

# Tarea Evaluativa del curso “Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”

Dayron García Pérez

2017



## Resumen:

En el presente trabajo se propone como objetivos el estudio de un sistema dinámico. Primeramente se muestra una formulación matemática del problema así como las hipótesis a considerar. Se realiza un modelo matemático del sistema por medio de las *ecuaciones de Euler-Lagrange*, y se resuelve utilizando un método numérico. El método numérico que se propone es de la familia de los métodos de Runge-Kutta de tres etapas. A partir de la solución del sistema planteado, se realiza un análisis de los resultados obtenidos y su interpretación física.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Formulación del problema</b>	<b>3</b>
2.1. Función Lagrangiana del sistema . . . . .	4
2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	5
2.3. Sistema de ecuaciones de primer orden . . . . .	5
<b>3. Descripciones cualitativas del espacio de fases y análisis de estabilidad de las posiciones de equilibrio</b>	<b>6</b>
3.1. Análisis de $\varphi$ . . . . .	6
3.2. Análisis de $x$ . . . . .	7
3.3. Análisis mixto de $\varphi$ y $x$ . . . . .	7
<b>4. Solución numérica del las ecuaciones del movimiento</b>	<b>7</b>
4.1. Definición de los métodos de Runge-Kutta . . . . .	9
4.2. Métodos explícitos de Runge-Kutta de 3 etapas . . . . .	11
4.3. Estabilidad de los métodos de Runge-Kutta . . . . .	12
4.4. Error en el método de Runge-Kutta . . . . .	13
<b>5. Propuesta de solución</b>	<b>15</b>
5.1. Interfaz . . . . .	15
<b>6. Resultados</b>	<b>16</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>18</b>

# 1. Introducción

Un sistema dinámico es un sistema físico cuyo estado evoluciona con el tiempo. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema. Al definir los límites del sistema se hace, en primer lugar, una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento, y luego se determina el espacio donde se llevará a cabo el estudio, omitiendo toda clase de aspectos irrelevantes.

En nuestro estudio de un sistema dinámico se realiza a través de la *Mecánica Lagrangiana*. La Mecánica de Lagrange o Lagrangiana es una reformulación de la mecánica newtoniana, más flexible y a menudo más útil para resolver problemas. Se basa en un principio de mínimo, pero se puede obtener de la mecánica newtoniana, ya que ambas son equivalentes. La mecánica lagrangiana es importante porque permite de manera natural ampliar la mecánica para incluir campos (por ejemplo, la electrodinámica, que incluye partículas cargadas junto con campos electromagnéticos).

En la mecánica Lagrangiana, un sistema dinámico se modela a partir de las llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange*, las cuales describen diversas relaciones entre las coordenadas como la posición, la velocidad y la aceleración que caracterizan el movimiento del sistema. Un sistema mecánico con  $s$  grados de libertad es descrito por un sistema de  $2s$  ecuaciones diferenciales de segundo orden como se muestra en [4].

Dicho sistema de ecuaciones diferenciales muchas veces es muy complicado resolverlo analíticamente por la complejidad de las expresiones del sistema. Por lo tanto se hace necesario introducir un algoritmo numérico que resuelva de forma consistente el modelo planteado. En el presente trabajo se pretende modelar un sistema en específico y resolverlo utilizando un método de Runge-Kutta de tres etapas, además llegaremos a conclusiones físicas de los resultados obtenidos.

## 2. Formulación del problema

En este trabajo se aborda el estudio del siguiente sistema dinámico: un péndulo simple de masa  $m_2$ , con una masa  $m_1$  en el punto de soporte, se desplaza sobre una línea horizontal contenida en el plano donde se mueve  $m_2$ . Una descripción gráfica del problema es la que aparece en la siguiente figura.

Las hipótesis a considerar son las siguientes:

- El sistema es *cerrado*. Se desprecia la resistencia del aire sobre el sistema.
- Se desprecia la fuerza de rozamiento en el eje horizontal.
- La cuerda que une el cuerpo de masa  $m_1$  con el de masa  $m_2$  es *rígida* y no se considera su masa.
- Se asume que la aceleración de la gravedad  $g = 9,8m/s^2$ .
- El cuerpo de masa  $m_1$  se mueve *solo* horizontalmente.

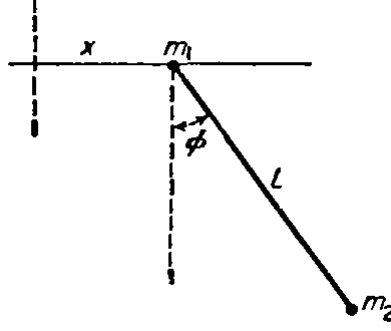


Figura 1: Modelo del sistema dinámico

## 2.1. Función Lagrangiana del sistema

En esta sección vamos a deducir la función Lagrangiana del sistema dinámico. Primeramente se consideran como coordenadas generalizadas del sistema las siguientes: el desplazamiento horizontal del cuerpo 1 lo denotamos por  $x$ , el ángulo que forma la varilla que une los cuerpos con el eje vertical lo denotamos por  $\varphi$ .

Para hallar las coordenadas del cuerpo 1, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & \dot{x}_1 &= \dot{x} \\ y_1 &= 0, & \dot{y}_1 &= 0 \end{aligned}$$

La energía cinética  $T_1$  y potencial  $U_1$  son:

$$\begin{aligned} U_1 &= c, \quad c \in \mathbb{R} \\ T_1 &= \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} \end{aligned}$$

Para hallar las coordenadas del cuerpo 2, tenemos que:

$$\sin \varphi = \frac{x'_2}{l} \Rightarrow x'_2 = l \sin \varphi \Rightarrow x_2 = l \sin \varphi + x, \quad \dot{x}_2 = l \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{x}$$

$$\cos \varphi = \frac{y'_2}{l} \Rightarrow y'_2 = l \cos \varphi \Rightarrow y_2 = l \cos \varphi, \quad \dot{y}_2 = -l \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$U_2 = -m_2 l g \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2 \|\dot{\vec{r}}\|^2}{2} = \frac{m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} \\ &= \frac{m_2 (\dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi)}{2} \\ &= \frac{m_2 (\dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2)}{2} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación Lagrangiana del sistema es la siguiente:

$$\begin{aligned}
L &= (T_1 - U_1) + (T_2 - U_2) \\
&= \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \left( \dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \right)}{2} + m_2 l g \cos \varphi - c \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \left( 2l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + 2l g \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \right) - c \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \left( 2l \cos \varphi (\dot{x} \dot{\varphi} + g) + l^2 \dot{\varphi}^2 \right)
\end{aligned}$$

