Die Physik des Roboters

von Prof. Dr.-Ing. Detlef Brumbi, Deggendorf

1. Drehmoment der Motoren

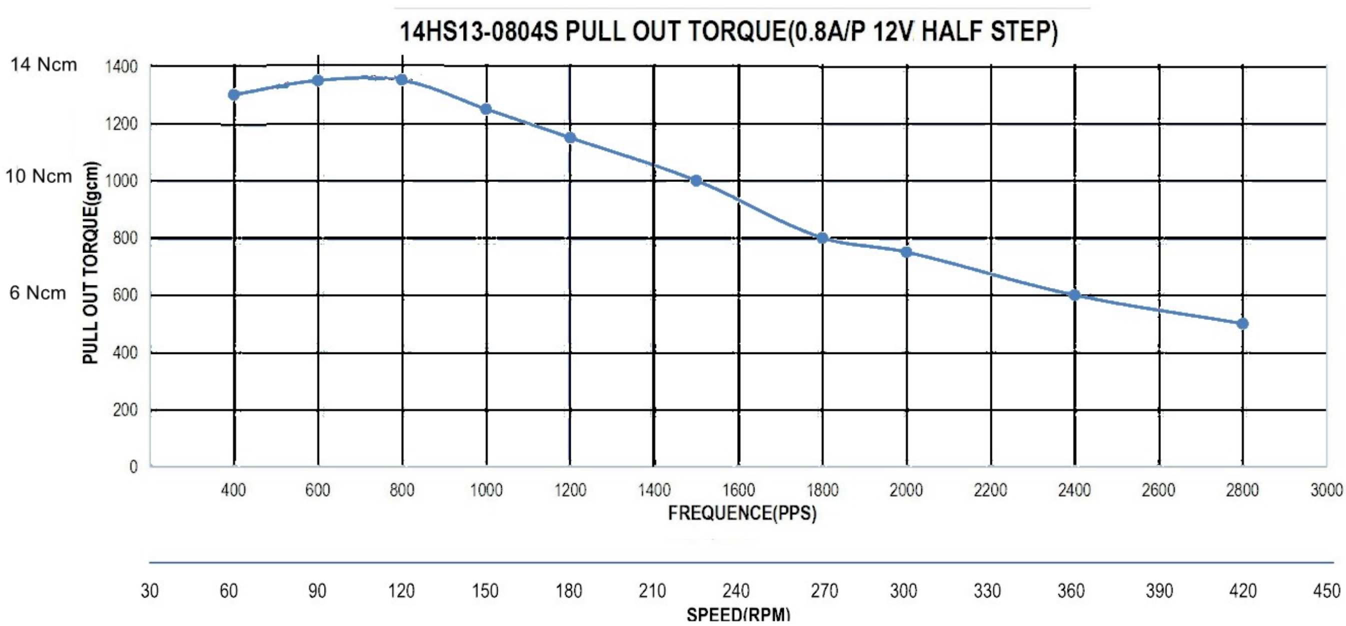
Physik-Themen Dynamik:
Newton-Gesetz, Beschleunigung, Drehmoment, Rotationsbewegung, Trägheitsmoment

Motoren sind in ihrem abgebbaren Drehmoment begrenzt, daher ist keine beliebige Beschleunigung möglich. Um eine Beschleunigung a des Roboters mit der Masse m zu erreichen, ist eine Gesamt-Kraft F = m · a erforderlich. Diese muss von den Antriebsrädern aufgebracht werden, was ein Drehmoment M an den Rädern mit dem Radius r erfordert (gleichmäßige Kraft-Aufteilung, jeweils F/2):

$$M = r \cdot \frac{F}{2} = \frac{r \cdot m \cdot a}{2}$$

Beispiel: r = 32 mm ; m = 1 kg ; a = 500 cm/s² : M = 0.08 Nm = 8 Ncm

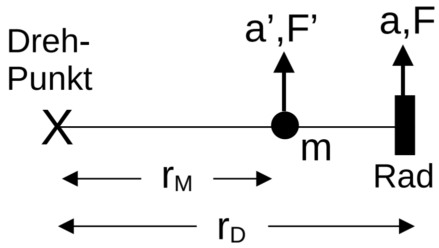
Besonders kritisch ist das Drehmoment bei Schrittmotoren. Wird eine Grenze überschritten, bleibt der Motor stehen. Das maximale Drehmoment ist jedoch auch von der Drehzahl abhängig.
Typische Drehmomentkurve eines NEMA14-Schrittmotors mit 35 mm Gehäuselänge:



Bei ca. 100 Umdrehungen pro Minute (RPM) existiert ein flaches Maximum. Überschreitet man 270 RPM nicht, stehen mindestens 8 Ncm zur Verfügung.

