

Lección 2: Probabilidad condicional e independencia

Módulo 2: Probabilidades y decisiones bajo incertidumbre

Magdalena Cornejo

Función de Probabilidad Conjunta

- Lancemos 2 dados y observemos el resultado obtenido.
- Existen 36 resultados equiprobables.
- El conjunto total de resultados posibles es:

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

- Definamos dos variables aleatorias distintas:
 - ▶ $X = 1, \dots, 6$ para indicar la puntuación obtenida con el primer dado,
 - ▶ $Y = 1, \dots, 6$ para indicar la obtenida en el segundo.

Función de Probabilidad Conjunta

Definición

Una **distribución conjunta de probabilidad** es aquella que permite obtener las probabilidades de que $X = x$ e $Y = y$; es decir, $p(X = x \text{ e } Y = y)$, expresión que puede abreviarse como $p(X, Y)$.

En nuestro ejemplo, la distribución conjunta de probabilidad se puede representar mediante la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3	4	5	6	$p(X)$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$p(Y)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Función de Probabilidad Conjunta

En el ejemplo de los dados X e Y son **independientes** ya que $p(x, y) = p(x).p(y)$. En cambio, podemos tener un caso de variables aleatorias **dependientes**.

Ejemplo

- X =cantidad de viviendas que vende la inmobiliaria A por mes.
- Y =cantidad de viviendas que vende la inmobiliaria B por mes.
- Su distribución conjunta está dada por la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3	$p(X)$
1	0.12	0.15	0.11	0.38
2	0.06	0.23	0.08	0.37
3	0.03	0.00	0.22	0.25
$p(Y)$	0.21	0.38	0.41	1

Demostrar que X e Y **no** son independientes.

Introducción a la probabilidad condicional

Ejemplo

- Se lleva a cabo una investigación de mercado sobre la calidad del servicio gastronómico que ofrecen 50 restaurantes en cierta ciudad.
- Para cada restaurante se registra si tiene más de 10 años de experiencia en el mercado o no y si el servicio gastronómico es de buena o mala calidad.

Experiencia / Calidad	Buena	Mala	Total
Más de 10 años	16	9	25
Hasta 10 años	10	15	25
Total	26	24	50

- Si elijo un restaurante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ofrezca un buen servicio gastronómico?

Introducción a la probabilidad condicional

Ejemplo

- Se lleva a cabo una investigación de mercado sobre la calidad del servicio gastronómico que ofrecen 50 restaurantes en cierta ciudad.
- Para cada restaurante se registra si tiene más de 10 años de experiencia en el mercado o no y si el servicio gastronómico es de buena o mala calidad.

Experiencia / Calidad	Buena	Mala	Total
Más de 10 años	16	9	25
Hasta 10 años	10	15	25
Total	26	24	50

- Si elijo un restaurante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ofrezca un buen servicio gastronómico?
- Y si entro a un restaurante que tiene más de 10 años en el mercado, ¿cuál es la probabilidad de que ofrezca un buen servicio gastronómico?

Definición de probabilidad condicional

Si A y B son dos eventos en Ω y $P(A) \neq 0$, la **probabilidad condicional** que se de B dado que ocurrió A es:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Regla de probabilidad total

La **regla de la probabilidad total** se utiliza para determinar la probabilidad incondicional de un evento, dadas las probabilidades condicionales:

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \dots + P(A/B_N)P(B_N)$$

donde B_1, B_2, \dots, B_N es un conjunto exhaustivo de eventos mutuamente excluyentes.

Regla de probabilidad total

Ejemplo

En su empresa compran toners a 3 proveedores: A, B y C. Al proveedor A le compran el 40% de los toners, al proveedor B el 25% y el resto al proveedor C.

De vez en cuando aparece algún toner defectuoso. Se sabe de experiencias pasadas que la probabilidad de que el proveedor A entregue un toner defectuoso es de 0,001, del proveedor B es de 0,005 y del proveedor C es de 0,003.

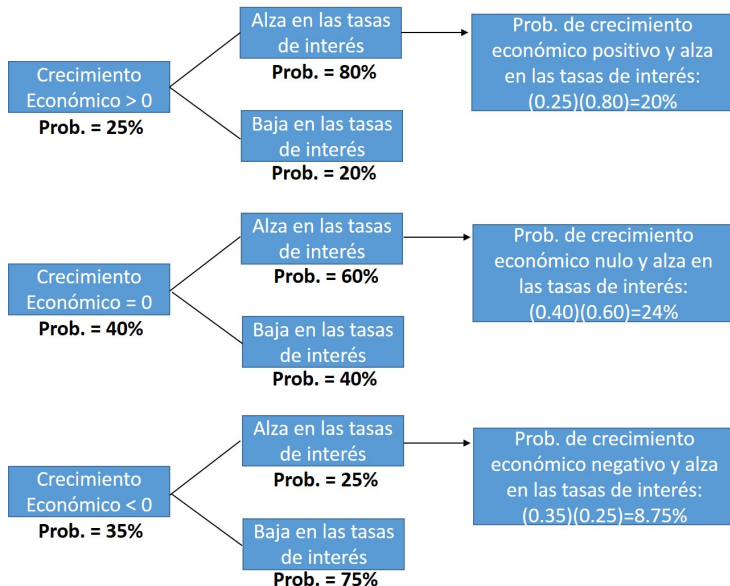
Si agarro un toner al azar ¿cuál es la probabilidad de esté defectuoso?

