
TP flots max: Autoroute

Table des matières

I) Présentation générale.....	2
II) Étape initiale.....	2
III) Itérations successives.....	3
IV) Conclusion.....	7

I) Présentation générale

Le problème de flot maximum se traduit par la recherche, dans un réseau de flot, d'un flot réalisable depuis une source unique vers un puits unique, de manière à ce que ce flot soit maximum.

Le but de ce TP sera de voir un cas concret de ce problème à travers une question sur une autoroute : on possède un réseau autoroutier dans lequel on souhaite augmenter le flot sur 4 tronçons différents, l'objectif sera de trouver et augmenter les flots des tronçons limitants pour que le flot total du réseau soit toujours maximal.

Tout au long de ce compte-rendu, nous étudierons l'application de l'algorithme de Ford et Fulkerson permettant de trouver le flot maximum avec les différentes étapes et les déductions possibles. Toutes les manipulations sont faites avec Java et Graphstream.

II) Étape initiale

Avant d'effectuer l'algorithme pour trouver les tronçons à améliorer, étudions la situation initiale, cela nous donnera une vision globale de la situation et facilitera les étapes suivantes.

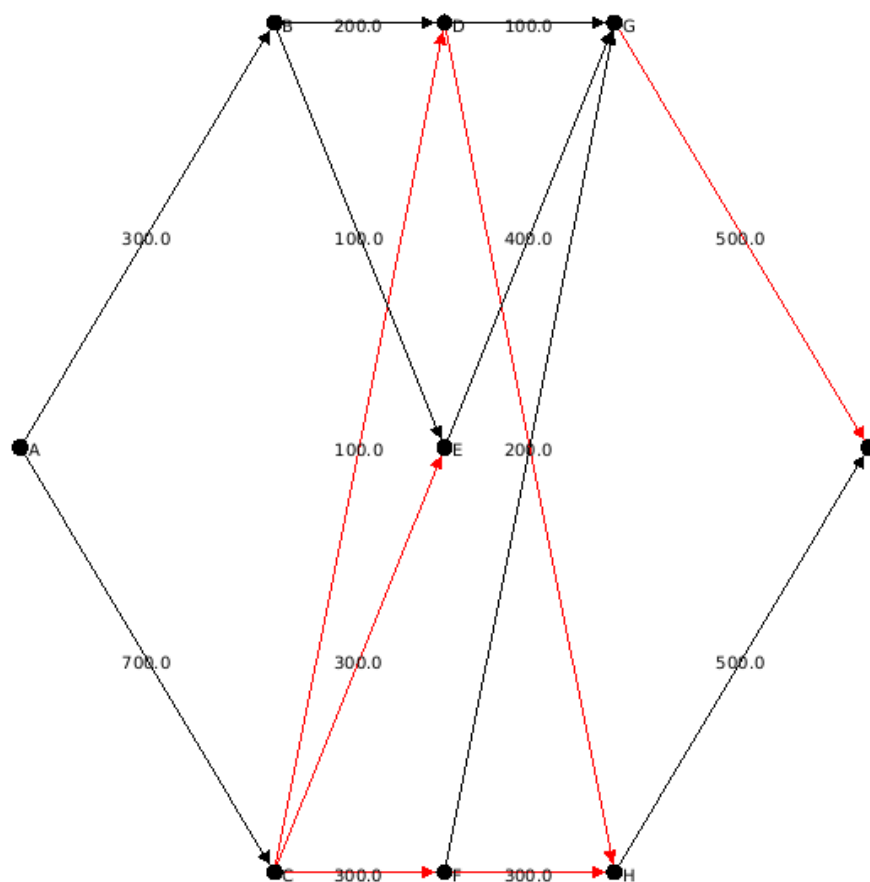


Figure 1: Graphe initial

Dans le graphe ci-dessus, les nombres correspondent aux flots des différents tronçons de l'autoroute tandis que la couleur rouge sur les arêtes représente la saturation de celles-ci.