Bei **Drehbewegungen** des Roboters muss dagegen das Trägheitsmoment berücksichtigt werden. Hier wird es etwas komplizierter. Falls du die Rotation von Massen noch nicht im Physikunterricht durchgenommen hast, überspringe den Rest dieses Kapitels.

Soll eine Masse m auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_M beschleunigt werden, wirkt auf sie – genau wie bei der translatorischen Bewegung – eine Kraft F’ = m · a’ wobei a’ die Tangentialbeschleunigung an diesem Punkt darstellt (s. Skizze).



(Die Zentrifugalkraft, die nach außen zeigt, wird hier nicht berücksichtigt, da sie senkrecht zur Fahrtrichtung der Reifen wirkt und den Motor nicht belastet.)

m kann z.B. die Masse des Antriebsmotors sein. Gewöhnlich befinden sich jedoch die Räder außerhalb der Motoren im Abstand r_D vom Drehpunkt X des Fahrgestells. Nehmen wir zunächst an, der linke Reifen steht still und die Drehbewegung wird alleine durch den rechten Reifen ausgeführt (Drehung auf 1 Rad), ist der Drehradius r_D gleich dem Reifenabstand. Die Beschleunigung a am Reifen ist jedoch proportional größer als am Massenpunkt: $a = \frac{r_D}{r_M} \cdot a'$.

Die dort aufzubringende Kraft F reduziert sich entsprechend der Hebelwirkung auf: $F = \frac{r_M}{r_D} \cdot F'$.

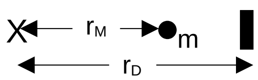
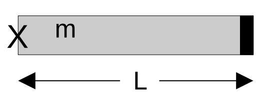
Die Formeln zusammen gefasst: $F = \frac{r_M}{r_D} \cdot m \cdot a' = \frac{r_M^2}{r_D^2} \cdot m \cdot a = \frac{a}{r_D^2} \cdot m \cdot r_M^2 = \frac{a}{r_D^2} \cdot J$

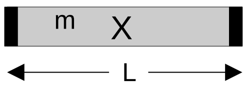
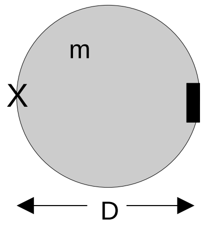
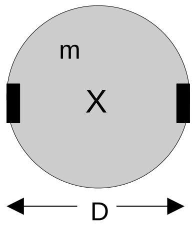
Die Größe J ist das so genannte Trägheitsmoment und berechnet sich für eine punktförmige Masse aus: $J = m \cdot r_M^2$

Wirken mehrere Massen zusammen (Punktmassen und verteilte Massen), müssen alle einzelnen Trägheitsmomente addiert werden: $J = \sum_i J_i$

Wird eine Drehung auf beiden Reifen ausgeführt, befindet sich der Drehpunkt in der Mitte zwischen den Rädern, also r_D = Radabstand / 2.

Für eine verteilte Masse kann man das jeweilige Trägheitsmoment J nach dem Formeln der nachfolgenden Tabelle berechnen (findet man in Lehrbüchern oder Formelsammlungen der Physik).

Masse-Anordnung	*Maße*	*Drehung auf ...*	*Trägheits-moment J*	*Kraft F am Rad*
Erläute-rungen	X = Drehpunkt ▌ = Position drehendes Rad r_D = Drehradius			a = Tangential-beschleunigung am Rad
Allgemein			$J = \sum_i J_i$	$F = \frac{a}{r_D^2} \cdot J$
Punktmasse		1 Rad	$m \cdot r_M^2$	$m \cdot a \cdot (r_M / r_D)^2$
Stab		1 Rad (r_D = L)	$\frac{m \cdot L^2}{3}$	$m \cdot a \cdot 0.333$

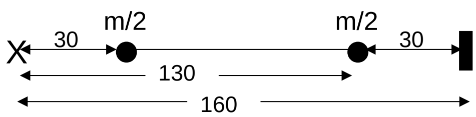
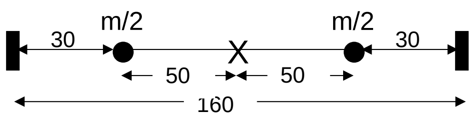
Stab		2 Räder (r_D = L/2)	$\frac{m \cdot L^2}{12}$	$m \cdot a \cdot 0.333$
Zylinder (stehend)		1 Rad (r_D = D)	$\frac{3\, m \cdot D^2}{8}$	$m \cdot a \cdot 0.375$
Zylinder (stehend)		2 Räder (r_D = D/2)	$\frac{m \cdot D^2}{8}$	$m \cdot a \cdot 0.5$

Das Stab-Modell simuliert eine Massenverteilung entlang der Antriebsachse, das Zylinder-Modell eine flächige Verteilung um den Antrieb.

