > k_2$일 때, $|x_{2n+1} - x| < \epsilon$이 성립한다.
이제 $n_0 = \max\{k_1, k_2\}$을 택하면
$n > n_0$일 때, $|x_n - x| < \epsilon$이 성립한다. 따라서 원 수열 $\langle x_n \rangle$도 x에 수렴한다.

문 3. 수열 $\langle (-1)^n \rangle$에 대하여 정리 4.3.4 이 성립함을 확인하여 보아라.

풀 이

$a_n = (-1)^n$이라 하자. $n = 2k$일 때, $a_{2k} = 1$이고 따라서 볼차노-와이어슈트라스 정리를 만족함을 알 수 있다.

문 4. 수렴하는 수열은 반드시 유계이지만, 모든 유계수열은 반드시 수렴하지 않음을 예를 들어 설명하여라. (정리 4.3.4와 비교)

풀 이

① 수렴하는 수열이 유계임을 보이자.
$\langle a_n \rangle$이 a로 수렴한다고 하자. 그러면 적당한 n_0가 존재하여 $n > n_0$일 때, $|a_n - a| < \epsilon$이 성립한다.
여기서 $M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, a + \epsilon\}$이라 택하자.
그러면 $|a_n| \le M$이다. 따라서 수렴하는 수열은 유계이다.
② $a_n = (-1)^n$이라 하자. 그러면 a_n은 유계수열임은 자명하다. 하지만 a_n은 수렴하지는 않는다.

문 5. 수열 $\langle x_n \rangle$이 x에 수렴하는 필요충분조건은 $\langle x_n \rangle$의 임의의 부분수열이 같은 극한 x에 수렴하는 것임을 보여라.

풀 이

($\rightarrow$) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\langle x_{n_k} \rangle$를 $\langle x_n \rangle$의 임의의 부분수열이라 하자.
우선 $\langle x_n \rangle$이 x에 수렴하므로 적당한 자연수 m이 존재하여 $n > m$일 때, $|x_n - x| < \epsilon$을 만족한다.
$n_k \ge k$임은 자명하다.
($\because k = 1$일 때 $n_1 \ge 1$임은 당연함. $k = m$일 때 성립한다고 가정하자. 즉, $n_m \ge m$

$n_{m+1} \geq n_m + 1 \geq m+1$이 성립한다. 따라서 $k=m+1$일 때도 성립한다.
그러므로 수학적 귀납법에 의하여 $n_k \geq k$은 자명하다. 단, k는 자연수)
그러면 $k>m$인 k를 택하면 $n_k \geq k > m$이 성립하여 $|x_{n_k}-x| \leq |x_k - x| < \epsilon$이 성립한다.
따라서 임의의 부분수열 $\langle x_{n_k} \rangle$에 대하여 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$를 만족한다.
($\leftarrow$) 자기 자신도 $\langle x_n \rangle$의 부분수열이므로 $\langle x_n \rangle$이 x에 수렴하는 것은 가정에 의하여 자명하다.

문 6. $\langle x_n \rangle$이 유계수열이고 수렴하지 않는다고 할 때, $\langle x_n \rangle$은 서로 다른 극한에 수렴하는 두 개의 부분수열이 존재함을 증명하여라. [힌트: $Bolzano-Weierstrass$정리를 이용하여라.]

풀 이

$\langle x_n \rangle$이 유계수열이므로 볼차노-와이어 슈트라스 정리에 의하여 수렴하는 부분수열 $\langle x_{n_k} \rangle$를 갖는다.
가정에 의하여 $\langle x_n \rangle$은 수렴하지 않으므로 $\langle x_n - x_{n_k} \rangle \neq \varnothing$이다.
$\langle y_n \rangle$을 $\langle x_n \rangle - \langle x_{n_k} \rangle$의 n번째 수로 정의한 수열이라 하면 $\langle y_n \rangle$ 또한 유계수열이므로 볼차노-와이어 슈트라스 정리에 의하여 수렴하는 부분수열 $\langle y_{n_k} \rangle$을 갖는다.
$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \lim\limits_{m\to\infty} y_{n_k}$이면 자명하다. 그러므로 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{m\to\infty} y_{n_k}$이라 가정하자.
$\langle y_n^1 \rangle$를 $\langle y_n \rangle - \langle y_{n_k} \rangle$의 n번째 수로 정의한 수열이라 하자.
$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \lim\limits_{m\to\infty} y_n^1$이면 자명하므로 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{m\to\infty} y_n^1$이라 하자.
마찬가지 방법으로 $\langle y_n^2 \rangle$를 정의하자.
이와 같은 과정을 반복하면 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \lim\limits_{m\to\infty} y_n^m$을 만족하는 적당한 자연수 m이 존재한다.
만약 존재하지 않는다면 임의의 부분수열이 수렴하게 되어 $\langle x_n \rangle$은 수렴한다. 이는 모순이다.
따라서 $\langle x_n \rangle$은 서로 다른 극한에 수렴하는 두 개의 부분수열 $\langle x_{n_k} \rangle, \langle y_n^m \rangle$을 갖는다.

문 7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$이고 $\langle x_{n_k} \rangle$가 $\langle x_n \rangle$의 임의의 부분수열일 때, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$임을 보여라.

풀 이

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$이므로 $M>0$에 대하여 적당한 자연수 m이 존재하여 $n>m$일 때, $x_n > M$이 성립한다.
그러면 $k>m$인 k을 택하면 $n_k > k > m$이므로 $x_{n_k} > x_k > M$이 성립한다. 따라서 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$이다.

정동명 해석학

4.4 수열의 수렴 판정법

문 1. 수열 $\langle x_n \rangle$이 $x_n = \sqrt{n^2+n}-n$으로 정의되었을 때, $\langle x_n \rangle$은 수렴하고 $n\to\infty$일 때 $x_n \to \frac{1}{2}$임을 증명하여라.

풀 이

$\frac{n}{2n+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+1}+n} 0 < x_n = \sqrt{n^2+n}-n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$이 성립한다.

여기서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$이므로 조임 정리에 의하여 $\langle x_n \rangle$은 수렴하고 이 때, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ 이다.

문 2. 수열 $\langle x_n \rangle$이 $x_1 > 1, x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$으로 정의되었을 때, $\langle x_n \rangle$은 단조감소하고 유계임을 보여라. 그리고 그 극한을 구하여라.

풀 이

① $x_n \ge 1$임을 보인다.

$n=1$일 때는 가정에 의하여 자명하다.

$n=k$일 때 성립한다고 가정하자. 즉, $x_k \ge 1$ 그러면 $0 < \frac{1}{x_k} \le 1$이고 따라서 $x_{k+1} = 2 - \frac{1}{x_k} \ge 1$이 성립한다. 즉, $n=k+1$일 때 성립한다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 $\langle x_n \rangle$은 아래로 유계이다.

② $x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - x_n = 2 - \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \le 2-2=0$ ($\because x_n > 0$이므로 산술-기하 평균)

따라서 $\langle x_n \rangle$은 단조감소 수열이다.

③ 단조수렴정리에 의하여 $\langle x_n \rangle$은 수렴한다.

이제 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$라 하자. 단, $x \ne 0$

그러면 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x_n}\right) \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ 이다.

따라서 $x=1$ 이다. 그러므로 $\langle x_n \rangle$의 극한은 1이다.

문 3. 수열 $\langle x_n \rangle$에 있어서 $n\to\infty$일 때, $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to r, r<1$이면 $n\to\infty$일 때, $x_n \to 0$임을 보여라.

풀 이

$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to r, r<1$이므로

$\epsilon = \frac{1-r}{2} > 0$에 대하여 적당한 자연수 K가 존재하여 $n \ge K$일 때, $\left|\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - r\right| < \frac{1-r}{2} = \epsilon$이 성립한다.

즉, $|x_{n+1}| < \left(\frac{r+1}{2}\right)|x_n|$ 이 성립한다. 단, $x_n \ne 0$이다.

그러면 $0 < |x_n| < \left(\frac{r+1}{2}\right)|x_{n-1}| < \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 |x_{n-2}| < \cdots < \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-K} |x_K|$ 이다.

여기서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-K} = 0$이므로 조임 정리에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|x_n| = 0$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 이다.

문 4. 수열 $\langle x_n \rangle$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} x_n = sup\ \{x_n\}$이면, $\langle x_n \rangle$은 단조증가 하는가?

풀 이 반드시 단조증가 하는 것은 아니다.

$x_n = \dfrac{a_n}{n}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$이라 하자.

그러면 $n = 2k$ 일 때, $x_{2k} = 0$

$n = 2k+1$일 때, $x_{2k+1} = -\dfrac{1}{2k+1}$

$n = 2k+2$일 때, $x_{2k+2} = 0$

이다. 하지만 $x_{2k} > x_{2k+1}$이고, $x_{2k+1} < x_{2k+2}$이다. 따라서 단조증가하지 않는다.

문 5. 수열 $\langle x_n \rangle$이 단조감소하고 $\langle x_n \rangle$의 한 부분수열 $\langle x_{n_k} \rangle$가 x 에 수렴하면, 원 수열 $\langle x_n \rangle$도 또한 x 에 수렴함을 증명하여라.

풀 이

$\langle x_n \rangle$가 단조감소수열이므로 $\langle x_{n_k} \rangle$ 또한 단조감소수열임은 자명하다. 또한 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$이므로 모든 자연수 k에 대하여 $x_{n_k} \ge x$이다. ($\because$ $x_{n_K} < x$인 자연수 K가 존재하면 $\langle x_{n_k} \rangle$이 단조감소 수열이므로 $n \ge K$이 일 때, $x_{n_k} < x_{n_K} < x$가 성립하여 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$인 사실에 모순된다.)

이제 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ge x$임을 보이면 충분하다.

$x_t < x$인 자연수 t가 존재한다고 가정하자. 그러면 자연수의 정렬성에 의하여 $n_s < t$인 자연수 s가 존재해서 $x_{n_s} < x_t < x$을 만족한다. ($\because$ $\langle x_n \rangle$이 단조감소수열)

하지만 이는 모든 자연수 k에 대하여 $x_{n_k} \ge x$인 사실에 모순이다. 따라서 $\langle x_n \rangle$은 아래로 유계이다.

그러므로 단조수렴정리에 의하여 $\langle x_n \rangle$은 수렴하고 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ 이므로 따라서 $\lim_{k\to\infty} x_n = x$ 이다.

문 6. 수열 $\langle x_n \rangle$이 수렴할 필요충분조건은 임의의$\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 K가 존재하여 모든 자연수 p,q에 대해서 $|x_{K+p} - x_{K+q}| < \epsilon$이 성립하는 것임을 증명하여라.

풀 이

($\rightarrow$) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\langle x_n \rangle$이 수렴하므로 $Cauchy$ 수열이다.

그러면 적당한 자연수 K가 존재해서 $n > m \ge K$일 때, $|x_n - x_m| < \epsilon$ 을 만족한다.

여기서 $n = K+p, m = K+q$ (단, $p > q$ 인 p,q는 임의의 자연수)로 정의하자. 그러면
적당한 자연수 K가 존재하여 모든 자연수 p,q에 대하여 $|x_{K+p} - x_{K+q}| < \epsilon$ 을 만족함을 알 수 있다.

($\leftarrow$) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 가정에 의하여 적당한 자연수 K가 존재하여 모든 자연수 p,q에 대하여 $|x_{K+p} - x_{K+q}| < \epsilon$을 만족한다. 그러면 $n > m \ge K$일 때, $n = K+p, m = K+q$ (단, $p > q$)를 만족하는 자연수 p,q가 존재하고 이 때 $|x_n - x_m| = |x_{K+p} - x_{K+q}| < \epsilon$을 만족한다. 따라서 $\langle x_n \rangle$은 $Cauchy$ 수열이다. 그러므로 $\langle x_n \rangle$은 수렴한다.

문 7. 수열 $\langle x_n \rangle$이 수렴할 필요충분조건은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 K가 존재하여 $n > K$인 모든 자연수 n에 대하여 $|x_n - x_K| < \epsilon$이 성립하는 것임을 증명하여라.

풀 이

($\rightarrow$) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$\lim_{n \to \infty} x_n = x$이므로 적당한 자연수 m이 존재하여 $n \geq m$일 때, $|x_n - x| < |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$을 만족한다.
$K \geq m$인 자연수 K를 택하면,

$n > K \geq m$일 때, $|x_n - x_K| \leq |x_n - x| + |x - x_K| < |x_m - x| + |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ 이 성립한다.

[다른 풀이]
임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\langle x_n \rangle$이 수렴하므로 $Cauchy$ 수열이다.
그러면 적당한 자연수 K_0가 존재해서 $n > m \geq K_0$일 때, $|x_n - x_m| < \epsilon$ 을 만족한다.
여기서 $K = K_0 + 1$로 두고 $m = K$로 고정하면 적당한 자연수 K가 존재하여 $n > K$인 모든 자연수 n에 대하여 $|x_n - x_K| < \epsilon$ 을 만족함을 알 수 있다.

($\leftarrow$) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 가정에 의하여 적당한 자연수 K가 존재하여 $n > K$일 때, $|x_n - x_K| < \frac{\epsilon}{2}$을 만족한다. $n > m > K$일 때, $|x_n - x_m| \leq |x_n - x_K| + |x_K - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ 을 만족한다. 따라서 $\langle x_n \rangle$은 $Cauchy$ 수열이다. 그러므로 $\langle x_n \rangle$은 수렴한다.

문 8. 수열 $\langle x_n \rangle$이 수렴할 필요충분조건은 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 K가 존재하여 모든 자연수 p에 대하여 $|x_{K+p} - x_K| < \epsilon$이 성립하는 것임을 증명하여라.

풀 이

위의 [문 7] 에서 $n = K + p$로 바꾸면 자명하다.

($\rightarrow$) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\langle x_n \rangle$이 수렴하므로 $Cauchy$ 수열이다. 그러면 적당한 자연수 K_0가 존재해서 $n > m \geq K_0$일 때, $|x_n - x_m| < \epsilon$ 을 만족한다. 여기서 $K = K_0 + 1$로 두고 $m = K$로 고정하고 $n = K + p$ (단, p는 임의의 자연수)로 두면 적당한 자연수 K가 존재하여 모든 자연수 p에 대하여 $|x_{K+p} - x_K| < \epsilon$ 을 만족함을 알 수 있다.
($\leftarrow$) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 가정에 의하여 적당한 자연수 K가 존재하여 모든 자연수 p에 대하여 $|x_{K+p} - x_K| < \frac{\epsilon}{2}$을 만족한다. $n > m \geq K$일 때, $n = K + p, m = K + q$ (단, $p > q$)인 자연수 p, q가 존재하고 이 때, $|x_n - x_m| \leq |x_n - x_K| + |x_K - x_m| = |x_{K+p} - x_K| + |x_{K+q} - x_K| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$을 만족한다. 따라서 $\langle x_n \rangle$은 $Cauchy$ 수열이다. 그러므로 $\langle x_n \rangle$은 수렴한다.

문 9. 수열 $\langle \sqrt{n} \rangle$은 $Cauchy$ 수열인가를 조사하여라.

풀 이 $\sqrt{n}$은 발산한다. 따라서 $Cauchy$ 수열이 아니다.
실제로 $\epsilon = \frac{1}{2}$이 하고 $n = 4k, m = k$라 두면, $\sqrt{n} - \sqrt{m} = \sqrt{4k} - \sqrt{k} = \sqrt{k} \geq 1 > \frac{1}{2}$ 이다.
따라서 $Cauchy$ 수열이 아니다.

문 10. 자연수열 $\langle x_n \rangle$이 $Cauchy$수열일 필요충분조건을 구하여라.

풀 이 적당한 자연수 K가 존재해서 $n \geq K$일 때, $x_n = x$이어야 한다. 단, x는 임의의 자연수

($\leftarrow$) 자명하다.

실제로 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

적당한 자연수 K가 존재해서 $n > m \geq K$일 때, $|x_n - x_m| = |x - x| = 0 < \epsilon$ 을 만족한다.

($\rightarrow$) 만약 n_0가 존재하여 $x_{n_0} \neq x$라고 가정하자.

$\epsilon = \dfrac{1}{2}$라 두면, 적당한 자연수 K에 대하여 $n > m \geq K$일 때, $|x_n - x_m| < \dfrac{1}{2}$ 을 만족한다.

여기서 x_n, x_m은 자연수이므로 $x_n = x_m$이다. 이 때 $x_n = x$로 놓으면 적당한 자연수 K가 존재해서 $n \geq K$일 때, $x_n = x$임을 알 수 있다.

문 1. 다음 수열 $\langle x_n \rangle$의 상극한과 하극한을 구하여라.

(1) $\langle 0, 1, 0, 1, \cdots \rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{2n-1} = 1, x_{2n} = 0$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k = \{x_n | n \geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 1이고 하한은 0이다. 따라서 $\langle x_n \rangle$의 상극한은 1이고 하극한은 0이다.

(2) $\langle 1, -2, 3, -4, \cdots, (-1)^{n+1}n, \cdots \rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{2n-1} = 2n-1, x_{2n} = -2n$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k = \{x_n | n \geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 $2k-1$이고 하한은 $-2k$이다. 따라서 $\langle x_n \rangle$의 상극한은 ∞이고 하극한은 $-\infty$이다.

(3) $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \cdots \right\rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{2n-1} = \dfrac{n+1}{n+2}, x_{2n} = \dfrac{1}{n+2}$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k = \{x_n | n \geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 $\dfrac{k+1}{k+2}$이고 하한은 $\dfrac{1}{k+2}$이다. 따라서 $\langle x_n \rangle$의 상극한은 1이고 하극한은 0이다.

(4) $\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, \cdots \right\rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{2n-1} = \dfrac{n+2}{n+1}, x_{2n} = -\dfrac{1}{n+1}$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k = \{x_n | n \geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 $\dfrac{k+2}{k+1}$이고 하한은 $-\dfrac{1}{k+1}$이다. 따라서 $\langle x_n \rangle$의 상극한은 1이고 하극한은 0이다.

(5) $\left\langle \sin \frac{n\pi}{2} \right\rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{4n} = x_{4n+2} = 0, x_{4n-3} = 1, x_{4n-1} = -1$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k = \{x_n | n \geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 1이고 하한은 -1이다. 따라서 $\langle x_n \rangle$의 상극한은 1이고 하극한은 -1이다.

문 2. 다음 수열의 상극한과 하극한을 구하여라.

(1) $\langle (-1)^n n \rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{2n-1} = -2n+1, x_{2n} = 2n$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k = \{x_n | n \geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 $2k$이고 하한은 $-2k+1$이다. 따라서 $\langle x_n \rangle$의 상극한은 ∞이고 하극한은 $-\infty$이다.

(2) $\left\langle n\sin\frac{n\pi}{2}\right\rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{4n}=x_{4n+2}=0, x_{4n-3}=4n-3, x_{4n-1}=-4n+1$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k=\{x_n|n\geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 $4k-3$이고 하한은 $-4k+1$이다. 따라서 $\langle x_n\rangle$의 상극한은 ∞이고 하극한은 $-\infty$이다.

(3) $\left\langle n\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\rangle$

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $x_{2n-1}=2n-1, x_{2n}=0$이고 각 자연수 k에 대하여 $A_k=\{x_n|n\geq k\}$라고 두면, A_k의 상한은 $2k-1$이고 하한은 0이다. 따라서 $\langle x_n\rangle$의 상극한은 ∞이고 하극한은 0이다.

문 3. $\langle x_n\rangle$이 유계인 수열일 때, $\lim inf\, x_n \leq \lim sup x_n$이 성립함을 증명하여라.

풀 이

모든 자연수 k에 대하여 $A_k=\{x_n|n\geq k\}$라 하자. 그러면 $inf A_k \leq sup A_k$가 성립함은 자명하다.
따라서 $\lim_{n\to\infty} inf\, x_n=\lim_{n\to\infty}(inf A_k)\leq \lim_{n\to\infty}(sup A_k)=\lim_{n\to\infty} sup\, x_n$가 성립한다.

문 4. $\langle x_n\rangle$과 $\langle y_n\rangle$이 모두 유계인 수열일 때, $\lim sup(x_n+y_n)=\lim sup\, x_n+\lim sup\, y_n$이 일반적으로 성립하지 않음을 예를 들어 보아라.

풀 이

(반례) $x_n=(-1)^n, y_n=(-1)^{n+1}$라 하자.
그러면 $\lim_{n\to\infty} sup\, x_n=1, \lim_{n\to\infty} sup\, y_n=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$ 이다.
따라서 $\lim sup(x_n+y_n)\neq \lim sup\, x_n+\lim sup\, y_n$ 이다.

문 5. $\lim sup(-x_n)=-\lim inf\, x_n$임을 증명하여라.

풀 이

$sup(-A)=-inf A$인 사실로부터 모든 자연수 k에 대하여 $A_k=\{x_n|n\geq k\}$라 할 때, $sup(-A_k)=-inf(A_k)$가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} sup(-x_n)=\lim_{n\to\infty} sup\ (-A_k)=-\lim_{n\to\infty} inf\ (A_k)=-\lim_{n\to\infty} inf\, x_n$ 가 성립한다.

문 6. 수열 $\langle x_n\rangle$에 있어서 모든 $n\in N$에 대하여 $x_n>0$일 때, $\lim sup\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\lim inf\, x_n}$이 성립함을 증명하여라.

풀 이

$sup\ \left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{inf A}$인 사실로부터 모든 자연수 k에 대하여 $A_k=\{x_n|n\geq k\}$라 할 때, $sup\ \left(\frac{1}{A_k}\right)=\frac{1}{inf A_k}$가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} sup\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty} sup\ \left(\frac{1}{A_k}\right)=\frac{1}{\lim_{n\to\infty} inf A_k}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty} inf\, x_n}$ 가 성립한다.

문 7. $\langle x_n \rangle$이 유계인 수열일 때, $\lim sup\, x_n = \alpha$이면 α에 수렴하는 $\langle x_n \rangle$의 부분수열 $\langle x_{n_k} \rangle$가 존재함을 보여라.

풀 이

$\langle x_n \rangle$이 유계인 수열이고 $\lim sup\, x_n = \alpha$이므로

$\epsilon = 1$에 대하여 적당한 자연수 n_1이 존재해서 $\alpha - 1 < x_{n_1} \le \alpha$를 만족한다.

$\epsilon = \frac{1}{2}$에 대하여 적당한 자연수 n_2이 존재해서 $\alpha - \frac{1}{2} < x_{n_2} \le \alpha$를 만족한다.

$\epsilon = \frac{1}{3}$에 대하여 적당한 자연수 n_3이 존재해서 $\alpha - \frac{1}{3} < x_{n_3} \le \alpha$를 만족한다.

이와 같은 과정을 k번 실행하면

$\epsilon = \frac{1}{k}$에 대하여 적당한 자연수 n_k가 존재해서 $\alpha - \frac{1}{k} < x_{n_k} \le \alpha$를 만족한다.

이제 $\langle x_n \rangle$의 부분수열 $\langle x_{n_k} \rangle$를 위와 같은 과정과 같이 정의할 때,

조임정리에 의하여 $\langle x_{n_k} \rangle$은 α에 수렴한다.

따라서 α에 수렴하는 $\langle x_n \rangle$의 부분수열 $\langle x_{n_k} \rangle$가 존재함을 알 수 있다.

문 8. $\langle x_{n_k} \rangle$가 $\langle x_n \rangle$의 임의의 부분수열일 때, 다음의 부등식 관계가 성립함을 증명하여라.

$$\lim inf\, x_n \le \lim inf\, x_{n_k} \le \lim sup\, x_{n_k} \le \lim sup\, x_n$$

풀 이

① x_n이 유계수열이 아니면 명백하게 위의 부등식은 성립한다.

② x_n이 유계수열일 때

모든 자연수 k에 대하여 $A_k = \{x_n | n \ge k\}$, $B_k = \{x_{n_t} | t \ge k\}$라 하자.

그러면 $n_k \ge k (k \in N)$이므로 $B_k \subseteq A_{n_k} \subseteq A_k$가 성립한다. 따라서 $inf A_k \le inf B_k \le sup B_k \le sup A_k$이다.

그러므로 $\lim inf\, x_n \le \lim inf\, x_{n_k} \le \lim sup\, x_{n_k} \le \lim sup\, x_n$이 성립한다.

문 1. 실수의 집합 R의 부분집합 D 위에서의 함수열 $\langle f_n \rangle$이 다음과 같이 정의되었을 때, $\langle f_n \rangle$이 D 위에서 점별수렴하면 그 극한함수를 구하여라. 또한 어느 함수열 $\langle f_n \rangle$이 D 위에서 평등수렴하는가를 조사하여라.

(1) $D=R,\ f_n(x)=\begin{cases}1, & -n \le x \le n \\ 0, & |x|>n\end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여

① $x=0$이면, $\lim_{n\to\infty} f_n(0)=\lim_{n\to\infty} 1=1$이다.

② $x\neq 0$이면, $\exists k\in Z^+ \ s.t.\ k\ge |x|$ (∵아르키메데스 성질)

$n\ge k \Rightarrow |f_n(x)-1|=|1-1|=0<\epsilon \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} f_n(x)=1$

③ ①과 ②로부터 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 $f(x)=1$로 점별수렴한다.

④ $\epsilon_0=\dfrac{1}{2}$인 경우, $|f_n(n+1)-f(n+1)|=1>\dfrac{1}{2}=\epsilon_0$이 성립한다.

∴ 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 평등수렴하지 않는다.

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty} \| f_n(n+1)-f(n+1) \|_D=\lim_{n\to\infty} \| 1-0 \|_D=1\neq 0$

∴ 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 평등수렴하지 않는다.

(2) $D=R,\ f_n(x)=\begin{cases}n, & -n \le x \le n \\ 0, & |x|>n\end{cases}$

풀 이

임의의 $M>0$에 대하여 $\exists k\in Z^+ \ s.t.\ k\ge |x|$ (∵아르키메데스 성질)

$n\ge k$이고 $n>M$인 모든 자연수 n에 대하여 $f_n(x)=n>M$이므로 극한함수 f는 존재하지 않는다.

(3) $D=[0,1],\ f_n(x)=nx(1-x^2)^n$

풀 이

① $x=0$ 또는 $x=1$이면, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ 이다.

② $0<x<1$이면, $\lim_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n<\lim_{n\to\infty} n(1-x^2)^n$ 이고

$$\lim_{n\to\infty} n(1-x^2)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/(1-x^2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)^n}{-\ln(1-x^2)}=0$$

③ ①과 ②로부터 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 $f(x)=0$로 점별수렴한다.

④ $f_n{}'(x)=n(1-x^2)^{n-1}(1-(2n+1)x^2)$이므로 $f_n{}'(x)=0$로부터 $x=1$ 또는 $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\right\|_D=\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n=\infty$$

∴ 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 평등수렴하지 않는다.

