1. 집합 및 함수

- $\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$, $\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda$

전체 집합 X와 X의 부분집합족 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in A}$에 대해

합집합과 교집합을 다음과 같이 정의.

(i) $\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda = \{x\in X \mid$ 적어도 한 $\lambda\in I$에 대해 $x\in A_\lambda\}$

(ii) $\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda = \{x\in X \mid$ 모든 $\lambda\in I$에 대해 $x\in A_\lambda\}$

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in A} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in A} A_\lambda^c$, $\left(\bigcap_{\lambda\in A} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in A} A_\lambda^c$

(2) $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in A} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in A}(A\cap A_\lambda)$, $A\cup\left(\bigcap_{\lambda\in A} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in A}(A\cup A_\lambda)$

- 동치관계

집합 A상의 관계 ~가 다음 공리를 만족할 때, ~를 동치관계라 함.

(i) $\forall a\in A,\ a\sim a$ [반사적]

(ii) $a\sim b \Rightarrow b\sim a$ [대칭적]

(iii) $a\sim b,\ b\sim c \Rightarrow a\sim c$ [추이적]

- 동치류, 상집합

~가 A 상의 동치관계일 때, $a\in A$에 대하여

$[a] = \{x \mid a\sim x\}$

를 a의 동치류라 하고, 동치류 전체의 집합을

$A/\sim\ = \{[a] \mid a\in A\}$

로 나타내고 상(商) 집합이라 부른다.

(1) ~이 A 상의 동치관계, $[a]$를 $a\in A$의 동치류라 하면 다음이 성립.

(i) $\forall a\in A,\ a\in[a]$

(ii) $a\sim b \Leftrightarrow [a]=[b]$

(iii) $[a]\neq[b] \Rightarrow [a]$와 $[b]$는 서로소

(2) ~가 A 상의 동치관계면, $A/\sim$은 A의 분할.

• **단사함수, 전사함수, 전단사함수**

함수 $f: X\to Y$ 에서,

(i) 1대1함수 (단사함수)

$\forall x_1, x_2\in X,\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

(ii) 전사함수

$\forall y\in Y,\ \exists x\in X$ s.t $f(x)=y$ (즉, $f(X)=Y$)

(iii) 전단사함수

전사이고 단사인 함수.

- 상, 역상

함수 $f: X\to Y$에 대해 f에 의한 $A(\subset X)$의 상과

$B(\subset Y)$의 역상을 다음과 같이 나타냄.

$f(A) = \{f(x) \mid x\in A\}$, $f^{-1}(B) = \{x\in A \mid f(x)\in B\}$

(1) 함수 $f: X\to Y$와 $A_\lambda, A, B\subset X$에 대해 다음이 성립

$f\left(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in I} f(A_\lambda)$, $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in I} f^{-1}(A_\lambda)$

$f\left(\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in I} f(A_\lambda)$, $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in I} f^{-1}(A_\lambda)$

$f(A-B) \supset f(A)-f(B)$, $f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$

(2) 함수 $f: X \to Y$ 와 $A \subset X$, $B \subset Y$ 에 대해 다음이 성립

(i) $A \subset f^{-1}(f(A))$, f가 단사함수면 등호성립.

(ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$. f가 전사함수면 등호성립.

- **가산, 비가산**

(i) 집합 X 에서 N 으로의 전단사 함수가 존재할 때,

X 를 가부번 집합이라고 함.

(ii) 집합 X가 유한집합이거나, 또는 가부번 집합일 때,

X 을 가산집합 이라 한다.

(iii) X가 가산집합 아닌 경우, X을 비가산집합.

(1) 임의의 무한집합은 가산 무한집합을 부분집합으로 갖는다.

(2) 가산집합의 가산합집합은 가산 집합이다.

2. 위상공간

- **Topological Space**

집합 $X (\neq \emptyset)$ 의 부분집합족 $\mathcal{J}$ 가

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{J}$

(ii) $G_\lambda \in \mathcal{J} \ (\lambda \in I) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in I} G_\lambda \in \mathcal{J}$

(iii) $G, H \in \mathcal{J} \Rightarrow G \cap H \in \mathcal{J}$

을 만족할 때, $\mathcal{J}$ 를 X 상의 위상이라 한다.

$\mathcal{J}$ 의 원소를 $\mathcal{J}$- 열린집합 or 열린집합이라 하며

$(X, \mathcal{J})$ 를 위상공간이라 함.

- **집적점**

$p \in G$ 인 $\forall G \in \mathcal{J}$, $(G - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ 일 때,

점 $p \in X$ 를 A의 집적점 (acc pt)이라 함.

A 의 모든 집적점의 집합을 유도집합이라 하고 A' 으로 표현함.

(1) F: 닫힌 집합 $\Leftrightarrow F' \subset F$

- **Closure (폐포)**

A 를 포함하는 모든 폐집합의 교집합을 A의 폐포, $\overline{A}$ 라 표현한다.

(1) $\overline{A}$ 는 닫힌집합.

(2) F가 A를 포함하는 닫힌 집합 $\Rightarrow A \subset \overline{A} \subset F$.

(3) A : 닫힌 집합 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

(4) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U_x$, $U \cap A \neq \emptyset$

(U_x : x 를 포함하는 열린집합.)

(5) $\overline{A} = A \cup A'$

- **조밀부분집합**

$\overline{A} = X$ 일 때 A는 X의 조밀부분집합이라 함.