Betrachtet man die letzte Spalte, tritt bei keiner Anordnung eine größere Kraft auf als bei der geradlinigen Beschleunigung (hier pro Rad: F = m · a / 2). **Fazit**: Ist der Roboter hinsichtlich der Motor-Drehmomente translatorisch optimiert, sind bei Drehbewegungen keine Probleme zu erwarten.

Eine Ausnahme kann zum Beispiel entstehen, wenn der Roboter eine Last weit vor der Antriebsachse transportieren soll. Falls der Abstand r_M der Lastmasse m vom Drehpunkt größer als r_D ist, wird das Produkt $m \cdot a \cdot (r_M / r_D)^2$ größer als m · a !

Nun folgt noch eine Beispielrechnung mit zwei Antriebsmotoren in symmetrischer Anordnung. Der Abstand der Reifen sei 160 mm, die Schwerpunkte der beiden Motoren befinden sich 30 mm weiter nach innen (Maße in mm).

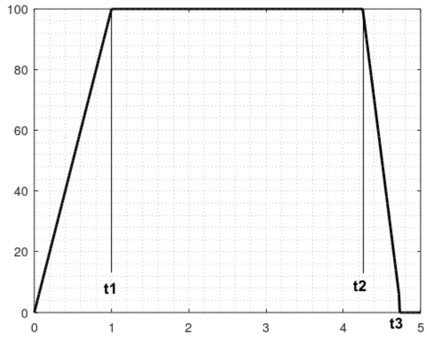
Anordnung	*Maße*	*Kraft F am Rad*
Zwei Motoren Drehung 1 Rad		$a \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{30^2 + 130^2}{160^2} = m \cdot a \cdot 0.35$
Zwei Motoren Drehung 2 Räder		$a \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{50^2 + 50^2}{80^2} = m \cdot a \cdot 0.39$

2. Beschleunigung und Abbremsen

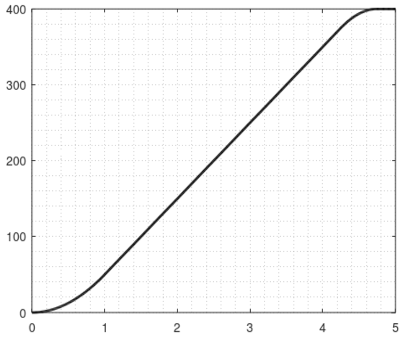
Physik-Themen Kinematik: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Bewegungsgleichungen

Durch eine begrenzte Anfahrbeschleunigung a_1 und Bremsverzögerung a_2 ergibt sich ein bestimmter Geschwindigkeitsverlauf (v) und Strecken-Profil (s).

Beispiel (Schrittmotor):
s_{End} = 400 Schritte
v_{Soll} = 100 Schritte/s
a_1 = 100 Schritte/s²
a_2 = 200 Schritte/s²



Geschwindigkeit



Schritte

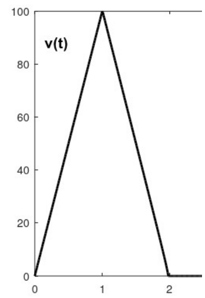
Phasen: Beschleunigungsphase [0 , t1] ; Konstantphase [t1 , t2]; Bremsphase [t2 , t3]

Grundgleichungen: $v = at$; $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v^2}{2a} \Leftrightarrow v = \sqrt{2as}$

Damit bei einer Anfahrbeschleunigung a_1 und Bremsverzögerung a_2 die Geschwindigkeit v erreicht wird, ist eine Mindest-Strecke $s = \frac{v^2}{2a_1} + \frac{v^2}{2a_2}$ notwendig.