(4) $D=\{x\in R\,|\,x\geq 0\},\ f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{n}, & 0\leq x\leq n\\ 1, & x>n\end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여

① $x=0$이면, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$

② $x>0$이면, $\exists k\in Z^+\ s.t.\ \dfrac{x}{k}<\epsilon$

$n\geq k\Rightarrow |f_n(x)|=\dfrac{x}{n}\leq\dfrac{x}{k}<\epsilon \quad \therefore \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$

③ ①과 ②로부터 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 $f(x)=0$로 점별수렴한다.

④ $\lim_{n\to\infty}\|f_n(n)-f(n)\|_D=\lim_{n\to\infty}\|1-0\|_D=1\neq 0$

$\therefore$ 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 평등수렴하지 않는다.

(5) $D=\{x\in R|x\geq 0\},\ f_n(x)=\begin{cases}nx, & 0\leq x\leq\dfrac{1}{n}\\ \dfrac{1}{nx}, & \dfrac{1}{n}<x\end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여

① $x=0$이면, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$

② $x>0$이면, $\exists k_1\in Z^+\ s.t.\ \dfrac{1}{k_1}<x$, $\exists k_2\in Z^+\ s.t.\ \dfrac{1}{k_2x}<\epsilon$

이제 $k=\max\{k_1,k_2\}$라 하자.

$n\geq k\Rightarrow |f_n(x)|=\dfrac{1}{nx}\leq\dfrac{1}{kx}<\epsilon \quad \therefore \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$

③ ①과 ②로부터 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 $f(x)=0$로 점별수렴한다.

④ $\lim_{n\to\infty}\left\|f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\|_D=\lim_{n\to\infty}\|1-0\|_D=1\neq 0$

$\therefore$ 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 평등수렴하지 않는다.

(6) $D=[0,1],\ f_n(x)=\dfrac{x^n}{n+x^n}$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여

① $x=0$이면, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$

② $0<x\leq 1$이면, $\exists k\in Z^+\ s.t.\ \dfrac{1}{k}<\epsilon$

$n\geq k\Rightarrow |f_n(x)|=\dfrac{x^n}{n+x^n}\leq\dfrac{1}{n+x^n}\leq\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{k}<\epsilon \quad \therefore \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$

③ ①과 ②로부터 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 $f(x)=0$로 점별수렴한다.

④ $\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_D=\lim_{n\to\infty}\left\|\dfrac{x^n}{n+x^n}\right\|_D=0 \quad \therefore f\rightrightarrows 0$

(7) $D=R,\ f_n(x)=\dfrac{x^2+nx}{n}$

풀 이

① 임의의 $\epsilon>0$에 대하여

$\exists\, k\in Z^+\ s.t.\ \dfrac{x^2}{k}<\epsilon$

$n\ge k \Rightarrow |f_n(x)-x|=\dfrac{x^2}{n}\le\dfrac{x^2}{k}<\epsilon \qquad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=x$

∴ 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 $f(x)=x$로 점별수렴한다.

② $\lim\limits_{n\to\infty}\| f_n(\sqrt{n})-f(\sqrt{n})\|_D=\lim\limits_{n\to\infty}\|(1+\sqrt{n})-\sqrt{n}\|_D=1\ne 0$

∴ 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$는 D위에서 평등수렴하지 않는다.

문 2. 각 자연수 n에 대하여 $f_n:R-\{1\}\to R$을 $f_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}$으로 정의하였을 때, 함수열 $\langle f_n\rangle$이 $D\subset R-\{1\}$ 위에서 점별수렴하는 최대의 집합 D를 구하고, 그 극한함수를 구하여라.

풀 이

① $|x|<1$이면, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$

② $|x|>1$이면,

$\left|\dfrac{1-x^n}{1-x}\right|=|x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1|$이고 $\lim\limits_{k\to\infty}x^k=\infty$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\infty$이다.

따라서 함수열 $\langle f_n(x)\rangle$은 D위에서 수렴하지 않는다.

③ 위의 결과로부터 $D=\{x\in R-\{1\}\,|\,|x|<1\}$이고 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$이다.

문 3. D 실수의 집합 R의 부분집합 D 위에서 정의된 함수열 $\langle f_n\rangle$이 D 위에서 함수 $f:D\to R$에 수렴하면, 극한함수 f는 유일함을 보여라.

풀 이

D 위에서 정의된 함수열 $\langle f_n\rangle$이 D 위에서 함수 f로 수렴하면 수렴수열의 극한의 유일성에 의하여 f는 유일하게 존재한다.

문 4. D 실수의 집합 R의 부분집합 D 위에서 정의된 두 함수열 $\langle f_n\rangle$과 $\langle g_n\rangle$이 D 위에서 각각 극한함수 f와 g에 점별수렴하면, 함수열 $\langle f_n\pm g_n\rangle$와 $\langle f_n\cdot g_n\rangle$은 D 위에서 각각 $f\pm g$와 $f\cdot g$에 점별수렴함을 보여라.

풀 이

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x),\ g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$라 하자.

그러면 극한의 성질에 의하여 $f(x)\pm g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(x)\pm g_n(x)],\ f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f_n(x)\cdot g_n(x)]$가 성립한다.

문 5. D 실수의 집합 R의 부분집합 D 위에서 정의된 두 함수열 $\langle f_n \rangle$과 $\langle g_n \rangle$이 D 위에서 각각 극한함수 f와 g에 평등수렴하면, 함수열 $\langle f_n \pm g_n \rangle$은 D 위에서 $f \pm g$에 평등수렴함을 보여라. 그러나 함수열 $\langle f_n \cdot g_n \rangle$은 일반적으로 D 위에서 $f \cdot g$에 평등수렴하지 않음을 예를 들어 보아라.

풀 이

① 임의의 $\epsilon > 0$와 모든 $x \in D$에 대하여 가정에 의하여

$\exists\, k_1 \in Z^+ \ s.t.\ n \ge k_1 \Rightarrow |f_n - f| < \dfrac{\epsilon}{3}$이고 $\exists\, k_2 \in Z^+ \ s.t.\ n \ge k_2 \Rightarrow |f_n - f| < \dfrac{\epsilon}{3}$ 이다.

이제 $k = \max\{k_1, k_2\}$라 하자.

그러면 $n \ge k$일 때, $|(f_n \pm g_n) - (f \pm g)| \le |f_n - f| + |g_n - g| < \dfrac{\epsilon}{3} + \dfrac{\epsilon}{3} < \epsilon$

따라서 함수열 $\langle f_n \pm g_n \rangle$은 D 위에서 $f \pm g$에 평등수렴한다.

② (반례)

모든 $x \in R$에 대하여 $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n},\ g_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$라 하자.

그러면 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x,\ g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = x$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n(1) g_n(1) - f(1) g(1) \|_R = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right) = 2 \ne 0$이다.

그러므로 함수열 $\langle f_n \cdot g_n \rangle$은 일반적으로 $D(\subseteq R)$위에서 $f \cdot g$에 평등수렴 한다고 할 수는 없다.

정동명 해석학 | 4.7 급수의 수렴성

문 1. 다음 급수의 수렴성을 조사하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{6}\right)^n$

풀 이

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{6}\right)^n \neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{6}\right)^n$은 수렴하지 않는다. 따라서 발산한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$

풀 이

$a_n = (-1)^n\frac{1}{3^n}$이라 할 때, $|a_n|$은 자명하게 단조 감소한다. 또한 $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$ 이다.

그러므로 교대급수 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$는 수렴한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

풀 이

$a_n = \frac{n^n}{n!}$이라 하자. 그러면 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \ (n\to\infty)$이다. 즉, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$이다.

따라서 비판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$은 발산한다.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

풀 이

$\frac{1}{(n+1)(n+3)} < \frac{1}{n\cdot n} = \frac{1}{n^2}$ $(n\in N)$이 성립한다.

한편, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$은 적분판정법에 의하여 수렴한다는 사실을 이미 알고 있다.

(또는 p-급수 판정법에 의하여 수렴한다는 사실을 알 수 있다.)

따라서 비교 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$은 수렴한다.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

풀 이

$\displaystyle\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{n\cdot n\cdot n} = \frac{1}{n^3}$ $(n \in N)$이 성립한다.

한편, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$은 적분판정법에 의하여 수렴한다는 사실을 이미 알고 있다.

(또는 p-급수 판정법에 의하여 수렴한다는 사실을 알 수 있다.)

따라서 비교 판정법에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$은 수렴한다.

문 2. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 S에 수렴하고 각 자연수 n에 대하여 $b_n = a_{n+1}$로 정의된 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 $S-a_1$에 수렴함을 보여라.

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $b_n = a_{n+1}$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k = (b_1+b_2+\cdots+b_n) = (a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n}a_k - a_1 = S_n - a_1$ 이 성립한다. 단, $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}a_k$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k = \lim_{n\to\infty}S_n - a_1 = S - a_1$ 이다.

문 3. n_0가 고정된 자연수일 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이나 $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$은 다 같이 수렴하거나 또는 발산함을 보여라.

풀 이

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$: 수렴(혹은 발산) $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$: 수렴(혹은 발산)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k = a_1+a_2+\cdots+a_{n_0-1}+a_{n_0}+\cdots+a_n = (a_1+a_2+\cdots+a_{n_0-1}) + \sum_{k=n_0}^{n}a_k$이 성립한다.

한편, $a_1+a_2+\cdots+a_{n_0-1}$은 임의의 상수이므로 따라서 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이나 $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$은 다 같이 수렴하거나 또는 발산함을 알 수 있다.

문 4. 수열 $\langle b_n\rangle$이 수렴하고 각 자연수 n에 대하여 $a_n = b_n - b_{n+1}$로 정의된 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 $\displaystyle b_1 - \lim_{n\to\infty}b_n$에 수렴함을 보여라.

풀 이

각 자연수 n에 대하여 $a_n = b_n - b_{n+1}$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = \{(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_n-b_{n+1})\} = b_1 - b_{n+1}$이 성립한다.

따라서 b_n이 수렴한다는 가정으로부터 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k = \lim_{n\to\infty}(b_1-b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty}b_n$ 이다.

5. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면, 적당한 실수 $M>0$이 존재하여, 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le M$임을 보여라.

풀 이

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$을 만족한다. 그러면 $\epsilon = 1$에 대하여 충분히 큰 정수 n_0이 존재해서 $n > n_0$일 때, $|a_n| < 1$을 만족한다. 이때, $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|, 1\} > 0$라고 두면 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le M$이 성립한다.

문 6. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$은 반드시 수렴하지만, 그 역은 성립하지 않는 예를 들어 보아라.

풀 이

① $\sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{k=1}^{2n} a_k$가 성립한다.

그러면 가정에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 또한 수렴함은 자명하다.

② $a_n = (-1)^n$이라 두자. 그러면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1+1) = 0$으로 수렴한다.

하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$는 진동한다. 그러므로 발산한다.

문 1. 다음 급수의 수렴성을 판정하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}\,(\alpha\in R)$

풀 이

$\alpha^2\geq 0$이므로 $0<\frac{1}{n^2+\alpha^2}\leq\frac{1}{n^2}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$은 $p-$급수 판정법에 의하여 수렴한다. 따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}$은 수렴한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+4}}$

풀 이

$a_n=\frac{n!}{2^{n+4}}$라 하자. 그러면 $n\to\infty$일 때, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+5}}}{\frac{n!}{2^{n+4}}}=\frac{n+1}{2}>1$이다.

따라서 비판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+4}}$은 발산한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

풀 이

$a_n=\frac{n^n}{n!}$라 하자. 그러면 $n\to\infty$일 때, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e>1$이다.

따라서 비판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$은 발산한다.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$

풀 이

$a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$라 하자. 그러면 $\sqrt[n]{|a_n|}=(\sqrt[n]{n}-1)\to 0<1$ 이다.

따라서 근 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$은 수렴한다.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$

풀 이

$a_n=(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 라 하고, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 라 하자.

그러면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 이므로 $x \geq 3$일 때, $f'(x) \leq 0$이다. 즉, a_n은 $n \geq 3$일 때 단조감소 수열이다.

또한 로피탈의 법칙에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\frac{0}{1}=0$ 이다.

따라서 교대급수 판정법에 의하여 $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$는 수렴하고 또한 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$도 수렴한다.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha^n}\ (\alpha \geq -1)$

풀 이

① $\alpha=-1$인 경우는 n이 홀수인 경우 $\left(\frac{1}{0}\right)$꼴이 되어 모순된다. 따라서 $\alpha>-1$이다.

② $a_n=\frac{1}{1+\alpha^n}$이라 하자. 그러면 $n\to\infty$일 때, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{1+\alpha^n}{1+\alpha^{n+1}}\right|=\left|\frac{\frac{1}{\alpha^n}+1}{\frac{1}{\alpha^n}+\alpha}\right| \to \frac{1}{|\alpha|}<1$이다.

따라서 $\alpha>-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha^n}$은 수렴한다.

문 2. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$인 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다고 할 때,

(1) $p \geq 1$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$가 수렴함을 보여라.

풀 이

가정에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다. 그러면 $\epsilon=1$에 대하여 적당한 자연수 k가 존재하여 $n \geq k$일 때, $a_n=|a_n|<1$을 만족한다. 또한 $n \geq k$일 때, $p \geq 1$에 대히여 $0 \leq a_n^p < a_n < 1$이 성립한다. 따라서 $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=k}^{\infty}a_n{}^p$도 수렴한다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^p$도 수렴한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$이 수렴함을 보여라.

풀 이

모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$이므로 $0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq \frac{a_n}{1}=a_n$이 성립한다. 가정에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$은 수렴한다.

문 3. 수열 $\langle a_n \rangle$에 있어서 $|a_n| \neq 0$인 항이 적어도 하나 존재하면, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|, n \in N$으로 정의된 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산함을 보여라.

풀 이 대우증명: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$: 수렴 $\Rightarrow |a_n| = 0 (\forall n \in N)$ 단, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|, n \in N$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이 성립한다.

그러면 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 적당한 자연수 m이 존재해서 $n \geq m$일 때, $|b_n| \leq |b_m| < \frac{1}{m}\cdot\epsilon$를 만족한다.

여기서 $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|, n \in N$이므로 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|a_k| < \frac{1}{m}\cdot\epsilon$이다. 즉, $\sum_{k=1}^{m}|a_k| < \epsilon$이 성립한다. 여기서 $\epsilon > 0$은 임의의 정수이므로 $\sum_{k=1}^{m}|a_k| = 0$이다. 그러면 $0 \leq b_n \leq b_m = 0$이므로 $b_n = 0$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{n}|a_k| = 0$이고 $|a_k| \geq 0$이므로 그러므로 모든 n에 대하여 $|a_n| = 0$이다.

문 4. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$인 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면, $\langle a_n \rangle$의 임의의 부분수열 $\langle a_{n_k} \rangle$에 대한 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$도 수렴함을 보여라.

풀 이

$\langle a_{n_k} \rangle$를 $\langle a_n \rangle$의 임의의 부분수열이라 하자.

그러면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$이므로 $0 \leq \sum_{k=1}^{m} a_{n_k} = a_{n_1} + \cdots + a_{n_m} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_m} = \sum_{k=1}^{n_m} a_k$ 이 성립한다. 따라서 가정에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면, 비교판정법에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$도 수렴한다.

문 5. 두 수열 $\langle a_n \rangle$과 $\langle b_n \rangle$에 있어서, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$이고, 또한 $b_n \geq 0$이며 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 필요충분조건은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하는 것이다.

풀 이

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = p(>0)$라 하자. 그러면 $\epsilon = \frac{p}{2}$에 대하여 적당한 자연수 k가 존재해서 $n \geq k$일 때, $\left|\frac{a_n}{b_n} - p\right| < \frac{p}{2}$가 성립한다. 즉, $0 < \frac{p}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3p}{2}$이다. 여기서 $b_n \neq 0$이므로 $0 < \frac{p}{2}\cdot b_n < a_n < \frac{3p}{2}\cdot b_n$ 이다.

따라서 $a_n < \frac{3p}{2}\cdot b_n$으로부터 $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$이 수렴하면 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\frac{p}{2}\cdot b_n < a_n$으로부터 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$이 수렴하면 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$이 수렴한다. 그러므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 필요충분조건은 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하는 것이다.

문 6. 주 4.8.4의 (1)과 (2)를 증명하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 발산

풀 이

$\exists M > 1 \ s.t. \ \sqrt[n]{|a_n|} \geq M \ (\forall n \in N)$

그러면 $|a_n| \geq M^n > 1$이다.

따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} M^n$이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(2) $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Leftrightarrow r = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|} \ \ (r > 1)$

풀 이

- 생략함 -

문 7. 주 4.8.7의 (1)과 (2)를 증명하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$: 발산

풀 이

$\exists M > 1 \ s.t. \ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq M \ (\forall n \in N)$

그러면 $a_n \neq 0$이므로 $|a_n| \geq M|a_{n-1}| \geq M^2|a_{n-2}| \geq \cdots \geq M^{n-1}|a_1|$이다.

따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} M^{n-1} \cdot |a_1|$이 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(2) $r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Leftrightarrow r = \lim_{n\to\infty} sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| (r > 1)$

풀 이

- 생략함 -

문 8. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1} > 0$이고, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = S$이면 부분합의 수열 $\langle S_n \rangle$은 모든 자연수 k에 대하여 $S_{2k} < S < S_{2k+1}$인 관계식을 만족함을 보여라.

풀 이

① $S - S_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n - \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \cdot a_n = (a_{2k+1} - a_{2k+2}) + (a_{2k+3} - a_{2k+4}) + \cdots$

여기서 $a_n > a_{n+1} > 0$ 이므로 따라서 $S - S_{2k} > 0$이다.

② $S_{2k+1} - S = \sum_{n=1}^{2k+1} (-1)^{n+1} \cdot a_n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = (a_{2k+2} - a_{2k+3}) + (a_{2k+4} - a_{2k+5}) + \cdots$

여기서 $a_n > a_{n+1} > 0$이므로 따라서 $S_{2k+1} - S > 0$이다.

따라서 모든 자연수 k에 대하여 $S_{2k} < S < S_{2k+1}$인 관계식을 만족한다.

정동명 해석학 | 4.9 절대수렴과 조건수렴

문 1. 다음 급수의 절대수렴성과 조건수렴성을 판정하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$

풀 이

수열 $\left\{\frac{1}{2n+3}\right\}$은 단조감소한다. 또한 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$이다. 따라서 교대급수 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}$은 수렴한다. 하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$은 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$은 발산하므로 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$은 발산한다. 따라서 조건수렴한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$

풀 이

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$이므로 발산한다. 따라서 절대수렴도 조건수렴도 아니다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{(n+1)!}$

풀 이

$a_n = \frac{(-1)^{n-1} n^4}{(n+1)!}$라 하자. 그러면 $n\to\infty$일 때, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^4}{(n+2)!}}{\frac{n^4}{(n+1)!}} = \frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \to 0$

따라서 비판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{(n+1)!}$는 절대수렴한다.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n \ln n}$

풀 이

$a_n = \frac{(-1)^n e^n}{n \ln n}$라 하자. 그러면 $n\to\infty$일 때, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{e^n}{n \ln n}}{\frac{e^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \to \frac{1}{e} < 1$

따라서 비판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n \ln n}$ 은 절대수렴한다.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos n\alpha}{n^2}$

풀 이

$\left|\frac{(-1)^n \cos n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 은 $p-$급수 판정법에 의하여 수렴한다.

따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos n\alpha}{n^2}$ 은 절대수렴한다.

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^p}$

풀 이

대수함수의 단조성으로부터 $\{\ln n\}$ 이 증가함을 알 수 있다. 그러므로 $\frac{1}{\{n\ln n\}}$ 은 감소한다.

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^k \cdot \frac{1}{2^k(\ln 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$$

이므로 $p>1$ 이면 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 는 수렴하고 $p \le 1$ 이면 이 급수는 발산한다.

따라서 $p>1$ 이면 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 은 절대수렴하고 $p \le 1$ 이면 조건부수렴한다.

문 2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 의 항 a_n 이 유한개의 항을 제외하고는 모두 $a_n \ge 0$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 절대수렴함을 보여라.

풀 이

$K_1 = \max\{n | a_n < 0\}$ 라 하자. 그러면 $n \ge K_1 + 1$ 일 때, $a_n \ge 0$ 이다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하므로 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 적당한 자연수 K_2 가 존재해서 $n > m \ge K_2$ 일 때, $\left|\sum_{k=m}^{n}a_k\right| < \epsilon$ 을 만족한다. 이제 $K = \max\{K_1+1, K_2\}$ 라 두자. 그러면 $n > m \ge K$ 일 때, $\left|\sum_{k=m}^{n}|a_k|\right| = \sum_{k=m}^{n}|a_k| = \sum_{k=m}^{n}a_k < \epsilon$ 을 만족한다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 코시판정법에 의하여 절대수렴한다.

문 3. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 절대수렴하고 수열 $\langle b_n \rangle$ 이 유계이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 은 절대수렴함을 보여라.

풀 이

$\langle b_n \rangle$ 이 유계수열이므로 $\exists M > 0 \ s.t. \ |b_n| \le M$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \cdot |b_n| \le M \cdot \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 절대수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 은 수렴한다.

따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 은 절대수렴한다.

문 4. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$이 수렴하면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$은 절대수렴함을 보여라.

풀 이

코시부등식에 의하여 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}\right|^2 \le \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right| \cdot \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right|$이 성립한다. 여기서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$은 $p-$급수판정법에 의하여 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$는 가정에 의하여 수렴한다. 따라서 비교판정법에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$은 절대수렴한다.

문 5. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 절대수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$도 절대수렴함을 보여라. 단, 문제 4.7.5를 이용하여라.

풀 이

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 문제 4.7.5에 의하여 $\exists M > 0 \ s.t. \ |a_n| < M (\forall n \in N)$

그러면 문제 3에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$도 절대수렴함을 알 수 있다.

문 6. $0 < b < 1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$은 절대수렴함을 보여라.

풀 이

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 문제 4.7.5에 의하여 $\exists M > 0 \ s.t. \ |a_n| < M (\forall n \in N)$

또한 $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$은 $0 < b < 1$이므로 무한등비급수의 수렴성에 의하여 절대수렴한다.

따라서 문제 3에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$도 절대수렴한다.

문 7. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1} > 0$이고 $n \to \infty$일 때, $a_n \to 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{1+a_n}$이 수렴함을 보여라.

풀 이

$b_n = \frac{(-1)^n a_n}{1+a_n}$라 하자. 그러면 $a_n > a_{n+1} > 0$이므로 $|b_{n+1}| - |b_n| = \frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}} - \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} < 0$이 성립하여 단조감소수열임을 알 수 있다. 또한 $0 < |b_n| = \frac{a_n}{1+a_n} < a_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로 조임정리에 의하여 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다. 따라서 교대급수 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_n}{1+a_n}$는 수렴한다.

문 8. 각 자연수 n에 대하여 $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$이라고 할 때, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 $Cauchy$곱도 수렴함을 보여라.

풀 이

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$라 하자.

그러면 $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \cdot b_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+1-k} \cdot \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1-k) \cdot k} = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right\} = \frac{(-1)^n \cdot 2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

이고 $|c_{n+1}| - |c_n| = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$= \left\{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right\} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left\{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\} \le 0 \ \ (\forall n \in N)$$

이므로 $|c_n|$은 감소수열이다. 또한 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$임은 자명하다.

따라서 교대급수 판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$은 수렴한다.

문 9. 각 자연수 n에 대하여 $a_n = (-1)\frac{1}{n^2}, b_n = \frac{n}{(-1)^n}$이라고 할 때, 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 $Cauchy$곱의 수렴성를 조사하여라.

풀 이

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$라 하자.

그러면 $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}}{n+1-k} \cdot \frac{k}{(-1)^k} = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1-k}$ 이다.

여기서 $|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1-k} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{n}{1} > n$ 이다.

따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$은 발산한다.

문 1. 실수의 집합 R의 부분집합 D 위에서 정의된 함수항 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$이 다음과 같이 정의되었을 때, D 위에서의 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$의 점별수렴성과 평등수렴성을 조사하여라.

(1) $D=\{x\in R \mid x\ge 0\}$, $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$

풀 이

$x=1$일 때, $f_n(1)=\dfrac{1}{2}$로써 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}n=\infty$이므로 따라서 D 위에서 함수항 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$은 점별수렴하지 않는다. 따라서 평등수렴하지도 않는다.

(2) $D=R-\{0\}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{(nx)^2}$

풀 이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(nx)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{x^2}\neq 0\text{이다.}$$

여기서 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$은 $p-$급수 판정법에 의하여 수렴한다. 따라서 D 위에서 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$도 점별수렴한다.

하지만 $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=1\neq 0$이므로 D 위에서 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$은 평등수렴하지는 않는다.

(3) $D=\{x\in R \mid x\ge 0\}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{x^n+1}$

풀 이

$x=0$일 때, $f_n(0)=1$로써 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0)=\sum_{n=0}^{\infty}1=\lim_{n\to\infty}n=\infty$이므로 따라서 D 위에서 함수항 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$은 점별수렴하지 않는다. 따라서 평등수렴하지도 않는다.

(4) $D=\{x\in R \mid x\ge 0\}$, $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+x}$

풀 이

모든 자연수 n에 대하여 $g_n(x)=\dfrac{1}{n+x}$라 하자.

$x\in D$에 대하여 수열 $\langle g_n(x)\rangle=\langle |f_n(x)|\rangle$는 감소수열이고 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+x}=0$이므로 주어진 급수는 교대급수 판정법에 의하여 수렴하므로 D 위에서 점별수렴한다.

여기서 모든 자연수 n에 대하여 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$, $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)$, $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$라 하자.

그러면 모든 자연수 n에 대하여

$R_{2n}=(-g_{2n+1}+g_{2n+2})+(-g_{2n+3}+g_{2n+4})+\cdots<0$, $R_{2n+1}=(g_{2n+2}-g_{2n+3})+(g_{2n+4}-g_{2n+5})+\cdots>0$ 이고

$|R_{2n}|=-R_{2n}=g_{2n+1}+(-g_{2n+2}+g_{2n+3})+(-g_{2n+4}+g_{2n+5})+\cdots<g_{2n+1}$,

$|R_{2n+1}|=R_{2n+1}=g_{2n+2}+(-g_{2n+3}+g_{2n+4})+(-g_{2n+5}+g_{2n+6})+\cdots><g_{2n+2}$이므로

$|S(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|<|f_{n+1}(x)|\le \dfrac{1}{n+1}$이 된다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(x)-S(x)\|_D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$이므로 함수열 급수 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n$은 D 위에서 평등수렴한다.

(5) $D=\{x\in R\,|\,x\ge 0\}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$

풀 이

$0<f_n(x)<\dfrac{1}{n^2}\,(\forall n\in N)$이고 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$은 $p-$급수판정법에 의하여 수렴한다. 따라서 $Weierstrass\ M-$판정법에 의하여 함수항 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$는 D 위에서 평등수렴한다.

문 2. 각 자연수 n에 대하여 $f_n, g_n : R\to R$가 각각 $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $g_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$으로 정의하였을 때,

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n$과 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n$이 각각 R 위에서 점별수렴함을 보여라.

