Lección 3: Pruebas de hipótesis

Módulo 3: Inferencia Estadística

Magdalena Cornejo

Motivación

Una parte **muy útil** de la estadística son las pruebas de hipótesis.

Una hipótesis estadística es una afirmación respecto a alguna característica desconocida de una población (generalmente parámetros como la media o la proporción). **Ejemplos:**

Motivación

Una parte **muy útil** de la estadística son las pruebas de hipótesis.

Una hipótesis estadística es una afirmación respecto a alguna característica desconocida de una población (generalmente parámetros como la media o la proporción). **Ejemplos:**

- Un legislador afirma que el ingreso medio de la población es de al menos $8000 mensuales.

Motivación

Una parte **muy útil** de la estadística son las pruebas de hipótesis.

Una hipótesis estadística es una afirmación respecto a alguna característica desconocida de una población (generalmente parámetros como la media o la proporción). **Ejemplos:**

- Un legislador afirma que el ingreso medio de la población es de al menos $8000 mensuales.
- La proporción de ciudadanos dispuestos a seguir apoyando al gobierno de turno en las próximas elecciones es del 65%.

Motivación

Una parte **muy útil** de la estadística son las pruebas de hipótesis.

Una hipótesis estadística es una afirmación respecto a alguna característica desconocida de una población (generalmente parámetros como la media o la proporción). **Ejemplos:**

- Un legislador afirma que el ingreso medio de la población es de al menos $8000 mensuales.
- La proporción de ciudadanos dispuestos a seguir apoyando al gobierno de turno en las próximas elecciones es del 65%.

Buscamos evaluar estas hipótesis para decidir **si la afirmación se encuentra apoyada por la evidencia** que se obtiene a través de una muestra.

Motivación

Entonces, las pruebas de hipótesis se realizan respecto a los parámetros poblacionales. Utilizamos información muestral para evaluar si la evidencia empírica valida dichas hipótesis.

Veremos pruebas de hipótesis respecto de:

- Media poblacional (μ)
- Proporción poblacional (p)

Para ello, es necesario introducir primero algunos conceptos básicos...

Algunos conceptos básicos

- Hipótesis Nula: H_0
- Hipótesis Alternativa: H_1

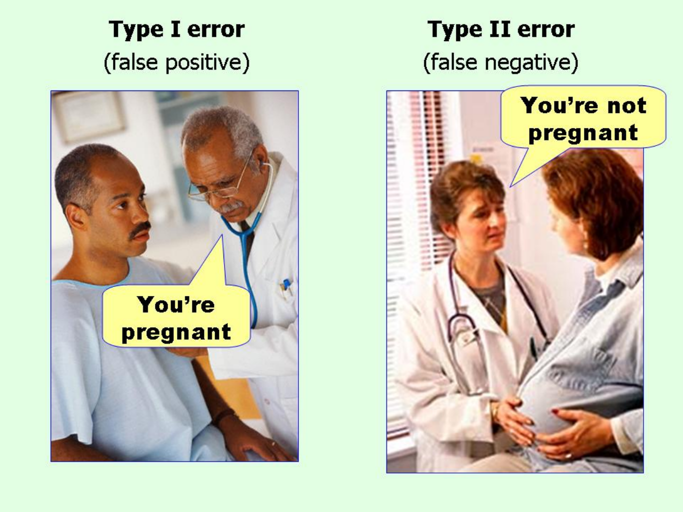
Posibles decisiones que pueden tomarse respecto a la hipótesis nula:

	Decisión respecto a la H_0	
	Rechazar	**No rechazar**
verdadera	α Error de Tipo I	decisión correcta $1 - \alpha$
falsa	decisión correcta *potencia* $= 1 - \beta$	β Error de Tipo II

- No pueden cometerse ambos errores a la misma vez.
- Generalmente se achica uno, pero se agranda el otro.
- Entonces se fija α en 1%, 5% y 10%.

Un poco de humor...

Aunque esto es ex-post ya que aquí realmente sabemos si la hipótesis nula (no estar embarazada) es verdadera o falsa.



Algunos conceptos básicos

Definición

Una **prueba de hipótesis** con respecto a una característica desconocida de cualquier población es una regla para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula.

- La decisión se basa en un **estadístico** que depende solo de información muestral.
- Para ciertos valores de este estadístico la decisión será rechazar la hipótesis nula.
- Estos valores se conocen como los **valores críticos** y determinan una **región crítica**.

