

第 1 章

Z 变换和离散傅里叶变换

1.1 Z 变换^[1-4]

Z 变换在离散时间信号与系统中的地位相当于拉普拉斯变换在连续时间信号与系统中的地位。在连续系统中我们主要用拉普拉斯变换来处理,而在离散系统中我们将用 Z 变换来处理。Z 变换可用于求解常系数差分方程,估算一个输入给定的线性时不变系统的响应以及设计线性滤波器。本节将简单介绍 Z 变换以及如何用 Z 变换来解决各种问题。

1.1.1 Z 变换的表示式

设有连续时间信号 $x(t)$, 它有拉普拉斯变换 $X(s)$, 所以有 $x(t) \leftrightarrow X(s)$ 。经离散化, 每隔一个采样周期 T_s 取一个样点, 按照拉普拉斯变换延迟定理, 有 $x(t-nT_s) \leftrightarrow e^{-snT_s} X(s)$ 。对离散时间序列 $x(k) = \{x(0), x(1), x(2), \dots\}$, 用拉普拉斯变换的延迟定理可表示为 $X_A(s) = x_A(0) + x_A(1)e^{-sT_s} + x_A(2)e^{-2sT_s} + \dots$, 其中 $x_A(n)$ 和 $X_A(s)$ 表示采样后的时间信号和对应的拉普拉斯变换。 $X_A(s)$ 可以重新写为

$$X_A(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_A(nT_s) e^{-nsT_s} \quad (1-1-1)$$

式中: $x_A(nT_s)$ 是模拟信号 $x(t)$ 在各个 nT_s 时刻的采样值。

拉普拉斯表示法的问题就是需要在每个延迟项后增加一个延迟算子 e^{-snT_s} 。对于周期性采样信号而言, 必须乘以无穷多个延迟表达式。这显然很麻烦, 所以很快演变出了一种简单的表示方法, 即

$$z = e^{sT_s} \quad \text{或} \quad z^{-1} = e^{-sT_s} \quad (1-1-2)$$

这样就得到 Z 变换的表示式

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (1-1-3)$$

其中有关系

$$X(z) \big|_{z=e^{sT_s}} = X(e^{sT_s}) = X_A(s) \quad (1-1-4)$$

这样就从连续系统的拉普拉斯变换转换成离散系统的 Z 变换, 所以 Z 变换就是离散系统的拉普拉斯变换。

式(1-1-3)是双边 Z 变换, 但对于因果关系的时间序列, 单边 Z 变换是用单边求和的形式来描述的, 即

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (1-1-5)$$

而对于有限时间序列, 如 $x(n)$ 序列长为 N , Z 变换的表达式用有限项求和的形式来描述, 即

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad (1-1-6)$$

S 平面与 Z 平面的映射关系如下:在 S 平面上一般用直角坐标系,复变量 s 表示为

$$s = \sigma + j\Omega$$

而在 Z 平面上往往用极坐标系,将复变量 z 表示为

$$z = re^{j\omega}$$

将以上两式代入式(1-1-2),得

$$re^{j\omega} = e^{(\sigma+j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \quad (1-1-7)$$

式中:把 T_s 简写为 T ,又等式两边的模值部分与相角部分分别相等,即

$$\left. \begin{aligned} r &= e^{\sigma T} \\ \omega &= \Omega T \end{aligned} \right\} \quad (1-1-8)$$

式(1-1-8)表明, z 的模值 r 与 s 的实部 σ 有关,而 z 的幅角 ω 与 s 的虚部 Ω 有关。

下面先来看 r 与 σ 的关系。 r 表示 z 的模值,或者说表示 z 变量到原点的距离;而 σ 表示 s 变量的实部。由式(1-1-8)可得二者的对应关系为

$$\left. \begin{aligned} \sigma = 0 &\rightarrow r = 1 \\ \sigma < 0 &\rightarrow r < 1 \\ \sigma > 0 &\rightarrow r > 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-9)$$

这说明 S 平面的虚轴(即 $\sigma=0$ 时)映射到 Z 平面上是半径为 1($r=1$)的圆,即单位圆;而 S 的左半平面($\sigma<0$)映射到 Z 平面上是单位圆内区域($r<1$);S 平面的右半平面($\sigma>0$)映射到 Z 平面上是单位圆外($r>1$)。这种映射关系如图 1-1-1 所示。