풀 이

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}=0\,(\forall x\in R)\text{이고}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}=0\,(\forall x\in R)\text{이다.}$$

따라서 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n$과 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n$은 각각 R 위에서 비판정법에 의하여 점별수렴한다.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n$과 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n$이 각각 임의의 유계폐구간 $[a,b]$ 위에서 평등수렴함을 보여라.

풀 이

$c=\max\{|a|,|b|\}$라 하자.

이제 $|f_n(x)|\le\dfrac{c^{2n+1}}{(2n+1)!}\equiv S_n$, $|g_n(x)|\le\dfrac{c^{2n}}{(2n)!}\equiv T_n$라 하자.

그러면 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{S_{n+1}}{S_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{c^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{c^{2n+1}}{(2n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^2}{(2n+3)(2n+2)}=0\,(\forall x\in R)$이고

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{T_{n+1}}{T_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{c^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{c^{2n}}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{c^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0\,(\forall x\in R)$$ 이다.

따라서 $\langle S_n\rangle, \langle T_n\rangle$은 비판정법에 의하여 수렴한다. 그러므로 $Weierstrass$ $M-$판정법에 의하여 함수항 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$과 $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$이 각각 임의의 유계폐구간 $[a, b]$ 위에서 평등수렴한다.

문 3. 다음 거듭제곱수의 수렴반경을 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^n}x^n$

풀 이

$a_n = \dfrac{1}{(n+1)^n}$라 하자. 그러면 $0 \le \dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \le \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

이다. 따라서 $R = \infty$ 이다.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\alpha}{n!}x^n$ **(α는 상수)**

풀 이

$a_n = \dfrac{n^\alpha}{n!}$라 하자.(단, α는 상수)

그러면 $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\dfrac{(n+1)^\alpha}{(n+1)!}}{\dfrac{n^\alpha}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha = 0$ 이다. 따라서 $R = \infty$ 이다.

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$

풀 이

$a_n = \dfrac{n^n}{n!}$라 하자. 그러면 $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ 이다. 따라서 $R = \dfrac{1}{e}$ 이다.

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$

풀 이

$a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$라 하자. 그러면 $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)\cdot(n!)}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$ 이다.

따라서 $R = \dfrac{1}{4}$ 이다.

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\sqrt{n}}} x^n$

풀 이

$a_n = \dfrac{1}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$라 하자. 그러면 $\dfrac{1}{R} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$이다. 따라서 $R = 1$이다.

문 4. 거듭제곱수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$과 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$은 같은 수렴반경을 가짐을 보여라.

풀 이

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 R_1, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$의 수렴반경을 R_2라 하자.

그러면 $\dfrac{1}{R_1} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} \right| = \frac{1}{R_2}$이 성립한다.

따라서 $R_1 = R_2$이다.

문 5. 거듭제곱수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$에 있어서, 모든 a_n에 대하여 $0 < p \le |a_n| \le q$를 만족시키는 두 실수 p와 q가 존재한다고 하자. 이 때, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 구하여라.

풀 이

R을 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이라 하자. 그러면 가정으로부터 $1 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} \le \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$이 성립한다. 따라서 $R = 1$이다.

문 6. 거듭제곱수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$에 있어서, 각 a_n이 다음과 같이 정의되었을 때, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 구하여라.

(1) $a_n = \begin{cases} 1, & n = m^2, m \in N \\ 0, & n \neq m^2, m \in N \end{cases}$

풀 이

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 R이라 하자. 그러면 가정으로부터 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2}$이 성립하여 같은 수렴반경을 갖는다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} sup\ \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} sup\ \sqrt[n]{1} = 1^0 = 1$이므로 따라서 수렴반경 $R = 1$이다.

(2) $a_n = \begin{cases} 1, & n = m!, m \in N \\ 0, & n \neq m!, m \in N \end{cases}$

풀 이

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경을 R이라 하자. 그러면 가정으로부터 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=1}^{\infty} x^{m!}$이 성립하여 같은 수렴반경을 갖는다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} sup\ \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} sup\ \sqrt[n]{1} = 1^0 = 1$이므로 따라서 수렴반경 $R = 1$이다.

정동명 해석학 | 5.1 함수의 극한

문 1. 함수 $f: R \to R$이 다음과 같이 정의되었을 때, $x \to 0$일 때의 f의 극한의 존재성을 조사하여라.

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $x \neq 1$이면, $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 1\right| = |x+1-1| = |x|$이므로 $\delta = \min\{1, \epsilon\}$로 택하면,

$0 < |x| < \delta, x \in R \Rightarrow |f(x) - 1| = |x| < \delta < \epsilon$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ 이다.

(2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

풀 이

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0+} f(x)$이므로 따라서 $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$ 이다.

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $x \neq 0$일 때, $\left|x^2 \sin\dfrac{1}{x} - 0\right| = \left|x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x^2|$이므로 $\delta = \sqrt{\epsilon}$로 택하면,

$0 < |x| < \delta, x \in R \Rightarrow |f(x) - 1| = \left|x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x^2| < \delta^2 = \epsilon$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ 이다.

문 2. $E = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in N\right\}$이라고 하자. 함수 $f: E \to R$가 $f(x) = x+1$로 정의되었을 때, $n \to 0$일 때의 f의 극한의 존재성을 조사하여라. 또 점 $x = a \in E$에서의 f의 극한을 생각하라 수 있는가를 논하여 보아라.

풀 이

① 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 E에서 0은 집적점이므로 $\dfrac{1}{k} < \epsilon$인 자연수 k에 대하여 $\delta = \dfrac{1}{k}$로 택하면,

$0 < |x| < \delta$안에 존재하는 E 원소는 $\left\{\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k+2}, \cdots\right\}$이고 다음이 성립한다.

$0 < |x| < \delta, x \in E \Rightarrow |f(x) - 1| = |x| \le \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k} = \delta < \epsilon$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

② $a = \dfrac{1}{n} \in E\,(n \in N)$에 대하여 $\delta = \dfrac{1}{n(n+1)}$로 놓으면, a의 근방 δ근방 $N(a, \delta)$에 대하여

$N(a, \delta) \cap (E - \{a\}) = \varnothing$

이므로 $x = a$는 E의 고립점이므로 f의 극한을 생각할 수 없다.

문 3. 함수 $f:R\to R$에 있어서, $\lim_{x\to 0}g(x)=0$이면, $\lim_{x\to 0}g(x)\sin\frac{1}{x}=0$임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\lim_{x\to 0}g(x)=0$이므로 $\exists\,\delta^*>0\ s.t.\ 0<|x|<\delta^*, x\in R\Rightarrow |g(x)|<\epsilon$

이제 $\delta=\delta^*$로 택하면, $0<|x|<\delta, x\in R\Rightarrow \left|g(x)\sin\frac{1}{x}\right|\le |g(x)|<\epsilon$

따라서 $\lim_{x\to 0}g(x)\sin\frac{1}{x}=0$ 이다.

문 4.함수 $f:R\to R$애 있어서, 다음이 성립함을 보여라.
(1) $\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재하면, $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x^3)$이다.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $L=\lim_{x\to 0}f(x)$라 하자. 그러면 $\exists\,\delta>0\ s.t.\ 0<|x|<\delta, x\in R\Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$

$0<|x|<\sqrt[3]{\delta}$이면, $0<|x^3|<\delta$이므로 $|f(x^3)-L|<\epsilon$이 성립한다. 따라서 $\lim_{x\to 0}f(x^3)=L$ 이다.

(2) $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하면, $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{h\to 0}f(a+h)$이다.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $L=\lim_{x\to 0}f(x)$라 하자. 그러면 $\exists\,\delta>0\ s.t.\ 0<|x-a|<\delta, x\in R\Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$

여기서 $x-a=h$로 치환하면, $0<|h|<\delta, x\in R\Rightarrow |f(a+h)-L|<\epsilon$
따라서 $\lim_{h\to 0}f(a+h)=L$ 이다.

문 5. 함수 $f:R\to R$에 있어서, $\lim_{x\to a}f(x)>0$이면 적당한 $\delta>0$이 존재하여 $0<|x-a|<\delta$이면 $f(x)>0$임을 보여라.

풀 이

$\lim_{x\to a}f(x)=L>0$라 하자.

$\epsilon=\frac{1}{2}L$에 대하여 $\exists\,\delta>0\ s.t.\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow |f(x)-L|<\frac{L}{2}\Rightarrow 0<\frac{L}{2}<f(x)$
따라서 적당한 $\delta>0$이 존재하여 $0<|x-a|<\delta$이면 $f(x)>0$ 이다.

문 6. 두 함수 $f,g:R\to R$에 있어서
(1) 극한 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하지 않으면, 일반적으로 극한 $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$와 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$가 존재하지 않음을 예를 들어 보여라.

풀 이

$f(x)=g(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$라 하자. 그러면 극한 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하지 않는다.

또한 $f(x)+g(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2, & x\ge 2\end{cases}$, $f(x)g(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$이고 이 때, 극한 $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$와 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$는 존재하지 않는다.

(2) 극한 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하고, 또한 극한 $\lim_{x \to a}(f(x)+g(x))$ [또는 $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$]가 존재하면, 반드시 극한 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재하는가?

풀 이

① 극한 $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a}(f(x)+g(x))$이 존재하면, 극한의 성질에 의하여 $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a}(f(x)+g(x)) - \lim_{x \to a} f(x)$이 성립한다. 따라서 극한 $\lim_{x \to a} g(x)$은 존재한다.

② $f(x)=0, g(x)=\begin{cases} 0, & x>0 \\ 1, & x \le 0 \end{cases}$일 때, 극한 $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$는 모두 0으로써 극한이 존재하지만 극한 $\lim_{x \to a} g(x)$이 존재하지는 않는다. 따라서 반드시 극한 $\lim_{x \to a} g(x)$이 존재한다고 말할 수 없다.

문 7. 정리 5.1.4의 (a)와 (b)를 $\epsilon-\delta$방법으로 증명하여라.

풀 이

(a) 임의의 $\epsilon>0$에 대하여

$$\exists\, \delta_1>0 \ s.t.\ 0<|x-a|<\delta_1, x \in E \Rightarrow |f(x)-L|<\frac{\epsilon}{3}$$

$$\exists\, \delta_2>0 \ s.t.\ 0<|x-a|<\delta_2, x \in E \Rightarrow |g(x)-M|<\frac{\epsilon}{3}$$

이제 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$로 놓으면,

$$0<|x-a|<\delta, x \in E \Rightarrow |(f(x)+g(x))-(L+M)| \le |f(x)-L|+|g(x)-M|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}<\epsilon$$

따라서 $\lim_{x \to a}(f(x)+g(x))=L+M$ 이다.

(b) 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $c=0$이면 자명하다. 따라서 $c \ne 0$에 대하여 보이면 충분하다.

$$\exists\, \delta^*>0 \ s.t.\ 0<|x-a|<\delta^*, x \in E \Rightarrow |f(x)-L|<\frac{\epsilon}{|c|+1}$$

이제 $\delta=\delta^*$로 놓으면,

$$0<|x-a|<\delta, x \in E \Rightarrow |cf(x)-cL|=|c||f(x)-L|<\frac{|c|}{|c|+1}\epsilon<\epsilon$$

따라서 $\lim_{x \to a} c\cdot(f(x))=c\cdot L$ 이다.

문 8. $E \subset R$이라 하고, $b \in R$을 E의 집적점이라고 하자. 만일 $\lim_{x \to b} f(x)=L$이면 적당한 $\delta>0$이 존재하여

$$0<|x-b|<\delta, x \in E \Rightarrow |f(x)| \le |L|+1$$

임을 보여라. 이 사실을 이용하여 정리 5.1.4의 (c)를 $\epsilon-\delta$방법으로 증명하여라.

풀 이

① $\lim_{x \to a} f(x)=L$라 하자.

$\epsilon=1$에 대하여 $\exists\, \delta>0 \ s.t.\ 0<|x-b|<\delta, x \in E \Rightarrow |f(x)-L|<1$

그러면 삼각부등식으로부터

$$|f(x)|=|f(x)-L+L| \le |f(x)-L|+|L|<1+|L|$$

이 성립한다. 따라서 적당한 $\delta>0$이 존재하여 $0<|x-b|<\delta, x \in E \Rightarrow |f(x)| \le |L|+1$ 이다.

② 임의의 $\epsilon>0$에 대하여

$$\exists\, \delta_1>0 \ s.t.\ 0<|x-a|<\delta_1, x \in E \Rightarrow |f(x)-L|<\frac{\epsilon}{2M}$$

$\exists\, \delta_2 > 0 \ s.t. \ 0 < |x-a| < \delta_2, x \in E \Rightarrow |g(x) - M| < \dfrac{\epsilon}{2(|L|+1)}$

이고 ①의 사실로부터 $\exists\, \delta^* > 0 \ s.t. \ 0 < |x-b| < \delta, x \in E \Rightarrow |f(x)| < |L|+1$

이제 $\delta = \min\{\delta^*, \delta_1, \delta_2\}$라 놓으면,

$$0 < |x-b| < \delta, x \in E \Rightarrow |f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \le |g(x) - M||f(x)| + |M||f(x) - L|$$

$$\le |g(x) - M|(|L|+1) + |M||f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

따라서 $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$ 이다.

문 9. $E \subset R$이라 하고, $b \in R$을 E의 집적점이라고 하자. 함수 $g : E \to R$에 있어서, $\lim_{x \to b} g(x) = M(\neq 0)$이 존재하면, 적당한 $\delta > 0$이 존재하여 $0 < |x-b| < \delta, x \in E$이면, $g(x) \neq 0$임을 보여라. 이 사실을 이용하여 정리 5.1.4의 (d)에서 조건 $g(x) \neq 0$, $x \in E$ 대신에 $\lim_{x \to a} g(x) = M(\neq 0)$으로 바꾸어도 성립함을 보여라.

풀 이

① $\lim_{x \to b} g(x) = M \neq 0$이라 하자. $\epsilon = \dfrac{1}{2}|M|$에 대하여

$\exists\, \delta > 0 \ s.t. \ 0 < |x-b| < \delta, x \in E \Rightarrow |g(x) - M| < \dfrac{1}{2}|M| \Rightarrow \dfrac{1}{2}|M| < |g(x)| < \dfrac{3}{2}|M|$

만약에 $0 < |x-b| < \delta$에서 $g(x_0) = 0$인 $x_0 \in E$가 존재하면, $\dfrac{1}{2}|M| < 0 < \dfrac{3}{2}|M|$인 사실로부터 $M = 0$이다. 이는 가정에 모순된다. 따라서 $g(x) \neq 0$이다.

② $\lim_{x \to a} g(x) = M(\neq 0)$이면 ①의 사실로부터 조건 $g(x) \neq 0$, $x \in E$임을 알 수 있으므로 조건을 바꾸어도 성립한다.

정동명 해석학 | 5.2 함수의 연속성

문 1. 함수 $f:[0,1] \to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, 각 점 $a \in R$에서의 f의 연속성을 조사하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x \in Q \\ 1-x, & x \in Q^c \end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

① $x=\frac{1}{2}$에서 연속임을 보이자.

$\delta=\epsilon$라 두면, $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta, x\in[0,1]$에 대하여 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}\left|x-\frac{1}{2}\right| & ,x\in Q \\ \left|x-\frac{1}{2}\right|, & x \in R-Q\end{cases}$이므로 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\epsilon$이 성립한다. 따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ 이다.

② $a \neq \frac{1}{2}$일 때,

$a\in Q\cap[0,1]$인 경우, $\langle x_n \rangle \to a$인 무리수열을 택하자.

그러면 $\lim_{x\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to\infty}(1-x_n)=1-a\neq a=f(a)$가 성립한다.

$a\in(R-Q)\cap[0,1]$인 경우, $\langle y_n \rangle \to a$인 유리수열을 택하자.

그러면 $\lim_{x\to\infty} f(y_n)=\lim_{x\to\infty}(y_n)=a\neq 1-a=f(a)$가 성립한다.

따라서 $a\neq\frac{1}{2}$인 $a\in R$에 대하여 f는 불연속이다.

(2) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \frac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$

풀 이

① $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$이고 $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$로서 서로 다른 값을 갖는다.

즉, $x=0$에서 극한이 존재하지 않는다. 따라서 $x=0$에서 불연속이다.

② $a\neq 0$일 때 $x=a$에서 연속임을 보인다.

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $|x-a|<\frac{|a|}{2}, x\in R$이면 $|f(x)-f(a)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{2|x-a|}{|ax|}\le\frac{2|x-a|}{|a^2|}$이 성립한다.

이제 $\delta=\min\left\{\frac{|a|}{2},\frac{|a^2|}{2}\epsilon\right\}$로 두자. 그러면 $|x-a|<\delta$일 때, $|f(x)-f(a)|\le\frac{2|x-a|}{|a^2|}<\epsilon$이 성립한다.

따라서 f는 $x=a$에서 연속이다.

문 2. $E=\left\{\frac{1}{n} | n\in N\right\}\cup\{0\}$이라 하자. 함수 $f:E\rightarrow R$가 $f(x)=x+1$로 정의되었을 때, 각 점 $a\in E$에서의 f의 연속성을 조사하여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여

① $x=0$에서 연속임을 보이자.

$\frac{1}{k}<\epsilon$인 $k\in Z^{+}$에 대하여 $\delta=\frac{1}{k}$로 두면,

$|x|<\delta$를 만족하는 $x\in E$의 집합은 $\left\{\frac{1}{k+1},\frac{1}{k+2},\cdots\right\}\cup\{0\}$이다.

그러므로 $|x|<\delta, x\in E$를 만족하는 모든 x에 대하여 $|f(x)-f(0)|=|(x+1)-1|=|x|<\frac{1}{k}=\delta<\epsilon$를 만족한다.

따라서 f는 $x=0$에서 연속이다.

② $a=\frac{1}{n}\in E\,(n\in N)$라 할 때, $x=a$에서 연속임을 보이자.

$\delta=\frac{1}{n(n+1)}$라 하면, $|x-a|<\delta, x\in E$를 만족하는 x는 $x=a$뿐이다.

그러므로 $|x|<\delta, x\in E$를 만족하는 모든 x에 대하여 $|f(x)-f(a)|=|a-a|=0<\epsilon$를 만족한다.

따라서 f는 $x=a$에서 연속이다.

③ ①과 ②로부터 f는 E 위에서 연속이다.

문 3. 함수 $f,g:[-1,1]\rightarrow R$에 있어서, g가 점 $x=0$에서 연속이고 $g(0)=0$, $|f(x)|\leq|g(x)|$ ($x\in[-1,1]$) 이면 f는 $x=0$에서 연속임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $g(0)=0$이고 $|f(0)|\leq|g(0)|=0$이므로 $f(0)=0$이다.

또한 g가 $x=0$에서 연속이므로 $\exists\,\delta^{*}>0\ s.t.\ |x|<\delta^{*}, x\in[-1,1]\Rightarrow|g(x)|<\epsilon$

이제 $\delta=\delta^{*}$로 택하면, $|x|<\delta, x\in[-1,1]\Rightarrow|f(x)|\leq|g(x)|<\epsilon$

따라서 $\lim_{x\rightarrow 0}f(x)=0$이다. 그러므로 $f(0)=\lim_{x\rightarrow 0}f(x)$가 성립한다.

따라서 f는 $x=0$에서 연속이다.

문 4. 함수 $f:E\rightarrow R$에 있어서 점 $x=x_0\in E$에서의 f의 극한 $\lim_{x\rightarrow x_0}f(x)$가 존재하지만, $\lim_{x\rightarrow x_0}f(x)\neq f(x_0)$일 경우, 점 $x=x_0$를 f의 제거가능한 불연속점이라고 한다. 다음과 같이 정의된 함수 $f:R\rightarrow R$의 불연속점을 찾고, 그 점이 제거가능한 불연속점인가를 조사하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

풀 이

$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, y_n=\frac{1}{2n\pi}$라 하자. 그러면 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle$는 모두 0으로 수렴하는 수열이다.

하지만 $\lim_{n\rightarrow\infty}f(x_n)=1, \lim_{n\rightarrow\infty}f(y_n)=0$이다. 따라서 $\nexists\lim_{x\rightarrow 0}f(x)$이다.

그러므로 $x=0$에서 불연속이지만, 제거가능한 불연속점은 아니다.

(2) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

풀 이

$x\neq 0$인 경우 $0\leq \left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq |x|$이므로 조임정리에 의하여 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이지만 $\lim_{x\to 0}f(x)=0\neq 1=f(0)$이다.
따라서 $=0$은 f의 제거가능한 불연속점이다.

문 5. 함수 $f:R\to R$가 연속이고 모든 유리수 r에 대하여 $f(r)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$임을 보여라.

풀 이

$a\in Q$이면 자명하다. $a\in Q^c$일 때, 보이면 충분하다. $\langle x_n\rangle\to a$인 유리수열 $\langle x_n\rangle$을 택하자. 그러면 f는 연속함수이므로 $f(a)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$이다. 따라서 모든 $x\in R$에 대하여 $f(x)=0$이다.

[다른 풀이]
임의의 $\epsilon>0$와 임의의 $r\in Q^c$에 대하여
r의 δ근방 $N(r,\delta)$이 존재해서 유리수의 조밀성에 의해 $a\in N(r,\delta)\cap Q$인 $a\in Q$가 존재한다.
f가 연속이므로 $f(r)$의 ϵ근방 $N(f(r),\epsilon)$에 대하여 $f(a)\in N(f(r),\epsilon)$를 만족한다.
$f(a)\in N(f(r),\epsilon)$이면 $f(r)\in f(N(r,\delta))\subseteq N(f(a),\epsilon)=N(0,\epsilon)$이다.
여기서 ϵ는 임의의 양의 상수이므로 $f(r)=0$이다.
따라서 모든 $x\in R$에 대하여 $f(x)=0$이다.

문 6. 두 함수 $f,g:R\to R$가 연속일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x)$일 필요충분조건은 유리수 r에 대하여 $f(r)=g(r)$임을 보여라.

풀 이

(➔) 자명하다.
(←) $h(r)=f(r)-g(r)$라 하자. 그러면 h는 실수 위에서 연속이고 모든 유리수에 대하여 $h(r)=0$이다. 그러므로 문제5에 의하여 모든 $x\in R$에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

[다른 풀이]
임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\exists\, a\in R-Q\ s.t.\ f(a)\neq g(a)$라 가정하면, f,g가 연속이므로

$$\exists\,\delta_1>0\ s.t.\ f((a-\delta_1,a+\delta_1))\subseteq\left(f(a)-\frac{\epsilon}{2},f(a)+\frac{\epsilon}{2}\right),\ \exists\,\delta_2>0\ s.t.\ g((a-\delta_2,a+\delta_2))\subseteq\left(g(a)-\frac{\epsilon}{2},g(a)+\frac{\epsilon}{2}\right)$$

이제 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$라 하자. 유리수의 조밀성에 의하여 $\exists\, r\in Q\ s.t.\ r\in(a-\delta,a+\delta)$

f,g가 연속이므로 $f(r)\in\left(f(a)-\frac{\epsilon}{2},f(a)+\frac{\epsilon}{2}\right)$이고 $g(r)\in\left(g(a)-\frac{\epsilon}{2},g(a)+\frac{\epsilon}{2}\right)$이다.

그러면 $d(f(a),f(r))<\frac{\epsilon}{2}, d(g(a),g(r))<\frac{\epsilon}{2}$이 성립한다.

가정에 의하여 $f(r)=g(r)$이므로 삼각부등식에 의하여 $d(f(a),g(a))\leq d(f(a),f(r))+d(g(r),g(a))<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$

여기서 ϵ는 임의의 양의 실수이므로 따라서 $f(a)=g(a)$이다. 이는 모순이다.

문 7. 함수 $f: R \to R$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$를 만족한다고 하자. 이 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) f가 $x=0$에서 연속이면, f는 모든 점 $x \in R$에서 연속이다.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 우선 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$이므로 따라서 $f(0) = 0$이다.

f가 $x=0$에서 연속이므로 $\exists \delta^* > 0 \ s.t. \ |x| < \delta^* \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |f(x)| < \epsilon$

이제 f가 모든 $a \in R$에 대하여 $x=a$에서 연속임을 보이자.

이제 $\delta = \delta^*$로 택하면, $|h| < \delta \Rightarrow |f(a+h) - f(a)| = |f(h)| < \epsilon$ $(\because f(a+h) = f(a) + f(h))$

따라서 $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$이므로 f는 $x=a$에서 연속이다.

(2) f가 R 위에서 연속이고 $f(1) = c$라 할 때, 모든 $x \in R$에 대하여 $f(x) = cx$이다.
(힌트: 모든 유리수 r에 대하여 $f(r) = cr$임을 보여라.)

풀 이

① 모든 $m \in N$에 대하여 $f(1) = f\left(m \cdot \frac{1}{m}\right) = mf\left(\frac{1}{m}\right)$를 만족한다. 따라서 $f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}f(1)$이다.

($\because$ 위의 가정과 수학적 귀납법에 의하여 성립한다.)

② 모든 $n \in N$에 대하여 $f(n) = f(n \cdot 1) = nf(1)$를 만족한다. 따라서 $f(n) = nf(1)$이다.

($\because$ 위의 가정과 수학적 귀납법에 의하여 성립한다.)

③ 모든 $r = \frac{n}{m} \in Q$에 대하여 $f(r) = f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(n \cdot \frac{1}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1) = rf(1) = cr$를 만족한다.

따라서 모든 $r \in Q$에 대하여 $f(r) = rf(1) = cr$이다. 단, $m \neq 0$인 $n, m \in Z$이고 $f(1) = c$이다.

④ 모든 $q \in R - Q$에 대하여 $\langle x_n \rangle \to q$인 유리수열 $\langle x_n \rangle$이 존재해서 f가 연속이므로 다음이 성립한다.

$$f(q) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (cx_n) = c \lim_{n \to \infty} x_n = cq$$

따라서 모든 $x \in R$에 대하여 $f(x) = cx$이다.

문 8. 함수 $h: R \to R$가 다음과 같이 정의되었을 때,

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

(1) G가 R에서 개집합이지만, G의 역상 $h^{-1}(G)$가 R에서 개집합이 아닌 $G \subset R$의 예를 들어 보아라.

풀 이

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$는 R의 개집합이지만, $h^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) = [0,1]$는 R에서 개집합이 아니다.

(2) F가 R에서 폐집합이지만, F의 역상 $h^{-1}(F)$가 R에서 폐집합이 아닌 $F \subset R$의 예를 들어 보아라.

풀 이

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$는 R의 폐집합이지만 $h^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$는 R에서 폐집합이 아니다.

정동명 해석학 | 5.3 연속함수의 공간

문 1. 함수 $f,g:R\to R$가 점 $c\in R$에서 불연속이지만, 합 $f+g$가 점 c에서 연속적인 예를 들어 보아라. 또, 곱 $g\cdot f$가 점 c에서 연속인 예를 들어 보아라.