Après avoir dit cela, on remarque deux détails principalement :

- Le flot maximal obtenu aurait une valeur de 1000
- Une coupe minimum semble être présente séparant $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ et $S' = \{H, I\}$

Pour confirmer ces deux observations, dessinons le graphe d'écart :

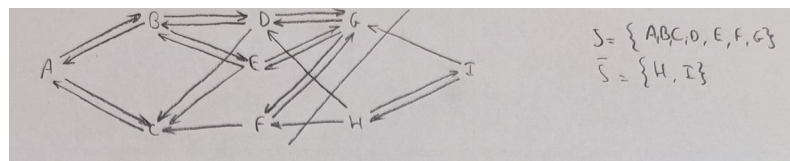


Figure 2: Graphe d'écart et coupe minimum (situation initiale)

La première conclusion obtenue grâce au graphe d'écart est que la coupe que l'on supposait minimum à l'observation l'est bien, cela confirme que $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ et $S' = \{H, I\}$ et prouve que le flot est maximum, ainsi le flot max initial est de 1000 voitures à l'heure.

III) Itérations successives

Intéressons nous désormais au cœur du problème : les augmentation successives de capacité des tronçons sur l'axe $ACDHI$.

Nous savons que, dès lors qu'une coupe minimum est présente, l'augmentation du flot du réseau peut se faire uniquement par l'augmentation de la capacité d'une arête traversée par la coupe minimum, dans notre cas ces arêtes sont au nombre de 3 : DH, FH et GI.

On observe aisément que parmi ces 3 arêtes, seule DH fait partie des tronçons de l'axe que l'on souhaite transformer en autoroute, il devient donc immédiat que c'est l'arête dont on doit changer la capacité en premier (car augmenter la capacité des autres tronçons de l'axe ne changerait pas le flot max puisqu'ils ne sont ici pas limitants).

En augmentant la capacité de DH, voici le graphe que l'on obtient :

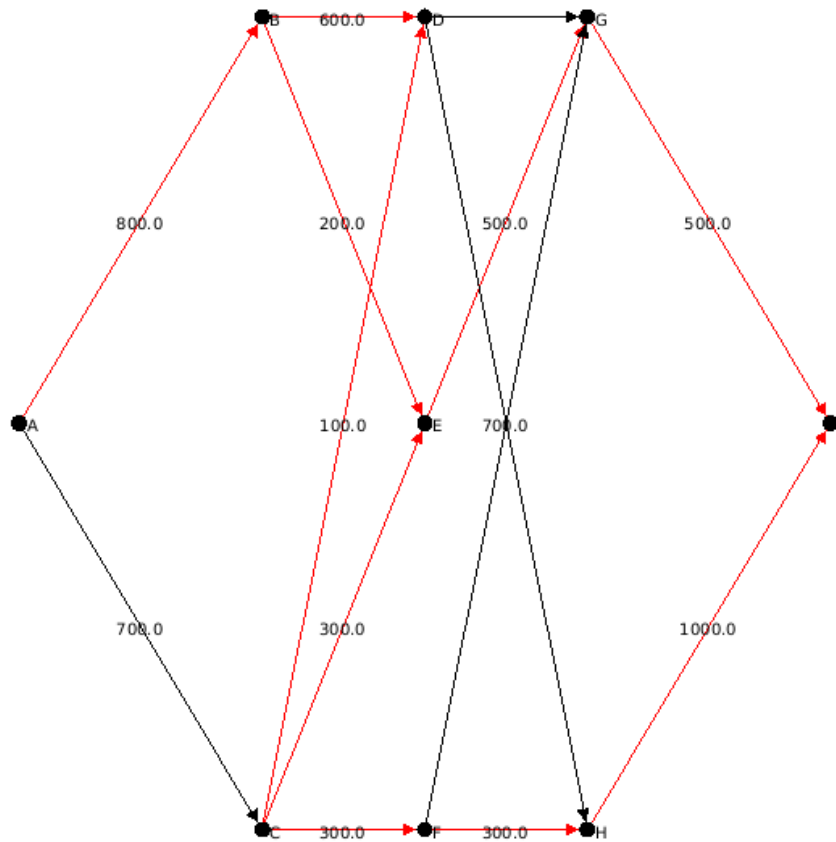


Figure 3: Graphe et flots après augmentation de DH

On remarque dans ce graphe deux détails principalement :

- Le flot maximal obtenu aurait une valeur de 1500
- La coupe minimum est moins flagrante dans cette situation que dans la situation initiale

Dessignons le graphe d'écart pour déterminer la coupe minimum et prouver que le flot est maximal :