Finalmente, si reducimos la expresión anterior tenemos que la función lagrangiana del sistema es la siguiente:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 d\varphi^2 + m_2 l \cos(\varphi) d\varphi \dot{x} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + m_2 g l \cos(\varphi) \quad (1)$$

## 2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son de la forma (ver [4]):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene que para este sistema dinámico el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + l \ddot{\varphi} &= - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - g \sin \varphi \\
\ddot{x} \cos \varphi + l \ddot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0
\end{aligned} \quad (3)$$

## 2.3. Sistema de ecuaciones de primer orden

A los efectos de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de segundo orden definido en (3), debemos transformarlo en un sistema de primer orden, para ello realicemos el siguiente cambio de variables:

Sean:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \dot{\varphi}. \quad (4)$$

Realizando este cambio de variables, el sistema de ecuaciones diferenciales se transforma al siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{m_2 (g \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \varphi_2^2 l \sin \varphi_1)}{m_1 + m_2 - m_2 \cos^2 \varphi_1} \\
\dot{\varphi}_1 &= \varphi_2 \\
\dot{\varphi}_2 &= \frac{m_2 l \varphi_2^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + (m_1 + m_2) g \sin \varphi_1}{l (m_2 \cos^2 \varphi_1 - m_1 - m_2)}
\end{aligned} \quad (5)$$

El objetivo del presente trabajo es utilizar un algoritmo numérico para resolver de forma consistente el sistema de ecuaciones diferenciales definido en (5). En la siguiente sección se muestra el procedimiento.

### 3. Descripciones cualitativas del espacio de fases y análisis de estabilidad de las posiciones de equilibrio

En esta sección se realizará un estudio cualitativo del espacio de fases del sistema de ecuaciones diferenciales (ecuaciones de Euler-Lagrange) que modela el sistema dinámico en cuestión. También se pretende realizar un análisis de estabilidad de las posiciones de equilibrio del sistema.

Para el análisis del espacio de fases del sistema de ecuaciones diferenciales, se tomarán como parámetros fijos del sistema los siguientes: las masas de los cuerpos 1 y 2 se toman iguales y con valor igual a 10 kilogramos; la longitud de la varilla que une a estos cuerpos es igual a 1 metro. Solamente analizaremos el sistema los primeros 5 segundos desde que se puso en marcha. Los parámetros que vamos a variar en el análisis de fases son las condiciones iniciales del sistema.

Antes de iniciar con el análisis del sistema dinámico en movimiento, cabe destacar el hecho de que para la condición inicial:

$$\begin{aligned}\varphi &= 0 \\ \dot{\varphi} &= 0 \\ x &= 0 \\ \dot{x} &= 0\end{aligned}$$

el sistema no experimenta ningún movimiento, luego es un punto donde las soluciones son constantes y por tanto estacionario.

#### 3.1. Análisis de $\varphi$

En adelante se considerará que el único parámetro que varía es el que está en análisis y los restantes se mantienen constantes e iguales a cero. Comenzaremos analizando la variación del parámetro  $\varphi$ . La siguiente figura muestra las diferentes curvas solución para cada uno de los valores de  $\varphi$ .

El análisis para valores negativos de  $\varphi$  es omitido por cuestiones de simetría del sistema físico. Como se aprecia en la Figura 2, para valores mayores que 180 grados el sistema no se comporta como un sistema de péndulo oscilante, por lo que podemos decir que la región de estabilidad para  $\varphi$  es

$$-180 < \varphi < 180 \tag{6}$$

Analicemos a continuación la variación del valor inicial de  $\dot{\varphi}$ . En la siguiente figura se muestra el comportamiento del sistema dinámico para diferentes valores de este parámetro

En la Figura 3 se puede apreciar que para valores de  $\dot{\varphi}$  entre 0 y 500, las curvas que describen la variación de  $\varphi$  que son solución del sistema, oscilan periódicamente; mientras que para valores superiores a 500 el comportamiento deja de ser periódico. En la siguiente figura se muestra el comportamiento de las soluciones para otros valores de  $\dot{\varphi}$

Como se muestran en las Figuras 3 y 4, podemos decir que el sistema tiene un comportamiento estable para los siguientes valores iniciales de  $\dot{\varphi}$ :

$$-507 \leq \dot{\varphi} \leq 507 \quad \text{aproximadamente.} \tag{7}$$

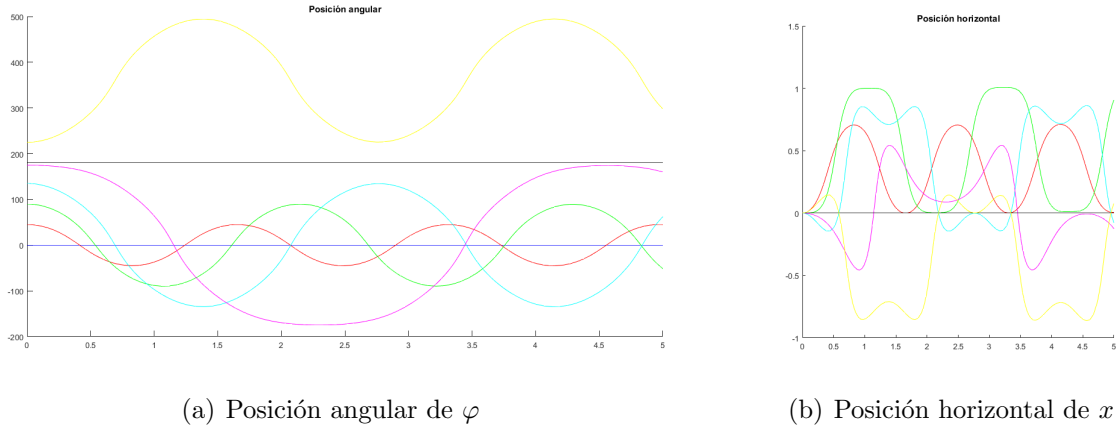


Figura 2: En las figuras se muestra el movimiento del sistema dinámico para los siguientes valores de  $\varphi$ . Para  $\varphi = 0$  en azul,  $\varphi = 45$  en rojo,  $\varphi = 90$  en verde,  $\varphi = 135$  en azul claro,  $\varphi = 175$  en margenta,  $\varphi = 180$  en negro y  $\varphi = 225$  en amarillo.