Estructura de una prueba de hipótesis

(1) Formulación de la hipótesis a contrastar.

(2) Establecer el nivel de significación del test (α).

(3) Cálculo del estadístico de contraste.

(4) Regla de decisión.

(5) Conclusión

Regiones críticas

Si la hipótesis nula sobre el parámetro de interés θ (p. ej., μ o p) es:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

y si la hipótesis alternativa es de la forma,

$$H_1 : \theta > \theta_0 \qquad o \qquad H_1 : \theta < \theta_0$$

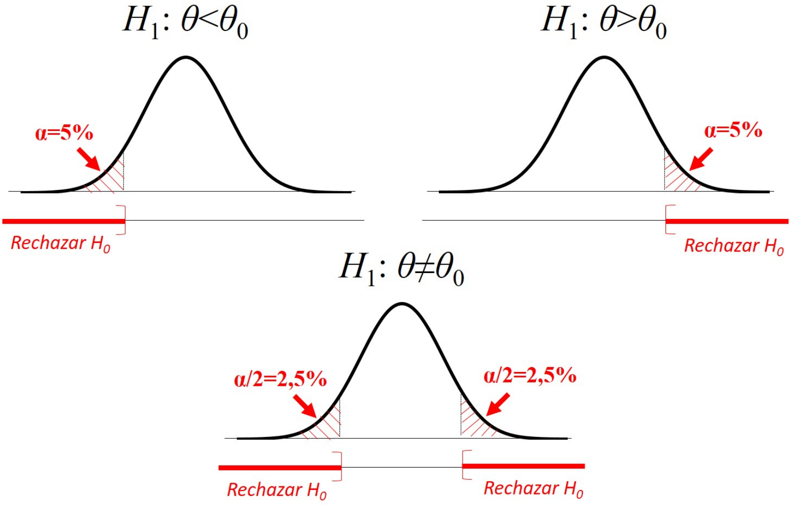
se dice que es una **hipótesis alternativa unilateral**. La región crítica también recibe el nombre de región de rechazo unilateral.
De otro modo, debe establecerse una **hipótesis alternativa bilateral:**

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Una hipótesis alternativa bilateral implica la existencia de una región crítica bilateral (la cual es simétrica: las dos partes de la región se seleccionan de tal forma que el área bajo la curva de cada una de las regiones sea igual).

Regiones críticas

Si $\alpha = 0.05$, las regiones de rechazo en cada caso estarán dadas por:



Prueba de Hipótesis para la Media (μ)

Al igual que en la construcción de intervalos de confianza, hay dos casos posibles:

Caso 1: con varianza poblacional **conocida**. El estadístico de contraste a utilizar será:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Caso 2: con varianza poblacional **desconocida**. El estadístico de

contraste a utilizar será:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Prueba de Hipótesis para la Media (μ)

¿Cómo determinamos si se puede rechazar o no la hipótesis nula?

Hay dos forma alternativas:

1. Calcular el valor del estadístico de contraste (Z o T) y compararlo contra el valor crítico (de tabla de la normal estándar o de la t de Student).

2. Calcular el p-valor y comprarlo contra el α (1%, 5% o 10%).

Prueba de Hipótesis para la Media - Caso 1 (Z)

Ejemplo

Se sabe que, históricamente, los precios de una determinada canasta de productos se distribuyen normalmente con media \$1780 y un desvío estándar de \$110. Este año, una muestra de 40 observaciones proporcionó un precio promedio de \$1900. Con un nivel de significación del 5%, ¿se puede afirmar que el precio medio de estos productos es menor o igual que el precio medio histórico? (Asuma que $\sigma = 110$).

Prueba de Hipótesis para la Media - Caso 1 (Z)

Ejemplo

Se sabe que, históricamente, los precios de una determinada canasta de productos se distribuyen normalmente con media \$1780 y un desvío estándar de \$110. Este año, una muestra de 40 observaciones proporcionó un precio promedio de \$1900. Con un nivel de significación del 5%, ¿se puede afirmar que el precio medio de estos productos es menor o igual que el precio medio histórico? (Asuma que $\sigma = 110$).

$$H_0 : \mu \leq 1780$$
$$H_1 : \mu > 1780 \text{ (inflación)}$$

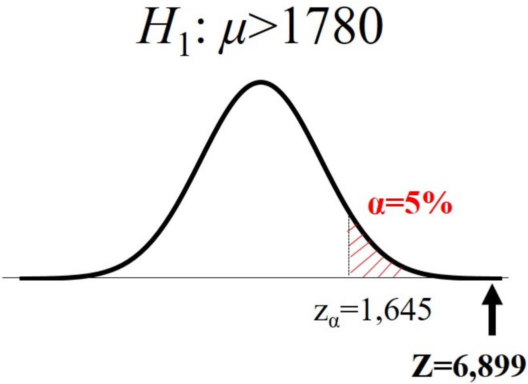
$$Z = \frac{1900 - 1780}{110/\sqrt{40}} = 6.899$$

$z_\alpha = 1.645$.