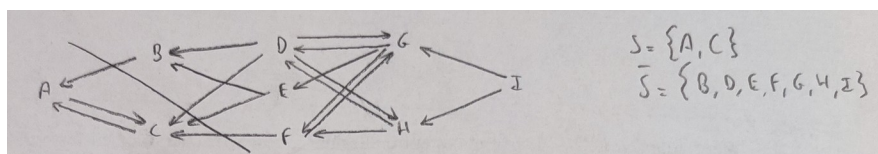


Figure 4: Graphe d'écart et coupe minimum après augmentation de DH

Nous pouvons voir sur le graphe d'écart qu'une coupe minimum est présente, ce qui induit que le flot est maximal et que la valeur de 1500 est correcte après augmentation de DH (1500 étant bien égal à la somme des flots des arêtes traversées par la coupe minimum).

En ce qui concerne la coupe, nous avons $S = \{A, C\}$ et $S' = \{B, D, E, F, G, H, I\}$, cela indique que les arêtes limitant le flot ici sont AB, CD, CE et CF. Or, seule CD est présente dans l'axe $ACDHI$, cela implique que c'est le tronçon dont il faut augmenter la capacité désormais.

Après augmentation de CD, voici le graphe obtenu :

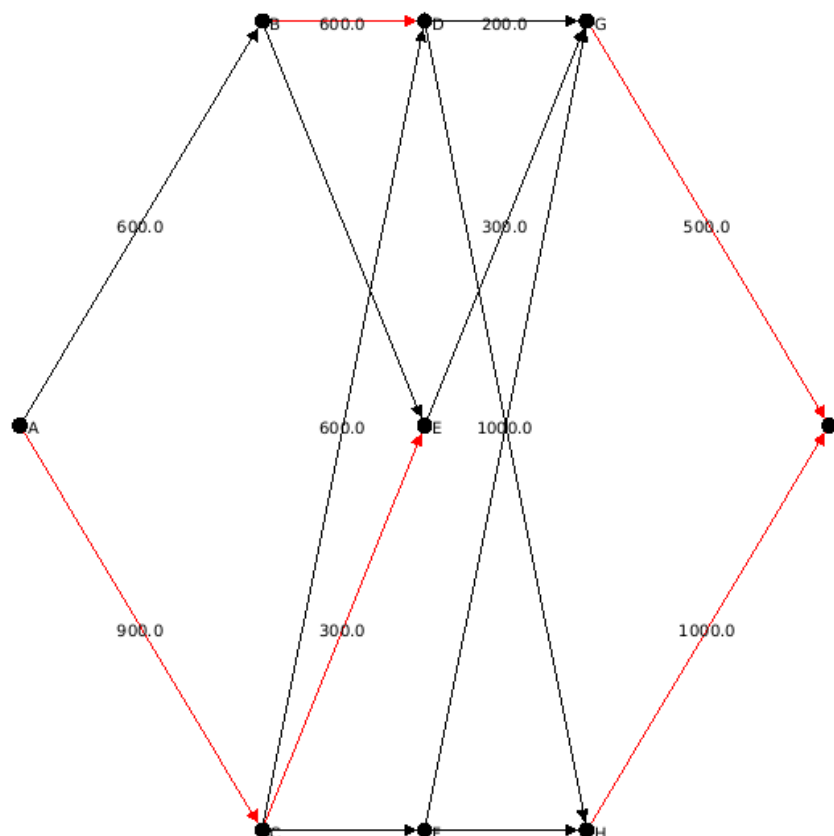


Figure 5: Graphe et flots après augmentation de CD

Nous avons ici 2 observations à faire nécessairement :

- Le flot maximal est toujours de 1500
- Il semble y avoir une coupe minimum $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ et $S' = \{I\}$

La raison pour laquelle le flot maximal est toujours égal à 1500 réside dans l'étape précédente, en effet les arêtes GI et HI étaient déjà saturées, ce qui signifie que la coupe de cette étape était déjà présente et que le flot ne pouvait, de toute façon, pas augmenter.