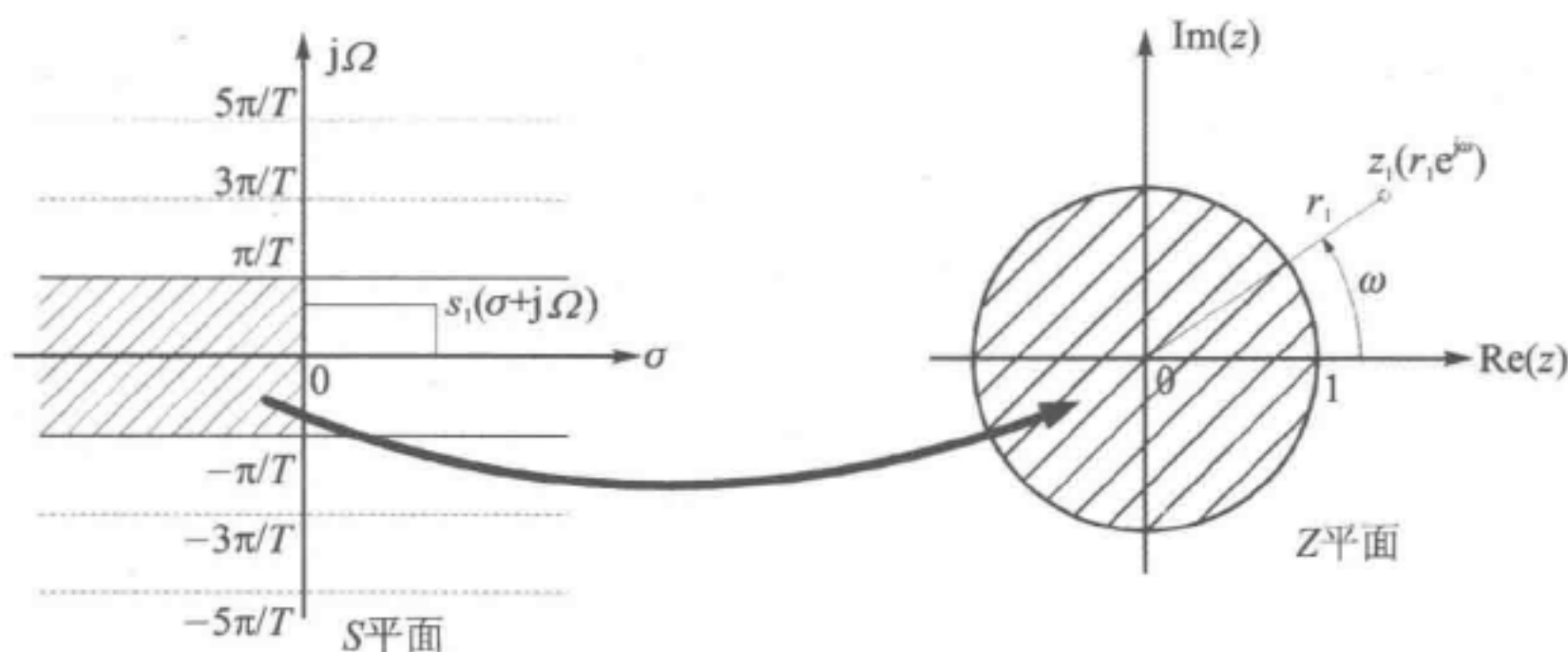


图 1-1-1 S 平面到 Z 平面的映射关系($z=re^{j\omega}$)

在图 1-1-1 中,在 S 平面上还特意标出了一个 s_1 点,在 S 平面的右半平面中;它映射到 Z 平面对应 z_1 点,在单位圆外,这显然是由于 s_1 的实部 $\sigma>0$ 的缘故。

再看由式(1-1-8)表示的 S 平面的虚变量 Ω 与 Z 平面的幅角 ω 的关系,显然 $\omega=\Omega T$ 是一种线性关系。当 $\Omega=0$ 时, $\omega=0$,这说明 S 平面的实轴映射到 Z 平面上是正实轴。结合式(1-1-9)的意义可以想到,S 平面上的原点 $s=0$ 正好映射到 Z 平面的 $z=1$ 处。

当 $\Omega \neq 0$ 时,这种映射关系变得稍复杂一些。当 Ω 由 $-\pi/T$ 增长到 π/T 时,即从 $-\Omega_s/2$ 增长到 $\Omega_s/2$ 时(因为抽样频率 $\Omega_s=2\pi/T$), ω 从 $-\pi$ 增长到 π ,对应 Z 平面上的幅角旋转了一周。也就是说,S 平面的虚轴仅从 $-\pi/T$ 到 π/T 的区段,就已经映射了整个 Z 平面,此时可结合 S 的实部关系一起考虑;如果 $\sigma<0$,则对应于 Z 平面单位圆内旋转了一周;如果 $\sigma>0$,则对

应于 Z 平面单位圆外旋转了一周;如果 $\sigma=0$,则对应于 Z 平面单位圆上旋转了一周。这个意义亦可由图 1-1-1 看出。当 S 的虚部 Ω 由 π/T 增长到 $3\pi/T$ (即 Ω 由 $\Omega_s/2$ 增长到 $3\Omega_s/2$) 时, ω 由 π 增长到 3π ,由于 $z=re^{j\omega}$ 是 ω 的周期函数,所以此时仍映射到 Z 平面上的同样位置,只不过在旋转一周的基础上再重复旋转一周而已,因而在 Z 平面上重叠一次。这种多值函数的映射关系可以想象成将 S 平面“裁成”一条条宽度为 Ω_s 的横带。这些横带中的每一条都同样地映射到整个 Z 平面上且相互重叠在一起。因此

$$H(z) \big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - jk \frac{2\pi}{T}\right) \quad (1-1-10)$$

在 MATLAB 的符号运算中有 Z 变换的函数 `ztrans`。

例 1-1-1 当 $|a|<1$ 时,将 $x(n)=a^n u(n)$ 进行 Z 变换,运行命令如下:

```
syms a n      % 声明符号变量
x = a^n;
X = ztrans(x);
X
```

得到的结果如下:

```
X = -z/(a - z)
```

该结果用公式表示为

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

这与表 1-1-1 中的 $a^n u(n)$ 项的 Z 变换式一样,详见 1.1.3 小节。

例 1-1-2 将正弦波 $x(n)=\sin(an)u(n)$ 进行 Z 变换,运行命令如下:

```
syms a n      % 声明符号变量
x = sin(a * n);
X = ztrans(x)
```

得到的结果如下:

```
X = (z * (sin a))/(z^2 - 2 * cos a * z + 1)
```

该结果用公式表示为

$$X(z) = (\sin a)z/(z^2 - 2z\cos a + 1)$$

这也与表 1-1-1 中的 $x(n)=\sin(an)u(n)$ 项的 Z 变换式一样,详见 1.1.3 小节。

1.1.2 Z变换的收敛域

一般来说,序列的 Z 变换 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 并不一定对任何 z 值都收敛,在 Z 平面上

