* 증가. 감소. 단조

(x_n) 을 실수열이라 하자. $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots$ 을 만족하면 (x_n)은 증가수열

$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots$ 을 만족하면 감소수열

(x_n) 이 증가 or 감소하면 (x_n) 을 단조수열

(1) (단조수렴정리) 단조인 실수열이 수렴할 필요충분조건은 수열이 유계인 것.

Moreover. (i) (x_n) : 유계, 증가 $\Rightarrow$ $\lim(x_n) = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(ii) (x_n) : 유계, 감소 $\Rightarrow$ $\lim(x_n) = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

* 부분수열

실수열 (x_n) 에 대하여 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 을 순증가하는 자연수열

그러면 $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ 으로 주어지는 수열 (x_{n_k})을 (x_n)의

부분 수열 (subseq)

(1) 실수열 (x_n) 이 $\overset{\text{실수}}{x}$ 로 수렴하면 (x_n) 의 임의의 부분열 (x_{n_k}) 역시 x 로 수렴.

(2) (x_n) 을 실수열이라 하면 다음이 동치

- (i) 수열 (x_n) 이 $x \in \mathbb{R}$ 로 수렴하지 X

- (ii) ε_0 가 존재하여 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ s.t $n_k \ge k \Rightarrow |x_{n_k} - x| \ge \varepsilon_0$

- (iii) $\forall k \in \mathbb{N}$ $|x_{n_k} - x_n| \ge \varepsilon_0$ 인 (x_n)의 부분수열 (x_{n_k})와 $\varepsilon_0 > 0$ 가 존재.

(3) (x_n) 이 다음 중 하나를 만족하면 (x_n) 은 발산.

- (i) 극한이 같지 않은 수렴하는 부분수열 (x_{n_k}) 와 (x_{r_k}) ~~가 존재~~ 를 갖는다.

- (ii) (x_n) 이 not bdd

(4) 임의의 수열에 대하여 단조인 부분수열이 존재.

(5) (Bolzano - Weierstrass Thm) 유계인 실수열은 수렴하는 부분열을 가짐.

(6) (x_n) 이 유계인 실수열이고 (x_n) 의 모든 부분열 (x_{n_k})가 x 로 수렴하면

(x_n) conv to x.

* Cauchy Seq

(x_n) 은 실수열이라 하자.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t $n, m \ge N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$ 을 만족하면

(x_n) : Cauch seq.

(1) (x_n) : 수렴하는 실수열 $\Leftrightarrow$ Cauchy seq

(2) Cauchy seq of $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ bdd

(3) (Cauchy 의 수렴판정법) 수렴하는 수열 $\Leftrightarrow$ Cauchy seq.

* 축약 수열

(x_n) 을 실수열이라 하자. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, 0 < C < 1$ s.t

$|x_{\underset{n+2}{n+1}} - x_{\underset{n+1}{n}}| \le C\,|x_{\underset{n+1}{n}} - x_{\underset{n}{n-1}}|$ 을 만족하면 (x_n)은 축약적.

(1) 모든 축약 수열은 Cauchy seq 이고 따라서 수렴.

* 정발산 수열

(x_n) 을 실수열이라 하자.

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t $n \ge N \Rightarrow x_n > \alpha$ 을 만족할 때,

(x_n) 은 ∞ 로 접근한다 하고 $\lim x_n = \infty$

(ii) $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t $n \ge N \Rightarrow x_n < \beta$ 을 만족할 때,

(x_n) 은 $-\infty$ 로 접근한다 하고 $\lim x_n = -\infty$

(1) 단조인 실수열이 발산 $\Leftrightarrow$ 수열이 not bdd.

- (i) (x_n) : 유계 아닌 증가수열 $\Rightarrow$ $\lim x_n = +\infty$

- (ii) (x_n) : 유계 아닌 감소수열 $\Rightarrow$ $\lim x_n = -\infty$

(2) $(x_n), (y_n)$: 실수열, $\forall n \in \mathbb{N}$. $x_n \le y_n$ 이라 가정하자.

- (i) $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim y_n = +\infty$

- (ii) $\lim y_n = -\infty \Rightarrow \lim x_n = -\infty$.

(3) $(x_n), (y_n)$: 양의 실수열, 어떤 $L \in \mathbb{R}$ (>0) 에 대하여

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = L \text{ 이라 하자.}$$

Then $\lim x_n = \infty \Leftrightarrow \lim y_n = \infty$

$\Leftrightarrow$

if and only if.