Oder: bei einer vorgegeben Strecke s ist die erreichbare Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2s}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}} = \sqrt{\frac{2 s a_1 a_2}{a_1 + a_2}}$$



Eine gewünschte maximale Geschwindigkeit v_{Soll} kann demnach nur dann erreicht werden, wenn $v_{Soll} \leq \sqrt{\frac{2 s a_1 a_2}{a_1 + a_2}}$

Die Beschleunigungszeit beträgt: $t_1 = \frac{v_{Soll}}{a_1}$, die Beschleunigungsstrecke $s_1 = \frac{v_{Soll}^2}{2a_1}$

Die zurückgelegte Strecke beim Bremsvorgang ist: $s_3 = \frac{v_{Soll}^2}{2a_2}$ mit der Bremszeit $t_3 - t_2 = v_{Soll}/a_2$

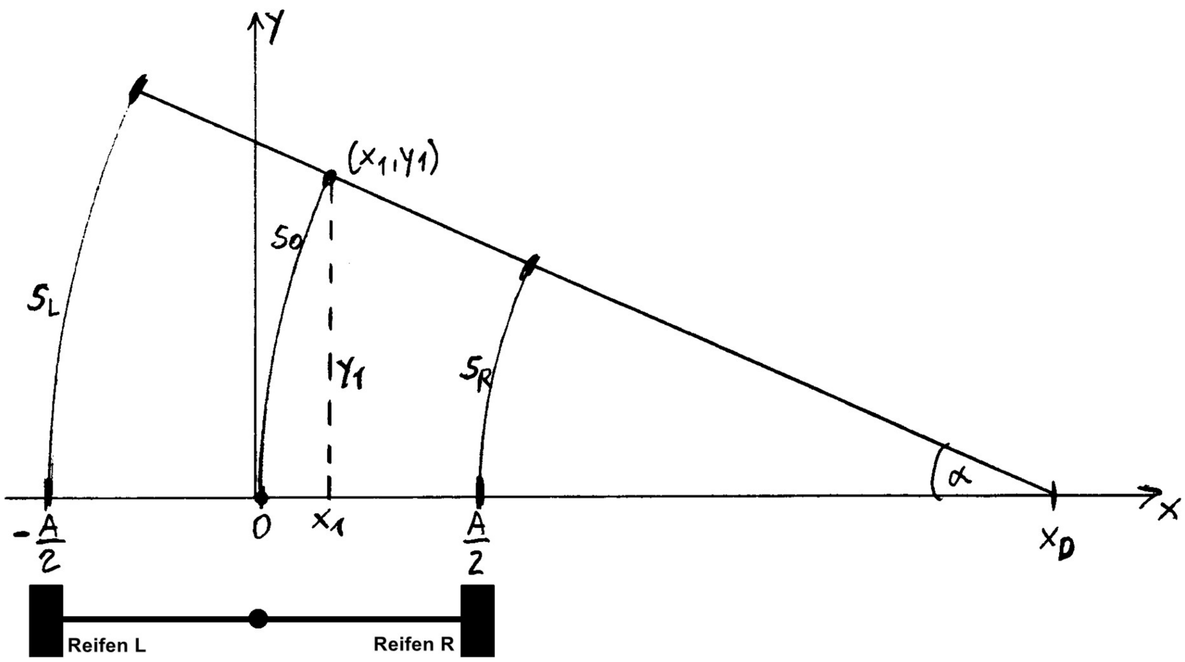
Es verbleibt für die Phase konstanter Geschwindigkeit: $s_2 = s_{End} - s_1 - s_3$ und $t_2 - t_1 = s_2 / v_{Soll}$

Die Gesamtzeit beträgt: $t_3 = \frac{v_{Soll}}{a_1} + \frac{s_{End}}{v_{Soll}} - \frac{v_{Soll}}{2a_1} - \frac{v_{Soll}}{2a_2} + \frac{v_{Soll}}{a_2} = \frac{s_{End}}{v_{Soll}} + \frac{v_{Soll}}{2a_1} + \frac{v_{Soll}}{2a_2}$

3. Lenkverhalten eines Roboters mit 2-Rad-Antrieb

Mathematik-Themen Geometrie: Kreissegment, Bogenlänge, Sinus, Cosinus

A	Achslänge = Rad-Abstand
α	Drehwinkel der Achse (in Grad)
D	Rad-Durchmesser
L	Lenkwert (nach Lego-Definition)
s_L , s_R	Zurückgelegte Strecke der Räder (auf Bewegungskreis) links, rechts
s_0	Zurückgelegte Strecke des Mittelpunkts (auf Bewegungskreis)
w_L , w_R	Drehwinkel der Räder (in Grad) links, rechts
x_D	Drehpunkts-Koordinate (Abstand vom Mittelpunkt)
x_1 , y_1	Koordinaten des Mittelpunkts nach der Bewegung



In der Bewegungsskizze wird angenommen, dass $s_L > s_R$, so dass eine Rechts-Drehung (im Uhrzeigersinn) erfolgt. Entsprechend ist $x_D > 0$.