### 3.2. Análisis de $x$

A continuación analizaremos el análisis de las condiciones iniciales, pero esta vez, a partir de los valores de la coordenada generalizada  $x$  y su derivada  $\dot{x}$ .

Se realizaron varias corridas de un programa desarrollado en MATLAB para analizar el comportamiento del sistema dinámico y en todos los casos se evidenció que la variación de la posición, así como la velocidad inicial del sistema en el eje horizontal, no influyen en la variación de la coordenada  $\varphi$  que describe las oscilaciones del péndulo. No obstante, en el eje horizontal el sistema un movimiento rectilíneo uniforme como se muestra en la figura.

### 3.3. Análisis mixto de $\varphi$ y $x$

En el análisis de estabilidad de un sistema de ecuaciones debemos incluir ¿Qué ocurre con el sistema para valores iniciales simultáneos de sus coordenadas? En esta parte del análisis incluiremos varias gráficas del comportamiento del sistema en diferentes condiciones de inicio.

En la Figura 6 se muestra el comportamiento del sistema dinámico para las condiciones iniciales planteadas anteriormente. Veamos el comportamiento para otras condiciones.

Como se puede apreciar en las Figuras 6, 7, 8 y 9, la variación conjunta de las condiciones iniciales de distintas coordenadas generalizadas y sus derivadas influyen de manera única en el comportamiento del sistema dinámico. De esta forma para cada combinación de datos las condiciones dadas en (6) y (7) pueden sufrir variaciones.

## 4. Solución numérica del las ecuaciones del movimiento

En esta sección abordaremos algunas cuestiones teóricas relacionadas con los métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales. Específicamente se expondrán algunas cuestiones relacionadas con los métodos de Runge-Kutta. También se expondrán los pseudocódigos de los algoritmos que darán solución a los problemas planteados.

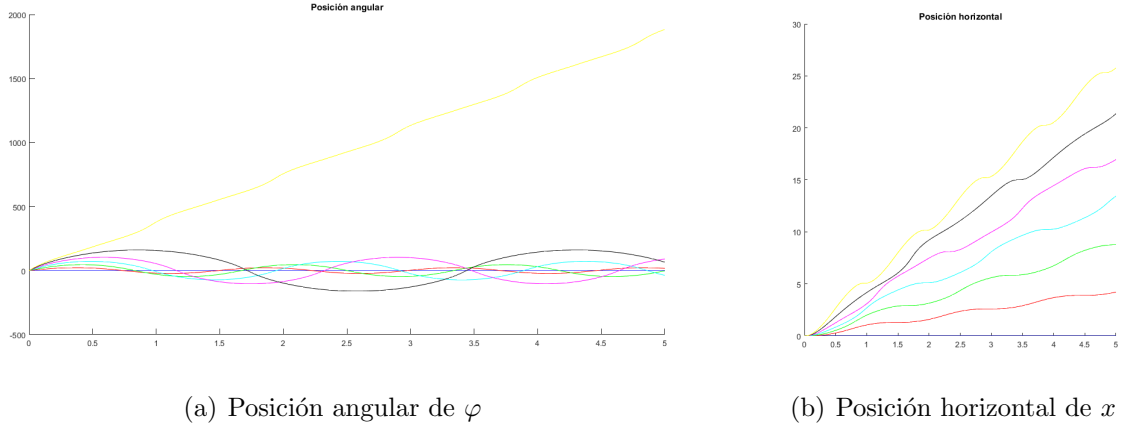


Figura 3: En las figuras se muestra el movimiento del sistema dinámico para los siguientes valores de  $\dot{\varphi}$ . Para  $\dot{\varphi} = 0$  en azul,  $\dot{\varphi} = 100$  en rojo,  $\dot{\varphi} = 200$  en verde,  $\dot{\varphi} = 300$  en azul claro,  $\dot{\varphi} = 400$  en margenta,  $\dot{\varphi} = 500$  en negro y  $\dot{\varphi} = 600$  en amarillo.

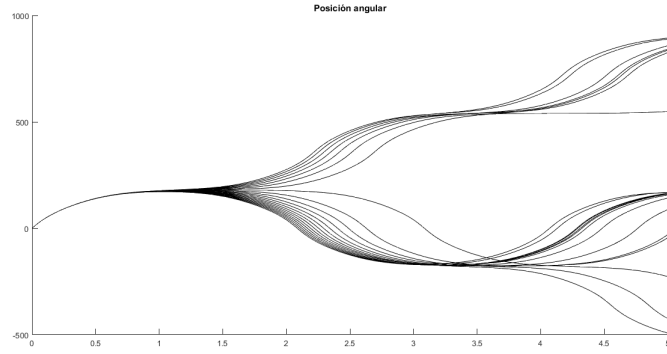


Figura 4: En la figura se muestra el comportamiento de  $\varphi$  para valores de  $\dot{\varphi}$  entre 507 y 508. Estos valores fueron determinados a partir de la experimentación numérica.

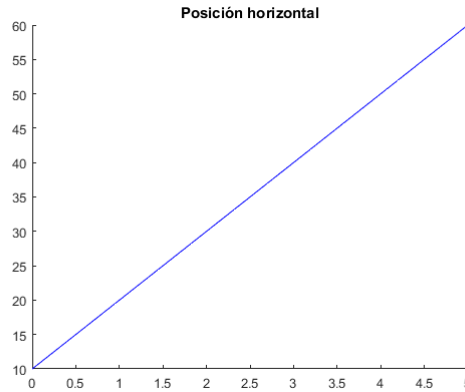


Figura 5: Desplazamiento del sistema mecánico en el eje horizontal.



