전공 Study Aug 13. Fri

Data No.

Diff Geometry 2p

- 평행한 직선

벡터 $\mathbb{a}, \mathbb{u} (\neq \mathbb{0})$ 에 대해, 다음 방정식을 만족하는 점 $\mathbb{x}$의 집합을 $\mathbb{a}$를 지나고 $\mathbb{u}$에 평행한 직선이라 한다.

$\mathbb{x} = \mathbb{a} + t\mathbb{u}, \ t \in \mathbb{R}$

- 수직인 평면

Nonzero vector $\mathbb{a}, \mathbb{n}$ 에 대해, 다음 방정식을 만족하는 점 $\mathbb{x}$의 집합을 $\mathbb{a}$를 지나고 $\mathbb{n}$에 수직인 ~~직선~~ 평면이라 한다.

$\langle \mathbb{x} - \mathbb{a}, \mathbb{n} \rangle = 0$

↳ $\mathbb{x}$의 법벡터.

- 접벡터, 시점, 벡터 부분

$\mathbb{E}^3$의 두 벡터 p, a에 대해 접벡터 a_p는 p를 시점, $a+p$를 종점으로 하는 벡터로 정의, 이 때 $\mathbb{a}$를 벡터 부분이라 함.

- Vector field

$\mathbb{E}^3$의 각 점에서 $\mathbb{E}^3$의 접벡터 $V(p)$를 대응시키는 함수 V를 벡터장이라 함.

- 표구장 : $\mathbb{E}^3$의 벡터장 E_1, E_2, E_3가 다음을 만족하면 $\{E_1, E_2, E_3\}$를 $\mathbb{E}^3$의 표구장.

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

(1) $\mathbb{E}^3$ 위의 한 표구장 $\{E_1, E_2, E_3\}$에 대해 다음이 성립.

(i) 임의의 벡터장 V에 대해 $V = \sum_{i=1}^{3} \langle V, E_i \rangle E_i$ 로 표현 가능.
이 때 함수 $f_i = \langle V, E_i \rangle$를 $\{E_1, E_2, E_3\}$에 대한 좌표함수.

(ii) $V = \sum_{i=1}^{3} f_i E_i$, $W = \sum_{i=1}^{3} g_i E_i$ 일 때

$\langle V, W \rangle = \sum_{i=1}^{3} f_i g_i$ 가 성립.

2. 곡선의 국소적 Theory

· diff-able, derivation

- 매개변수 t에 대한 벡터함수 $\alpha(t)$ 에 대해 다음 극한값이 존재하면
  α는 diff-able, 그 limit 을 α의 도함수.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\alpha}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$$

$\alpha(t)$의 도함수를 기호로는 $\alpha'(t)$ or $\dfrac{d\alpha}{dt}$

(1) α, β, γ는 t의 벡터함수. k는 t의 스칼라 ~~ft~~

(i) $$\frac{d}{dt}(\alpha+\beta) = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

(ii) $$\frac{d}{dt}\langle \alpha+\beta \rangle = \langle \alpha, \frac{d\beta}{dt} \rangle + \langle \frac{d\alpha}{dt}, \beta \rangle$$

(iii) $$\frac{d}{dt}(\alpha\times\beta) = \alpha\times\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\times\beta$$

(iv) $$\frac{d}{dt}f\alpha = \frac{df}{dt}\alpha + f\frac{d\alpha}{dt}$$

(v) $$\frac{d}{dt}\langle \alpha, \beta\times\gamma \rangle = \langle \alpha, \beta\times\frac{d\gamma}{dt} \rangle + \langle \alpha, \frac{d\beta}{dt}\times\gamma \rangle + \langle \frac{d\alpha}{dt}\, \beta\times\gamma \rangle$$

(vi) $$\frac{d}{dt}[\alpha\times(\beta\times\gamma)] = \alpha\times(\beta\times\frac{d\gamma}{dt}) + \alpha\times(\frac{d\beta}{dt}\times\gamma) + \frac{d\alpha}{dt}\times(\beta\times\gamma)$$

* No special mention ⇒ 함수: ∞-diff-able 한 것으로 가정.

Data. No.

◦ 속도 벡터. 가속도 벡터

· 곡선 α 에 대해 $\alpha'(t)$: 속도벡터

$\alpha''(t)$: 가속도 벡터

· 정칙곡선(regular curve) : 곡선 $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ 가 $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$ 이면 정칙곡선

· 재매개화 : I 와 J 가 $\mathbb{R}$ 에서의 open interval
(reparametrization) $h: J \to I$; conti
$\alpha: I \to E^3$ 가 공간곡선이라 하면
곡선 $\beta = \alpha(h): J \to E^3$ 를 h 에 의한 α 의 재매개화.

(1) 곡선 β 가 h 에 의한 곡선 α 의 재매개화면

$$\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s)$$

(2) 곡선 $\alpha(t)$ 가 정칙이면, 단위속력을 갖는 재매개화가 존재.