풀 이

① $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ 라 하자. 그러면 f,g는 $x=0$에서 불연속이다.
하지만 $f(x)+g(x)=0$는 $x=0$에서 연속이다.

② $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 라 하자. 그러면 f,g는 $x=0$에서 불연속이다.
하지만 $f(x)\cdot g(x)=0$는 $x=0$에서 연속이다.

문 2. 함수 $f:[0,\infty)\to R$가 $f(x)=\sqrt{x}$로 정의되었을 때, f가 $[0,\infty)$ 위에서 연속임을 $\epsilon-\delta$방법으로 증명하고 이를 이용하여 함수 $g:E\to R$가 연속이고 모든 $x\in E$에 대하여 $g(x)\ge 0$일 때, 함수 $\sqrt{g}$는 E 위에서 연속임을 보여라.

풀 이

① 임의의 $\epsilon>0$와 임의의 $a\in[0,\infty)$에 대하여 $\delta=\sqrt{a}\,\epsilon$로 택하자. 그러면

$$|x-a|<\delta,\ x\in[0,\infty)\Rightarrow |f(x)-f(a)|=|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\frac{1}{\sqrt{a}}\delta<\epsilon$$

따라서 $f(x)=\sqrt{x}$는 $[0,\infty)$위에서 연속이다.
② $f(x)=\sqrt{x}$는 ①에 의하여 연속이고 g가 E위에서 연속이고, 모든 $x\in E$에서 $g(x)\ge 0$이므로 연속함수의 합성은 연속인 사실로부터 $(f\circ g):E\to R,(f\circ g)(x)=\sqrt{g(x)}$는 E위에서 연속이다.

문 3. 함수 $f:E\to R$가 E의 모든 점에서 불연속이지만, $|f|$는 E 위에서 연속이 되는 f의 예를 들어 보아라.

풀 이

$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ -1, & x\in R-Q\end{cases}$라 하자. 그러면 f는 R상의 모든 점에서 불연속이다. 하지만 $|f(x)|=1$는 R상의 모든 점에서 연속이다.

문 4. 임의의 연속함수 $f:E\to R$은 음이 아닌 두 연속함수의 차로 표시할 수 있음을 보여라. 즉, 모든 $x\in E$에 대하여 $g(x)\ge 0, h(x)\ge 0$인 두 연속함수 $g,h:E\to R$가 존재하여 $f=g-h$로 표시됨을 보여라.

풀 이

함수 f에 대하여 $f^+=\max\{f,0\}, f^-=-\min\{f,0\}$라고 정의하면,
f^+,f^-는 E위에서 연속인 함수이다. 또한 정의에 의하여 모든 $x\in E$에 대하여 $f^+,f^-\ge 0$이 성립하고
$f\ge 0$이면 $f=f-0=f^+-f^-$
$f<0$이면 $f=0-(-f)=f^+-f^-$
이므로 $f=f^+-f^-$가 성립한다.
따라서 임의의 연속함수 f는 음이 아닌 두 연속함수의 차로 표시할 수 있다.

문 5. 함수 $f: E \to R$가 연속이면, 모든 $x \in E$에 대하여 $g(x)=g(-x)$ (우함수)이고, $h(-x)=-h(x)$ (기함수)인 연속함수 $g, h: E \to R$가 존재해서 $f=g+h$로 표시될수 있음을 보여라.

풀 이

모든 $x \in R$에 대하여 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$라 하자.

그러면 g, h는 R위에서 연속이고 $g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=g(x), h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-h(x)$이고

$g(x)+h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$를 만족한다.

문 6. 고정된 점 $c \in [a,b]$에 대하여 집합 $M=\{f \in C[a,b] \mid f(c)=0\}$은 $C[a,b]$의 부분집합으로서 $C[a,b]$ 위의 덧셈과 스칼라곱셈에 관하여 성질 (1)~(8)을 만족함을 보여라.

풀 이

- 생략함 -

문 7. 정리 5.3.3에서 함수 $f: E \to R$와 $g: F \to R$가 연속이 아닐지라도 합성함수 $g \circ f$가 연속일 경우가 있는가를 조사하여 보아라.

풀 이

$g(x)=\begin{cases} 1 & , x \in Q \\ 0 & , x \in R-Q \end{cases}, \ f(x)=\begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$이라 하자.

그러면 f, g는 R위에서 연속이 아니지만. $(g \circ f)(x)=1$은 R위에서 연속이다.

정동명 해석학 | 5.4 연속함수의 성질

문 1. 함수 $f:[0,1]\to R$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases} x,\ x\in(0,1) \\ \frac{1}{2},\ \ x=0,1 \end{cases}$$

(1) f는 $[0,1]$ 위에서 연속인가?

풀 이

$x_n=\frac{1}{n}, y_n=1-\frac{1}{n}$라 하자.

그러면 $x_n\to0, y_n\to1$이고 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\neq\frac{1}{2}=f(0), \lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1\neq\frac{1}{2}=f(1)$이다.

따라서 $x=0,1$에서 불연속이다.

(2) $[0,1]$ 위에서의 f의 상한과 하한을 구하여라.

풀 이

f의 상한은 1이고 하한은 0이다.

(3) f는 $[0,1]$위에서 최대값과 최소값을 갖는가?

풀 이

$sup\ \{f(x)|x\in[0,1]\}\notin[0,1], inf\ \{f(x)|x\in[0,1]\}\notin[0,1]$이다.

따라서 f는 $[0,1]$위에서 최대값과 최소값을 갖지 않는다.

(4) $f([0,1])$은 긴밀집합인가?

풀 이

$f([0,1])=(0,1)$이므로 긴밀집합이 아니다.

문 2. 함수 $f:[a,b]\to R$이 연속이고 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $f(x)>0$이면, 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $f(x)\geq\alpha$를 만족시키는 실수 $\alpha>0$이 존재함을 보여라.

풀 이

$[a,b]$가 긴밀집합이고 f가 연속이므로 $f([a,b])$는 최대, 최소값을 갖는다.

그러면 $\exists\, m\in[a,b]\ s.t.\ f(x)\geq f(m)$

이제 $\alpha=f(m)$이라 하자. 그러면 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $f(x)>0$이므로 $\alpha>0$이고 $f(x)\geq\alpha$를 만족한다.

따라서 $x\in[a,b]$에 대하여 $f(x)\geq\alpha$를 만족시키는 실수 $\alpha>0$가 존재한다.

문 3. 함수 $F:[-1,1]\to R$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$F(x)=\begin{cases} x^{-2}, x\neq0 \\ 0,\ \ x=0 \end{cases}$$

이 때, F는 $[-1,1]$ 위에서 유계인가를 조사하여라.

풀 이

$\lim_{x\to0}f(x)=\infty$이므로 유계가 아니다.

문 4. 정리 5.4.11의 증명에서 f^{-1}가 $x=f(a)$ 및 $f(b)$에서 연속임을 보여라. 또 주 5.4.12를 증명하여라.

풀 이

- 생략함 -

문 5. 집합 $E \subset R$ 위에서 정의된 유계함수 전체의 집합을 $B(E)$로 나타내면 집합 $B(E)$ 위에서 덧셈과 스칼라 곱셈

덧셈: $(f+g)(x)=f(x)+g(x), f, g, \in B(E)$

스칼라곱셈: $(\alpha f)(x)=\alpha(f(x)), \alpha \in R, f \in B(E)$

가 정의됨을 보이고, 연속함수공간에서와 같이 성질 (1)~(8)을 만족함을 보여라. $B(E)$가 이들 성질을 만족한다는 의미에서 $B(E)$가 이들 성질을 만족한다는 의미에서 $B(E)$를 E 위에서 정의된 유계함수들의 벡터공간이라고 한다. 특히, $E=[0,1]$일 때는 $B(E)$를 $B[a,b]$로 표시하자.

풀 이

- 생략함 -

문 6. 함수 $f:[0,1] \to R$가 구간 $[0,1]$ 위에서 연속이 아니더라고 중간값 정리의 결론이 성립할 수 있음을 예를 들어 보여라.

풀 이

$f(x)=\begin{cases} 2x & ,0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 & \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$라 하자. 그러면 $f(0)=0, f(1)=1$이 되고 f는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 불연속이다. 그러나 $0<c<1$인 임의의 실수 c에 대하여 $x=\dfrac{c}{2}$라고 놓으면 $f(x)=c$가 되므로 중간값정리를 만족한다.

문 7. 함수 $f:R \to R$가 $f(x)=q\cos x\,(0<q<1)$로 정의되었을 때, 방정식 $f(x)=x$는 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

풀 이

$h(x)=f(x)-x$라 하자. 이제 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \subset R$에 대하여 $f(x), x$는 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$위에서 연속이므로 $h(x)$도 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$위에서 연속이고, $h(0)=q>0, h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}<0$가 성립한다. 따라서 중간값 정리에 의하여 $\exists x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ $s.t.$ $h(x)=0$
그러므로 R위에서 방정식 $f(x)=x$를 만족하는 하나의 실근이 적어도 하나 존재한다.

문 8. 두 함수 $f,g:[a,b] \to R$이 연속이고, $f(a)<g(a), f(b)>g(b)$이면 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 점 $x \in [a,b]$가 존재함을 보여라.

풀 이

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하자.
그러면 가정에 의하여 $f(x), g(x)$는 $[a,b]$위에서 연속이므로
$h(x)$도 $[a,b]$위에서 연속이고, $h(a)=f(a)-g(a)<0, h(b)=f(b)-g(b)>0$가 성립한다.
따라서 중간값 정리에 의하여 $\exists x \in [a,b]$ $s.t.$ $h(x)=0$
그러므로 $f(x)=g(x)$를 만족하는 $x \in [a,b]$가 존재한다.

문 9. 주어진 함수 $f:[a,b]\to R$가 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $f(x)\neq\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$이면 f는 $[a,b]$ 위에서 연속이 아님을 보여라.

풀 이

대우증명한다!!

f가 $[a,b]$위에서 연속이면 $f(x)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$인 $x\in[a,b]$가 존재한다.

$f(a)=f(b)$이면, $f(a)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=f(b)$이므로 자명하게 성립한다.

$f(a)\neq f(b)$이면, $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$는 $f(a),f(b)$의 크기와 상관없이 $f(a)\sim f(b)$사이의 값임에 자명하다.

여기서 $[a,b]$는 긴밀집합이고 f가 연속이므로 중간값정리에 의하여 $\exists\, x\in[a,b]\ s.t.\ f(x)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

문 10. 함수 $f:[a,b]\to R$가 연속이고 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $f(x)$가 유리수이면, f는 어떠한 함수일까?

풀 이

$[a,b]$는 긴밀집합이고 f가 연속이므로 f는 최대, 최소값을 갖는다.
여기서 $M=\max\{f(x)|x\in[a,b]\}, m=\min\{f(x)|x\in[a,b]\}$라 하자.
만약 $m\neq M$이면, 무리수의 조밀성에 의하여 $\exists\, y\in f([a,b])\cap(R-Q)\ s.t.\ m\leq y\leq M$
이고 중간값 정리에 의하여 $\exists\, x\in[a,b]\ s.t.\ y=f(x)$
이는 $f(x)$가 유리수인 가정에 모순된다. 따라서 $m=M$이다.
그러므로 $f(x)$는 상수함수이다.

정동명 해석학 | 5.5 함수의 평등연속성

문 1. 다음과 같이 정의된 함수들은 그 정의역 위에서 평등연속임을 보여라.

(1) $f:[0,1) \to R,\ f(x)= x^3$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$로 두자. 그러면 $|x-y| < \delta$인 모든 $x, y \in [0,1)$에 대하여

$$|f(x)-f(y)| = |x^3 - y^3| = |(x-y)(x^2+xy+y^2)| < 3|x-y| < 3\delta = \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 f는 $[0,1)$위에서 평등연속이다.

(2) $f:[1,\infty) \to R,\ f(x)= \dfrac{1}{x}$

풀 이

$f(x)$는 $[1,\infty)$위에서 미분가능하고 $|f'(x)| = \left|-\dfrac{1}{x^2}\right| \le 1\,(\forall x \in [1,\infty))$이 성립한다.

따라서 f는 $[1,\infty)$위에서 평등연속이다.

(3) $f:[0,\infty) \to R,\ f(x)= e^{-x}$

풀 이

$f(x)$는 $[0,\infty)$위에서 미분가능하고 $|f'(x)| = \left|-\dfrac{1}{e^x}\right| \le 1\,(\forall x \in [0,\infty))$이 성립한다.

따라서 f는 $[0,\infty)$위에서 평등연속이다.

(4) $f:R \to R,\ f(x)= \dfrac{1}{1+x^2}$

풀 이

$f(x)$는 R위에서 미분가능하고

산술, 기하평균에 의하여 $|f'(x)| = \left|-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\right| \le \left|\dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\right| = \dfrac{1}{1+x^2} < 1\,(\forall x \in R)$이 성립한다.

따라서 f는 R위에서 평등연속이다.

(5) $f:(0,1] \to R,\ f(x)= \sqrt{x}$

풀 이

$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \le 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$라 하자. 그러면 f^*는 $[0,1]$위에서 연속이다. 따라서 f는 $(0,1]$에서 평등연속이다.

(6) $f:(0,1] \to R,\ f(x)= x\sin\dfrac{1}{x}$

풀 이

$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \le 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$라 하자. 그러면 f^*는 $[0,1]$위에서 연속이다. 따라서 f는 $(0,1]$에서 평등연속이다.

문 2. 다음과 같이 정의된 함수들이 평등연속이 아님을 보여라.

(1) $f:[1,\infty)\to R,\ f(x)=x^3$

풀 이

$x_n=n+\dfrac{1}{n},\ y_n=n\ (n\in N)$라 하자.

그러면 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(n+\dfrac{1}{n^3}\right)-n^3\right)\ge\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$이다.

따라서 f는 $[1,\infty)$위에서 평등연속이 아니다.

(2) $f:(0,1)\to R,\ f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

풀 이

$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\ y_n=\dfrac{1}{2n\pi}\ (n\in N)$라 하자.

그러면 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin(2n\pi)\right)=1\neq0$이다.

따라서 f는 $(0,1)$위에서 평등연속이 아니다.

(3) $f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

풀 이

$x_n=\dfrac{1}{n},\ y_n=\dfrac{2}{n}\ (n\in N)$라 하자.

그러면 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\dfrac{n^2}{4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{4}=\infty\neq0$이다.

따라서 f는 $(0,\infty)$위에서 평등연속이 아니다.

문 3. E가 R의 부분집합일 때, 함수 $f:E\to R$에 있어서, 모든 $x,y\in E$에 대하여 부등식

$$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$$

를 만족시키는 실수 $K>0$이 존재한다면, f는 반드시 E 위에서 평등연속임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\delta=\dfrac{\epsilon}{K}$라 놓자. 단, $K>0$

그러면 $|x-y|<\delta$인 모든 $x,y\in E$에 대하여 $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|<K\delta=\epsilon$를 만족한다.

따라서 f는 E위에서 평등연속이다.

문 4. 함수 $f:R\to R$가 $x=0$에서 연속이고, 모든 $x,y\in R$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$가 성립할 때, f는 R 위에서 평등연속임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 f가 $x=0$에서 연속이므로 $\exists\,\delta^*>0\ s.t.\ |x|<\delta^*,\ x,y\in R\Rightarrow|f(x)|<\epsilon$

이제 $\delta=\delta^*$로 두면, $|x-y|<\delta$인 모든 $x,y\in R$에 대하여

$f(x-y)+f(y)=f(x)$이므로 $|f(x)-f(y)|=|f(x-y)|<\epsilon$를 만족한다.

따라서 f는 R위에서 평등연속이다.

문 5. 함수 $f: R \to R$이 연속이고, 모든 $x \in R$에 대하여 $f(x) = f(x+a)$ (a는 0이 아닌 양의 상수)가 성립할 때, f는 R 위에서 평등연속임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 가정에 의하여 f는 $[0, 2a]$위에서 연속이므로 f는 $[0, 2a]$위에서 평등연속이다. 그러므로 $\exists \delta^* > 0 \ s.t. \ |x-y| < \delta^*, x, y \in [0, a] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

이제 $|x-y| < \delta$이고 $x, y \in R$라고 하자. $\delta < a$이므로 적당한 정수 n이 존재해서 $x, y \in [na, (n+2)a]$을 만족한다.

$x_0 = x - na, y_0 = y - na$라고 하면, $x_0, y_0 \in [0, 2a]$이고

$|x_0 - y_0| = |x - na - (y - na)| = |x - y| < \delta$가 된다. 또한 주어진 조건에 의해 $f(x) = f(x_0), f(y) = f(y_0)$를 만족하므로 $|f(x) - f(y)| = |f(x_0) - f(y_0)| < \epsilon$을 만족한다. 그러므로 f는 R위에서 연속이다.

문 6. 두 함수 $f, g: R \to R$이 평등연속이면, 합 $f+g$는 R 위에서 평등연속임을 보여라. 그러나 일반적으로 f와 g가 R 위에서 평등연속이더라도 f와 g의 곱 fg는 R 위에서 평등연속이 아님을 예를 들어 보여라.

풀 이

① 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 f, g가 각각 R위에서 평등연속이므로

$\exists \delta_1 > 0 \ s.t. \ |x-y| < \delta_1, x, y \in R \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\quad \exists \delta_2 > 0 \ s.t. \ |x-y| < \delta_2, x, y \in R \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$

이제 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$라 두자. 그러면

$$|x-y| < \delta, x, y \in R \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| \le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

따라서 합 $f+g$는 R위에서 평등연속이다.

② $f(x) = g(x) = x$라 하자. 그러면 f, g는 R 위에서 평등연속지만 $(fg)(x) = x^2$는 R위에서 평등연속이 아니다.

문 7. 함수 $f: [0, \infty) \to R$가 연속이고 또한 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$이면, f는 $[0, \infty)$ 위에서 평등연속이 됨을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$이므로 $\exists M \in R \ s.t. \ x \ge M \Rightarrow |f(x) - 0| = |f(x)| < \epsilon$

그러므로 모든 $x, y \in R$에 대하여 $|f(x) - f(y)| \le |f(x)| + |f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$를 만족한다.

즉, f는 $[M, \infty)$위에서 평등연속이다. 또한 f는 $[0, \infty)$에서 연속이므로 f는 $[0, \infty)$위에서 평등연속이다.

문 8. 함수 $f: (a, b) \to R$가 평등연속이면, 두 극한 $\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x)$가 존재함을 보여라. 따라서 f의 확장함수 F, 즉, $F|_{(a,b)} = f$인 연속함수 F: $[a, b] \to R$가 존재한다. (힌트: 정리 5.5.5를 이용하여라)

풀 이

수열 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \subset (a, b)$를 각각 a와 b에 수렴한다고 하자. 그러면 수열 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$는 $Cauchy$수열이고 f는 (a, b)에서 평등연속하므로 수열 $\langle f(x_n) \rangle, \langle f(y_n) \rangle$도 $Cauchy$수열이다. 그러므로 수열 $\langle f(x_n) \rangle, \langle f(y_n) \rangle$도 각각 어떤 실수로 수렴을 하게 되고 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = p, \lim_{n \to \infty} f(y_n) = q$라 하자. 따라서 $\lim_{x \to a} f(x) = p, \lim_{x \to b} f(x) = q$이다.

이제 $F(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ p, & x = a \\ q, & x = b \end{cases}$ 라 하자. $F|_{(a,b)} = f$이고 f가 (a, b)에서 연속이므로 F도 (a, b)위에서 연속이 된다.

또, F는 $x = a, b$위에서 연속이므로 $[a, b]$위에서 연속이 된다.

문 9. $A \subset R$이라고 하고 함수 $f: A \to R$가 평등연속이라고 하자. 이 때, A가 유계집합이면 f는 A 위에서 유계임을 보여라.

풀 이

$\epsilon = 1$에 대하여 f는 A위에서 평등연속이므로 $\exists\, \delta > 0 \ s.t. \ |x-y| < \delta, x, y \in A \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$

A는 유계이므로 길이가 $\dfrac{\delta}{2}$인 구간의 유한개의 합집합에 포함된다. 이 유한개의 구간을 $I_1, \cdots, I_n$이라 하자. $k \in N$에 대하여 $x_k \in I_k, x_k \in A$인 점을 고정시키자. 그러면 $x \in I_k$인 모든 $x \in A$에 대하여 $|x - x_k| < \delta$이므로 $|f(x) - f(x_k)| < 1$을 만족한다. 즉, $|f(x)| \le |f(x_k)| + 1$을 만족한다.

$M = \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, \cdots, |f(x_n)|\} + 1$로 두면, 모든 $x \in A$에 대하여 $|f(x)| \le M$을 만족한다. 그러므로 f는 A에서 유계이다.

문 10. 문제 8의 역이 성립함을 보여라. 즉, $f: (a, b) \to R$이 연속이고, 두 극한 $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to b} f(x)$가 존재하면, f는 구간 (a, b) 위에서 평등연속임을 보여라.

풀 이

$f: (a, b) \to R$이 연속이고 극한 $\lim_{x \to a} f(x) = p, \lim_{x \to b} f(x) = q$이 존재하면 $F(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b \\ p & , x = a \\ q & , x = b \end{cases}$ 와 같이 정의한 확장함수 F를 얻고 F는 $[a, b]$위에서 연속이므로 $[a, b]$위에서 평등연속이 되고 따라서 f도 (a, b)위에서 평등연속이다.

정동명 해석학 | 5.6 단조함수

문 1. 주 5.6.2의 (1)을 증명하여라.

풀 이 $\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=L$

임의의 $\epsilon>0$이 주어졌다고 하자. $\delta>0$에 대하여 다음 두 명제는 서로 동치이다.

① $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$

② $(0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon)\wedge(0<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon)$

따라서 주 5.6.2의 (1)이 성립한다.

문 2. 함수 $f:R\to R$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$$

이 때, $f(1^+)$와 $f(1^-)$의 값을 구하여라.

풀 이

$f(1^+)=\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(-x+3)=2$ 이고 $f(1^-)=\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2)=1$ 이다.

문 3. 함수 $f,g:R\to R$가 각각 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right],\ g(x)=\left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}$$

(단, $a>0, b>0$, $[x]$는 $x-1<[x]\le x$인 정수). 이 때, $f(0^-)=\frac{b}{a}$, $g(0^-)=0$임을 보여라.

풀 이

① $\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right)\le\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\le\frac{x}{a}\cdot\frac{b}{x}=\frac{b}{a}$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{x}{a}\left(\frac{b}{x}-1\right)\le\lim_{x\to 0-}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\le\lim_{x\to 0-}\frac{x}{a}\cdot\frac{b}{x}=\frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a}\le\lim_{x\to 0-}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\le\frac{b}{a}$$

가 성립한다. 따라서 $f(0^-)=\frac{b}{a}$이다.

② 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $-a<x<0$이면 $\left[\frac{x}{a}\right]=0$이다.

이제 $\delta=a$로 택하자. 그러면 $-\delta<x<0$일 때, $|g(x)-0|=\left|\left[\frac{x}{a}\right]\frac{b}{x}\right|=\left|\left[\frac{x}{a}\right]\right|\left|\frac{b}{x}\right|=0\cdot\left|\frac{b}{x}\right|=0<\epsilon$ 이 성립한다.

따라서 $g(0^-)=0$이다.

문 4. 함수 $f:(a,b)\to R$가 연속이고, 단조증가(또는 단조감소)할 때, 극한 $f(a^+)$와 $f(b^-)$가 존재하는가를 조사하여라.

풀 이

① 단조증가인 경우: $f(a^+)=inf\{f(x)|a<x<b\}$이고 위로 유계이면 $f(b^-)=sup\{f(x)|a<x<b\}$이고 위로 유계가 아니면 $f(b^-)=\infty$이다.

② 단조감소인 경우: $f(b^-)=sup\{f(x)|a<x<b\}$이고 아래로 유계이면 $f(a^+)=inf\{f(x)|a<x<b\}$이고 아래로 유계가 아니면 $f(a^+)=-\infty$이다.

문 5. 함수 $f: R \to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, f의 불연속점을 찾고 그 불연속점이 제1종인지 또는 제2종인지 구분하여라.

(1) $f(x) = [x]$

풀 이

함수 f는 명백히 $x = n\,(n \in Z)$에서 불연속이고 $f(n^+) = n, f(n^-) = n-1$이므로 $x = n$에서 f의 제 1종 불연속점이 된다.

(2) $f(x) = [x^2]$

풀 이

함수 f는 명백히 $x = \sqrt{n}\,(n \in Z)$에서 불연속이고 $f\left(\sqrt{n^+}\right) = n, f\left(\sqrt{n^-}\right) = n-1$이므로 $x = \sqrt{n}$에서 f의 제 1종 불연속점이 된다.

(3) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$

풀 이

함수 f는 모든 $a \in R$에 대하여 $x = a$에서 불연속이다.
이제 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$를 각각 a에 수렴하는 유리수열과 무리수열이라 하자.
그러면 $\lim_{x \to a+} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to a+} f(y_n)$이고 $\lim_{x \to a-} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to a-} f(y_n)$이다. 따라서 $f(a^+), f(a^-)$는 존재하지 않는다. 그러므로 $x = a$에서 f의 제 2종 불연속점이 된다.

(4) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$

풀 이

함수 f는 $a \neq 0$인 모든 $a \in R$에 대하여 $x = a$에서 불연속이고, $f(a^+), f(a^-)$는 존재하지 않는다. 따라서 $a \neq 0$인 모든 $a \in R$에 대하여 $x = a$에서 f의 제 2종 불연속점이 된다.

문 1. 함수열 $\langle f_n \rangle$이 다음과 같이 정의되었을 때, 그 점별극한함수를 구하고 $\langle f_n \rangle$의 평등수렴성을 조사하여 보아라.

(1) $f_n(x) = \dfrac{nx^n}{1+nx^n}$

풀 이

$|x| \ge 1$이면, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$이고 $x = 0$이면, $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$이다. 그리고 $|x| < 1$이면, 로피탈 법칙에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\dfrac{1}{x^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{\ln(1/x)} = 0$이므로 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx^n}{1+nx^n} = 0$ 이다.

따라서 극한함수 f는 $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| \ge 1 \end{cases}$ 이다. 또한 모든 자연수 n에 대하여 f_n은 R위에서 연속이지만 f는 R 위에서 불연속이므로 함수열 $\langle f_n \rangle$은 R 위에서 f로 평등수렴하지 않는다.

(2) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$

풀 이

$x = 0$이면 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{1^k} = 0$이고 $x \ne 0$이면 $\dfrac{1}{1+x^2} < 1$이므로 무한등비급수의 무한합에 의하여 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = \dfrac{x^2}{\dfrac{x^2}{1+x^2}} = 1 + x^2$ 이 성립한다.

따라서 극한함수 f는 $f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x^2+1 & , x \ne 0 \end{cases}$ 이다. 또한 모든 자연수 n에 대하여 $_n$은 R위에서 연속이지만 f는 R위에서 불연속이므로 함수열 $\langle f_n \rangle$는 R 위에서 f로 평등수렴하지 않는다.