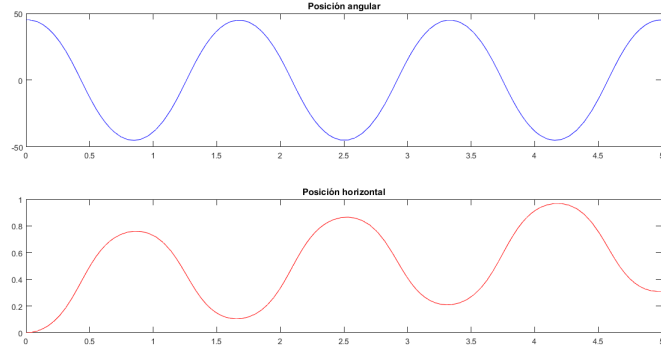


Figura 6: Condiciones iniciales:  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\varphi = 45$  y  $\dot{\varphi} = 10$

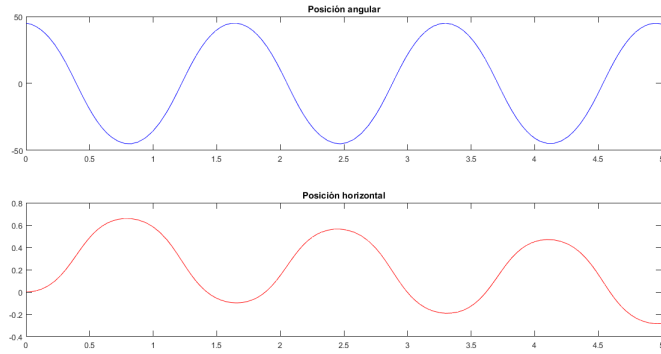


Figura 7: Condiciones iniciales:  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\varphi = 45$  y  $\dot{\varphi} = -10$

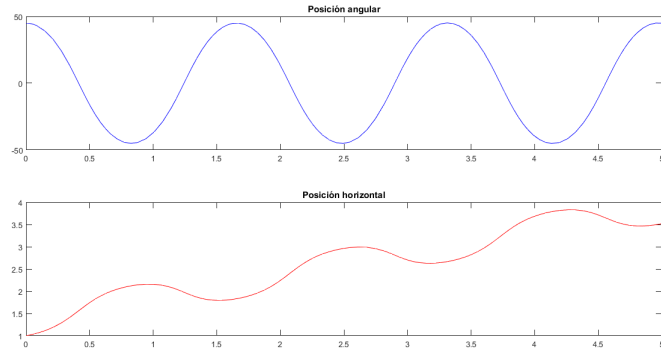


Figura 8: Condiciones iniciales:  $x = 1$ ,  $\dot{x} = 0,5$ ,  $\varphi = 45$  y  $\dot{\varphi} = 0$

#### 4.1. Definición de los métodos de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta no es sólo un único método, sino una importante familia de métodos iterativos, tanto implícitos como explícitos, para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O's); estas técnicas fueron desarrolladas alrededor de 1900 por los matemáticos alemanes Carl David Tolmé Runge y Martin Wilhelm Kutta.

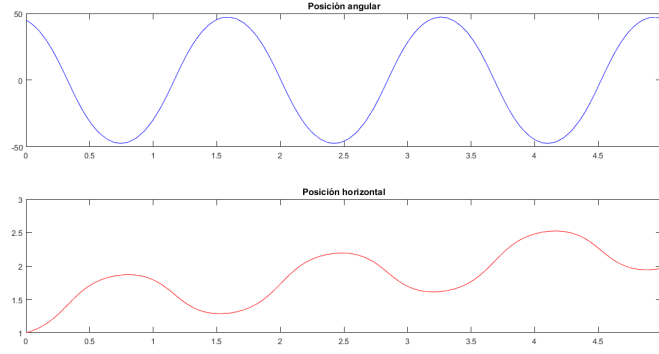


Figura 9: Condiciones iniciales:  $x = 1$ ,  $\dot{x} = 0,5$ ,  $\varphi = 45$  y  $\dot{\varphi} = -50$

A continuación se dará la definición general de método explícito de Runge-Kutta de  $s$  etapas, esta definición puede verse en [3] :

### Definición (Método de Runge-Kutta)

Sea  $s$  un número entero (número de etapas) y  $a_{ij}$ ,  $b_i$  con  $i > j$ ,  $i = 1, \dots, s$ ,  $c_r$ ,  $r = 2, \dots, s$  coeficientes reales. Entonces el método

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_0, y_0) \\
 k_2 &= f(x_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1) \\
 k_3 &= f(x_0 + c_3 h, y_0 + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(x_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})) \\
 y_1 &= y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j k_j,
 \end{aligned}$$

es un método explícito de Runge-Kutta de  $s$  etapas.

Debemos tener en cuenta las siguientes observaciones:

- Usualmente se satisface

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad i = 2, 3, \dots, s.$$

- Un método de Runge-Kutta se dice de orden  $p$  si para el problema de Cauchy se tiene que

$$\|y(x_0 + h) - y_1\| \leq K h^{p+1},$$

es decir, la serie de Taylor de la solución exacta  $y(x_0 + h)$  y la de  $y_1$  coinciden hasta el término  $h^p$ .

## 4.2. Métodos explícitos de Runge-Kutta de 3 etapas

En esta sección se introducirá de modo general la familia de métodos de Runge-Kutta explícitos de 3 etapas. Los métodos de tres etapas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{2,1} h k_1) \\k_3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + a_{3,1} h k_1 + a_{3,2} h k_2) \\y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3)\end{aligned}$$

De la definición anterior se muestra el siguiente tablero de Butcher (ver [2]):

$$\begin{array}{c|ccc}0 & & & \\c_2 & a_{21} & & \\c_3 & a_{31} & a_{32} & \\\hline & b_1 & b_2 & b_3\end{array}$$

Como se muestra en la definición del método, éste depende de los parámetros  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{31}$ ,  $a_{32}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$ . Siempre es posible alcanzar orden 2; bastaría tomar  $b_3 = 0$  y las relaciones de segundo orden para  $c_2$ ,  $a_{21}$ ,  $b_1$  y  $b_2$ .

$$\begin{aligned}b_1 + b_2 &= 1 \\b_2 c_2 &= 1/2 \\a_{21} &= c_2\end{aligned}$$

Para que el método alcance orden 3 es necesario que se cumplan las siguientes relaciones tomadas de [2]

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \quad (8)$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = 1/2 \quad (9)$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = 1/3 \quad (10)$$

$$b_3 a_{32} c_2 = 1/6 \quad (11)$$

y además se tiene que

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad i = 2, 3 \quad (12)$$

Con lo cual tenemos un total de 6 ecuaciones con 8 incógnitas y por lo tanto dos variables libres que determinan todos los métodos explícitos de Runge-Kutta de orden 3.