满足级数收敛的区域就称为收敛域(Region of Convergence, ROC)。根据级数的知识,级数一致收敛的条件是绝对可积。也就是说,如果在 Z 平面上的某处(即某个 z 值点)级数一致收敛,则对此 z 值应该有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty \quad (1-1-11)$$

即其各项模值的和必须有界。由此可以想到, Z 平面上的收敛域总是环状的。式(1-1-11)可以表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \cdot |z^{-n}| < \infty \quad (1-1-12)$$

式(1-1-5)幂级数的收敛域由满足不等式(1-1-12)的全部 z 值所组成。因此, 若某个 z 值(如 $z=z_1$)是在 ROC 内, 那么全部由 $|z|=|z_1|$ 确定的圆上的 z 值也一定在 ROC 内。结果收敛域一定由在 Z 平面内以原点为中心的圆环所组成。收敛域的外边界是一个圆(或者可能向外延伸至无穷大), 而内边界也是一个圆(或者 ROC 向内可包括原点), 如图 1-1-2 所示。如果 ROC 包括单位圆, 自然就意味着 Z 变换对 $|z|=1$ 收敛, 或者说, 序列的傅里叶变换收敛。相反, 若 ROC 不包括单位圆, 则傅里叶变换就绝不收敛。

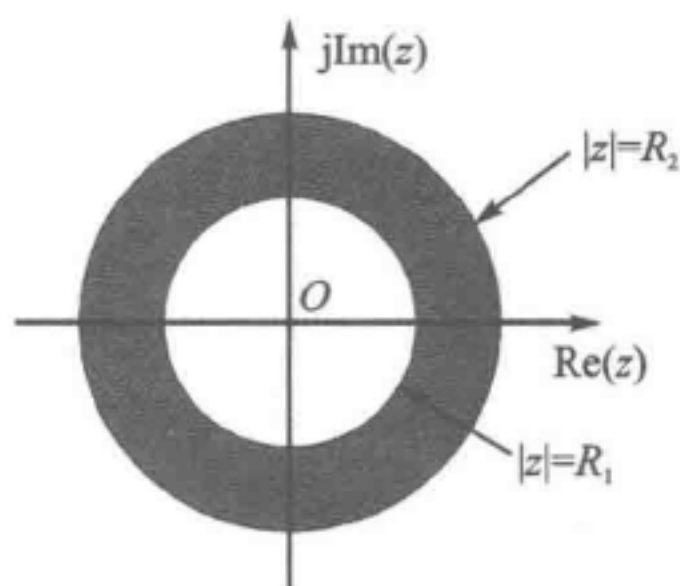


图 1-1-2 Z 变换的收敛域

一般来说, 级数在 Z 平面上的收敛域范围可以表示为

$$R_1 < |Z| < R_2 \quad (1-1-13)$$

这表明收敛域是一个以 R_1 和 R_2 为半径的两个圆所围成的环带区域(如图 1-1-2 所示), 其中 R_1 表示内圆半径, R_2 表示外圆半径。 R_1 、 R_2 也称为收敛半径。

1.1.3 基本 Z 变换对

通常, 简单信号的 Z 变换很少按前面介绍的方法进行计算, 而是通过查表和已知的 Z 变换特性(参考 1.1.5 小节)综合求得。表 1-1-1^[4]列出了部分基本函数(信号)的 Z 变换对以及相应的 ROC。

表 1-1-1 部分基本函数的 Z 变换对以及相应的 ROC

编号	序列	变换	ROC
1	$\delta(n)$	1	所有 z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
4	$\delta(n-m)$	z^{-m}	全部 z 除去 0(若 $m > 0$)或 ∞ (若 $m < 0$)
5	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
6	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
8	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $

续表 1-1-1

编 号	序 列	变 换	ROC
9	$[\cos(\omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-(\cos \omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z >1$
10	$[\sin(\omega_0 n)]u(n)$	$\frac{(\sin \omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z >1$
11	$[r^n \cos(\omega_0 n)]u(n)$	$\frac{1-(r\cos \omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z >r$
12	$[r^n \sin(\omega_0 n)]u(n)$	$\frac{(r\sin \omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z >r$
13	$\begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z >0$

1.1.4 线性系统的 Z 变换

在 Z 平面上对数字线性系统进行建模和分析时,常用的方法是用 δ 函数作为输入激励序列,通过系统输出(即脉冲响应)来分析线性系统。根据这些研究,可以推导出任意输入信号的线性系统响应。一般情况下,松弛型(初始条件为零)线性常系数系统或滤波器的输入-输出关系可由差分方程表示为

$$\sum_{m=0}^N a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \tag{1-1-14}$$

式中: $y(n)$ 为第 n 次的输出采样值; $x(n)$ 为第 n 次的输入采样值。

假设 $y(n)$ 的 Z 变换为 $Y(z)$, $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$,则依据延迟定理 $y(n-m) \leftrightarrow z^{-m}Y(z)$ 及 $x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}X(z)$,可得

$$\left(\sum_{m=0}^N a_m z^{-m}\right)Y(z) = \left(\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}\right)X(z) \tag{1-1-15}$$

$Y(z)$ 与 $X(z)$ 的比值为传递函数,记为 $H(z)$ 。对于式(1-1-14)描述的线性系统,其传递函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^N a_m z^{-m}} \tag{1-1-16}$$

式(1-1-15)和式(1-1-16)描述了输入信号 Z 变换和输出信号 Z 变换之间的转换关系,该转换关系涵盖了系统的大量信息。

1.1.5 Z 变换特性^[1-2]

一般认为,大部分的重要信号可由表 1-1-1 中的一个或多个初等函数表示,然而这些原始信号可能需要经过适当的调整、修改并组合。通过表 1-1-2 所列的 Z 变换特性可知如何通过初等信号的变换和组合来构建复杂信号。