문 2. 함수열 $\langle f_n \rangle$이 구간 $[0, \infty)$ 위에서 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$$

이 때, $\langle f_n \rangle$은 $[a, \infty)$ $(a > 0)$ 위에서 평등수렴하지만, $[0, 1]$ 위에서는 평등수렴하지 않음을 보여라.

풀 이

$x = 0$이면 $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$이고

$x \ne 0$이면 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{(1/n)+x^2} = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}\ (\because x \ne 0)$이다.

따라서 $a > 0$에 대하여 $[a, \infty)$위에서 함수열 $\langle f_n \rangle$의 극한함수 f는 $f(x) = \dfrac{1}{x}$이다.

또한 모든 n에 대하여

$\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n(x) - f(x) \|_{[a,\infty)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{nx}{1+nx^2} - \dfrac{1}{x} \right\|_{[a,\infty)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \dfrac{1}{x+nx^3} \right\|_{[a,\infty)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a+a^3 n} = 0$를 만족한다.

그러므로 함수열 $\langle f_n \rangle$은 $[a, \infty)$위에서 f로 평등수렴한다. 하지만 $[0,1]$위에서 함수열 $\langle f_n \rangle$의 극한함수 f^*는 $f^*(x)=\begin{cases} 0 & ,x=0 \\ \frac{1}{x} & ,x \neq 0 \end{cases}$로써 모든 n에 대하여 $\langle f_n \rangle$는 $[0,1]$위에서 연속이지만 극한함수 f^*는 $[0,1]$위에서 불연속이다. 따라서 함수열 $\langle f_n \rangle$는 $[0,1]$위에서 f^*로 평등수렴하지 않는다.

문 3. 함수열 $\langle f_n \rangle$이 구간 $[0, \infty)$ 위에서 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f_n(x)= \frac{x^n}{1+x^n}$$

이 때, $\langle f_n \rangle$은 $[0,b]$($0<b<1$) 위에서 평등수렴하지만, $[0,1]$ 위에서는 평등수렴하지 않음을 보여라.

풀 이

$x=0$이면 $f(x)= \lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$

$0<x<1$이면 $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로 $f(x)= \lim_{n\to\infty} f_n(x)= \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}=0$

$x=1$이면 $f(1)= \lim_{n\to\infty} f_n(1)= \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n}= \frac{1}{2}$이다.

따라서 $0<b<1$에 대하여 $[0,b]$위에서 함수열 $\langle f_n \rangle$의 극한함수 f는 $f(x)=0$이다.
또한 모든 $n \in N$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n(x)-f(x) \|_{[0,b]}= \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x^n}{1+x^n}-0 \right\|_{[0,b]} = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x^n}{1+x^n} \right\|_{[0,b]} = \lim_{n\to\infty} x^n=0$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \| f_n(x)-f(x) \|_{[0,b]}=0$이다.

따라서 함수열 $\langle f_n \rangle$는 $[0,b]$위에서 f로 평등수렴한다.

하지만 $[0,1]$위에서 함수열 $\langle f_n \rangle$의 극한함수 f^*는 $f^*(x)=\begin{cases} 0 & ,0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & ,x=1 \end{cases}$ 로써 함수열 $\langle f_n \rangle$은 $[0,1]$위에서 연속이지만 극한함수 f^*는 $[0,1]$위에서 불연속이다.
따라서 $\langle f_n \rangle$는 $[0,1]$위에서 f^*로 평등연속하지는 않는다.

문 4. 함수 $f:R \to R$이 평등연속이고, 각 자연수 n에 대하여, $f_n:R \to R$을 $f_n(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$로 정의하였을 때, 함수열 $\langle f_n \rangle$은 R 위에서 f에 평등수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여
f가 R위에서 평등연속이므로 $\exists \delta>0 \ s.t. \ |x-y|<\delta, x,y \in R \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$
아르키메데스 성질에 의하여 $\frac{1}{k}<\delta$인 $k \in Z^+$가 존재하고
$n \ge k$일 때, 모든 $x \in R$에 대하여 $\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\right|= \frac{1}{n} \le \frac{1}{k}<\delta$이므로 $|f_n(x)-f(x)|=\left|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right|<\epsilon$ 이 성립한다. 따라서 함수열 $\langle f_n \rangle$은 R위에서 f에 평등수렴한다.

문 5. 실수의 집합 R 위에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$이 극한함수 $f: R \to R$에 평등수렴한다고 하자. 각 자연수 n에 대하여 $g_n: R \to R$을 $g_n(x) = f_n\left(x + \frac{1}{n}\right)$로 정의하였을 때, 함수열 $\langle g_n \rangle$은 R 위에서 f에 점별수렴함을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

$\langle f_n \rangle$이 R위에서 f로 점별수렴하므로 $\exists k_1 \in Z^+ \ s.t. \ n \geq k_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$

또한 가정에 의하여 모든 $n \in Z^+$에 대하여 f_n이 R위에서 연속이고 함수열 $\langle f_n \rangle$이 R위에서 f로 평등수렴하므로 f는 R위에서 연속이다.

즉, $\lim_{n \to \infty} f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f\left(\lim_{n \to \infty}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) = f(x)$을 만족하므로 $\exists k_2 \in Z^+ \ s.t. \ n \geq k_2 \Rightarrow \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}$

이제 $k = \max\{k_1, k_2\}$로 택하자. 그러면 $n \geq k$인 모든 $n \in Z^+$에 대하여

$$|g_n(x) - f(x)| = \left|f_n\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left|f_n\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)\right| + \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

를 만족한다. 따라서 함수열 $\langle g_n \rangle$은 R위에서 f에 점별수렴한다.

문 6. 각 자연수 n에 대하여 $f_n: [0,1] \to R$을 $f_n(x) = xe^{-nx^2}$으로 정의하였을 때, 함수열 $\langle f_n \rangle$이 $[0,1]$ 위에서 평등수렴함을 보여라.

풀 이

$x = 0$이면 $f(0) = \lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0$이고 $0 < x \leq 1$이면 $\frac{1}{e^{x^2}} < 1$이므로 $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$을 만족한다. 따라서 $[0,1]$위에서 극한함수는 $f(x) = 0$이다. 또한 $f_n{}'(x) = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$이므로 $f_n{}'(x) = 0$으로부터 $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$을 얻는다. 따라서 $\lim_{n \to \infty} \| f_n(x) - f(x) \|_{[0,1]} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2ne}} = 0$이므로 함수열 $\langle f_n \rangle$는 $[0,1]$위에서 f로 평등수렴한다.

문 7. 실수의 집합 R의 부분집합 K가 긴밀집합이고 K 위에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$이 K 위에서 극한함수 $f: K \to R$에 평등수렴하면, f는 K 위에서 평등연속임을 보여라.

풀 이

모든 $n \in Z^+$에 대하여 f_n이 K위에서 연속이고 함수열 $\langle f_n \rangle$이 K위에서 f로 평등수렴하므로 f는 K위에서 연속이다. 여기서 K는 긴밀집합이므로 따라서 f는 K위에서 평등연속이다.

문 8. 실수의 집합 R의 부분집합 E 위에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$이 E 위에서 함수 $f: E \to R$에 평등수렴하고 E에서의 수열 $\langle x_n \rangle$이 점 $x \in E$에 수렴한다고 할 때, $\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

함수열 $\langle f_n \rangle$이 E위에서 f로 점별수렴하므로 $\exists k_1 \in Z^+ \ s.t. \ n \geq k_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$

함수열 $\langle f_n \rangle$이 E위에서 f로 평등수렴하므로 f는 E위에서 연속이다.

즉, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$을 만족하므로 $\exists\, k_2 \in Z^+ \ s.t.\ n \ge k_2 \Rightarrow |f(x_n)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$

$k=\max\{k_1, k_2\}$로 두자.

그러면 $n \ge k$인 모든 $n \in Z^+$에 대하여 $|f_n(x_n)-f(x)| \le |f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$이 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x)$이다.

문 9. E를 실수의 집합 R의 부분집합이라 하고 $\langle f_n \rangle$을 E 위에서 정의된 유계함수열이라고 하자. $\langle f_n \rangle$이 E 위에서 함수 $f: E \to R$에 평등수렴할 필요충분조건은 $n\to\infty$일 때,

$$\| f_n - f \|_E = sup\ \{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in E\} \to 0$$

이 성립하는 것임을 증명하여라.

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

(⇨) 함수열 $\langle f_n \rangle$이 E위에서 평등수렴한다고 하자.

그러면 $\exists\, k \in Z^+ \ s.t.\ n \ge k, x \in E \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$

를 만족한다. 그러므로 $n \ge k$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\| f_n(x)-f(x) \|_E = sup\ \{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in E\} \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \| f_n(x)-f(x) \|_E = \lim_{n\to\infty}(sup\{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in E\})=0$을 만족한다.

(⇦) $\lim_{n\to\infty} \| f_n(x)-f(x) \|_E = 0$이라 하자.

그러면 $\exists\, k \in Z^+ \ s.t.\ n \ge k, x \in E \Rightarrow \| f_n(x)-f(x) \|_E = sup\ \{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in E\} < \epsilon$

를 만족한다. 그러므로 $n \ge k$인 모든 자연수 n에 대하여

$$|f_n(x)-f(x)| \le sup\ \{|f_n(x)-f(x)| \mid x \in E\} < \epsilon$$

이다. 즉, 함수열 $\langle f_n \rangle$이 E위에서 f로 평등수렴한다.

문 1. 함수 $f, g : R \to R$가 항등적으로 0이 아니고, 모든 $x, y \in R$에 대하여 다음의 세 조건을 만족한다고 하자.

(i) $f(x-y) = f(x)g(y) - g(x)f(y)$

(ii) $g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$

(iii) $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = 1$

이 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) f는 기함수이고, g는 우함수이다.

풀 이

$x = y = 0$이면, $f(0) = f(0)g(0) - f(0)g(0) = 0$이고 $g(0) = g(0)^2$으로부터 $g(0) = 0$ 또는 $g(0) = 1$이다.
모든 $y \in R$에 대하여 $f(-y) = f(0)g(y) - g(0)f(y) = -g(0)f(y)$이다.
여기서 $g(0) = 0$이면 $f(-y) = 0$이고 이는 가정에 모순된다. 따라서 $g(0) = 1$이다.
따라서 $f(-y) = -f(y)$가 성립한다. 즉, f는 기함수이다.
한편, $g(-y) = g(0)g(y) + f(0)f(y)$이므로 따라서 $g(-y) = g(y)$가 성립한다. 즉, g는 우함수이다.

(2) g는 R 위에서 연속이다.

풀 이

우선 g가 $x = 0$에서 연속임을 보이자.

$f(2h) = f(h)g(-h) - g(h)f(-h) = 2f(h)g(h)$이므로 $f(2h) = \lim_{h \to 0+} \frac{2f(h)g(h)}{2h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(2h)}{2h} = 1$이고

따라서 $\lim_{h \to 0+} g(h) = \lim_{h \to 0+} \dfrac{\frac{2f(h)g(h)}{2h}}{\frac{f(h)}{h}} = 1$ 이다.

여기서 g는 우함수이므로 $\lim_{h \to 0-} g(h) = \lim_{h \to 0+} g(-h) = \lim_{h \to 0+} g(h) = 1 = g(0)$이다.

따라서 g는 $x = 0$에서 연속이다.

임의의 $a \in R$에 대하여

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} g(x) &= \lim_{h \to 0} g(a+h) = \lim_{h \to 0} g(a-(-h)) = \lim_{h \to 0} (g(a)g(-h) + f(a)f(-h)) \\ &= \lim_{h \to 0} (g(a)g(h) - f(a)f(h)) = g(a) \cdot \lim_{h \to 0} g(h) - f(a) \cdot \lim_{h \to 0} f(h) = g(a) - f(a) \cdot 0 = g(a)\end{aligned}$$

따라서 g는 R위에서 연속이다.

(3) g는 모든 점 $x \in R$에서 미분가능하며 $g' = -f$이다.

풀 이

임의의 $x \in R$에 대하여

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{(g(x)g(h) - f(x)f(h)) - (g(x)g(h) + f(x)f(h))}{2h} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{2f(x)f(h)}{2h} = -f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = -f(x)\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 g는 모든 $x \in R$에서 미분가능하며 $g' = -f$이다.

문 2. 함수 $f:R\to R$가 모든 $x\in R$에 대하여 $|f(x)|\le |x|^{\alpha}(\alpha>1)$를 만족할 때, f는 $x=0$에서 미분가능함을 보여라.

풀 이

$x=0$이면 $|f(0)|\le |0|^{\alpha}=0$이므로 $f(0)=0$이다.

그리고 $0\le\left|\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}\right|\le\left|\dfrac{|h|^{\alpha}}{h}\right|=|h|^{\alpha-1}$이 성립하고 $\alpha>1$이므로 $\lim\limits_{h\to 0}|h|^{\alpha-1}=0$이 성립한다.

따라서 조임정리에 의하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=0$이다. 그러므로 f는 $x=0$에서 미분가능하다.

문 3. 함수 $f:R\to R$가 $f(0)=0$이고, 모든 $x\in R$에 대하여 $|f(x)|\ge |x|^{\beta}(0<\beta<1)$를 만족할 때, f는 $x=0$에서 미분 불가능함을 보여라.

풀 이

$\left|\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}\right|\ge\left|\dfrac{|h|^{\beta}}{h}\right|=|h|^{\beta-1}$이고 $0<\beta<1$이므로 $\lim\limits_{h\to 0}|h|^{\beta-1}=\infty$이다.

따라서 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}$의 값은 존재하지 않는다. 그러므로 f는 $x=0$에서 미분불가능이다.

문 4. 함수 $f:R\to R$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$$

이 때, f는 $x=0$에서 미분 가능함을 보이고, $f'(0)$의 값을 구하여라.

풀 이

$f(0)=0$이므로 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h=0 & ,h\in Q\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0 & ,h\in R-Q\end{cases}$

따라서 f는 $x=0$에서 미분가능하고 $f'(0)=0$ 이다.

문 5. 함수 $f:R\to R$가 점 $x=c$에서 미분가능하고, $f(c)=0$이라고 하자. 이 때, 함수 $g(x)=|f(x)|$가 점 $x=c$에서 미분가능할 필요충분조건은 $f'(c)=0$인 것임을 보여라.

풀 이

(⇨) $f'(c)\ne 0$이라 하자.

그러면 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(c+h)-g(c)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(c+h)}{h}\ (\because g(c)=0)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|f(c+h)|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|f(c+h)|}{|h|}\cdot\frac{|h|}{h}=f'(c)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

를 만족한다. 여기서 $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{|h|}{h}=-1$이고 $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{|h|}{h}=1$이므로 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(c+h)-g(c)}{h}$은 존재하지 않는다.

따라서 g는 $x=c$에서 미분 불가능이다.

문 6. 함수 $f, g : R \to R$가 $f(a) = g(a)$이고 $f_-{}'(a) = g_+{}'(a)$를 만족한다고 하자. 함수 $h : R \to R$을

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \le a \\ g(x), x \ge a \end{cases}$$

로 정의하였을 때, 점 $x = a$에서의 h의 미분가능성을 조사하여라.

풀 이

$f(a) = g(a)$이므로

$h_-{}'(a) = \lim\limits_{k \to 0-} \dfrac{h(a+k) - h(a)}{k} = \lim\limits_{k \to 0-} \dfrac{f(a+k) - f(a)}{k} = f_-{}'(a)$이고

$h_+{}'(a) = \lim\limits_{k \to 0+} \dfrac{h(a+k) - h(a)}{k} = \lim\limits_{k \to 0-} \dfrac{g(a+k) - g(a)}{k} = g_+{}'(a)$이 성립하며

가정에 의하여 $f_-{}'(a) = g_+{}'(a)$이다. 따라서 $h_-{}'(a) = h_+{}'(a)$이다.

그러므로 h는 $x = a$에서 미분가능이다.

문 7. 함수 $f : [a, b] \to R$가 $[a, b]$ 위에서 미분가능하면, f는 $[a, b]$ 위에서 평등연속임을 보여라.

풀 이

f가 $[a, b]$위에서 미분가능하면 f는 $[a, b]$위에서 연속이다.
여기서$[a, b]$는 긴밀집합이고 f는 $[a, b]$위에서 연속이므로 따라서 f는 $[a, b]$위에서 평등연속이 된다.

문 8. 함수 $f : R \to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, f'를 구하여라.

(1) $f(x) = |x| + |x+1|$

풀 이

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , x \leftarrow 1 \\ 0 & , -1 < x < 0 \\ 2 & , x > 0 \end{cases}$$

$x = 0, -1$에서는 미분불능이다.

(2) $f(x) = x|x|$

풀 이

모든 $x \in R$에 대하여 $f'(x) = 2|x|$

(3) $f(x) = [x]$

풀 이

$x \notin Z$에 대하여 $f'(x) = 0$이고 $x \in Z$에 대해서는 미분불가능이다.

(4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$

풀 이

$x \ne n\pi$이면 $f'(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$이고 $x = n\pi$이면 미분불가능이다.

문 9. 함수 $f:[0,1] \to R$가 다음과 같이 정의되었을 때,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}, (p,q)=1 \\ 0, & x=0 \text{ or } x \in Q^c \end{cases}$$

임의의 점 $c \in [0,1]$에서의 f의 미분가능성을 조사하여라.

풀 이

① $a \neq 0$인 $a \in Q$라 하자. 즉, $a=\dfrac{q}{p}$(p와 q는 서로소인 자연수)라 하자.

수열 $\langle x_n \rangle \subset [0,1]$을 모든 $n \in Z^+$에 대하여 $x_n \neq a$이고 a로 수렴하는 무리수열이라 하면,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\dfrac{1}{p}}{x_n-a}$$

가 되므로 극한이 존재하지 않는다. 그러므로 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$는 존재하지 않는다.

따라서 $x=a$에서 f는 미분가능하지 않다.

② $a \in (R-Q) \cup \{0\}$라 하자. 수열 $\langle y_n \rangle \subset [0,1]$을 모든 $n \in Z^+$에 대하여 $y_n \neq a$이고 a로 수렴하는 무리수열이라 하면, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}=0$이 된다.

$a=0$에 대해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(1/n)-f(0)}{(1/n)-0} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)}{(1/n)} = 1 \neq 0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$는 존재하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

a가 무리수인 경우, a의 소수전개를 $a=0,d_1d_2d_3\cdots$라 하자. 그리고 수열 $\langle z_n \rangle \subset Q$을 다음과 같이 정의하자.

$$z_n = 0, d_1d_2\cdots d_n$$

그러면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = a$이다. $a \neq 0$이므로 $k=\min\{n \mid d_n \neq 0\}$이 존재해서 $n \geq k$인 모든 $n \in Z^+$에 대하여

$$|z_n - a| = 0.0\cdots 0 d_{n+1}d_{n+2}\cdots < \frac{1}{10^n},\ |f(z_n)-f(a)| = |f(z_n)| \geq \frac{1}{10^k}$$

$$\therefore \left| \frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a} \right| > 10^{n-k} \geq 1$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a} \right| \geq 1 \neq 0$이다. 그러므로 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$는 존재하지 않는다.

따라서 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

③ ①과 ②에 의하여 f는 $[0,1]$의 모든 점에서 미분가능하지 않는다.

문 10. 정리 6.1.9를 증명하여라.

[함수 $f:[a,b] \to R$가 점 $c \in [a,b]$에서 미분가능하며, $f'(c) < 0$이라 하자.
그러면 $\delta > 0$가 존재하여 $|x_i - c| < \delta$이고 $x_i \in [a,b]$인 모든 $x_i (i=1,2)$에 대하여
$x_1 < c < x_2$이면, $f(x_1) > f(c) > f(x_2)$이다.]

풀 이

f는 $x=c$에서 미분가능하므로 $\epsilon = -\dfrac{f'(c)}{2} > 0$에 대하여

$$\exists\, \delta > 0 \ s.t.\ 0 < |x-c| < \delta,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < -\frac{f'(c)}{2}$$

$$\therefore \frac{3f'(c)}{2} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \frac{f'(c)}{2} < 0$$

그러므로 $c-\delta < x_1 < c$이고 모든 $x_1 \in [a,b]$에 대하여 $\dfrac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} < 0$이다. $\therefore\ f(x_1) > f(c)$

또한 $c < x_2 < c+\delta$이고 모든 $x_2 \in [a,b]$에 대하여 $\dfrac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} < 0$이다. $\therefore\ f(x_2) < f(c)$

따라서 $x_1 < c < x_2$인 모든 $x_1, x_2 \in [a,b]$에 대하여 $f(x_1) > f(c) > f(x_2)$를 만족한다.

문 11. 함수 $f:[a,b] \to R$가 $c \in [a,b]$에서 미분가능하며 $f'(c) > 0$이더라도 c를 포함하는 어떠한 구간에서 함수 f가 증가함수가 아닌 예를 들어보아라.

풀 이

$f(x) = \begin{cases} x+2x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ 라 하자.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h+2h^2\sin(1/h)}{h} > 0$이므로 $f'(0) = 1$이 되고

$x \neq 0$이면 $f'(x) = 1+4x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$이 된다.

그리고 모든 $x \in N$에 대하여 $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = 1+\dfrac{2}{n\pi}\sin(2n\pi) - 2\cos(2n\pi) = -1 < 0$이고

$f'\left(\dfrac{2}{(4n+1)\pi}\right) = 1+\dfrac{8}{(4n+1)\pi}\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right) - 2\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right) = 1+\left(\dfrac{8}{(4n+1)\pi}\right) > 0$이다.

$x=0$을 포함하는 적당한 구간 $(-\epsilon, \epsilon)$이 존재하여 f가 증가함수라 하자.

그러면 $\exists\, k \in Z^+\ s.t.\ \dfrac{1}{2n\pi} < \epsilon$

문제 10에 의하여 증가함수가 안되는 $x = \dfrac{1}{2k\pi}$를 포함하는 구간이 존재하므로 이는 모순이다.

그러므로 함수 f는 c를 포함하는 어떠한 구간에서도 증가함수가 아니다.

문 1. $D=\left\{x\in R\,|\,x=0\,\mathrm{or}\sin\frac{1}{x}\geq 0\right\}$**이고 함수** $f:D\to R$**가** $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ **으로 정의되고, 함수** $g:[0,\infty)\to R$**가** $g(y)=\sqrt{y}$**로 정의되었을 때, 다음의 물음에 답하여라.**

(1) f**의 치역과** g**의 정의역이 일치함을 보여라.**

풀 이

$x\in D$이면 $f(x)\geq 0$이므로 $\{f(x)\,|\,x\in D\}=[0,\infty)$

(2) 점 $x=0$**은 집합** D**의 집적점임을 보이고, 또한 점** $f(0)=0$**은 집합** $[0,\infty)$**의 집적점임을 보여라.**

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 아르키메데스 성질에 의하여 $\exists k\in N\ s.t.\ \frac{1}{k}<\epsilon$

$\frac{1}{(2k+1)\pi}\leq x\leq\frac{1}{2k\pi}$이면 $\sin\frac{1}{x}\geq 0$이므로 $\left[\frac{1}{(2k+1)\pi},\frac{1}{2k\pi}\right]\subset D$

따라서 $(-\epsilon,\epsilon)\cap(D-\{0\})\neq\varnothing$이고 그러므로 $x=0$은 D의 집적점이다.

마찬가지로 $f(0)=0$도 집합 $[0,\infty)$의 집적점이다.

(3) $(g\circ f)'(0)$**이 존재하는가를 조사하여라.**

풀 이

$x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$라 하자. 그러면 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle$은 각각 0으로 수렴하는 수열이지만

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(f(x_n))-g(f(0))}{x_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\sqrt{\sin\frac{1}{x_n}}}{x_n}=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n\sqrt{\sin\frac{1}{y_n}}}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{g(f(y_n))-g(f(0))}{y_n-0}$$ 이다.

따라서 $x=0$에서 $g\circ f$는 미분불가능이다. 그러므로 $(g\circ f)'(0)$는 존재하지 않는다.

(4) $x\neq 0$**인 임의의 점** $x\in D$**에서** $(g\circ f)'(0)$**가 존재하는가를 조사하여라.**

풀 이

$x\neq 0, x\neq\frac{1}{n\pi}$이면 정리 6.2.2에 의해 미분가능이고, $x=\frac{1}{k\pi}\,(k\in N)$에 대해서는 미분불가능이다.

① $\frac{1}{x_n}=(2k-1)\pi-\frac{1}{n}$이라 하자.

그러면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=(2k-1)\pi$이다. 즉, $x_n=\frac{n}{(2k-1)n\pi-1}$이면 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{(2k-1)\pi}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(f(x_n))-g\left(f\left(\frac{1}{(2k-1)\pi}\right)\right)}{x_n-\frac{1}{(2k-1)\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{g\left(x_n^2\sin\frac{1}{x_n}\right)}{\frac{n(2k-1)\pi-(2k-1)n\pi+1}{\{(2k-1)n\pi-1\}(2k-1)\pi}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{(2k-1)n\pi-1\}(2k-1)\pi\cdot\frac{n}{(2k-1)\pi-1}\cdot\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(2k-1)\pi n\sqrt{\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(2k-1)\pi\sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{\sin(1/n)}{1/n}} = \infty$$

따라서 $x = \dfrac{1}{(2k-1)\pi}\,(k\in N)$에서 미분 불가능이다.

② 마찬가지 방법으로 $x = \dfrac{1}{2k\pi}\,(k\in N)$에서 미분 불가능이다.

문 2. 함수 $f:R\to R$가 우함수이고, 모든 점 $x\in R$에서 미분가능할 때, $f\,'$은 기함수임을 보여라. 또 $g:R\to R$가 기함수이고, 모든 점 $x\in R$에서 미분가능할 때, $g\,'$은 우함수임을 보여라.

풀 이

모든 $x\in R$에 대하여 가정에 의하여 $f\,'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$이고 f가 우함수이므로

$$f\,'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=-f\,'(x)$$

가 성립한다. 따라서 $f\,'$는 기함수이다.

한편 가정에 의하여 $g\,'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$이고 g가 기함수이므로

$$g\,'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(-x+h)-g(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-g(x-h)+g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x-h)}{h}=g\,'(x)$$

가 성립한다. 따라서 $g\,'$는 우함수이다.

문 3. 함수 $f:R\to R$가 $f(x)=x$로 정의되었을 때, 임의의 $y\in R$에 대하여 $(f^{-1})'(y)$를 구하여라.

풀 이

모든 $y\in R$에 대하여 $f\,'(x)=1\,(\forall\, x\in R)$이므로 $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f\,'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{1}=1$ 이다.

문 4. 함수 $f:(0,\infty)\to R$가 $f(x)=x^2$으로 정의되었을 때, 임의의 점 $y\in(0,\infty)$에 대하여 $(f^{-1})'(y)$를 구하여라.