A continuación dos tableros de Butcher en RK31 y RK32 corresponden a métodos de tercer orden:

$$\text{RK31:} \quad \begin{array}{c|ccc}0 & & & \\\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\\frac{3}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\\hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}\end{array} \quad (13)$$

$$\text{RK32:} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad (14)$$

Los cuales son solución del sistema de ecuaciones que definen los métodos de tercer orden, dadas en (8)-(12).

En general el pseudocódigo de un método de Runge-Kutta dado por la definición puede verse en el siguiente algoritmo

---

**Algorithm 1** Runge-Kutta

---

**Require:**  $h$

**Ensure:**  $t \wedge y$

$y \leftarrow [y_0]$

$t \leftarrow [t_0]$

**while**  $t_0 < b$  **do**

    Calcular  $k_i$

$w = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j k_j$

$t \leftarrow [t \quad t_0 + h]$

$y \leftarrow [y \quad w]$

$t_0 = t_0 + h$

**end while**

---

### 4.3. Estabilidad de los métodos de Runge-Kutta

En esta sección analizaremos la región de estabilidad para los métodos de Runge-Kutta de tercer orden. Recordemos que se dice que un método numérico es absolutamente estable si para  $h$  fijo,  $y_n$  permanece acotada cuando  $x_n \rightarrow \infty$ . La región de estabilidad absoluta de un método numérico es el subconjunto del plano complejo (ver [2]):

$$\mathcal{A} = \{\hat{h} = h\lambda \in \mathbb{C} : |y_n| \rightarrow 0 \text{ cuando } x_n \rightarrow +\infty\}$$

Luego,  $\mathcal{A}$  es el conjunto de todos los valores de  $h\lambda$  para los cuales, las soluciones obtenidas a través del método numérico, tienden a cero cuando  $x_n$  tiende a infinito.

Consideremos el siguiente problema de Cauchy o de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & , x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (15)$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ , cuya solución viene dada por  $y(x) = e^{\lambda x}$ , la cual cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = 0 \quad \text{si} \quad \Re(\lambda) < 0.$$

Cuando se utiliza un método de Runge-Kutta de tercer orden en la solución del problema (15) obtenemos que

$$y_{n+1} = R(\hat{h})y_n$$

siendo la función de estabilidad  $R(\hat{h})$  un polinomio de tercer grado. La expresión de  $R(\hat{h})$  puede tomarse de [2] y es la siguiente:

$$R(\hat{h}) = 1 + \hat{h} + \frac{\hat{h}^2}{2} + \frac{\hat{h}^3}{6}$$

Analicemos ahora la región de estabilidad que viene dada por resolver la desigualdad  $|R(\hat{h})| < 1$ , esto es equivalente a resolver

$$|R(\hat{h})|^2 < 1 \quad (16)$$

La región de estabilidad para este método se muestra en la siguiente figura:

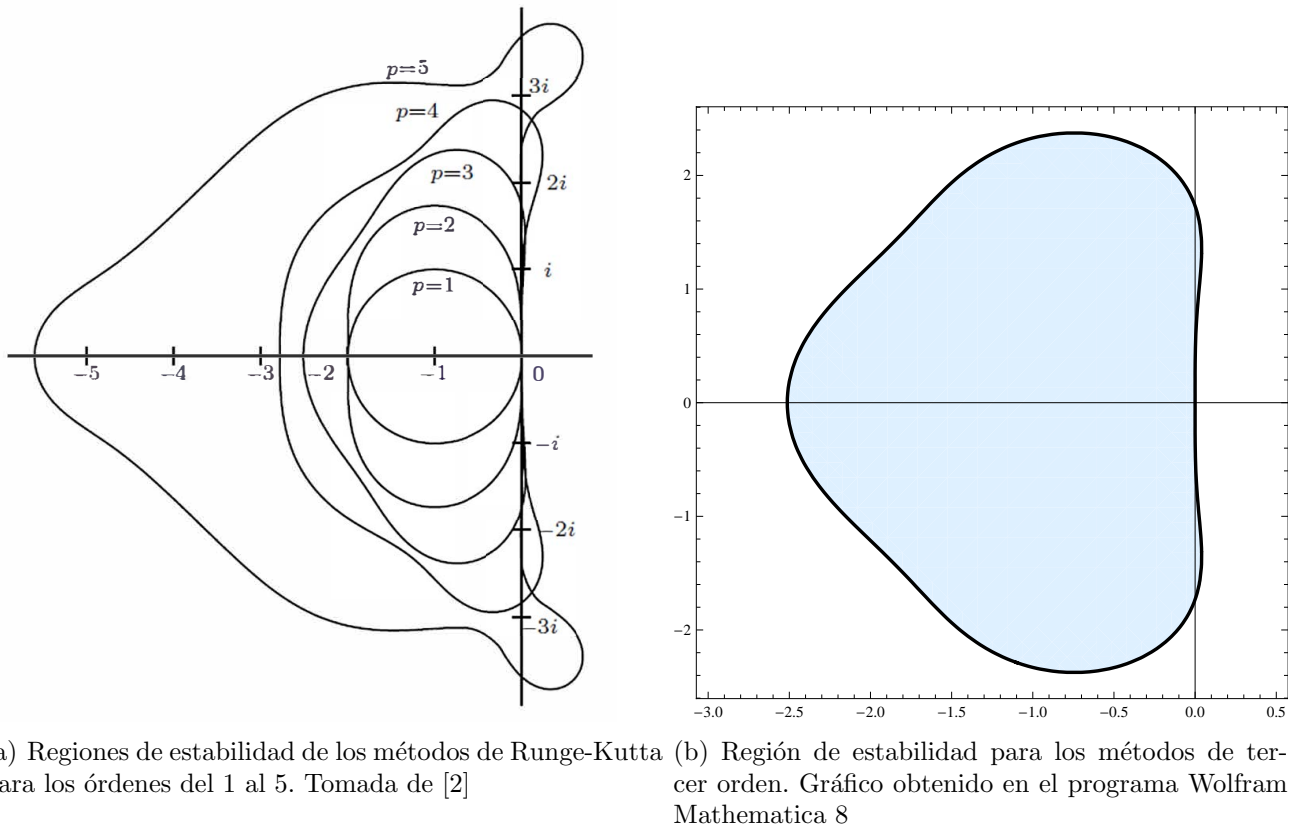


Figura 10: Regiones de estabilidad

#### 4.4. Error en el método de Runge-Kutta

Estimar el error para los métodos explícitos de Runge-Kutta puede convertirse en una tarea engorrosa y muy costosa desde el punto de vista computacional. En general para los métodos de paso simple que se usan para aproximar la solución del problema de Cauchy (15) se tienen dos tipos de error, el local y el global. El primero se refiere a estimar el error que se comete al aproximar  $y_{i+1}$  asumiendo que el valor de  $y_i$  es exacto, es decir,  $y_i = y(t_i)$ . Por otro lado el error global tiene en cuenta el error acumulado

y puede verse en **Burden** que la reducción de una potencia al pasar del error local al error global es típica de los métodos de paso simple.

