Tue Aug 10 전공스터디

1. Group, Abelian group

집합 $G(\neq \emptyset)$ 의 원소 $a, b, c \in G$ 에 대해 다음이 성립하면 $(G, *)$ 을 군

(i) $a * b \in G$

(ii) $a * (b * c) = (a * b) * c$

(iii) $\forall a \in G, \ \exists e \in G$ s.t $e * a = a = a * e$

(iv) $\forall a \in G, \ \exists a^{-1} \in G$ s.t $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$

특히 $a * b = b * a$ 를 만족하면 가환군

(1) 군 G 는 유일한 항등원

(2) $\forall a \in G$ 는 유일한 역원

(3) $a, b, c \in G$,

(i) $ab = ac \Rightarrow b = c$, $ba = ca \Rightarrow b = c$

(ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $(a^{-1})^{-1} = a$

• 군 G의 원소의 위수

군 G에서 $a \in G$ 에 대하여

(1) $a^k = e$ 인 양의 정수 k가 존재하는 경우 a는 유한 위수를 가진 원소,

$a^n = e$ 인 가장 작은 양의 정수 n을 a의 위수, $|a| = n$

(2) $\forall k \in \mathbb{Z}^+, \ a^k \neq e$ 일때, a는 무한위수를 가짐.

군 G, $a \in G$ 에 대하여

(1) $|a| = \infty$ 일때 $\forall i \neq j \Rightarrow a^i \neq a^j$

(2) $i \neq j$ 에 대해 $a^i = a^j \Rightarrow |a| < \infty$

(3) $|a| = n \Rightarrow a^k = e \Leftrightarrow n \mid k$

(4) $|a| = n$, $n = td \Rightarrow |a^t| = d$ (단 $d > 0$)

• Subgroup

군 G 의 부분집합 $H(\neq \emptyset)$ 가 G 의 연산에 관하여 군을 이룰 때, H를 군 G의 부분군

(1) $H \leq G \Leftrightarrow \forall a, b \in H, \ ab^{-1} \in H$

(2) 군 G의 유한부분집합, nonempty H 가 연산에 닫혀있으면 H는 G의 부분군.

• 중심 (center)

군 G에 대해 다음을 G의 중심.

$Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \quad \forall g \in G\}$

(1) 군 G의 중심 $Z(G)$는 G의 부분군

• Cyclic group, Cyclic subgroup

군 G 에서 $a \in G$,

(1) $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 는 Cyclic subgroup by generator a

(2) $\langle a \rangle = G$ 이면 G는 Cyclic group.

(1) 군 G 에서 $a \in G$ 에 대해

(i) a가 무한위수를 가지면 $\langle a \rangle$는 무한 부분군

각각의 $k \in \mathbb{Z}$ 에 따라 a^k는 All different

(ii) $|a| = n$ 이면 $\langle a \rangle$ 는 위수 n을 갖는 부분군

$\langle a \rangle = \{\underset{a^0}{e}, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$

(3) 순환군의 부분군은 순환군.

• 준동형사상, 동형, 동형사상

$(G, *)$, $(H, \cdot)$ 을 군. $f: G \to H$ 가 임의의 원소 $a, b \in G$ 에 대해

$f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$ 를 만족 $\Rightarrow$ f는 준동형사상

\+ 준동형사상 f가 전단사함수일 때 G와 H는 동형. $G \cong H$. f는 동형사상

(1) 무한 순환군은 $\mathbb{Z}$ 와 동형, 위수가 n인 유한 순환군을 $\mathbb{Z}_n$ 과 동형이다.

(2) $f: G \to H$ 가 준동형사상

(i) $f(e_G) = e_H$

(ii) $\forall a \in G$, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

(iii) $\mathrm{Im} f$ 는 H의 부분군

(iv) f: 단사 $\Rightarrow$ $G \cong \mathrm{Im} f$

(3) (Cayley 정리) 군 G는 G의 치환군과 동형.

• Cosets. 대표원

군 G 에서 H가 G의 부분군일 때, $a \in G$ 에 대해

$aH = \{ah \mid h \in H\}$: H의 left coset

$Ha = \{ha \mid h \in H\}$: H의 right coset

• 군 G 에서 $K \leq G$. $a, b \in G$

(1) $a \sim b \iff ab^{-1} \in K$

(i) '~' 는 G 상의 동치관계

(ii) a의 동치류 $Ka = [a]$

(2) $ab^{-1} \in K \iff Ka = Kb$

(3) $Ka \cap Kb = \emptyset$ 이거나 $Ka = Kb$

Union

(4) $G = \bigcup_{a \in G} Ka$

개수

(5) $\forall a \in G$, $|K| = |Ka|$