풀 이

모든 $y\in(0,\infty)$에 대하여 $f\,'(x)=2x\,(\forall\, x\in(0,\infty))$이고

$y=x^2$일 때, $x>0$이면 $x=\sqrt{y}$이므로 $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f\,'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{2f^{-1}(y)}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ 이다.

문 5. 함수 $f:(0,\pi)\to R$가 $f(x)=\cos x$로 정의되었을 때, 임의의 점 $y\in(-1,1)$에 대하여 $(f^{-1})'(y)$를 구하여라.

풀 이

모든 $y\in(-1,1)$에 대하여 $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f\,'(f^{-1}(y))}=\dfrac{1}{-\sin(f^{-1}(y))}=-\dfrac{1}{\sin(\cos^{-1}y)}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ 이다.

문 1. 함수 $f:[a,b]\to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, $Rolle$정리의 가정을 만족함을 보이고, $f'(c)=0$을 만족시키는 점 $c\in(a,b)$를 구하여라.

(1) $[a,b]=[0,1],\ f(x)=\sqrt{x}\,(x-1)$

풀 이

f는 $[0,1]$위에서 연속이고 $(0,1)$위에서 미분가능하며, $f(0)=0=f(1)$이므로 롤의 정리의 가정을 만족한다.

따라서 $x\in(0,1)$일 때, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$으로부터 $f'(x)=0$이 되는 $x=\dfrac{1}{2}$이다.

(2) $[a,b]=[1,2],\ f(x)=(x-1)(2-x)$

풀 이

f는 $[1,2]$위에서 연속이고 $(1,2)$위에서 미분가능하며, $f(1)=0=f(2)$이므로 롤의 정리의 가정을 만족한다.

따라서 $x\in(1,2)$일 때, $f'(x)=3-2x$으로부터 $f'(x)=0$이 되는 $x=\dfrac{3}{2}$이다.

(3) $[a,b]=[0,8],\ f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

풀 이

f는 $[0,8]$위에서 연속이고 $(0,8)$위에서 미분가능하다. 하지만 $f(0)=0\neq 4=f(8)$이다. 그러므로 롤의 정리의 가정을 만족하지 않는다.

(4) $[a,b]=[0,1],\ f(x)=x^m\left(1-x^n\right)\ (n,m\in N)$

풀 이

f는 $[0,1]$위에서 연속이고 $(0,1)$위에서 미분가능하며, $f(0)=0=f(1)$이므로 롤의 정리의 가정을 만족한다.

따라서 $x\in(0,1)$일 때, $f'(x)=x^{m-1}\left(m-(m+n)x^n\right)$으로부터 $f'(x)=0$이 되는 $x=\sqrt[n]{\dfrac{m}{m+n}}$이다.

문 2. 모든 $x,y\in R$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

풀 이

① $x=y$이면 자명하게 성립한다.

② $x\neq y$이면 $f(x)=\sin x$라 할 때, $m=\min\{x,y\},\ M=\max\{x,y\}$라 하자.

그러면 f는 $[m,M]$위에서 연속이고 (m,M)위에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}=f'(c)=\cos c$를 만족하는 $c\in(m,M)$가 존재한다.

여기서 모든 $c\in(m,M)$에 대하여 $|\cos c|\le 1$이므로 따라서 $\left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|\le|\cos c|\le 1$을 만족한다.

그러므로 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$이 성립한다.

문 3. 함수 $f:[a,b]\to R$가 연속함수이고, 또한 $x\in(a,b)$에 대하여 $f'(x)\neq 0$이라고 하자. 만일 두 점 $x_1,x_2\in[a,b]$가 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$임을 보여라.

풀 이

두 점 $x_1,x_2\in[a,b]$가 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)=f(x_2)$라 가정하자.

여기서 $m=\min\{x_1,x_2\}$, $M=\max\{x_1,x_2\}$라 하자.

그러면 f는 $[m,M]\subset[a,b]$위에서 연속이고, (m,M)에서 미분가능하다.

또한 위의 가정에 의하여 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 롤의 정리의 가정을 만족한다.

따라서 $f'(c)=0$이 되는 $c\in(m,M)\subset(a,b)$가 존재한다. 이는 가정에 모순이다.

따라서 두 점 $x_1,x_2\in[a,b]$가 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

문 4. 함수 $f:[a,b]\to R$가 연속함수이고, 또한 (a,b)에서 미분가능하다고 하자. 점 $c\in(a,b)$에 대하여 $\lim_{x\to c}f'(x)=L$이면, $f'(c)=L$임을 보여라.

풀 이

f는 $[a,b]$위에서 연속이고 (a,b)위에서 미분가능하므로

임의의 $h>0$에 대하여 f는 $[c-h,c+h]\subset[a,b]$에서 연속이고 $(c-h,c+h)$위에서 미분가능하다.

그러면 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=f'(k)$를 만족하는 $k\in(c-h,c+h)$가 존재한다.

$f'(c)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}$이고, $c-h<k<c+h$일 때, $h\to 0$이면 $k\to c$이므로

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=\lim_{k\to c}f'(k)$이다. 가정에 의하여 $\lim_{k\to c}f'(k)=L$이므로 $f'(c)=L$이다.

문 5. 함수 $f:R\to R$가 $f(x)=q\cos x\,(0<q<1)$로 정의되었다고 하자. 수열 $\langle x_n\rangle$을 $x_1=a_0$ (a_0는 임의의 상수), $x_{n+1}=f(x_n)\,(n\geq 1)$으로 정의하였을 때, 수열 $\langle x_n\rangle$은 방정식 $f(x)=x$의 근 r에 수렴함을 보여라. (문제 5.4.7)

풀 이

$m=\min\{x_n,x_{n+1}\}, M=\max\{x_n,x_{n+1}\}$라 할 때,

평균값 정리에 의하여 $\exists\, c_n\in(m,M)\ s.t.\ f'(c_n)=\dfrac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}$ 이다.

그러면 $x_{n+2}-x_{n+1}=f(x_{n+1})-f(x_n)=f'(c_n)(x_{n+1}-x_n)$이 성립하고

$|f'(x)|=|-q\sin x|\leq q$이므로 $|x_{n+2}-x_{n+1}|\leq q|x_{n+1}-x_n|$이 성립한다.

따라서 수열 $\langle x_n\rangle$는 $Cauchy$수열이므로 수열 $\langle x_n\rangle$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}x_n=r$이라 놓으면,

주어진 점화식의 양변에 극한을 취하면 f가 연속이므로 $f(r)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(r)$이 된다.

즉, 수열 $\langle x_n\rangle$는 방정식 $f(x)=x$의 근에 수렴한다.

문 6. 함수 $g: R \rightarrow R$가 모든 $x, y \in R$에 대하여 $|g(x) - g(y)| \leq |x-y|^2$을 만족하면, g는 상수함수임을 보여라.

풀 이

모든 $x \in R$에 대하여 위의 가정으로부터 $|g'(x)| = \left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right| \leq \left|\frac{h^2}{h}\right| = |h|$이고 $\lim_{h \to 0}|h| = 0$이므로

조임정리에 의하여 $g'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = 0$ 이다. 따라서 g는 상수함수이다.

문 7. $I \subset R$가 구간이고, 함수 $f: I \rightarrow R$가 미분가능하고, 모든 $x \in R$에 대하여 $f'(x) \neq 0$이면, 모든 $x \in I$에 대하여 $f'(x) > 0$이거나 또는 모든 $x \in I$에 대하여 $f'(x) < 0$임을 보여라.

풀 이

모든 $x, y \in I$에 대하여 $f'(x) > 0, f'(y) < 0$라 하자.
그러면 $Darboux$정리에 의하여 $f'(y) < 0 = f'(c) < f'(x)$를 만족하는 c가 x와 y사이에 존재한다.
이는 가정에 모순된다. 따라서 모든 $x \in I$에 대하여 $f'(x) > 0$이거나 모든 $x \in I$에 대하여 $f'(x) < 0$이다.

문 8. 함수 $f: [a,b] \rightarrow R$가 미분가능한 함수이고, 또한 f'가 $[a,b]$ 위에서 유계이면 모든 $x, y \in [a,b]$에 대하여 $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$를 만족시키는 실수 $M > 0$가 존재함을 보여라.

풀 이

$x = y$이면 모든 실수 $M > 0$에 대하여 항등식이므로 자명하다.

$x \neq y$이면 평균값정리로부터 $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$을 만족하는 c가 x와 y사이에 존재한다.

가정에 의하여 f'가 $[a,b]$위에서 유계이므로 $\exists M > 0 \ s.t. \ |f'(c)| \leq M$

따라서 $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \leq M$을 만족한다.

즉, $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$를 만족하는 실수 $M > 0$이 존재한다.

문 1. 함수 $f,g:[a,b]\rightarrow R$가 $f,g\in C[a,b]$이고 , $f,g\in D(a,b)$이라고 하자. 또 $c\in[a,b]$이고 c가 아닌 모든 점 $x\in[a,b]$에서 $g(x)\neq 0$이라고 하자. 이 때, $\lim_{x\rightarrow c} g(x)=0$이고 $\lim_{x\rightarrow c}\frac{f(x)}{g(x)}$가 존재하면, 반드시 $\lim_{x\rightarrow c} f(x)=0$임을 보여라.

풀 이

극한의 성질에 의하여 $\lim_{x\rightarrow c} f(x)=\lim_{x\rightarrow c}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}=\lim_{x\rightarrow c}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\rightarrow c} g(x)=0\cdot\lim_{x\rightarrow c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이 성립한다.

따라서 $\lim_{x\rightarrow c} f(x)=0$이다.

문 2. 함수 $f,g:[0,1]\rightarrow R$가 각각 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$, $g(x)=x^2$으로 정의되었을 때, $f,g\in D[0,1]$이고 모든 $x\neq 0$에 대하여 $g(x)\neq 0$이며 $\lim_{x\rightarrow 0+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 0+} g(x)=0$이지만, 극한 $\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{f(x)}{g(x)}$가 존재하지 않음을 보여라. 또한 정리 6.4.2에 모순이 되지 않는가를 설명하여라.

풀 이

① 임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\delta=\epsilon$로 택하자.

그러면 $0<x<\delta$인 모든 $x\in[0,1]$에 대하여 $|x^2|<|x|<\delta=\epsilon$이 성립한다.

따라서 $\lim_{x\rightarrow 0+} g(x)=\lim_{x\rightarrow 0+} x^2=0$ 이다.

한편, $x\neq 0$인 $x\in[0,1]$에 대하여 $|f(x)|\leq|x^2|$이고 $\lim_{x\rightarrow 0+}|x^2|=0$이므로

조임정리에 의하여 $\lim_{x\rightarrow 0+} f(x)=0$이다.

따라서 $\lim_{x\rightarrow 0+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 0+} g(x)=0$이다.

② $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, y_n=\frac{1}{2n\pi}$라 하자.

그러면 $\langle x_n\rangle,\langle y_n\rangle$은 각각 0으로 수렴한다.

하지만 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n\rightarrow\infty}\sin\left(2npi+\frac{\pi}{2}\right)=0\neq 1=\lim_{n\rightarrow\infty}\sin(2npi)=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{f(y_n)}{g(y_n)}$이다.

따라서 극한 $\lim_{x\rightarrow 0+}\frac{f(x)}{g(x)}$은 존재하지 않는다.

문 3. 함수 $f,g:[a,b]\to R$가 점 $x=a$에서 미분가능하고, $f(a)=g(a)=0$이라고 하자. 만일 모든 $x\in(a,b)$에 대해서 $g(x)\neq 0$이고, $g'(a)\neq 0$이면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$이 존재하고, 다음이 성립함을 보여라.

(힌트: 점 $x=a$에서의 f와 g의 미분가능성을 이용하여라).

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

풀 이

$f(a)=g(a)=0$이고 $a<x<b$에 대하여 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$이다.

그러므로 $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$가 성립한다.

문 4. 함수 $f,g:R\to R$가 각각 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$, $g(x)=\sin x$로 정의되었을 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$임을 보여라.

(힌트: 문제 3의 결과를 이용하여라).

풀 이

위의 문제 3에 의하여 $\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leq\lim_{x\to 0}\left|\frac{x^2}{\sin x}\right|=\frac{2\cdot 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$ 이 성립한다.

따라서 조임정리에 의하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이다.

문 5. 함수 $f,g:[0,1]\to R$가 각각 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $g(x)=\sin x$로 정의되었을 때,

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이지만 $\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재하지 않음을 보여라.

풀 이

먼저 $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0$이다.

$x\neq 0$이면 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$이고 $g'(x)=\cos x$이므로 $\lim_{x\to 0+}x\sin\frac{1}{x}=0$이지만 $\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$는 존재하지 않는다. 그러므로 $\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$는 존재하지 않는다.

문 6. 다음의 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

풀 이

로피탈 법칙에 의하여 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sec^2 x}}=1$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

풀 이

로피탈 법칙에 의하여 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sin x}$

풀 이

로피탈 법칙에 의하여 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{\cos x}=1$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$

풀 이

로피탈 법칙에 의하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x)}{\cot x}$

풀 이

로피탈 법칙에 의하여 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x)}{\cot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}2\cos x\sin x=-\lim_{x\to 0}\sin 2x=0$

(6) $\lim_{x\to 0}x\ln(\sin x)$

풀 이

로피탈 법칙에 의하여 $\lim_{x\to 0}x\ln(\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x^2\tan x=0$

문 7. 정리 6.4.5의 (b)와 주 6.4.6을 증명하여라.

[정리 6.4.5의 (b): 함수 $f, g : (a,b) \to R$가 (a,b)에서 미분가능하고 $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \infty$이라고 하자. 또한 모든 $x \in (a,b)$에 대하여 $g(x) \neq 0$이고 $g'(x) \neq 0$일 때,

$\lim_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ 또는 $-\infty$이면, $\lim_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ 또는 $-\infty$이다. **]**

[부정형 $\dfrac{0}{0}$인 경우에서의 로피탈 법칙에서와 같이 부정형 $\dfrac{\infty}{\infty}$이 경우에서도 따름정리 6.4.3과 정리 6.4.4에 대응된 정리가 각각 성립한다. **]**

풀 이

① $\lim_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$인 경우만 증명한다.

M을 임의의 양의 실수라 하면, M에 대응하는 적당한 $\delta > 0$가 존재해서 $a < x < a+\delta$이면 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > M$가 된다. 한편 임의의 점 $x \in (a, a+\delta)$에 대하여 $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$가 되는 $c \in (a,x)$가 존재한다. 따라서 $a < x < a+\delta$이면 $\dfrac{f(x)}{g(x)} > M$이다. 그러므로 우극한의 정의에 의하여 $\lim_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$이다.

② $\dfrac{f(x)}{g(x)}$를 $\dfrac{\infty}{\infty}$인 부정형이라 하자. 그러면 $g(x), f(x) \neq 0$이고, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$는 $\dfrac{0}{0}$인 부정형인 형태로 바꿀 수 있다. 따라서 자명하게 따름정리 6.4.3과 정리 6.4.4에 대응된 정리가 각각 성립한다.

문 1. 함수 $f: R \to R$가 $f(x)=|x|^3$으로 정의되었을 때, f의 1차도함수 f'과 2차 도함수 f''를 구하고 $f^{(3)}(0)$의 존재성을 조사하여라.

풀 이

$f(x)=\begin{cases} x^3 &, x \geq 0 \\ -x^2 &, x \leq 0 \end{cases}$ 이므로 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 &, x \geq 0 \\ -3x^2 &, x \leq 0 \end{cases}$이고 $f''(x)=\begin{cases} 6x &, x \geq 0 \\ -6x &, x \leq 0 \end{cases}$ 그리고 $f'''(x)=\begin{cases} 6 &, x > 0 \\ -6 &, x < 0 \end{cases}$ 이다.

여기서 $\lim\limits_{h\to 0+} f'''(x)=6 \neq -6 = \lim\limits_{h\to 0-} f'''(x)$ 이다. 따라서 $f^{(3)}(0)$은 존재하지 않는다.

문 2. 함수 $f:[a,b] \to R$가 점 $c \in (a,b)$에서 $f''(c)$가 존재한다고 할 때,

$$f''(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}$$

임을 보여라.

풀 이

$\lim\limits_{h\to 0}(f(c+h)+f(c-h)-2f(c))=0$이므로 로피탈의 법칙에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(c+h)+f''(c-h)}{2}=f''(c)$$

이 성립한다. 따라서 $f''(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}$이다.

문 3. 함수 $f: R \to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, 점 $x=0$에서의 3차 $Taylor$ 다항함수를 구하여라.

(1) $f(x)=x^4+x^2+1$

풀 이

$f'(x)=4x^3+2x, f''(x)=12x^2+2, f^{(3)}(x)=24x$이므로 $f(0)=1, f'(0)=0, \dfrac{f''(0)}{2!}=1, \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}=0$이다.

따라서 $x=0$에서의 f의 3차 $Taylor$ 다항함수 $P_{3,f}: R \to R$는 $P_{3,f}(x)=1+x^2$이다.

(2) $f(x)=e^{\sin x}$

풀 이

$f'(x)=\cos x \cdot e^{\sin x}, f''(x)=-\sin x \cdot e^{\sin x}+\cos^2 x \cdot e^{\sin x}, f^{(3)}(x)=-\cos \cdot e^{\sin x}-3\sin x\cos x \cdot e^{\sin x}+\cos^3 x \cdot e^{\sin x}$ 이므로

$f(0)=1, f'(0)=1, \dfrac{f''(0)}{2!}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{f^{(3)}(x)}{3!}=0$이다. 따라서 $x=0$에서의 f의 3차 $Taylor$ 다항함수 $P_{3,f}: R \to R$는

$P_{3,f}(x)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2$이다.

(3) $f(x)=e^{e^x}$

풀 이

$f'(x)=e^{e^x+x}, f''(x)=e^{e^x+x}(e^x+1), f^{(3)}(x)=e^{e^x+x}\{(e^x+1)^2+e^x\}$이므로

$f(0)=e, f'(0)=e, \dfrac{f''(0)}{2!}=e, \dfrac{f^{(3)}(x)}{3!}=\dfrac{5}{6}e$이다.

따라서 $x=0$에서의 f의 3차 $Taylor$ 다항함수 $P_{3,f}:R\to R$는 $P_{3,f}(x)=e\left(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3\right)$이다.

문 4. 함수 $f:[0,2]\to R$의 2차도함수 f''가 존재하고 모든 $x\in[0,2]$에 대하여 $|f(x)|\le 1$이고 $|f''(x)|<1$이라고 하자. 이 때, 모든 $x\in[0,2]$에 대하여 $|f'(x)|\le 2$임을 보여라. (힌트: $Taylor$정리를 이용하여라)

풀 이

$x_0\in[0,2]$에 대하여 f에 $Taylor$ 정리를 이용하면 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(t)}{2}(x-x_0)^2$을 만족하는 t가 x와 x_0사이에 존재한다. 위의 식에 $x=0$과 $x=2$를 대입하면,

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{f''(t_1)}{2}x_0^2 \quad \cdots ①$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)+\frac{f''(t_2)}{2}(2-x_0)^2 \quad \cdots ②$$

를 얻는다. 단, $t_1\in[0,x_0], t_2\in[x_0,2]$이다.

$$(① - ②):\ f(2)-f(0)=2f'(x_0)+\frac{f''(t_2)}{2}(2-x_0)^2-\frac{f''(t_1)}{2}x_0^2$$

이 된다. 가정에 의하여 모든 $x\in[0,2]$에 대하여 $|f(x)|\le 1$이고 $|f''(x)|<1$이므로

$$\begin{aligned}2|f'(x)|&=\left|f(2)-f(0)-\frac{f''(t_2)}{2}(2-x_0)^2+\frac{f''(t_1)}{2}x_0^2\right|\\&\le|f(2)|+|f(0)|+\left|\frac{f''(t_2)}{2}\right|(2-x_0)^2+\left|\frac{f''(t_1)}{2}\right|x_0^2\\&\le 2+\frac{1}{2}(2-x_0)^2+\frac{1}{2}x_0^2=x_0^2-2x_0+4=(x_0-1)^2+3\le 4\ (\because 0\le x_0\le 2)\end{aligned}$$

$\therefore\ |f'(x)|\le 2$

이다. x_0은 $[0,2]$의 임의의 점이므로 모든 $x\in[0,2]$에 대하여 $|f'(x)|\le 2$이다.

문 5. 모든 $x>0$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}\le\sqrt{1+x}\le 1+\frac{x}{2}$$

또, 이 부등식을 이용하여 $\sqrt{1.2}$와 $\sqrt{2}$의 값을 근사시켜 보아라.

풀 이

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}, f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}, f'''(x)=\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}$이므로

$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{8}, \frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{16}$이다. 따라서 $x>0$일 때, $x=0$에서의 1차 $Taylor$ 다항식 $P_{1,f}(x)$와 2차 $Taylor$다항식 $P_{2,f}(x)$는 다음과 같다.

$$P_{1,f}(x)=1+\frac{1}{2}x, P_{2,f}(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

또한 $x=0$에서의 f의 나머지항은

$$f(x)-P_{1,f}(x)=\frac{1}{2}f''(t_1)x^2=-\frac{1}{8\sqrt{(1+t_1)^3}}x^2<0 \text{ 이고 } f(x)-P_{2,f}(x)=R_2(x)=\frac{1}{16\sqrt{(1+t_2)^5}}x^3>0$$

이다. 단, $t_1,t_2\in(0,x)$이다. 따라서 $P_{2,f}(x)<f(x)<P_{1,f}(x)$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

이 부등식을 이용하면, $1.095<\sqrt{1.2}<1.1, 1.375<\sqrt{2}<1.5$을 얻을 수 있다.

문 6. 함수 $f:R\to R$가 $f\in C^2(R)$이고, $f(0)=0$이라고 하자. 이 때, 함수 $g:R\to R$을

$$g(x)=\begin{cases} f'(0), & x=0 \\ \dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0 \end{cases}$$

으로 정의하였을 때, $g\in C^1(R)$임을 보여라.

풀 이

로피탈의 법칙에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(f(h)/h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f'(0)h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{2h}=\frac{1}{2}f''(0)$$

이므로 $g'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}f''(x) & ,x=0 \\ \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} & ,x\neq 0 \end{cases}$ 이다.

이제 g'이 $x=0$에서 연속임을 보이자.

로피탈의 법칙에 의하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$

이므로 g'는 $x=0$에서 연속이 되고 따라서 $g\in C^1(R)$이다.

문 7. 함수 $f:[0,1]\to R$가 $f(x)=(x^2-x)^n$ (n은 자연수)으로 정의하였을 때, 각 $k=1,2,3,\cdots,n$에 대하여 $f^{(k)}\in D[0,1]$임을 보이고, 방정식 $f^{(n)}(x)=0$은 0과 1사이에 n개의 서로 다른 실근을 가짐을 보여라.
(힌트: $Rolle$정리를 이용하여라.)

풀 이

$f(x)$는 다항식이므로 $C^\infty([0,1])$이므로 명백하게 $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 $f^{(k)}\in D[0,1]$이 된다.

$f(x)=(x^2-x)^n=x^n(x-1)^n$이므로 f를 x로 전개하면 가장 낮은 차수가 n이 되고 $(x-1)$로 전개하여도 가장 낮은 차수는 n이 된다. 또한 f는 R위에서 해석적이므로 $x=0,1$에서의 테일러 급수는 일치하여야 한다.
그러므로

$$f(0)=f^{(1)}(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,\qquad f(1)=f^{(1)}(1)=\cdots=f^{(n-1)}(1)=0$$

을 수 있다. 이제

$$f(0)=f(1)=0$$

으로부터 롤의 정리를 이용하면,

$$f'(x_{11})=0$$

을 만족하는 $x_{11}\in(0,1)$을 얻는다. 또한

$$f'(0)=f'(x_{11})=f'(1)=0$$

이므로 롤의 정리를 이용하면

$$f'(x_{21})=f'(x_{22})=0$$

을 만족하는 서로 다른 적당한 두 점 $x_{21}\in(0,x_{11}),x_{22}\in(x_{11},1)$을 얻는다. 이런 과정을 반복하면,

$$f^{(n-1)}(x_{(n-1)1})=f^{(n-1)}(x_{(n-1)2})=\cdots=f^{(n-1)}(x_{(n-1)(n-1)})=0$$

을 만족하는 0과 1사이의 서로 다른 $n-1$개의 점을 얻는다.

$$f^{(n-1)}(0)=f^{(n-1)}(1)=0$$

이므로 롤의 정리를 다시 이용하면,

$$f^{(n)}(x_{n1})=f^{(n)}(x_{n2})=\cdots=f^{(n)}(x_{nn})=0$$

을 만족하는 0과 1사이에 서로 다른 n개의 점을 얻는다.

그러므로 방정식 $f^{(n)}(x)=0$는 0과 1사이에 서로 다른 n개의 근을 갖는다.

문 8. 함수 $f:R\to R$가 $f(x)=\sin x$로 정의되었을 때, $x=\dfrac{\pi}{2}$에서의 f의 $Taylor$급수를 구하여라.

풀 이

모든 $k\in Z^+$에 대하여

$$f^{(2k-1)}(x)=(-1)^{k+1}\cos x,\ f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$$

($\because$ 수학적 귀납법에 의하여 증명~)이므로

$$f^{(2k-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k \text{ 이다.}$$

따라서 f의 $Taylor$급수는 다음과 같다.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\pi/2)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k)}}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

문 9. $I\subset R$이 구간이고, 함수 $f:I\to R$가 $f\in C^{\infty}(I)$이라고 하자. 모든 $k\in N$과 모든 $x\in I$에 대하여 $|f^{(k)}(x)|\le M$를 만족시키는 $M>0$이 존재하면, 임의의 점 $a\in I$에서의 f의 $Taylor$급수는 I 위에서 f에 수렴함을 보여라. 즉, f는 모든 점 $a\in I$에서 해석적임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$와 임의의 점 $a\in I$에 대하여

$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\epsilon}{M}\right\}$라 두자.

그러면 모든 $k\in N$ 와 $|x-a|<\delta$인 모든 $x\in I$ 에 대하여

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|=\left|\frac{f^{(n)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|\le|f^{(n)}(t)(x-a)^{n+1}|\le M\delta^{n+1}<M\delta<\epsilon \quad \text{단, } t\in(0,a)$$

이 성립한다. 따라서 f는 모든 점 $a\in I$에서 해석적이다.

정동명 해석학 | **6.6 미분가능 함수열**

문 1. 각 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:[0,1]\to R$을 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$으로 정의하였을 때, 함수열 $\langle f_n\rangle$은 미분가능한 함수열이고 $[0,1]$ 위에서 어떤 미분가능한 함수 f에 평등수렴함을 보여라. 또 함수열 $\langle f_n{}'\rangle$은 I 위에서 어떤 함수 $g:[0,1]\to R$에 수렴하지만, $g(1)\neq f'(1)$임을 보여라.