Sabemos que los métodos de Runge-Kutta de orden 3 tienen error global de orden  $O(h^3)$ , donde  $h$  es el tamaño del paso. A continuación se verá una forma práctica que se utiliza usualmente en los métodos numéricos para estimar el error.

Supongamos que se tiene un método Runge-Kutta de orden  $p$ , entonces el error  $e_h$  que se comete en la aproximación de la solución real con paso  $h$  satisface

$$e_h = O(h^p) \approx kh^p.$$

Entonces

$$e_{2h} = k(2h)^p = 2^p kh^p = 2^p e_h,$$

pero por otra parte debe cumplirse que

$$y_h + e_h = y_{2h} + e_{2h} = y_{2h} + 2^p e_h,$$

de donde, despejando, se obtiene la fórmula del error por doble cómputo con un paso  $h$  a partir de la aproximación que se obtiene en el mismo punto usando un paso  $2h$

$$e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{2^p - 1}. \quad (17)$$

Para el caso de un método de Runge-Kutta de orden 3 se obtiene una aproximación del error cometido aproximando con el paso  $h$  usando el resultado que se obtiene con el paso  $2h$ ,

$$e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{7}.$$

Realizando un análisis similar pero con paso  $h/2$  se obtiene

$$e_{h/2} = k\left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p} e_h$$

Entonces

$$y_h + e_h = y_{h/2} + \frac{1}{2^p} e_h$$

de donde se obtiene que

$$e_h = \frac{2^p - 1}{2^p} (y_{h/2} - y_h). \quad (18)$$

La diferencia entre las fórmulas (17) y (18) es que la primera se estima el error que se comete usando un paso mayor y en la segunda se estima de igual forma el error pero usando un paso menor. En la práctica tiene más sentido usar (17) ya que dicha fórmula estima el error cometido por la mejor de las dos aproximaciones, de otra forma estaríamos desechando un resultado mejor que el que se está tomando.

## 5. Propuesta de solución

Todos los métodos que se usarán para darle solución al problema han sido implementados en **MatLab** y los respectivos archivos *.m* aparecen en el directorio \Programas. A continuación se dará una breve descripción del funcionamiento de cada uno de ellos.

- En los programas **RK31.m** y **RK32.m** se da solución al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando algoritmos de Runge-Kutta de tercer orden. En el programa **RK31** se implementa el método correspondiente al tablero de Butcher en (13), mientras que en **RK32** se implementa el tablero en (14). Ambos métodos reciben como parámetros los siguientes:
  - El sistema de ecuaciones a resolver en forma de *handle function* de MatLab.
  - El intervalo de tiempo en el que está definida la curva solución.
  - Las condiciones iniciales del problema.
  - El paso del método.

Estos métodos retornan dos vectores correspondientes a la partición del intervalo de tiempo y los valores que son solución de la ecuación diferencial.

Estos programas son utilizados por la GUIDE de de MatLab desarrollada para resolver el problema en cuestión. Para más información puede consultar la siguiente sección.

### 5.1. Interfaz

La interfaz gráfica desarrollada está dividida en varias secciones para su mayor comprensión. A continuación se mencionarán y se dará una breve explicación del papel que desempeñan en la solución del problema.

- **Condiciones iniciales:** Se especifican los diferentes parámetros que intervienen en la solución del problema.
- **Métodos de Runge-Kutta:** Se deja al usuario decidir sobre el empleo de un determinado método en la solución del problema.
- **Opciones del gráfico:** En este panel el usuario puede elegir acerca de las diferentes formas de mostrar la curva solución en el caso que se indica.
- **Botón Resolver:** Cuando se presiona este botón se resuelve el problema con las condiciones y el método específico.

En la siguiente figura se puede observar un ejemplo del uso de la interfaz para un determinado juego de datos.

Como se muestra en la Figura 11 si presionamos el botón *Simular* se muestra una animación con el comportamiento del sistema dinámico como se muestra en la siguiente figura.