若您对此书内容有任何疑问，可以凭在线交流卡登录 MATLAB 中文论坛与作者交流。

表 1-1-2 Z 变换的特性

编 号	特 性	时间序列	Z 变换
1	齐次性	$ax(n)$	$aX(z)$
2	可加性	$x_1(n) + x_2(n)$	$X_1(z) + X_2(z)$
3	线性	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
4	位移性	$x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$
5	复共轭性	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$
6	折叠性	$x(-n)$	$X(1/z)$
7	复数调制	$e^{j\theta n}x(n)$	$X(e^{-j\theta}z)$
8	乘复幂级数	$a^n x(n)$	$X(z/a)$
9	线性加权	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
10	卷积	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$
11	乘积	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{j2\pi} \oint X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$
12	帕塞瓦尔 (Parseval)定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$	

1.1.6 Z 逆变换^[2-3]

已知函数 $X(z)$ 及其收敛域, 反过来求序列的变换称为 Z 逆变换, 表示为

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] \quad (1-1-17)$$

Z 逆变换的一般公式为

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz, \quad c \in (R_{x1}, R_{x2}) \quad (1-1-18)$$

式中: c 是包围 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点的逆时针闭合积分路线, 通常选 Z 平面收敛域内以原点为中心的圆, 如图 1-1-3 所示。

以下由 Z 变换定义表达式导出逆变换式(1-1-18)。已知

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

将上式两端分别乘以 z^{m-1} , 然后沿围线 c 积分, 得到

$$\oint_c z^{m-1} X(z) dz = \oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right] z^{m-1} dz$$

积分与求和互换, 得

$$\oint_c z^{m-1} X(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \oint_c z^{m-n-1} dz \quad (1-1-19)$$

根据复变函数中的柯西定理, 已知

$$\oint_c z^{k-1} dz = \begin{cases} 2\pi j, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

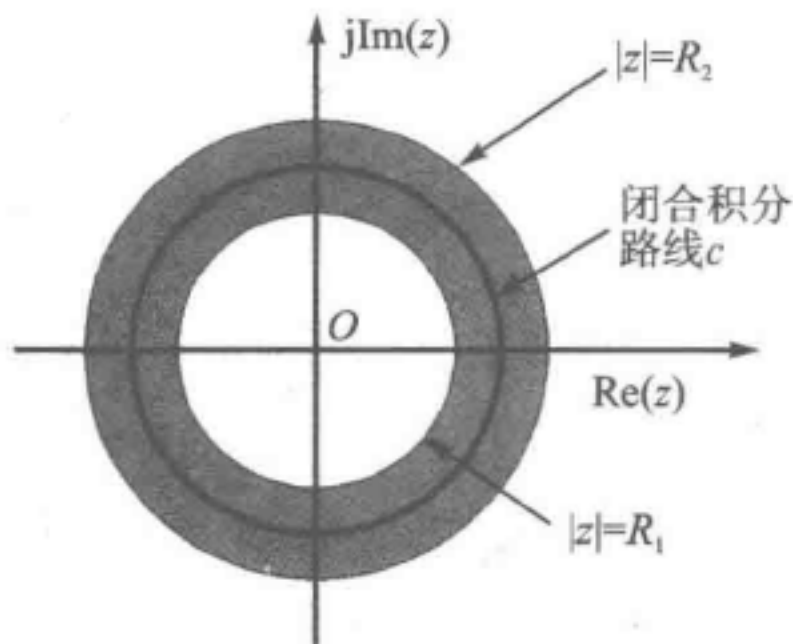


图 1-1-3 Z 逆变换积分围线的选择

这样,式(1-1-19)的右边只存在 $m=n$ 一项,其余均等于 0。于是式(1-1-19)变成

$$\oint_c X(z)z^{n-1}dz = 2\pi jx(n)$$

即

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1}dz \quad (1-1-20)$$

直接计算围线积分是比较麻烦的,实际上求 Z 逆变换时,往往不必直接计算围线积分。求 Z 逆变换的常用方法有三种:围线积分法(留数法)、部分分式展开法和幂级数展开法(长除法)。以下对这三种方法进行简单介绍。

1. 用留数定理求 Z 逆变换

如果 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内的极点用 z_k 表示,根据留数定理

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1}dz = \sum_k \text{Re } s[X(z)z^{n-1}, z_k] \quad (1-1-21)$$

式中: $\text{Re } s[X(z)z^{n-1}, z_k]$ 是被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 在极点 $z=z_k$ 处的留数,所以 Z 逆变换等于围线 c 内所有极点的留数之和。不同极点的留数求法如下:

如果 z_k 是单极点,则

$$\text{Re } s[X(z)z^{n-1}, z_k] = (z - z_k) \cdot X(z)z^{n-1} \Big|_{z_k}$$

如果 z_k 是 N 重极点,则

$$\text{Re } s[X(z)z^{n-1}, z_k] = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z - z_k)^N \cdot X(z)z^{n-1}] \Big|_{z_k}$$

MATLAB 中有求多项式有理分式的极点留数的函数 `residuez`,下面对该函数进行介绍。

2. 用部分分式法求 Z 逆变换

当 Z 变换式是一个多项式的有理分式时,可以用部分分式分解法,它利用 Z 变换表(表 1-1-1 或者其他类似的 Z 变换表)进行逆变换。数字信号处理中遇到的通常都是这种情况。

若 $X(z)$ 是 z^{-1} 的有理函数,可用部分分式分解的方法将其变成简单因式项(一阶)的和,由 Z 变换表可查出对应于这个因式项的序列,然后再叠加起来。

用部分分式法求 Z 逆变换过程如下:

设 $X(z)$ 为

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \quad (1-1-22)$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{\bar{b}_0 + \bar{b}_1 z^{-1} + \cdots + \bar{b}_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}}_{\text{真有理分式}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}}_{\text{若 } M \geq N, \text{ 则为直接多项式}} \quad (1-1-23)$$

式(1-1-22)等号右边第一项是真有理分式部分,第二项是直接多项式(无穷项)部分。

将真有理分式部分 $X_1(z)$ 进行部分分式展开,得

$$X_1(z) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (1-1-24)$$

式中: p_k 是 $X(z)$ 的第 k 个极点, R_k 是该极点 p_k 处的留数。假设它们都是单极点,则留数 R_k 由下式给出:

$$R_k = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} (1 - p_k z^{-1}) \Big|_{z=p_k} \quad (1-1-25)$$

若 p_k 是一个 r 重极点, 则其分解式如下:

$$\sum_{l=1}^r \frac{R_{k,l} \cdot z^{-(l-1)}}{(1-p_k z^{-1})^l} = \frac{R_{k,1}}{1-p_k z^{-1}} + \frac{R_{k,2} \cdot z^{-1}}{(1-p_k z^{-1})^2} + \cdots + \frac{R_{k,r} \cdot z^{-(r-1)}}{(1-p_k z^{-1})^r} \quad (1-1-26)$$

式中留数 $R_{k,l}$ 可使用通用公式计算, 因太繁琐这里从略。由于 Z 变换多项式已分解为多个分母为 z 的一次项而分子为常数的简单分式, 它们的 Z 逆变换可以从表 1-1-1 中查出, 其基本形式为

$$Z^{-1}\left(\frac{R_k}{1-p_k z^{-1}}\right) = p_k^n u(n)$$

因此, 可求出式(1-1-24)的 Z 逆变换 $x(n)$ 为

$$x(n) = \sum_{k=1}^N R_k p_k^n u(n) + \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} C_k \delta(n-k)}_{\text{若 } M \geq N} \quad (1-1-27)$$

由此可以看出, 实现部分分式法并不容易。首先, 求出分母多项式的根, 以便找到极点。其次, 要求出这些极点上的留数。从上例看到, 即使是对单极点的逆变换也是很繁琐的, 所以用计算机取代人工是十分必要的。

MATLAB 提供了极点留数计算的两个函数 `residue` 和 `residuez`。前者是对拉普拉斯算子 s 的, 适用于连续系统; 而后者是对 Z 变换算子的, 适用于离散系统。这里只介绍 `residuez`, 它是信号处理工具箱中的函数。其基本调用格式为

$$[r, p, C] = \text{residuez}(b, a)$$

其中: b 和 a 为按 z^{-1} 的升幂排列的多项式(1-1-22)的分子和分母的系数向量; p 为分母的根向量, 也就是 $X(z)$ 的极点向量; r 为对应于根向量中各个根的留数向量; C 为无穷项多项式系数向量, 仅在 $M \geq N$ 时存在。

知道了 r, p, C 向量, 就可把上述多项式分解为如下式(1-1-28)的形式, 所有的常数都成为已知数。

对

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r(1)}{1-p(1)z^{-1}} + \frac{r(2)}{1-p(2)z^{-1}} + \cdots + \frac{r(N)}{1-p(N)z^{-1}} + C(1) + C(2)z^{-1} + \cdots \quad (1-1-28)$$

作 Z 逆变换, 得出其时域信号的表达式为

$$y(n) = r(1)p(1)^n u(n) + \cdots + r(N)p(N)^n u(n) + C(1)\delta(n) + C(2)\delta(n-1) + \cdots \quad (1-1-29)$$

式中: $u(n)$ 是阶跃函数, 在 $n < 0$ 时为 0, 在 $n > 0$ 时为 1, 保证了 $y(n)$ 是右序列。

3. 幂级数法(长除法)求 Z 逆变换

已知由右序列得到的 Z 变换在 $z = \infty$ 的邻域解析。也就是说, 可以把有理分式

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

在 $z = \infty$ 的邻域展开为 z^{-1} 的幂级数。幂级数展开可以用多项式相除的方法实现。其方法是把分子、分母的系数都按 z^{-1} 的升幂排列, 然后用除法求商。

在 MATLAB 的符号运算中也有 Z 逆变换的函数 `iztrans`。当已知 $X(z)$ 时, 可以通过

iztrans函数求出 $x(n)$ 。

例 1-1-3 已知 $X(z) = z/(z-0.5)$, 把 $X(z)$ 进行 Z 逆变换, 运行命令如下:

```
syms z n;
X = z/(z-0.5);
x = iztrans(X,z,n);
```

得到的结果如下:

```
x = (1/2)^n
```

该结果用公式表示为

$$x(n) = (0.5)^n u(n)$$

这与表 1-1-1 中的 $z/(z-a)$ 项的 Z 逆变换一样。

例 1-1-4 已知 $X(z) = z^2/(z-1)^2$, 把 $X(z)$ 进行 Z 逆变换, 运行命令如下:

```
syms z n;
X = (z^2)/(z-1)^2;
x = iztrans(X,z,n);
```

得到的结果如下:

```
x = n + 1
```

该结果用公式表示为

$$x(n) = (1+n)u(n)$$

这时 $X(z) = z^2/(z-1)^2$ 对应的 $x(n)$ 是 $u(n)$ 和 $nu(n)$ 的组合。通过表 1-1-1 一样可以得到这样的结果。

当用函数 iztrans 处理高阶 $X(z)$ 的 Z 逆变换时, 有的时候很难解释 Z 逆变换符号运算的结果^[1]。

1.2 DFT 的由来^[5]

1. 连续时间非周期序列的傅里叶变换(FT)