풀 이

모든 자연수 n과 모든 $x\in[0,1]$에 대하여 $|f_n(x)|\le\dfrac{1}{n}$이므로 조임정리에 의해 극한함수를 f라 하면, $f\equiv 0$이다. 또한 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{[0,1]}=\lim\limits_{n\to\to}\dfrac{1}{n}=0$이므로 함수열 $\langle f_n\rangle$은 $[0,1]$위에서 평등수렴한다.

또한 $f_n{}'(x)=x^{n-1}$이므로 함수열 $\langle f_n{}'\rangle$은 $[0,1]$위에서 $g(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ 으로 수렴한다.

그러나 $g(1)=1\neq 0=f'(1)$이다.

문 2. 각 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:[0,\infty)\to R$를 $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n}$로 정의하였을 때, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n{}'(0)=f'(0)$이 성립하는가를 조사하여라.

풀 이

모든 $x\in[0,\infty)$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{ne^{nx}}=0$이므로 $f\equiv 0$이 된다.

또한, 모든 자연수 n에 대하여 $f'_n(x)=-e^{-nx}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n{}'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-e^{-n\cdot 0}\right)=-1\neq 0=f'(0)$이다.

문 3. 각 자연수 n에 대하여 함수 $f_n:R\to R$을 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x}$로 정의하였을 때, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n{}'(0)=f'(0)$이 성립하는가를 조사하여라.

풀 이

$x=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$이고 $x\neq 0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x/n)}{(1/n)^2+x}=0$이므로 $f\equiv 0$이 된다.

또한 모든 자연수 n에 대하여 $f_n{}'(x)=\dfrac{n}{(1+n^2x)^2}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n{}'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{1}\right)=\infty\neq 0=f'(0)$이다.

문 . 다음이 성립함을 보여라.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},\ (x\in R)$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 아르키메데스 성질에 의하여 $\dfrac{m-n}{K}<\epsilon$인 자연수 K가 존재한다.

이제 $m>n\ge K$일 때, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\cos kx}{k}\right|\le\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}<\frac{m-n}{K}<\epsilon$

이 성립한다. 따라서 함수항 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$는 코시 판정법에 의하여 R위에서 평등수렴한다.

또한, $0 \le \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx_0}{n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$은 $p-$급수 판정법에 의하여 수렴한다.

따라서 조임정리에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$는 점별수렴한다.

그러므로 따름정리 6.6.3에 의하여 $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\ (\forall x \in R)$이 성립한다.

(2) $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n+1}}$, $(|x|>1)$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여

아르키메데스 성질에 의하여 $\frac{M}{K+2} < \epsilon$인 자연수 K가 존재해서

$m > n \ge K$일 때,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{k^2}{x^{k+1}}\right| \le \sum_{k=n+1}^{m}\frac{k^2}{|x|^{k+1}} = \frac{(n+1)^2}{|x|^{n+2}}+\cdots+\frac{m^2}{|x|^{m+1}} < \frac{M}{|x|^{n+2}} \le \frac{M}{|x|^{K+2}} < \frac{M}{K+2} < \epsilon$$

($\because$ $a>1$일 때, $a^x > x\,(\forall x>0)$) (단, $M=(n+1)^2+\cdots+m^2$)

이 성립한다. 따라서 함수항 급수 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n+1}}$ $(|x|>1)$는 코시 판정법에 의하여 평등수렴한다.

또한 가정에 의하여 $|x|>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)/x^{n+1})}{(n/x^n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < 1$$

이다. 따라서 비판정법에 의하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$은 점별수렴한다.

그러므로 따름정리 6.6.에 의하여 $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{n}{x^n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^{n+1}}$ $(|x|>1)$이 성립한다.

문 5. $[a,b]$에서 미분가능한 함수열 $\langle f_n\rangle$에 있어서, 모든 자연수 n과 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $|f_n{}'(x)| \le M_n$을 만족시키는 수열 $\langle M_n\rangle$이 존재한다고 하자. 만일 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n < \infty$이고, 한 점 $x_0 \in [a,b]$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$가 수렴하면 모든 점 $x\in[a,b]$에서 다음이 성립함을 보여라.

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x)$$

풀 이

가정으로부터 와이어슈트라스 M-판정법에 의하여 $\sum f_n{}'$이 $[a,b]$위에서 평등수렴하므로 $\sum f_n$은 $[a,b]$위에서 미분가능하다. 그러므로 따름정리 6.6.3에 의하여 $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x)$이 성립한다.

문 6. 거듭제곱수 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 $R>0$이고 또한 모든 $x \in (-R, R)$에 대하여 $f(x)=f(-x)$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}=0$임을 보여라.

풀 이

모든 $x \in (-R, R)$에 대하여 $g(x)=f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$이라 하자. 그러면 정리 6.6.5에 의하여 모든 자연수 k에 대하여 $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=a_k=(-1)^k a_k=\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$을 만족한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}=0$이 된다.

정동명 해석학 | 7.1 리만적분

문 1. 함수 $f:[0,2]\to R$가 다음과 같이 정의되었다고 할 때,

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<1 \\ x+1, & 1\le x<2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$$

분할 $P=\left\{0,\frac{1}{2},1\frac{2}{3},2\right\}$에 대한 $U(f,P)$와 $L(f,P)$의 값을 구하여라.

풀 이

$$U(f,P)=1\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}+1\right)\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)+4\cdot\left(2-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{28}{9}+\frac{4}{3}=\frac{89}{18}$$

$$L(f,P)=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{5}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{8}{9}=\frac{46}{18}$$

문 2. 함수 $f:R\to R$가 $x\in[0,1)$에 대하여 $f(x)=x$로 정의되고, 모든 $x\in R$에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족한다고 할 때, 구간 $[0,10]$의 분할 $P=\{0,1,\cdots,10\}$에 대한 $U(f,P)$와 $L(f,P)$의 값을 구하여라.

풀 이

$n=0,1,\cdots,9$일 때, $sup\{f(x)|n\le x<n+1\}=1, inf\{f(x)|n\le x<n+1\}=0$이므로

따라서 $U(f,P)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot10=5$이고 $L(f,P)=0$이다.

문 3. 함수 $f:[0,1]\to R$가 $f(x)=x$로 정의되었을 때, $[0,1]$의 분할 $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n}{n}\right\}$에 대한 $U(f,P_n)$과 $L(f,P_n)$를 구하고 $\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$임을 보여라.

풀 이

함수 $f:[0,1]\to R$가 $f(x)=x$로 정의되었을 때, $[0,1]$의 분할 $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n}{n}\right\}$에 대한 $U(f,P_n)$과 $L(f,P_n)$는 다음과 같다.

$$U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{n-1}{2n}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$이다.

문 4. 임의의 고정된 $\epsilon>0$과 $[a,b]$의 분할 P_ϵ에 대하여 $U(f,P_\epsilon)-L(f,P_\epsilon)<\epsilon$이 성립할 필요충분조건은 $P_\epsilon\subset P$인 모든 $P\in P[a,b]$에 대하여 $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$이 성립하는 것임을 보여라.

풀 이

(⇦) $P=P_\epsilon$로 두면, 자명하다.

(⇨) $P_\epsilon\subset P$인 모든 $P\in P[a,b]$에 대하여 $L(f,P_\epsilon)\le L(f,P)\le U(f,P)\le U(f,P_\epsilon)$이 성립한다.

따라서 $U(f,P)-L(f,P)\le U(f,P_\epsilon)-L(f,P_\epsilon)<\epsilon$ 이 성립한다.

문 5. 함수 $f:[a,b]\to R$가 $f(x)=c$로 정의되었을 때, f는 $[a,b]$ 위에서 R 적분가능함을 보이고, 그 적분값은 $c(b-a)$임을 보여라.

풀 이

분할 $P=\{x_0=a, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n=b\}$을 $[a,b]$위의 임의의 분할이라 하자.
그러면 가정에 의하여 $i=0,1,2,\cdots,n-1$에 대하여

$M_i=sup\ \{f(x)|x_i\le x<x_{i+1}\}=c,\ \ m_i=inf\ \{f(x)|x_i\le x<x_{i+1}\}=c$

이므로

$$U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}M_i(x_{i+1}-x_i)=c\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=c(b-a),$$

$$L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i(x_{i+1}-x_i)=c\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=c(b-a)$$

이다. 따라서 $U(f,P)=L(f,P)=c(b-a)$이므로 리만적분가능하며 그 적분값은 $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$이다.

문 6. 함수 $f:[0,1]\to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, $[0,1]$ 위에서의 f의 리만적분가능성을 조사하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases} x\,,\ x\in Q \\ 0\,,\ x\in Q^c\end{cases}$

풀 이

$\epsilon=\frac{1}{2}$라 하자. $[0,1]$를 n등분한 분할 $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{k}{n},\cdots,1\right\}$에 대하여
$k=0,1,2,\cdots,n-1$일 때,

$M_i=sup\ \left\{f(x)|\frac{k}{n}\le x<\frac{k+1}{n}\right\}=\frac{k+1}{n}$이고 $m_i=inf\ \left\{f(x)|\frac{k}{n}\le x<\frac{k+1}{n}\right\}=0$

($\because$ 무리수의 조밀성)이므로 $U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n^2}$이고 $L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{0}{n}=0$이다.

따라서 $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n=1}\frac{k+1}{n^2}=\frac{n^2+n}{2n}\ge\frac{1}{2}=\epsilon$이다.

그러므로 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하지 않다.

[다른 풀이]

$\epsilon=\frac{1}{3}$ 라 하자. 분할 $P=\{x_1=0, x_2, \cdots, x_{n+1}=1\}$를 $[0,1]$의 임의의 분할이라 하자.
$i=0,1,2,\cdots,n$일 때, $M_i=sup\ \{f(x)|x_i\le x<x_{i+1}\}=x_{i+1}$이고 $m_i=inf\ \{f(x)|x_i\le x<x_{i+1}\}=0$

이므로 $U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}x_i(x_{i+1}-x_i)$이고 $L(f,P)=0$이다. 그러면

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P)&=\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(x_{i+1}^2-x_{i+1}x_i\right) \\ &\ge\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(x_{i+1}^2-x_i^2\right)\ (\because \text{산술-기하평균에 의하여 } x_{i+1}x_i\le\frac{1}{2}\left(x_{i+1}^2+x_i^2\right)) \\ &=\frac{1}{2}(1^2-0^2)>\frac{1}{3} \end{aligned}$$

을 만족한다. 따라서 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하지 않다.

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & x \in Q \\ -x, & x \in Q^c \end{cases}$

풀 이

$\epsilon = \frac{1}{2}$ 라 하자.

분할 $P=\{x_0=0, x_1, \cdots, x_n=1\}$를 $[0,1]$의 임의의 분할이라 하자.

$i=0,1,2,\cdots,n-1$일 때,

$M_i = sup\ \{f(x) | x_i \le x < x_{i+1}\} = x_{i+1}$이고 $m_i = inf\ \{f(x) | x_i \le x < x_{i+1}\} = -x_{i+1}$이므로

$U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_{i+1}-x_i)$이고 $L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} -x_i(x_{i+1}-x_i)$이다. 그러면

$$
\begin{aligned}
U(f,P)-L(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} 2x_{i+1}(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\left(x_{i+1}^2 - x_{i+1}x_i\right) \\
&\ge \sum_{i=0}^{n-1}\left(x_{i+1}^2 - x_i^2\right) \ (\because \text{산술-기하평균에 의하여 } x_{i+1}x_i \le \frac{1}{2}\left(x_{i+1}^2+x_i^2\right)) \\
&= 1^2 - 0^2 = 1 > \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

을 만족한다. 따라서 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하지 않다.

(3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}\ ((p,q)=1) \\ 0, & x=0 \text{ or } x \in Q^c \end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$에 대하여 $\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2}$을 만족하는 자연수 k를 택하고 $[0,1]$에서 분모가 k보다 작거나 같은 유리수의 집합을 A라 하면, A는 유한집합이므로 $|A|=m$이라 하자. $[0,1]$의 분할 $P=\{x_0=0, x_1, \cdots, x_n=1\}$를 $i=1,2,\cdots,n$에 대해 $x_i - x_{i-1} < \frac{\epsilon}{4m}$을 만족하도록 잡자. 집합 B를 $B=\{i\,|\,[x_{i-1},x_i] \cap A \ne \varnothing, 1 \le i \le n\}$라 하면 B의 개수는 기껏해야 $2m$개다. $i \in B$이면

$M_i = sup\ \{f(x) | x \in [x_{i-1},x_i]\} \le 1,\ m_i = inf\ \{f(x) | x \in [x_{i-1},x_i]\} = 0$

이고 $i \notin B\ (i \ge 2)$이면 $M_i \le \frac{1}{k+1}, m_i = 0$이므로

$$
\begin{aligned}
U(f,P)-L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \in B} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \notin B} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&\le 1 \cdot 2m \cdot \frac{\epsilon}{4m} + \frac{1}{k+1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

이다. 그러므로 리만판정법에 의하여 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하다.

정동명 해석학 | **7.2 함수의 적분가능성**

문 1. 함수 $f:[0,1] \to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, 정리 7.2.1을 이용하여 $[0,1]$ 위에서의 f의 리만적분가능성을 조사하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases} 0, \; x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \\ 1, \; x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$대하여 아르키메데스 성질에 의하여 $\dfrac{1}{k}<\dfrac{\epsilon}{2}$인 $k\in Z^+$가 존재해서

$[0,1]$의 한 분할 $P=\left\{0,\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{k},1\right\}\cap[0,1]$에 대하여 $U(f,P)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{k}, L(f,P)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{k}$이 성립한다.

따라서 $U(f,P)-L(f,P)=\dfrac{2}{k}<\epsilon$이다. 그러므로 정리 7.2.1에 의하여 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하다.

(2) $f(x)=\begin{cases} 1, \; x=\dfrac{1}{2} \\ 0, \; x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

풀 이

임의의 $\epsilon>0$대하여 아르키메데스 성질에 의하여 $\dfrac{1}{k}<\dfrac{\epsilon}{2}$인 $k\in Z^+$가 존재해서

$[0,1]$의 한 분할 $P=\left\{0,\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{k},1\right\}\cap[0,1]$에 대하여 $U(f,P)=\dfrac{2}{k}, L(f,P)=0$이 성립한다.

따라서 $U(f,P)-L(f,P)=\dfrac{2}{k}<\epsilon$이다. 그러므로 정리 7.2.1에 의하여 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하다.

문 2. 함수 $f:[0,1] \to R$가 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset[0,1]$에 대해

$$f(x)=\begin{cases} 0, \; x=x_1,x_2,\cdots,x_n \\ 1, \; x\neq x_1,x_2,\cdots,x_n\end{cases}$$

로 정의되었을 때, f는 $[0,1]$ 위에서 리만적분가능함을 보이고, 그 적분값은 1임을 보여라.

풀 이

임의의 $\epsilon>0$와 모든 $n\in Z^+$에 대하여 아르키메데스 성질에 의하여 $\dfrac{n}{k}<\dfrac{\epsilon}{2}$인 $k\in Z^+$가 존재해서

$[0,1]$의 한 분할 $P_n=\left\{0,x_1-\dfrac{1}{k},x_1+\dfrac{1}{k},x_2-\dfrac{1}{k},x_2+\dfrac{1}{k},\cdots,x_n-\dfrac{1}{k},x_n+\dfrac{1}{k},\cdots,1\right\}\cap[0,1]$에 대하여

$U(f,P_n)=1, L(f,P_n)=1-\dfrac{2n}{k}$이므로 $U(f,P)-L(f,P)=\dfrac{2n}{k}<\epsilon$을 만족한다. 따라서 리만판정법에 의하여 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하고, 이 때 적분값은 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=1$

[다른 풀이]

$[0,1]$ 위에서 f의 불연속점은 가산 개이므로 리벡 측도는 0이다. 따라서 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하다.

문 3. 함수 $f:[a,b] \to R$가 리만적분가능하다고 하자. 각 자연수 n에 대하여 $P_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in P[a,b]$를 $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$가 되도록 잡으면 다음이 성립함을 보여라.

$$\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f dx$$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 f가 $[a,b]$위에서 리만적분가능이므로 적당한 $\delta > 0$이 존재해서 $\| P \| < \delta$을 만족하는 $[0,1]$위의 임의의 분할 P이 존재해서 리만합을 $R(f,P)$라 할 때,

$$\left| R(f,P) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

가 성립한다.

이제 $\dfrac{1}{k} < \delta$인 자연수 k를 택하자. $[a,b]$의 분할P를 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}(i = 1, 2, \cdots, n)$라 하자. 그러면 $n \geq k$인 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{k} < \delta$이므로

$$-\frac{\epsilon}{2} + \int_a^b f(x)dx < R(f, P_n) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립한다.

$i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $M_i = sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$이므로 $U(f, P_n) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$가 성립한다.

마찬가지로

$i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $m_i = inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$이므로 $L(f, P_n) \geq \displaystyle\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}$가 성립한다.

따라서

$-\epsilon < -\dfrac{\epsilon}{2} < R(f,P_n) - \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq U(f,P_n) - \int_a^b f(x)dx \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$이 성립하여 $\left| U(f,P_n) - \displaystyle\int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$이고

$-\epsilon < -\dfrac{\epsilon}{2} < L(f,P_n) - \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq R(f,P_n) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$이 성립하여 $\left| L(f,P_n) - \displaystyle\int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$이다.

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f dx$이다.

문 4. 함수 $f:[0,1] \to R$가 유계라고 하자.
$P[a,b]$에서의 적당한 분할열 $\langle P_n \rangle$가 존재하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n) - L(f,P_n)) = 0$일 때, f는 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능함을 보이고 그 적분값은 다음과 같음을 보여라.

$$\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)$$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$와 모든 $x \in [a,b]$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n) - L(f,P_n)) = 0$이므로 적당히 큰 자연수 K가 존재해서 $n \geq k$인 모든 자연수 n에 대하여 $|U(f,P_n) - L(f,P_n)| < \epsilon$을 만족한다. 따라서 리만적분 판정법에 의하여 f는 $[a,b]$위에서 리만적분가능하다. 즉, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = U(f) = L(f)$이다.

$n \geq k$인 모든 자연수 n에 대하여 $U(f,P_n) - \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq U(f,P_n) - L(f,P_n) < \epsilon$이고

$-\epsilon < 0 = U(f)- \int_a^b f(x)dx \le U(f,P_n)- \int_a^b f(x)dx$이므로 $\left|U(f,P_n)- \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon$이 성립한다. 마찬가지로 $L(f,P_n)- \int_a^b f(x)dx \le L(f)- \int_a^b f(x)dx = 0 < \epsilon$이고 $-\epsilon < 0 = L(f,P_n)- U(f,P_n) \le L(f,P_n)- \int_a^b f(x)dx$이므로 $\left|L(f,P_n)- \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon$이 성립한다. 따라서 $\int_a^b fdx = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$이다.

문 5. 함수 $f:[0,1] \to R$가 $f(x)=x^2$으로 정의되었을 때, 문제 4를 이용하여 f가 $[0,1]$위에서 리만적분가능함을 보여라.

풀 이

$[0,1]$위의 분할 P_n을 $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, 1\right\}$라 하자. 그러면 $i=1,2,\cdots,n$에 대한 구간 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$에서 $M_i = sup\, f(x) = \left(\frac{i}{n}\right)^2, m_i = inf\, f(x) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$이므로 $U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$이고

$L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n)- L(f,P_n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{\sum_{k=1}^{n}k^2-(k-1)^2\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$이다.

그러므로 문제 4에 의하여 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능이다.

문 6. 함수 $f:[0,1] \to R$가 리만적분가능할 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

풀 이

$P_n = \left\{0 = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\right\}$인 $[0,1]$위의 분할을 택하자. 그러면 $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 임의의 구간 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$에서 $f(x)$의 최대값을 M_k, 그리고 최소값을 m_k라 하면, $m_k \le f\left(\frac{k}{n}\right) \le M_k$이므로

$$L(f,P_n) \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \le U(f,P_n)$$

이 성립한다. 여기서 f가 $[0,1]$위에서 리만적분 가능이므로 $\int_0^1 fdx = \lim_{n\to\infty}U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)dx$이다.

문 7. 함수 $f:[a,b] \to R$가 유계라고 하자. f가 $[a,b]$ 위에서 리만적분가능할 필요충분조건은 적당한 실수 I가 존재해서 명제

『임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, 적당한 $P_\epsilon \in P[a,b]$가 존재하여

$P \supset P_\epsilon$인 모든 $P \in P[a,b]$에 대하여 $|R(f,P)- I| < \epsilon$ 』

이 성립하는 것임을 보여라.

풀 이

(⇨) 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 f가 $[a,b]$위에서 리만적분가능이므로 적당한 $\delta > 0$이 존재해서 $\|P\| < \delta$을 만족하는 $[0,1]$위의 임의의 분할 P이 존재해서 리만합을 $R(f,P)$라 할 때,

$$\left|R(f,P)-\int_a^b f(x)dx\right|<\epsilon$$

가 성립한다. 여기서 $I=\int_a^b f(x)dx$라 하고, $[a,b]$의 분할 P_ϵ을 $\|P_\epsilon\|<\delta$를 만족하도록 택하자. .

그러면 $P_\epsilon \subset P$에 대하여 모든 $[a,b]$의 분할 P에 대하여 $\|P\|<\|P_\epsilon\|<\delta$을 만족하므로

$$|R(f,P)-I|<\epsilon$$

가 성립한다.

(⇦) 적당한 실수 I가 존재하여 주어진 $\epsilon>0$에 대하여 적당한 $[a,b]$위의 분할 P_ϵ이 존재하여 $P_\epsilon \subset P$인 모든 $[a,b]$의 분할 P에 대하여

$$|R(f,P)-I|<\frac{\epsilon}{3}$$

이 성립한다고 하자. $[a,b]$의 분할 P를 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$라 하면,

$$-\frac{\epsilon}{3}+I<R(f,P)<\frac{\epsilon}{3}+I$$

이 된다. $i=1,2,\cdots,n$에 대하여 $M_i=sup\{f(x)|x\in[x_{i-1},x_i]\}$이므로 $U(f,P)\le I+\frac{\epsilon}{3}$이고

마찬가지로 $i=1,2,\cdots,n$에 대하여 $m_i=inf\{f(x)|x\in[x_{i-1},x_i]\}$이므로 $L(f,P)\le I-\frac{\epsilon}{3}$이다.

따라서 $U(f,P)-L(f,P)\le\left(I+\frac{\epsilon}{3}\right)-\left(I-\frac{\epsilon}{3}\right)=\frac{2\epsilon}{3}<\epsilon$이 성립한다. 그러므로 리만판정법에 의하여 f는 $[a,b]$위에서 리만적분가능하다.

정동명 해석학 | 7.3 적분가능 함수공간

문 1. 보조정리 7.3.1의 (b)와 (d)를 증명하여라.

풀 이

(b) $a = infA, b = infB$라 하자. 그러면 a는 A의 하계이고 b는 B의 상계이므로 $a+b$는 $A+B$의 하계이다.

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 적당한 $x^* \in A, y^* \in B$가 존재해서 $x^* < a + \frac{\epsilon}{2}, y^* < b + \frac{\epsilon}{2}$를 만족한다.

그러면 $x^* + y^* < (a+b) + \epsilon$ 이다. 따라서 $a+b = inf(A+B)$이다.

(d) $\lambda = 0$이면 $inf\lambda A = 0 = \lambda infA$

$\lambda > 0$이면 $inf\lambda A = -sup(-\lambda A) = (-1)(-\lambda)infA = \lambda infA$ ($\because -\lambda < 0$이므로 (c)에 의하여)

$\lambda < 0$이면 $inf\lambda A = -sup(-\lambda A) = (-1)(-\lambda)sup(A) = \lambda supA$ ($\because -\lambda > 0$이므로 (c)에 의하여)

문 2. 함수 $f, g : [a,b] \to R$가 적분가능하면, $\max\{f,g\}$와 $\min\{f,g\}$도 적분가능함을 보여라.

풀 이

함수 $f, g : [a,b] \to R$가 적분가능하면, 정리7.3.2, 정리 7.3.3 그리고 정리 7.3.6(b)에 의하여

$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$와 $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$는 $[a,b]$위에서 적분가능하다.

문 3. 함수 $f : [a,b] \to R$가 연속함수이고, 모든 $x \in [a,b]$에 대하여 $f(x) \geq 0$이라 하자.
이 때, $\int_a^b f(x)dx = 0$이 성립하면, $f \equiv 0$임을 보여라.

풀 이

$f(c) > 0$인 $c \in [a,b]$가 존재한다고 가정하자.

f가 연속이므로 $\epsilon = \frac{1}{2}f(c) > 0$에 대하여 적당한 $\delta > 0$이 존재해서

$|x-c| < \delta$인 모든 $x \in [a,b]$에 대하여

$$|f(x) - f(x)| < \frac{1}{2}f(c)$$

이므로

$$0 < \frac{1}{2}f(c) < f(x)$$

가 성립한다. 여기서 $E = (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$이라 하면,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_E f(x)dx \geq \frac{f(c)}{2} \cdot \delta > 0$$

이 성립한다. 이는 모순이다.

문 4. 함수 $f : [a,b] \to R$가 연속함수이고, 모든 연속함수 $g : [a,b] \to R$에 대하여 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$이 성립하면, $f \equiv 0$임을 보여라.

풀 이

$g \equiv f$라 하자. 그러면 $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f^2(x)x$이고 모든 $x \in [a,b]$에 대하여 $f^2(x) \geq 0$이므로 위의 문제 3에 의하여 $f \equiv 0$이다.

문 5. 함수 $f, g, h : [a, b] \to R$가 모두 유계이고, 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이라고 하자. 또한 f, h가 적분가능하고 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = A$이면, 다음이 성립함을 보여라.

(1) $g \in R[a, b]$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 f가 $[a,b]$위에서 리만적분가능이므로 적당한 $\delta_1 > 0$이 존재해서 $\| P_1 \| < \delta_1$을 만족하는 $[0,1]$위의 임의의 분할 P_1이 존재해서 f의 리만합을 $R(f, P_1)$라 할 때,

$$\left| R(f, P_1) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

가 성립한다. 여기서 $\int_a^b f(x)dx = A$이므로 $|R(f, P_1) - A| < \epsilon$이이 성립한다.

즉, $-A + \frac{\epsilon}{3} < R(f, P_1) < A + \frac{\epsilon}{3}$ 이다.

또한, h가 $[a,b]$위에서 리만적분가능이므로 적당한 $\delta_2 > 0$이 존재해서 $\| P_2 \| < \delta_2$을 만족하는 $[0,1]$위의 임의의 분할 P_2이 존재해서 h의 리만합을 $R(h, P_2)$라 할 때,

$$\left| R(h, P_2) - \int_a^b h(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

가 성립한다. 여기서 $\int_a^b h(x)dx = A$이므로 $|R(h, P_2) - A| < \epsilon$이 성립한다.

즉, $-A + \frac{\epsilon}{3} < R(h, P_2) < A + \frac{\epsilon}{3}$이다.

이제 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$라 하고 $P = P_1 \cup P_2$라 하자.