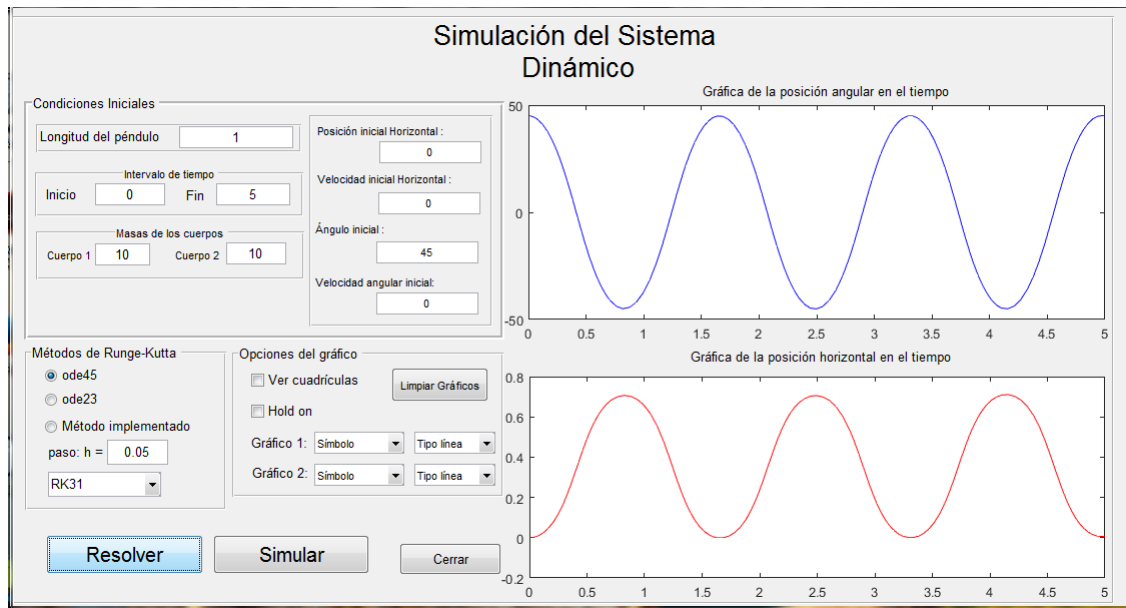


Figura 11: Interfaz gráfica de usuario

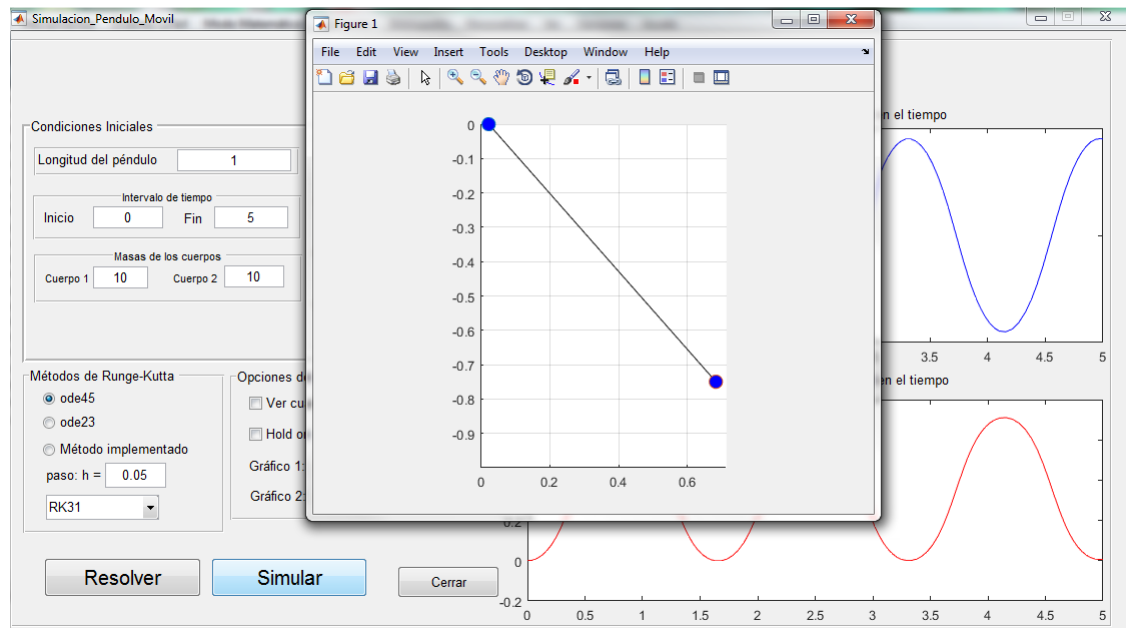


Figura 12: Animación del sistema dinámico

## 6. Resultados

En esta sección se tratará de llegar a conclusiones acerca de los métodos empleados en la solución del problema, además de comparar estos métodos con los programas internos de MatLab para la solución de ecuaciones diferenciales. Aunque en la interfaz se pueden variar los parámetros del problema en esta sección trabajaremos sobre los parámetros originales.

Se resuelve el problema en el intervalo de tiempo  $[0,5]$ , las masas de los cuerpos son 10kg respectiva-



mente, la longitud del péndulo es 1 metro, las condiciones iniciales son:  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\varphi = 45$  y  $\dot{\varphi} = 0$ . En las siguientes figuras se muestran soluciones del problema utilizando varios métodos.

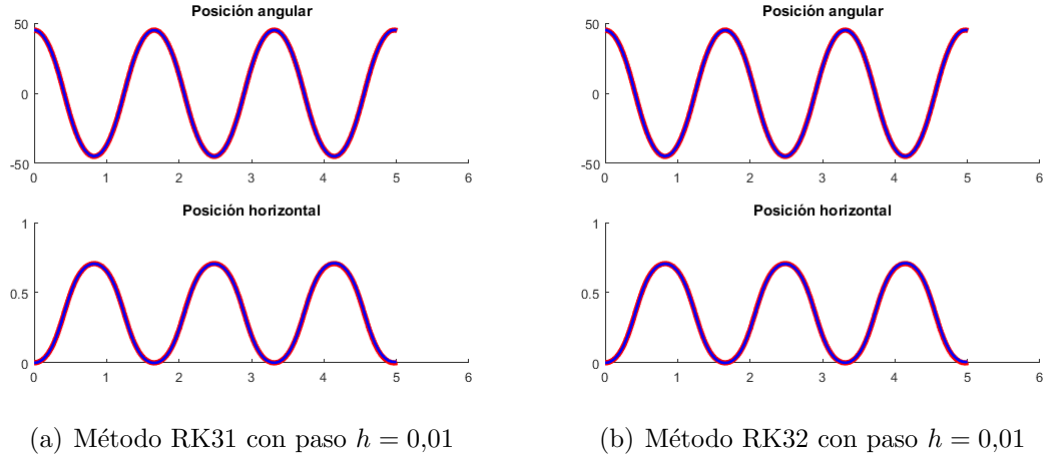


Figura 13: En las gráficas se muestra una comparación entre los métodos numéricos implementados (curva en rojo) y el método *ode45* (curva en azul) contenido en el paquete de ecuaciones diferenciales de MatLab.

Como se puede observar en la Figura 13, los resultados obtenidos por los distintos métodos son muy semejantes entre sí, esto se debe al tamaño del paso tomado para resolver el problema es bastante pequeño.

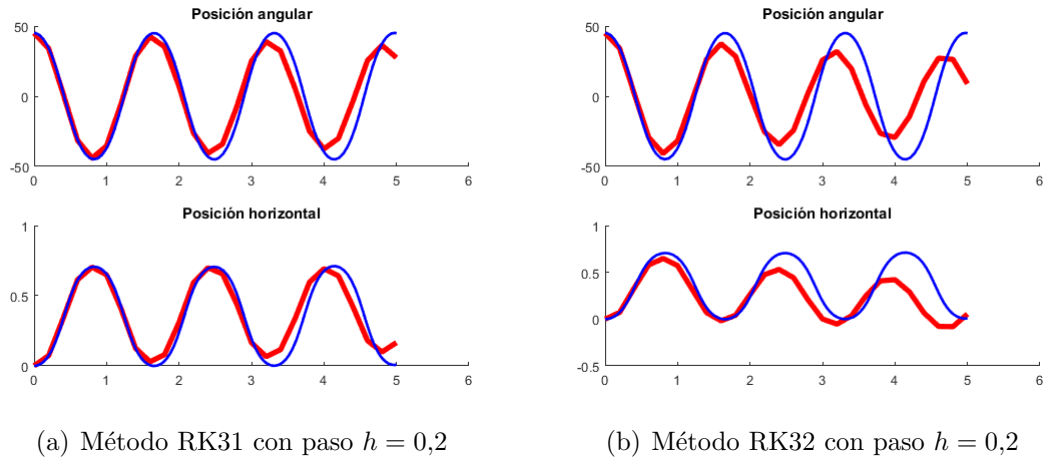


Figura 14: En las gráficas se muestra una comparación entre los métodos numéricos implementados (curva en rojo) y el método *ode45* (curva en azul) contenido en el paquete de ecuaciones diferenciales de MatLab.