Entonces, con un nivel de confianza del 95% se rechaza la hipótesis nula, es decir, el precio medio de los productos sería mayor que el precio medio histórico.

Prueba de Hipótesis para la Media

- En el ejemplo de recién comparamos el valor del estadístico contra el valor crítico (de la tabla de la normal estándar) para rechazar H_0.



- Alternativamente, se puede usar el criterio del p-valor (¡muy útil cuando trabajamos con softwares!)

El p-valor

Definición

El **p-valor** es el nivel de significatividad más pequeño a partir del cual la hipótesis nula puede ser rechazada. En otras palabras, es la zona crítica que correspondería al valor del estadístico.

Supongamos otro ejemplo con las siguientes hipótesis:

H_0: $\mu \leq \mu_0$
H_1: $\mu > \mu_0$

El estadístico es: $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.52$

En la tabla de la distribución normal, podemos encontrar que si Z_α fuese 1.52, entonces $\alpha = 0.0643$. Este es entonces el **p-valor** del test, que implica que la H_0 se puede rechazar para cualquier α mayor a 6,43%.

Regla de rechazo: si p-valor$< \alpha \Rightarrow$ rechazo H_0.

Prueba de Hipótesis para la Media - Caso 2 (T)

Aplicación en Excel:

- Vuelva a trabajar sobre la base de datos de Excel que utilizó en el Módulo 1 en la cual calculó el retorno diario de IBM entre el 4 de enero de 2016 y 22 de julio de 2016.
- Utilice nuevamente el complemento de Excel "Herramientas para análisis", pero esta vez se le pide que evalúe la validez empírica de la siguiente hipótesis:

"El retorno medio diaria de IBM es de al menos 1%."

Prueba de Hipótesis para la Media - Caso 2 (T)

Aplicación en Excel:

- Vuelva a trabajar sobre la base de datos de Excel que utilizó en el Módulo 1 en la cual calculó el retorno diario de IBM entre el 4 de enero de 2016 y 22 de julio de 2016.
- Utilice nuevamente el complemento de Excel "Herramientas para análisis", pero esta vez se le pide que evalúe la validez empírica de la siguiente hipótesis:

  "El retorno medio diaria de IBM es de al menos 1%."

- En este caso, la hipótesis a contrastar es:

$$H_0 : \mu \geq 1\%$$
$$H_1 : \mu < 1\%$$

Prueba de Hipótesis para la Proporción (p)

Si estamos interesados en formular una prueba de hipótesis respecto de la proporción poblacional (p):

$$H_0\colon\ p = p_0$$
$$H_1\colon\ p \neq p_0$$

El estadístico de contraste que usamos es:

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{\widehat{P}\left(1-\widehat{P}\right)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Procederemos en forma análoga al caso de la media para decidir si hay evidencia suficiente para rechazar o no la hipótesis nula.

Prueba de Hipótesis para la Proporción (p)

Ejemplo

En una encuesta realizada sobre 871 adultos, el 53% de los entrevistados estuvieron a favor de un apoyo decidido al gobierno. Con una confianza del 95%, ¿se podría asegurar que la mayoría de los adultos de dicha ciudad está no está a favor de un apoyo decidido del gobierno?

Prueba de Hipótesis para la Proporción (p)

Ejemplo

En una encuesta realizada sobre 871 adultos, el 53% de los entrevistados estuvieron a favor de un apoyo decidido al gobierno. Con una confianza del 95%, ¿se podría asegurar que la mayoría de los adultos de dicha ciudad está no está a favor de un apoyo decidido del gobierno?

$H_0 : p \leq 0.5$
$H_1 : p > 0.5$ (apoyo decidido al gobierno)

$$Z = \frac{0.53 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.53 \times 0.47}{871}}} = 1.77$$

$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

Entonces, con un nivel de confianza del 95% se rechaza la hipótesis nula. Es decir, hay evidencia estadística a favor de un apoyo decidido del gobierno.