6. 미분

c 에서 f의 도함수

구간 I 에 대하여 $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ 라 하자

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t $x \in I$, $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$

을 만족하면 실수 L 을 c 에서 f의 도함수

이 경우 f는 c 에서 미가, $L = f'(c)$

(1) $f: I \to \mathbb{R}$ 가 $c \in I$ 에서 도함수를 가지면 f는 c에서 연속.

(2) 구간 I 에 대해 $c \in I$ 이고 $f: I \to \mathbb{R}$ 와 $g: I \to \mathbb{R}$ 를 c 에서 미분가능함수라 하자.

- (i) $\alpha \in \mathbb{R}$ 이면 αf 는 c 에서 미분가능, $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$
- (ii) 함수 $f + g$ 는 c 에서 미분가능하고 $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
- (iii) 함수 fg 는 c에서 미분가능하고 $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.
- (iv) $g(c) \neq 0$ 이면 f/g 는 c 에서 미분가능하고 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{\{g(c)\}^2}$

(3) $f_1, \cdots, f_n$ 이 구간 I 에서 $\mathbb{R}$ 로의 함수이고 $c \in I$ 에서 미분가능하다 하자.

- (i) 함수 $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ 은 c 에서 미분가능.

  $$(f_1 + \cdots + f_n)'(c) = f_1'(c) + \cdots + f_n'(c)$$

- (ii) 함수 $f_1 f_2 \cdots f_n$ 은 c에서 미분가능.

  $$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(c) = f_1'(c)f_2(c)\cdots f_n(c) + \cdots + f_1(c)f_2(c)\cdots f_n'(c)$$

(4) I, J 를 $\mathbb{R}$ 에서의 구간이라 하고 $g: I \to \mathbb{R}$ 와 $f: J \to \mathbb{R}$ 를 $f(J) \subseteq I$ 인 함수,

$c \in J$ 라 하자. f 가 c 에서 미분가능 & g가 $f(c)$ 에서 미분가능이라 하면

합성함수 $g \circ f$ 는 c에서 미분가능하고, $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$

(5) I 를 $\mathbb{R}$ 에서의 구간이라 하고 $f: I \to \mathbb{R}$ 가 I 에서 순단조 & 연속.

$J = f(I)$ 라 하고 $g: J \to \mathbb{R}$ 을 f의 순단조이고 연속인 역함수라 하자.

f가 $c \in I$ c에서 미분가능, $g'(d) = \dfrac{1}{f'(c)} = \dfrac{1}{f'(g(d))}$

(6) I를 ($\mathbb{R}$ 에서의) 구간이라 하고 $f: I \to \mathbb{R}$ 가 I 에서 순단조함수.

& $J = f(I)$ 라 하고, $g: J \to \mathbb{R}$ 는 f의 역함수.

f 가 $\forall c \in I$ 에서 미가이고 $x \in I$ 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 이면

g는 I 에서 미분가능, $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$

(M-V-T)

(1) $f: I \to \mathbb{R}$ 가 구간 I 의 내점 c 에서 극값을 가지고 c 에서 도함수가 존재하면 $f'(c) = 0$.

(2) $f: I \to \mathbb{R}$ 가 구간 I 내에서 연속, f가 I의 내점 c 에서 극값을 가진다고 가정.

$\Rightarrow$ c 에서 f의 도함수 존재하지 않거나 $f'(c) = 0$.

(3) (Rolle's Theorem)

f가 폐구간 $[a,b]$ 에서 연속 & 개구간 (a,b) 의 모든 점에서 f' 도함수가 존재하며

$f(a) = 0 = f(b)$ 라 하면, 적어도 하나의 $c \in [a,b]$ s.t $f'(c) = 0$ 가 존재.

(4) (Mean Value Theorem)

f가 $I = [a,b]$ 에서 연속, (a,b) 에서 미가 & $\forall x \in (a,b)$ 에서 $f'(x) = 0$ 이라 하면

f 는 상수함수.

(6) $f: I \to \mathbb{R}$ 가 구간 I 에서 미가

- (i) f 가 I 에서 증가 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$
- (ii) f가 I 에서 감소 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$

(7) 극값에 대한 1계도함수 판정법

f가 $I = [a,b]$ 에서 연속, $c \in (a,b)$ 내점 라 하자.

또한 f가 $(a,c), (c,b)$ 에서 미분가능하면

- (i) $\begin{cases} f'(x) \geq 0, & c - \delta < x < c \\ f'(x) \leq 0, & c < x < c + \delta \end{cases}$

  이 되는 근방 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$ 가 존재하면 f는 c에서 극댓값을 가짐.

- (ii) $\begin{cases} f'(x) \leq 0, & c - \delta < x < c \\ f'(x) \geq 0, & c < x < c + \delta \end{cases}$

  이 되는 근방 $(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$ 가 존재하면 f는 c에서 극솟값을 가짐.

(8) $I \subseteq \mathbb{R}$ 를 구간, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ 라 하자.

f는 c에서 도함수를 갖는다 하자.

- (i) $f'(c) > 0 \Rightarrow c < x < c + \delta$ 인 $x \in I$ 에 대해 $f(x) > f(c)$ 가 되는 $\delta > 0$가 존재.
- (ii) $f'(c) < 0 \Rightarrow c - \delta < x < c$ 인 $x \in I$ 에 대하여 $f(x) < f(c)$ 인 $\delta > 0$가 존재.

(9) (Darboux Theorem)

f 가 $I = [a,b]$ 에서 미가, $k \in \{f'(a), f'(b)\}$

$\Rightarrow$ $f'(c) = k$ 가 되는 적어도 한 점 $c \in (a,b)$ 이 존재.