Regla de la multiplicación

La **probabilidad conjunta** de dos eventos es la probabilidad de que ambos ocurra en forma simultánea. Se puede calcular a partir de la probabilidad condicional. Este cálculo comúnmente se conoce como la **regla de la multiplicación de probabilidades**:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$$

Probabilidad incondicional, condicional y conjunta



Independencia

Entonces, si A y B son **independientes** se verifica que:

$$P(A/B) = P(A)$$

Y que:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Teorema de Bayes

Habíamos visto que, por definición de probabilidad condicional:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Siempre que $P(B) \neq 0$. Entonces también vale que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Si $P(A) \neq 0$. Entonces podemos re-escribir $P(A/B)$ como:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

conocida como la **regla de Bayes**.

Ejemplo

Su analista le dio un informe sobre Apple, donde asigna una probabilidad de 80% a que Apple anuncie la fecha de lanzamiento del iPhone 7 tras la próxima reunión de directorio. Si se hace el anuncio, la probabilidad de que la acción de Apple se incremente más de un 10% es de 0.9 y, en caso contrario, de solo 0.5.

- (a) Si Apple se incrementó más de un 10%, ¿cuál es la probabilidad de que se haya anunciado el lanzamiento del iPhone 7?
- (b) Si no sube más de un 10%, ¿cuál es la probabilidad de que Apple no haya hecho el anuncio?

Probabilidad y valor esperado

Para una variable aleatoria discreta, el **valor esperado** es el promedio ponderado de todos los posibles resultados de dicha variable, donde los pesos son las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados. Esto es:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

Reglas del valor esperado:

- Asigno probabilidades
- Computo el valor esperado de cada opción
- Elijo la que tiene mayor valor esperado

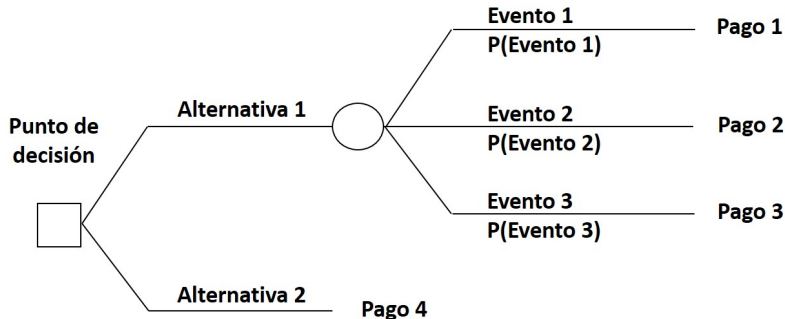
Aplicación Agronegocios

Sembré trigo, si no fertilizo obtendré 1500kg/ha si no llueve y 2500kg/ha si llueve, si fertilizo obtendré 700 kg/ha si no llueve, 3300 si llueve. De acuerdo al servicio meteorológico nacional la probabilidad que llueva es 0,3.

¿Fertilizo o no?

Árboles de Decisiones

- Técnica gráfica para representar un problema de toma de decisiones.
- Se resuelve usando inducción hacia atrás en base a reglas de probabilidad y el criterio del valor esperado.



Herramienta en Excel: Simple Decision Tree

Se puede utilizar el add-in: SimpleDecisionTree disponible para Excel para armar y resolver los árboles de decisión. Este complemento fue desarrollado por Thomas Seyller.

Para habilitar el add-in:

- Bajar la versión 1.4 del add-in de la siguiente página Web:
<https://sites.google.com/site/simpledecisiontree/>
- Guardar el add-in en el directorio de interés.
- Entrar al Excel e ir a Archivo/Opciones
- Click en Complementos y luego en Ir...
- Buscar el add-in en el directorio en el que se guardó
- Click en Aceptar
- En la pestaña de Complementos aparecerá el add-in.

Aplicación en Excel

El gerente de marketing de una compañía debe decidir el curso de acción a seguir en la promoción de un nuevo producto. Inicialmente, el gerente debe decidir si va a comercializar el nuevo producto directamente o si va a llevar a cabo primero una prueba piloto. Luego de decidir hacer la prueba piloto, debe decidir si lo abandona (no lanza el producto al mercado) o lo distribuye a nivel nacional.

Un éxito nacional en el lanzamiento del producto aumentará las ganancias por \$400.000 y un fracaso generará pérdidas por \$80.000. Abandonar el producto afectará a las ganancias. La prueba piloto tiene un costo de \$10.000.

Si no hace la prueba piloto, la probabilidad de éxito nacional se juzga que es del 40%. La probabilidad asumida por un resultado favorable en la prueba piloto es del 50%. La probabilidad condicional de éxito nacional dado que se dio un resultado favorable en la prueba piloto es del 75%, y si la prueba resultó desfavorable, la probabilidad de éxito nacional es tan solo del 10%.

¿Qué debe decidir la compañía?