그러면 P는 $\| P \| < \delta$을 만족하는 $[a,b]$위의 분할이며

모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $g(x) \le h(x)$이고 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $M_i = sup\ \{g(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$이므로

$$U(g, P) < A + \frac{\epsilon}{3}$$

을 만족한다. 마찬가지로

모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \le g(x)$이고 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $m_i = inf\ \{g(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$이므로

$$A - \frac{\epsilon}{3} < L(g, P)$$

을 만족한다. 따라서 $U(g, P) - L(g, P) < \left(A + \frac{\epsilon}{3}\right) - \left(A - \frac{\epsilon}{3}\right) = \frac{2}{3}\epsilon < \epsilon$이 성립한다.

그러므로 리만판정법에 의하여 $g \in R[a, b]$이다.

(2) $\int_a^b g(x)dx = A$

풀 이

따름정리 7.3.5에 의하여 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \le g(x) \le h(x)$이면

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b h(x)dx$$

이 성립한다. 가정에서 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = A$이므로 따라서 $\int_a^b g(x)dx = A$이다.

문 6. 정리 7.3.6의 증명에서 $M(f, I_k) - m(f, I_k) \geq M(f^+, I_k) - m(f^+, I_k)$가 성립함을 보여라.

풀 이

$f(x) > 0$이면,

$M(f^+, I_k) = sup\ \{\max\{f(x), 0\} | x \in I_k\} = sup\ \{f(x) | x \in I_k\} = M(f, I_k)$

$m(f^+, I_k) = inf\ \{\max\{f(x), 0\} | x \in I_k\} = inf\ \{f(x) | x \in I_k\} = m(f, I_k)$

이므로 $M(f, I_k) - m(f, I_k) = M(f^+, I_k) - m(f^+, I_k)$이 성립한다.

$f(x) \leq 0$이면

$M(f^+, I_k) = sup\ \{\max\{f(x), 0\} | x \in I_k\} = 0 \geq sup\ \{f(x) | x \in I_k\} = M(f, I_k)$

$m(f^+, I_k) = inf\ \{\max\{f(x), 0\} | x \in I_k\} = 0 \geq inf\ \{f(x) | x \in I_k\} = m(f, I_k)$

이므로 $|M(f, I_k)| < |m(f, I_k)|$이다. 따라서 $M(f, I_k) - m(f, I_k) \geq M(f^+, I_k) - m(f^+, I_k)$이 성립한다.

그러므로 $M(f, I_k) - m(f, I_k) \geq M(f^+, I_k) - m(f^+, I_k)$이 성립한다.

문 7. 함수 $f, g : [a, b] \to R$가 연속함수일 때, 부등식

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

가 성립함을 보여라. (이 부등식을 $Cauchy - Schwarz$ 부등식이라고 한다.)

(힌트: $A = \int_a^b f^2(x)dx, B = \int_a^b f(x)g(x)dx, C = \int_a^b g^2(x)dx$로 놓을 때,

모든 $t \in R$에 대하여 $A + 2Bt + Ct^2 \geq 0$이 성립함을 보여라.)

풀 이

$C = 0$이면 $g(x) = 0$이므로 위의 부등식은 자명하게 성립한다.

$C \neq 0$이면 $g^2(x) \geq 0$이므로 $C > 0$이다. 즉, $C > 0$에 대하여 위의 부등식이 성립하는지 보이면 충분하다.

모든 $t \in R$에 대하여 $(gt + f)^2 \geq 0$이므로

$$0 \leq \int_a^b (g(x)t + f(x))^2 dx = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) + 2t\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) + t^2\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

이 성립한다. 여기서 $A = \int_a^b f^2(x)dx, B = \int_a^b f(x)g(x)dx, C = \int_a^b g^2(x)dx$로 놓으면, 모든 $t \in R$에 대하여

$$A + 2Bt + Ct^2 \geq 0$$

가 성립한다. 따라서 판별식을 이용하면, $B^2 - AC \leq 0$이다.

그러므로 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$이 성립한다.

문 1. 함수 $f:[0,1]\to R$가 다음과 같이 정의되었다고 하자.

$$f(x)=\begin{cases} x & ,x\in\left[0,\frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{3} & ,x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\ x & ,x\in\left[\frac{2}{3},1\right] \end{cases}$$

함수 $F:[0,1]\to R$을 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$로 정의하였을 때, F를 구체적으로 구하고, F가 미분가능한 점 $x\in[0,1]$들의 집합을 구하고, 정리 7.4.1을 확인하여 보아라.

풀 이

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & ,x\in\left[0,\frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{18} & ,x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{18} & ,x\in\left(\frac{2}{3},1\right] \end{cases}$$

이므로 F가 미분가능한 점들의 집합은 $\left\{x\in[0,1] \mid x\neq\frac{2}{3}\right\}$이고 f는 $x=\frac{2}{3}$에서 연속이 아니다. 따라서 F는 $x=\frac{2}{3}$에서 연속이지만 미분가능하지는 않다.

문 2. 함수 $f:[0,1]\to R$가 연속이며 모든 $x\in[0,1]$에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt$$

가 성립한다고 할 때, $f\equiv 0$임을 보여라.

풀 이

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자. 그러면 모든 $x\in[0,1]$에 대하여

$$F(x)=\int_x^1 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt-\int_0^x f(t)dt=F(1)-F(x)$$

이 성립하여 $2F(x)=F(1)$을 만족한다. f가 연속이므로 F는 미분가능하며, $F'=f$이다.

따라서 $f(x)=F'(x)=\frac{1}{2}F'(1)=0$이다. 그러므로 모든 $x\in[0,1]$에 대하여 $f(x)=0$이다.

문 3. 함수 $F:[0,1]\to R$가 다음과 같이 정의되었을 때, F'을 구하여라.

(1) $F(x)=\int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

풀 이

$[0,1]$위에서 $f(t)=\sqrt{1+t^2}$이고 $H(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자. 그러면 f가 $[0,1]$위에서 연속이므로 H는 $[0,1]$위에서 미분가능이며, $H'=f$를 만족한다. 여기서 $F(x)=H(x)-H(x^2)$이므로 양변을 x에 관하여 미분하면,

$$F'(x)=H'(x)-2xH'(x^2)=f(x)-2xf(x^2)=\sqrt{1+x^2}-2x\sqrt{1+x^4}$$

이다. 따라서 $F'(x)=\sqrt{1+x^2}-2x\sqrt{1+x^4}$ 이다.

(2) $F(x)=\int_0^{\sin x}\cos t\,dt$

풀 이

$[0,1]$ 위에서 $f(t)=\cos t$이고 $H(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자. 그러면 f가 $[0,1]$ 위에서 연속이므로 H는 $[0,1]$ 위에서 미분가능이며, $H'=f$를 만족한다. 여기서 $F(x)=H(\sin x)$이므로 양변을 x에 관하여 미분하면,

$$F'(x)=\cos x\cdot H'(\sin x)=\cos x\cdot f(\sin x)=\cos x\cdot\cos(\sin x)$$

이다. 따라서 $F'(x)=\cos x\cdot\cos(\sin x)$ 이다.

문 4. 함수 $f:[a,b]\to R$가 연속이라고 하자. 이 때, 다음이 성립할

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt$$

필요충분조건은 모든 $x\in[0,1]$에 대하여 $F'(x)=f(x)$임을 보여라.

풀 이

(⇨) f가 $[a,b]$ 위에서 연속이므로 F는 $[a,b]$ 위에서 미분가능이고, 적분에 관한 평균값 정리에 의하여

$$f(x+c)=\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}$$

을 만족하는 $c\in(0,h)$가 존재한다. 그러면 f가 $[a,b]$ 위에서 연속이므로

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}=\lim_{c\to0}f(x+c)=f\left(\lim_{c\to0}(x+c)\right)=f(x)$$

이 성립한다. 따라서 $F'(x)=f(x)$이다.

(⇦) 모든 $x\in[0,1]$에 대하여 $F'(x)=f(x)$이므로 따라서 $\int_a^x f(t)dt=\int_a^x F'(t)dt=[F(t)]_a^x=F(x)-F(a)$를 만족한다. 그러므로 $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)dt$이다.

문 5. 함수 $f,g:[a,b]\to R$가 각각 연속이고, 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $g(x)\geq 0$이면 다음을 만족시키는 점 $c\in[a,b]$가 존재함을 보여라.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$$

풀 이

모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $g(x)\geq0$이면 $\int_a^b g(t)dt\geq0$이다. 여기서 $\int_a^b g(t)dt=0$이면 $g(x)=0$이므로 위의 부등식은 모든 $c\in[a,b]$에 대하여 자명하게 성립한다. 따라서 $\int_a^b g(t)dt>0$에 대하여 보이면 충분하다.

f가 $[a,b]$에서 연속이고 $[a,b]$는 긴밀집합이므로 $f([a,b])$는 최대값 M과 최소값 m을 갖는다.
즉, 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $m\leq f(x)\leq M$을 만족한다. 그러면

$$m\cdot\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\cdot\int_a^b g(x)dx$$

이 성립한다. 여기서 $\int_a^b g(t)dt > 0$이므로

$$m \leq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)/\left(\int_a^b g(x)dx\right) \leq M$$

이 성립한다. 따라서 중간값 정리에 의하여

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)/\left(\int_a^b g(x)dx\right) = f(c)$$

를 만족하는 $c \in [a,b]$가 존재한다.

그러므로 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$을 만족하는 $c \in [a,b]$가 존재한다.

문 6. 함수 $f, g : [a,b] \to R$가 각각 연속이고, $F, G : [a,b] \to R$을

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

로 정의하였을 때, 다음이 성립함을 보여라.

$$\int_a^b F(t)g(t)dt = (F(b)G(b) - F(a)G(a)) - \int_a^b f(t)G(t)dt$$

풀 이

$f, g : [a,b] \to R$가 각각 연속이므로 $F, G : [a,b] \to R$는 각각 미분가능이며 $F' = f,\ G' = g$이다.

$$\int_a^b (F(t)G(t))'dt = [F(t)G(t)]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

이고 $(F(t)G(t)) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t)$이므로

$$\int_a^b (F(t)G(t))'dt = \int_a^b F(t)g(t) + f(t)G(t)dt = \int_a^b F(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)G(t)dt$$

따라서 $(F(b)G(b) - F(a)G(a)) = \int_a^b F(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)G(t)dt$이다.

그러므로 $\int_a^b F(t)g(t)dt = (F(b)G(b) - F(a)G(a)) - \int_a^b f(t)G(t)dt$이 성립한다.

정동명 해석학 | 7.5 특이적분

문 1. 다음 특이적분이 존재하면 그 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

풀 이

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-}\left[-2\sqrt{1-x}\,\right]_0^t = 2$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$

풀 이

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 x\ln x\,dx = \lim_{t\to 0+}\left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_t^1 = -\frac{1}{4} - \lim_{t\to 0+}\left(\frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2\right) = -\frac{1}{4}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\theta d\theta$

풀 이

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\theta d\theta = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\int_0^t \tan\theta d\theta = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left[-\ln(\cos\theta)\right]_0^t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\ln\left(\frac{1}{\cos t}\right) = \infty$$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

풀 이

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{t\to 1+}\int_t^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{t\to 1+}\int_t^2\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)dx = \lim_{t\to 1+}\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_t^2 = \frac{8}{3}$$

문 2. 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ 을 구하여라.

풀 이

$a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ 라 하자. $(n\in N)$ 그러면 $\ln a_n = \ln\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$이고 로그함수 $\ln x$에서 특이적분이 존재하므로

$$\lim_{n\to\infty}(\ln a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0+}\left[x\ln x - x\right]_t^1 = -1$$

이다. 또한 지수함수 e^x는 연속이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}e^{\ln a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)} = e^{-1} = \frac{1}{e}\text{이다.}$$

따라서 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$ 이다.

문 3. 함수 $f:[a,c)\cup(c,b]\to R$ $(c\in(a,b))$가 $0<\delta<\min\{c-a,b-c\}$인 임의의 δ에 대하여, 구간 $[a,c-\delta]$와 $[c+\delta,b]$ 위에서 각각 f가 리만적분가능 할 때,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon}f(x)dx+\int_{c+\epsilon}^{b}f(x)dx\right)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon}f(x)dx+\lim_{\epsilon\to 0}\int_{c+\epsilon}^{b}f(x)dx$$

가 일반적으로 성립하지 않음을 예를 들어보아라.
(왼쪽 극한이 존재할 때, 그 극한값을 $[a,b]$위에서의 f의 적분의 $Cauchy$주치라고 부르고, 기호로는 $(CPV)\int_a^b f(x)dx$로 나타낸다.)

(힌트: 함수 $f:[-1,0)\cup(0,2]\to R, f(x)=\dfrac{1}{x}$을 생각하여라.)

풀 이

함수 $f:[-1,0)\cup(0,2]\to R, f(x)=\dfrac{1}{x}$에 대하여

① $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\epsilon}^{2}\frac{1}{x}dx\right)=\lim_{\epsilon\to 0}\left([\ln(-x)]_{-1}^{-\epsilon}+[\ln x]_{\epsilon}^{1}\right)=\lim_{\epsilon\to 0}\ln 2=\ln 2$

② $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}dx=\lim_{\epsilon\to 0}[\ln(-x)]_{-1}^{-\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\ln(\epsilon)=\infty$

③ $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{2}\frac{1}{x}dx=\lim_{\epsilon\to 0}[\ln x]_{\epsilon}^{2}=\ln 2-\lim_{\epsilon\to 0}\ln\epsilon=-\infty$

따라서 일반적으로 (①)=(②+③)라고 볼수는 없다.

문 4. 정리 7.5.5의 (b)를 증명하여라.

풀 이

$\alpha\in R$에 대하여 αf는 특이적분 가능하고 리만적분의 성질에 의하여

$$\int_a^{\infty}\alpha f dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b\alpha f dx=\alpha\cdot\lim_{b\to\infty}\int_a^b f dx=\alpha\int_a^{\infty}f dx$$

이므로 따라서 $\displaystyle\int_a^{\infty}\alpha f dx=\alpha\int_a^{\infty}f dx$이다.

문 5. 다음 함수의 적분의 $Cauchy$주치가 존재하는지를 조사하여라.

(1) $\displaystyle(CPV)\int_{-1}^{75}\left(\frac{1}{x^3}\right)dx$

풀 이

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x^3}dx+\int_{\epsilon}^{75}\frac{1}{x^3}dx\right)=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\epsilon}+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\epsilon}^{75}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{75^2}\right)$$

따라서 위의 적분의 $Cauchy$주치가 존재한다.

(2) $\displaystyle(CPV)\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{x^4}\right)dx$

풀 이

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-2}^{-\epsilon}\frac{1}{x^4}dx+\int_{\epsilon}^{3}\frac{1}{x^4}dx\right)=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{-\epsilon}+\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{\epsilon}^{3}\right)=\infty$$

따라서 위의 적분의 $Cauchy$주치가 존재하지 않는다.

문 6. 함수 $f:R\to R$가 모든 구간 $[a,b]\subset R$위에서 리만적분가능할 때,

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-C}^{C}f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_{A}^{C}f(x)dx+\lim_{c\to\infty}\int_{-C}^{A}f(x)dx \quad (A\in R)$$

가 일반적으로 성립하지 않음을 예를 들어 보아라.

(왼쪽의 극한이 존재할 때, 그 극한값을 $(-\infty,\infty)$위에서의 f의 적분의 $Cauchy$주치라고 부르고, 기호로는 $(CPV)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$로 나타낸다.)

(힌트: 함수 $f:R\to R, f(x)=x$를 생각하여라.

풀 이

함수 $f:R\to R, f(x)=x$에 대하여

① $\lim_{C\to\infty}\int_{-C}^{C}x\,dx=\lim_{C\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-C}^{C}=\lim_{C\to\infty}0=0$

② $\lim_{C\to\infty}\int_{0}^{C}xdx=\lim_{C\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{C}=\lim_{C\to\infty}\frac{1}{2}C^2=\infty$

③ $\lim_{C\to\infty}\int_{-C}^{0}xdx=\lim_{C\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-C}^{0}=\lim_{C\to\infty}\left(-\frac{1}{2}C^2\right)=-\infty$

따라서 일반적으로 (①)=(②+③)라고 볼 수는 없다.

문 7. 다음 특이적분의 존재성을 판정하여라.

(1) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

풀 이

$x\ge 1$에 대하여 $1+x^2\le 4x^2$이므로

$$\frac{1}{2x}\le\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

이 성립하고 $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{2x}dx$는 발산하므로 비교판정법에 의하여 $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$은 발산한다.

따라서 $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$의 특이적분은 존재하지 않는다.

(2) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$

풀 이

$0\le x\le 1$에 대하여 $2x-x^2\le 2x^2-x^2=x^2$이므로

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2x-x^2}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{x^{2/3}}$$

이 성립하고 $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{2/3}}dx$는 수렴하므로 비교판정법에 의하여 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$은 수렴한다.

따라서 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$의 특이적분은 존재한다.

(3) $\int_0^\infty e^{-t} t^\alpha \sin t\, dt \quad (\alpha \in R)$

풀 이

우선 $\int_0^1 e^{-t} t^\alpha \sin t\, dt$의 수렴 /발산에 대하여 살펴보자.

$0 \le t < 1$이면 $0 \le e^{-t} t^\alpha \sin t \le t^\alpha \sin t \le t^\alpha \cdot t = t^{\alpha+1}$이고 $\alpha > -2$이면 $\int_0^1 t^{\alpha+1} dt$가 수렴하므로 비교 판정법에 의하여 $\int_0^1 e^{-t} t^\alpha \sin t\, dt$은 수렴한다. 또한 $0 \le t < 1$이면 $e^{-t} t^\alpha \sin t \ge e^{-t} t^\alpha \cdot \frac{2}{\pi} x \ge \frac{1}{e} \cdot \frac{2}{\pi} t^{\alpha+1}$이고 $\alpha \le -2$이면 $\int_0^1 t^{\alpha+1} dt$는 발산한다.

이제 $t \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$|e^{-t} t^\alpha \sin \alpha| \le e^{-t} t^\alpha$$

가 성립하고 $f(t) = e^{-t} t^\alpha \ (t \ge 1)$이라 하고 $k \ge \alpha$인 자연수 k를 택하자. 그러면 $n \ge k$인 모든 t에 대하여

$$f'(t) = -e^{-t} t^{\alpha-1}(x-\alpha) < 0$$

이므로 f는 $[k, \infty)$위에서 연속이고 감소인 양의 함수이다.

급수 $\sum_{n=k}^{\infty} e^{-n} n^\alpha$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(n+1)}(n+1)^\alpha}{e^{-n} n^\alpha} = \frac{1}{e} < 1$$

이므로 비판정법에 의하여 수렴하고 적분판정법에 의하여 $\int_k^\infty e^{-t} t^\alpha dt$는 수혐한다.

그러므로 $\int_1^\infty e^{-t} t^\alpha \sin t\, dt$은 수렴한다. 특히 $\alpha > -2$이면 주어진 이상적분은 수렴한다.

하지만 $\alpha \le -2$이면 주어진 이상적분은 발산한다.

(4) $\int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} \quad (\alpha \in R)$

풀 이

우선 $0 < t < 1$인 경우 $\int_0^t \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$의 수렴 /발산에 관하여 살펴보자.

$$\int_0^t \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \lim_{s\to 0+} \int_s^t \frac{1}{x(\ln x^\alpha)} dx$$

$$= \begin{cases} \lim_{s\to 0+} [\ln(\ln x)]_s^t & , \alpha = 1 \\ \lim_{s\to 0+} \left[\frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}\right]_s^t & , \alpha \ne 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{s\to 0+} \{\ln(-\ln t) - \ln(-\ln s)\} & , \alpha = 1 \\ \lim_{s\to 0+} \left\{\frac{1}{1-\alpha}\left((\ln t)^{1-\alpha} - (\ln s)^{1-\alpha}\right)\right\} & , \alpha \ne 1 \end{cases}$$

이므로 $\alpha > 1$인 경우에만 주어진 적분은 수렴한다.

이제 $0 < s < 1, 1 < t$인 경우 $\int_s^t \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$의 수렴 /발산을 살펴보자.

$$\int_s^t \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \lim_{c\to 1-}\int_s^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx + \lim_{c\to 1+}\int_c^t \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx$$

이다. 먼저

$$\lim_{c\to 1-}\int_s^c \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx = \begin{cases} \lim_{c\to 1-}\left[\ln(\ln x)\right]_s^c & ,\alpha = 1 \\ \lim_{c\to 1-}\left[\frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}\right]_s^c & ,\alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{c\to 1-}\left[\ln(\ln c) - \ln(\ln s)\right] & ,\alpha = 1 \\ \lim_{c\to 1-}\left[\frac{1}{1-\alpha}(\ln c)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}(\ln s)^{1-\alpha}\right] & ,\alpha \neq 1 \end{cases}$$

이므로 $\alpha < 1$인 경우에만 주어진 적분은 수렴한다. 그러므로 이상적분은 발산한다.

정동명 해석학 | 7.8 적분가능 함수열

문 1. 구간 $[0,1]$위에서 정의된 함수열 $\langle f_n \rangle$이 다음과 같이 정의되었을 때, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) dx$가 성립함을 조사하여라.

(1) $f_n(x)=\begin{cases} 1-nx\,, 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ \quad 0 \quad\ , \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

풀 이

구간 $[0,1]$위에서 정의된 함수열 $\langle f_n \rangle$의 극한함수 f는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , x=0 \\ 1\,, & 0<x\le 1 \end{cases}$$

($\because$ $x=0$이면 $f(0)=\lim_{n\to\infty} f(0)=1$이고 $0<x\le 1$이면 적당한 자연수 k에 대하여 $n\ge k$인 모든 자연수 n에 대하여 $|f_n(x)|=0<\epsilon$이 성립한다. 따라서 $f(x)=0$이다.)

그러면

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n}(1-nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[x-\frac{n}{2}x^2\right]_0^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

이고

$$\int_0^1 f dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) dx$이 성립한다.

(2) $f_n(x)=2nx\,e^{-nx^2}$

풀 이

구간 $[0,1]$위에서 정의된 함수열 $\langle f_n \rangle$의 극한함수 f는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , x=0 \\ 0\,, & 0<x\le 1 \end{cases}$$

($\because$ $x=0$이면 $f(0)=\lim_{n\to\infty} f(0)=1$이고

$0<x\le 1$이면 로피탈 법칙에 의하여 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2nx}{e^{nx^2}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2x}{x^2 e^{nx^2}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{xe^{nx^2}}=0$)

그러면

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(2nx\,e^{-nx^2}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-nx^2}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)=1$$

이지만

$$\int_0^1 f dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n dx \ne \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) dx$이 성립한다.

문 2. 각 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,1] \to R$가 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$로 정의되었을 때, 다음의 물음에 답하여라.

(1) $\langle f_n \rangle$의 점별극한 함수 $f : [0,1] \to R$을 구하고, f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능함을 보여라.

풀 이

① $x=0$이면, $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$이고 $0 < x \le 1$이면 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x}{(1/n)+x} = 1$이다. 따라서 $[0,1]$위에서 함수열 $\langle f_n \rangle$의 극한함수 f는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 1 & , 0 < x \le 1 \end{cases}$$

② 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\epsilon}{2}$인 자연수 k가 존재해서 $[0,1]$위의 분할을 $P = \left\{0, \dfrac{1}{k}, 1\right\}$라 하자.

그러면 $U(f,P) = 1$이고 $L(f,P) = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$이므로 $U(f,P) - L(f,P) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} < \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$이다.

따라서 리만판정법에 의하여 f는 $[0,1]$위에서 리만적분가능하다.

(2) $\langle f_n \rangle$은 $[0,1]$위에서 f에 평등수렴하지 않음을 보여라.

풀 이

함수열 $\langle f_n \rangle$은 $[0,1]$위에서 연속이지만 f는 $[0,1]$위에서 불연속이다. 따라서 함수열 $\langle f_n \rangle$은 $[0,1]$위에서 평등수렴하지 않는다.

(3) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) dx$임을 보여라.

풀 이

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{nx+1} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \left[x - \frac{1}{n}\ln(nx+1)\right]_0^1 = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 1$$

이고 $\int_0^1 f dx = \int_0^1 1 dx = 1$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) dx$이 성립한다.

문 3. 각 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : [0,1] \to R$가 $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k^2}$로 정의되었을 때,

다음이 성립함을 보여라.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k^2}$$

풀 이

$[0,1]$위에서 $\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right| \le \dfrac{1}{k^2}$이고 $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$은 $p-$급수판정법에 의하여 수렴한다. 따라서 와이어슈트라스 $M-$판정법에 의하여 f_n은 평등수렴한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \int_0^1 x^k dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \left[\dfrac{1}{k+1} x^{k+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)k^2}$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)k^2}$이다.

문 4. $[a,b]$**에서의 연속함수열** $\langle f_n \rangle$**가 극한함수** $f:[a,b] \to R$**에 평등수렴한다고 하자.**

함수 $F, F_n : [a,b] \to R$**을 각각** $F_n(x) = \int_a^x f_n dt,\ F(x) = \int_a^x f\,dt$**로 정의되었을 때,** $[a,b]$**위에서** F_n**은** F**로 평등수렴함을 보여라.**

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $[a,b]$위에서 $f_n \rightrightarrows f$이므로 $\exists K^* > 0\ s.t.\ n \ge K^*,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_n - f| < \epsilon/2(b-a)$
이제 $K = K^*$로 두자. 그러면 $n \ge K$인 모든 $x \in [a,b]$에 대하여

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^b (f_n - f) dx \right| \le \int_a^b |f_n - f| dx < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $[a,b]$위에서 $F_n \rightrightarrows F$ 이다.

문 5. 함수 $f, g : [a,b] \to R$**에 대하여** f, g**가** $[a,b]$**위에서 연속이고, 또한** $[a,b]$**에서의 연속함수열** $\langle f_n \rangle$**이** $[a,b]$**위에서** f**에 평등수렴할 때, 다음이 성립함을 보여라.**

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n g\,dx = \int_a^b fg\,dx$$

풀 이

임의의 $\epsilon > 0$에 대하여
g가 연속이고 $[a,b]$가 긴밀이므로 $g(x)$는 $[a,b]$위에서 유계이므로 $\exists M > 0\ s.t.\ |g(x)| \le M$
연속함수열 $\langle f_n \rangle$이 $[a,b]$위에서 f로 평등수렴하므로

$\exists K^* > 0\ s.t.\ n \ge K^*,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_n - f| < \epsilon/2M(b-a)$

이제 $K = K^*$로 두자. 그러면 $n \ge K$인 모든 $x \in [a,b]$에 대하여

$$\left| \int_a^b f_n g\,dx - \int_a^b fg\,dx \right| = \left| \int_a^b f_n g - f\,g\,dx \right| \le \int_a^b |g||f_n - f| dx \le M \int_a^b |f_n - f| dx < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n g\,dx = \int_a^b fg\,dx$이다.