设任意一个信号 $x(t)$ 为连续时间非周期信号, 它的傅里叶变换关系如式(1-2-1)所示。 $x(t)$ 是时间域的信号, $X(j\omega)$ 是频率域的谱值, 它们的关系实际上是傅里叶积分。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(j\omega) \\ X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \text{条件: } &\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \end{aligned} \right\} \quad (1-2-1)$$

式(1-2-1)中的关系反映了时间域的连续函数对应于频域的非周期性, 而时域的非周期性造成频域是连续的谱。

2. 连续时间周期序列的傅里叶级数(FS)

当 $x(t)$ 为连续时间周期性信号时(设周期为 T_0), 傅里叶变换可转换成傅里叶级数, 如下:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] \quad (1-2-2)$$

式中： f_0 是基频， $f_0 = 1/T_0$ 。三角函数正弦和余弦的幅值 a_n 和 b_n 由以下积分给出

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-2-3)$$

可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱，而时域的周期性造成频域的离散（非连续）频谱。

由三角函数的关系可导出

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - j b_n) e^{j 2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + j b_n) e^{-j 2\pi n f_0 t} \quad (1-2-4)$$

引入 n 有负值，由式(1-2-3)可得

$$\left. \begin{aligned} a_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(-2\pi n f_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(-2\pi n f_0 t) dt = -\frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = -b_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-2-5)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-j 2\pi n f_0 t} &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{j 2\pi n f_0 t} \\ \sum_{n=1}^{\infty} j b_n e^{-j 2\pi n f_0 t} &= - \sum_{n=-1}^{-\infty} j b_n e^{j 2\pi n f_0 t} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-6)$$

把式(1-2-6)代入式(1-2-4)，可得

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - j b_n) e^{j 2\pi n f_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} (a_n + j b_n) e^{-j 2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j 2\pi n f_0 t} \quad (1-2-7)$$

式(1-2-7)是傅里叶级数的指数形式，其中

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (a_n \pm j b_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-2-8)$$

把式(1-2-3)和式(1-2-5)代入式(1-2-8)，可得

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j 2\pi n f_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-2-9)$$

3. 离散时间非周期序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)

若信号 $x(n)$ 为离散时间非周期信号，则由式(1-2-1)可导出

$$\left. \begin{aligned} X(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ \text{条件: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| &< \infty \end{aligned} \right\} \quad (1-2-10)$$

由此可以看出时域的离散特性造成频域是周期性的谱,而时域的非周期性造成频域是连续的频谱。

4. 离散时间周期序列的离散时间傅里叶级数(DFS)

当信号 $\tilde{x}(n)$ 为离散时间又是周期信号时,设周期为 N ,则有关系 $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+rN)$ (r 为任意整数)。

由式(1-2-8)和式(1-2-10)可导出

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \\ \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-11)$$

式中: $W_N = e^{-j2\pi/N}$; $k, n = 0, 1, \dots, N-1$ 。

式(1-2-11)可证明 $\tilde{X}(k)$ 是一个周期序列,即有 $\tilde{X}(k) = \tilde{X}(k+mN)$,其中 m 是整数, $\tilde{X}(k)$ 的周期也是 N 。可以看出时域的离散特性造成频域是周期性的谱,而时域的周期性造成频域是离散的频谱。

5. 有限长度序列的离散时间序列的傅里叶变换(DFT)

一般的数据 $x(n)$ 都是有限长度序列的离散时间序列,但我们可以把它在时间轴上向左右双向无限周期性地拓展(如图1-2-1所示)。拓展后的 $x(n)$ 实际上已变成了 $\tilde{x}(n)$,所以它的傅里叶变换就是DFS, $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 中的一个周期, $x(n)$ 的DFT就是 $\tilde{x}(n)$ 在一个周期上的DFS。由此可得DFT为

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-12)$$

式中: W_N 称为旋转因子, $W_N = e^{-j2\pi/N}$; $k, n = 0, 1, \dots, N-1$ 。

式(1-2-12)包含以下内容:

- ① $x(n)$ 和 $X(k)$ 都是周期序列,周期为 N 。
- ② $x(n)$ 中的 n 实际为 nT ,即 nT 的样点值,其中 T 是采样周期。

③ $X(k)$ 中的 k 实际为 $k\Delta f$,即谱线对应的频率值,其中 Δf 是频谱的频率间隔,也称为频率的分辨率。

④ 由于 n 与 k 取值为 $0, 1, \dots, N-1$,所以频率刻度从0开始。

一般 $x(n)$ 是时域的, $X(k)$ 是频域的,因此得到了 $X(k)$,也就是我们常说的进行了频谱分析。

在上述转换中,物理量采样周期 T 、频率间隔 Δf 和采样频率 f_s 的关系为

$$T = \frac{1}{f_s}, \quad T_p = NT, \quad \Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p} \quad (1-2-13)$$

