• 측도 0인 집합

A를 실수집합 $\mathbb{R}$의 부분집합.

임의의 $\varepsilon>0$ 에 대하여 가산개 개구간 (a_n, b_n) 이 존재하여

(i) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$

을 만족할 때, 집합 A를 측도 0인 집합.

(1) 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 점 x에서 불연속

$\Leftrightarrow$

(2) 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 유계함수라 하자.

함수 f가 리만적분가능 $\Leftrightarrow$ f의 불연속점의 집합 D가 측도 0인 집합.

• 적분가능함수공간

(1) nonempty bdd set $A, B \subseteq \mathbb{R}$ 와 임의의 $\lambda\in\mathbb{R}$ 에 대해 다음이 성립

- (i) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
- (ii) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$
- (iii) $\sup \lambda A = \begin{cases} \lambda \sup A, & \lambda \ge 0 \\ \lambda \inf A, & \lambda < 0 \end{cases}$
- (iv) $\inf \lambda A = \begin{cases} \lambda \inf A, & \lambda \ge 0 \\ \lambda \sup A, & \lambda < 0 \end{cases}$

(2) 함수 $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 각각 $[a,b]$ 위에서 적분가능하면,

$f+g\in R[a,b]$ 이고 다음이 성립. $\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

(3) 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 $[a,b]$ 위에서 적분가능하면, 임의의 $\lambda\in\mathbb{R}$ 에 대해

$\lambda f\in R[a,b]$ 이고 $\int_a^b \lambda f\,dx = \lambda\int_a^b f\,dx$

(4) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 적분가능하며 $[a,b]$ 위에서 $f\ge 0$ 이면, $\int_a^b f\,dx \ge 0$

(5) bdd fct $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 각각 적분가능, $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\ge g(x)$ 이면

$\int_a^b f\,dx \ge \int_a^b g\,dx$

(6) 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 적분가능이면

(i) f^+, f^- 도 적분가능

(ii) $|f|$ 도 적분가능 & $\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$

(7) $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 각각 적분가능하면, $f\cdot g$ 도 적분가능

(8) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 $f\in R[a,b]$ 이고 $a<c<b$ 이면

$f_1 \equiv f|_{[a,c]} \in R[a,c]$, $f_2 \equiv f|_{[c,b]} \in R[c,b]$ 이며 $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f_1\,dx + \int_c^b f_2\,dx$

(9) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 임의의 점 $c\ (a<c<b)$ 에 대하여

$f_1 \equiv f|_{[a,c]} \in R[a,c]$, $f_2 \equiv f|_{[c,b]} \in R[c,b]$ $\Rightarrow$ $f\in R[a,b]$

$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f_1\,dx + \int_c^b f_2\,dx$

• F-T-C

(1) 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 $f\in R[a,b]$ 일 때,

함수 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 를 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 으로 정의하면

(i) F : unifly conti on $[a,b]$

(ii) f : conti at $\forall x_0\in[a,b]$

$\Rightarrow$ F : diff at $\forall x_0$ & $F'(x_0) = f(x_0)$

(2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 Conti on $[a,b]$,

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 으로 정의하면

F : diff on $[a,b]$ 이고 $F' = f$ 이다.

(3) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$: Conti, 적당한 함수 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 존재하여

F : diff on $[a,b]$, $f' = F$ 이면, $\int_a^b \cancel{f(x)dx}\ f\,dx = F(b) - F(a)$

(4) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 적분가능, 적당한 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 존재하여

F : diff on $[a,b]$, $F' = f$ 이면, $\int_a^b \cancel{f\,dx}\ f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

(5) 적분에 관한 평균값 정리

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$: Conti 이면 $\exists x_0\in(a,b)$

s.t. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx = f(x_0)$

(6) $g:[c,d]\to[a,b]$: diff on $[c,d]$,

$g(c) = a$, $g(d) = b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 는 Conti

$\Rightarrow \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$

(7) $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 가 diff on $[a,b]$ 이고,

$f', g'\in R[a,b]$ 일 때,

$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$

· $(a,b]$ 위에서 f의 특이적분

$f: (a,b] \to \mathbb{R}$ 가 $\forall c \in (a,b]$, $f \in R[c,b]$ 일 때,

$\lim_{c \to a+} \int_c^b f\,dx$ 가 존재하면 f는 $(a,b]$ 위에서 특이적분 가능.

⇒ 그 값을 $\int_a^b f\,dx$ ⇒ $(a,b]$ 위에서의 f의 특이적분.