En la Figura 14, se muestra que para valores del paso relativamente grandes, las soluciones que se obtienen difieren en modo general. Sin embargo, en la segunda gráfica se observa que en el método RK32 las soluciones las diferencias son aun mayores que en RK31.

Veamos que sucede cuando variamos las condiciones iniciales del problema. Ahora tenemos que el ángulo inicial es  $\varphi = 135$ , entonces el sistema se comporta según las gráficas que se muestran a continuación.

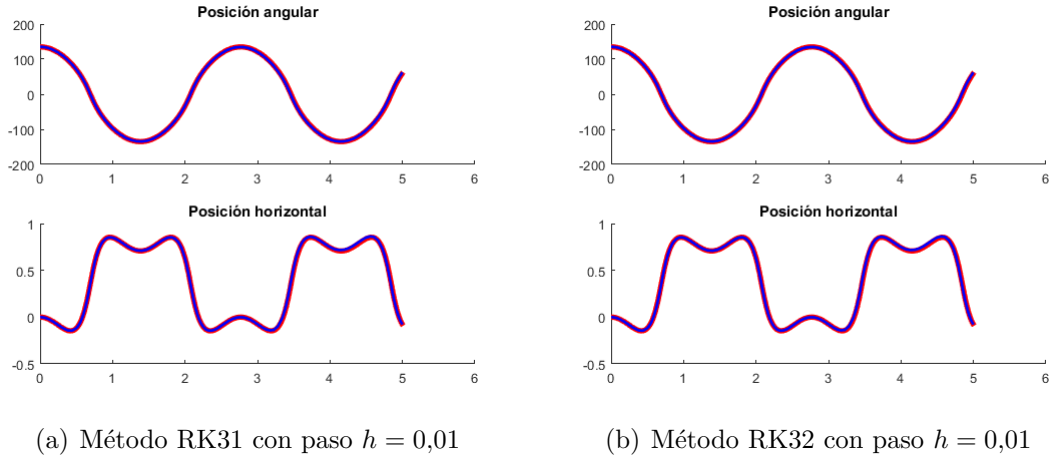


Figura 15: Gráficas para la posición angular inicial  $\varphi = 135$

Como se puede observar en la Figura 15, los resultados son bastante satisfactorios cuando tomamos este valor del paso. Veamos qué sucede cuando cambiamos el paso.

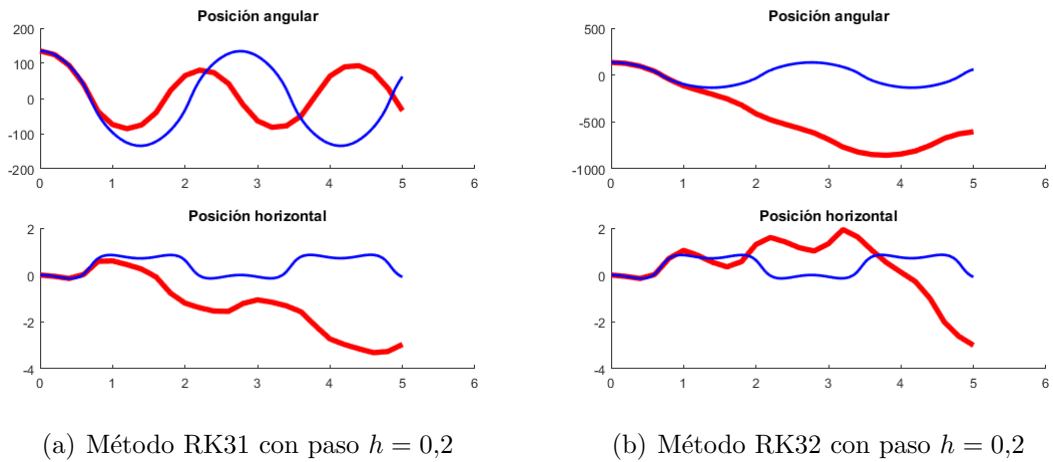


Figura 16: Gráficas para la posición angular inicial  $\varphi = 135$

Como se puede observar en la Figura 16, los resultados esta vez son muy malos en comparación con los de las restantes figuras.

## 7. Conclusiones

Como conclusiones de este trabajo puede mencionarse que se implementaron métodos en MatLab para resolver, en general, un tipo sistema de ecuaciones diferenciales con varios parámetros que deben ser fijados por el usuario. Se implementó una interfaz de uso fácil donde puede resolverse el problema por

diferentes métodos. Además se realizaron comparaciones entre los métodos propuestos de paso fijo (en particular los métodos de Runge-Kutta), así como entre estos métodos y los internos de MatLab . Se propone como trabajo futuro realizar un estudio más profundo de la eficiencia de los métodos abordados, así como estudiar e implementar nuevos algoritmos más eficientes y menos costosos computacionalmente para resolver este tipo de problemas.

## Referencias

- [1] Anthony Ralston *Introducción al análisis numérico*. 1984. Editorial Pueblo y Educación.
- [2] Butcher J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. 2008. John Wiley & Sons
- [3] Hairer, E.; Nørsett, S.; Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I*. 1993. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Landau, L.D., Lifshitz, E. M. *Curso Abreviado de Física Teórica. Mecánica y Electrónica*. Libro 1. 1979. Mir Moscú.
- [5] Quarteroni Alfio, Sacco Riccardo, Saleri Fausto. *Numerical Mathematics*. 2000. Springer-Verlag New York, Inc.
- [6] Young, W.; Cao, W.; Chung, T.; Morris, J. *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. 2005. John Wiley & Sons, Inc..