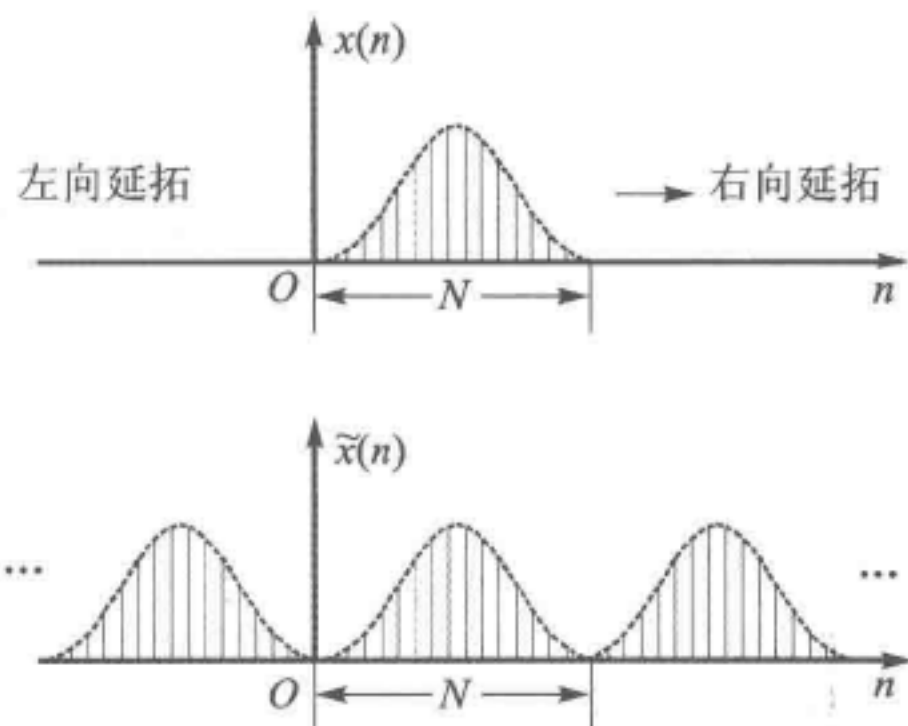


图1-2-1 $x(n)$ 拓展为 $\tilde{x}(n)$, 构成周期序列

式中: T_p 是信号 $x(n)$ 序列的长度。

6. DFT 与 DTFT 及 Z 变换的关系^[5-6]

若 $x(n)$ 为 N 点有限长序列, 则其 Z 变换、DTFT 及 DFT 分别为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (re^{j\omega})^{-n} \quad (1-2-14)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} \quad (1-2-15)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (1-2-16)$$

如图 1-2-2 所示, $X(z)$ 是 z 在 Z 平面上 $X(z)$ 收敛区间内取的值, 而 $X(e^{j\omega})$ 是仅在单位圆上取的值, $X(k)$ 是在单位圆上 N 个等间距的点上取的值。我们可以用 $X(k)$ 来表示 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1})^n$$

即

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \quad (1-2-17)$$

式(1-2-17)说明, N 点序列的 Z 变换可由其 N 点 DFT 系数来表示。令 $z=e^{j\omega}$, 则有

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} = \\ &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-W_N^k e^{-j\omega}} \end{aligned} \quad (1-2-18)$$

式(1-2-18)说明, 连续谱 $X(e^{j\omega})$ 也可以由其离散谱 $X(k)$ 经插值后得到。

下面给出 MATLAB 的 dft 、 idft ^[6] 和 dtft ^[7] 的函数:

```
function [Xk] = dft(xn,N);
% Computing Discrete Fourier Transform
n=[0:1:N-1];
k=[0:1:N-1];
WN=exp(-j*2*pi/N);
nk=n'*k;
WNnk=WN.^nk;
Xk=xn*WNnk;

function [xn] = idft(Xk,N);
% Computing Inverse Discrete Fourier Transform
n=[0:1:N-1];
k=[0:1:N-1];
WN=exp(-j*2*pi/N);
```

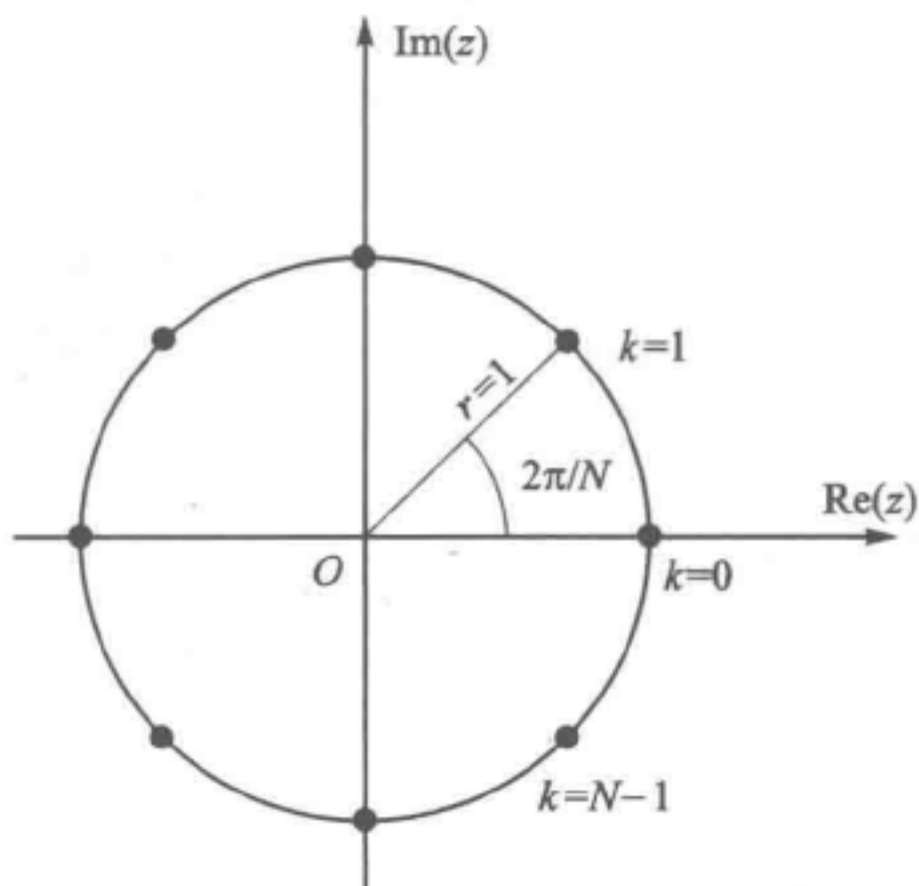


图 1-2-2 三个变换自变量的取值

```

nk = n' * k;
WNnk = WN.^(-nk);
xn = (Xk * WNnk)/N;

function [X,ph] = DTFT(x,W,n0)
% Computes the DTFT of a given sequence x[n] for digital frequency vector W,
% regarding the first sample as the n0 - th one.
x = x(:).';
Nt = length(x);
n = 0:Nt-1;
if nargin<3, n0 = -floor(Nt/2); end
X = x * exp(-1j * (n+n0)' * W);
if nargout == 2, ph = angle(X); X = abs(X); end