Der Fall einer Links-Drehung (gegen Uhrzeigersinn) lässt sich analog durch Einsetzen negativer Vorzeichen für x_D , x_1 , L gewinnen.

Die Geradeausfahrt (L = 0 , $s_L = s_R$) wird nicht berücksichtigt ($x_D \rightarrow \infty$).

Die Räder bewegen sich auf den Strecken: $s_{L,R} = \frac{w_{L,R}}{360} \cdot D \cdot \pi$ (1)

Die zurückgelegten Strecken betragen:

$$s_0 = x_D \cdot 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{s_L + s_R}{2} = \frac{w_L + w_R}{2} \cdot \frac{D \cdot \pi}{360} \Leftrightarrow \alpha = \frac{(w_L + w_R) \cdot D}{4 \cdot x_D} \qquad (2)$$

$$s_L = \left(x_D + \frac{A}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360} \quad ; \quad s_R = \left(x_D - \frac{A}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360} \qquad (3)$$

Daraus: $\frac{w_R}{w_L}=\frac{s_R}{s_L}=\frac{2x_D-A}{2x_D+A} \;\Leftrightarrow\; x_D=\frac{A}{2}\cdot\frac{w_L+w_R}{w_L-w_R}=\frac{A}{2}\cdot\frac{1+\frac{w_R}{w_L}}{1-\frac{w_R}{w_L}}$ (4)

<u>Beispiele:</u>

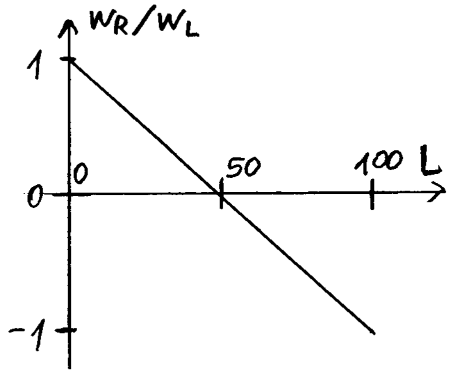
- $w_R = 0$ (Drehung auf einem Rad): $x_D = A / 2$
- $w_R = -w_L$ (Drehung auf zwei Rädern um den Mittelpunkt): $x_D = 0$
- $w_R = 0.5 \cdot w_L$: $x_D = 1.5 \cdot A$

Du möchtest wissen, um welchen Winkel α sich der Roboter dreht:

(4) eingesetzt in (2) ergibt: $\alpha=\frac{(w_L-w_R)\cdot D}{2\cdot A}=\frac{D}{2\cdot A}\cdot w_L\cdot\left(1-\frac{w_R}{w_L}\right)$ (5)

Die Lenkwerte sind für $L \geq 0$ gewöhnlich wie folgt festgelegt (s.a. Bild):

$\frac{w_R}{w_L}=1-\frac{L}{50} \;\Leftrightarrow L=50\cdot\left(1-\frac{w_R}{w_L}\right)$ (6)



aus (4): $x_D=\frac{A}{2}\cdot\left(\frac{100}{L}-1\right) \;\Leftrightarrow L=\frac{100}{1+2x_D/A}$ (7)

(6) eingesetzt in (5): $\alpha=\frac{D}{2\cdot A}\cdot w_L\cdot\frac{L}{50} \;\Leftrightarrow\; w_L=\frac{100\,A\cdot\alpha}{D\cdot L}$ (8)

Wo befindet sich der Roboter am Ende der Kurvenfahrt?
Zielkoordinaten des Mittelpunkts: $x_1=x_D\cdot(1-\cos\alpha);\, y_1=x_D\cdot\sin\alpha$ (9)

Möchte man für $L > 0$ den Drehwinkel α in Abhängigkeit von der Fahrstrecke s_L (die weitere Strecke ist die des linken Rades) berechnen, setzt man in (8) für $D\cdot w_L=s_L\cdot\frac{360}{\pi}$ ein, siehe (1), und erhält:

$\alpha=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{L}{A\cdot 50}\cdot s_L$ oder in Radiant: $\alpha_{rad}=\frac{L}{A\cdot 50}\cdot s_L$ (10)

Hinweis: 180 Winkelgrade entspricht π in Radiant (Bogenmaß).