```

1.3 DFT 的性质^[4,8-9]

1. 线性性质

若 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 N 点序列, 其 DFT 分别是 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$, 则

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (1-3-1)$$

2. 正交性

矩阵为

$$W_N = [W^{nk}] = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (1-3-2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_N &= [X(0), X(1), \cdots, X(N-1)]^T \\ x_N &= [x(0), x(1), \cdots, x(n-1)]^T \end{aligned} \right\} \quad (1-3-3)$$

可以把 DFT 写为矩阵形式

$$X_N = W_N x_N \quad (1-3-4)$$

由于($*$ 表示取共轭, 以下相同)

$$W_N^* W_N = \sum_{k=0}^{N-1} W^{mk} W^{-nk} = \sum_{k=0}^{N-1} W^{(m-n)k} = \begin{cases} N, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (1-3-5)$$

故 W_N^* 和 W_N 是正交的, 即 W_N 是正交矩阵, DFT 是正交变换。进一步推导可得

$$W_N^* W_N = NI \quad \text{或} \quad W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^* \quad (1-3-6)$$

式中: I 是单位矩阵。这样 DFT 的逆变换又可表示为

$$x_N = W_N^{-1} X_N = \frac{1}{N} W_N^* X_N \quad (1-3-7)$$

3. 移位性(时间域位移和频率域位移)

将 N 点序列 $x(n)$ 位移 m 个样点, 时间域的移位性有

$$\text{DFT}[x(n+m)] = W_N^{-mk} X(k) \quad (1-3-8)$$

或

$$\text{DFT}[x(n-m)] = W_N^{mk} X(k) \quad (1-3-9)$$

而频率域的移位性有

$$\text{IDFT}[X(k+m)] = W_N^{mk} x(n) \quad (1-3-10)$$

或

$$\text{IDFT}[X(k-m)] = W_N^{-mk} x(n) \quad (1-3-11)$$

式中: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 。

4. 对称性

① 若 $x(n)$ 为复序列, 其 DFT 为 $X(k)$, 则

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(k) \quad (1-3-12)$$

② 若 $x(n)$ 为实序列, 则

$$\left. \begin{aligned} X^*(k) &= X(-k) = X(N-k) \\ X_R(k) &= X_R(-k) = X_R(N-k) \\ X_I(k) &= -X_I(-k) = -X_I(N-k) \\ |X(k)| &= |X(N-k)| \\ \arg[X(k)] &= -\arg[X(-k)] \end{aligned} \right\} \quad (1-3-13)$$

式中: $X_R(k)$ 表示 $X(k)$ 的实部, 而 $X_I(k)$ 表示 $X(k)$ 的虚部。这条性质十分重要, 因为我们平时处理的大部分信号数据都是实数序列。这条性质告诉我们, 实数序列经 FFT 后, 实部是偶对称的, 虚部是奇对称的。

③ 若 $x(n) = x(-n)$, 即 $x(n)$ 为偶序列, 则 $X(k)$ 是实偶序列

④ 若 $x(n) = -x(-n)$, 即 $x(n)$ 为奇序列, 则 $X(k)$ 是虚奇序列。

5. 离散时间卷积定理

若有限时间长度的时间序列 $x(n)$ 和 $h(n)$, 它们的 DFT 分别为 $X(k)$ 和 $H(k)$, 它们的卷积为

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \quad (1-3-14)$$

则 $y(n)$ 的 DFT 也就是 $Y(k)$ 为

$$Y(k) = H(k)X(k) \quad (1-3-15)$$

6. 离散时间相关定理

若有限时间长度的时间序列 $x(n)$ 和 $y(n)$, 它们的 DFT 分别为 $X(k)$ 和 $Y(k)$, 它们的相关函数为

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n+m) \quad (1-3-16)$$

则 $r(n)$ 的 DFT 也就是 $R(k)$ 为

$$R(k) = X^*(k)Y(k) \quad (1-3-17)$$

7. 帕塞瓦尔(Parseval)定理

若时间序列 $x(n)$, 其 DFT 为 $X(k)$, 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (1-3-18)$$

这里给出了不同变换形式的帕塞瓦尔定理,它们都反映了信号在一个域及其对应的变换域中的能量守恒原理。

参考文献

- [1] Tayloy Fred J. 数字滤波器原理及应用(借助 MATLAB)[M]. 程建华,袁书明,译. 北京:国防工业出版社,2013.
- [2] 赵春晖,陈立伟,马惠珠,等. 数字信号处理[M]. 北京:电子工业出版社,2013.
- [3] 陈怀琛. 数字信号处理教程——MATLAB 释义与实现[M]. 北京:电子工业出版社,2004.
- [4] 奥本海姆 A V,谢弗 R W. 离散时间信号处理[M]. 刘树棠,黄建国,译. 西安:西安交通大学出版社,2001.
- [5] 祁才君. 数字信号处理技术的算法分析与应用[M]. 北京:机械工业出版社,2005.
- [6] 恩格尔 维纳 K,普罗克斯 约翰 G. 数字信号处理使用——MATLAB[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2002.
- [7] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37604-matlab-simulink-for-digital-signal-processing>.
- [8] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现[M]. 北京:清华大学出版社,1997.
- [9] Brigham E O. Fast Fourier Transform[M]. Upper Saddle River:Prentice-Hall,1973.