Observons le graphe d'écart de cette étape pour confirmer la coupe ainsi que le fait que le flot est bien maximal :

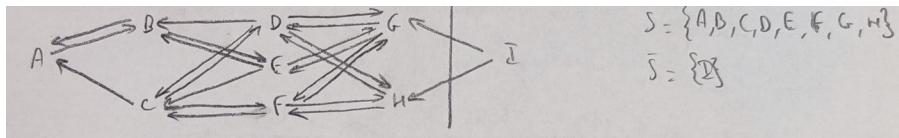


Figure 6: Graphe d'écart et coupe minimum après augmentation de CD

Nous sommes bien en présence d'une coupe minimum telle que $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ et $S' = \{I\}$, de plus la somme des flots des arêtes traversées par la coupe est bien égale, ce qui signifie que le flot est bien maximal.

Pour finir cette étape, on observe que seule HI est traversée par la coupe minimum et est dans l'axe $ACDHI$, en conséquence, ce sera notre prochain tronçon à améliorer, ce qui donnera le graphe suivant :

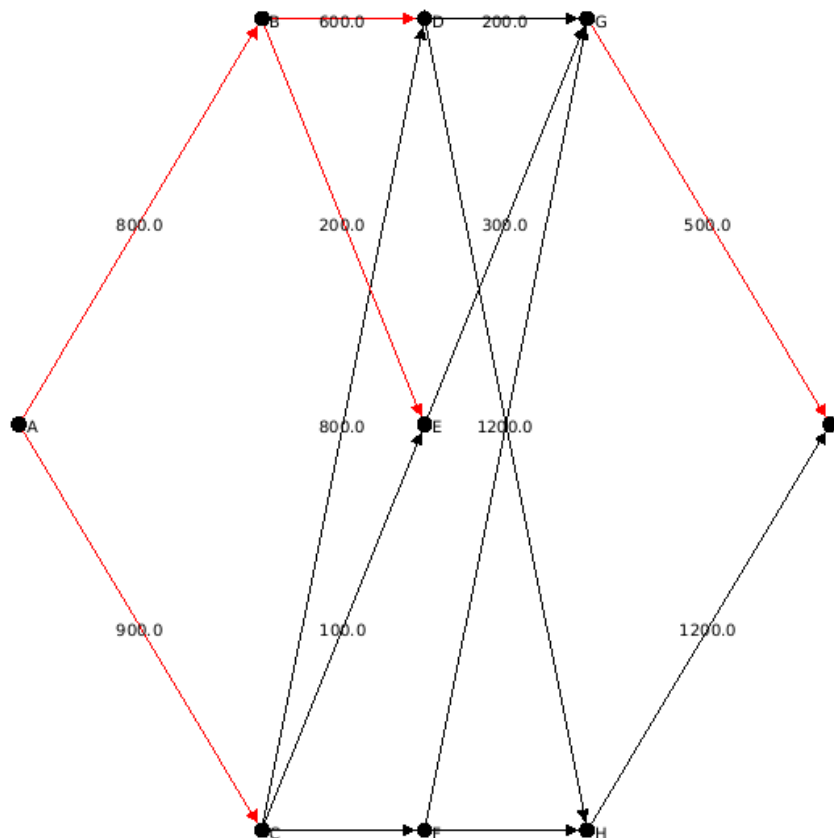


Figure 7: Graphe et flots après augmentation de HI

On observe que le flot passe de 1500 à 1700 et qu'il ne reste plus qu'un tronçon à améliorer, pour être sûrs de ne pas avoir fait d'erreur, il est bon de dessiner le graphe d'écart pour voir que A est seul dans son ensemble :

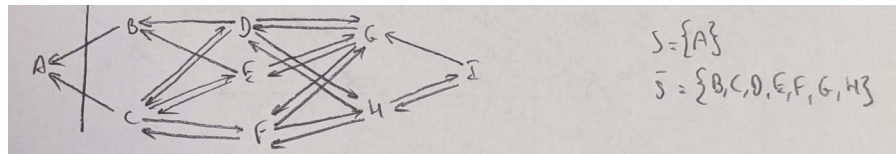


Figure 8: Graphe d'écart et coupe minimum après augmentation de HI

Nous observons bien une coupe minimum dans laquelle $S = \{A\}$ et $S' = \{B, C, D, E, F, G, H, I\}$ et la somme des flots des arêtes AB et AC est égale à 1700, ce qui nous prouve bien que le flot est maximal pour cette étape.

Il ne reste plus qu'à augmenter AC pour obtenir le flot maximal du réseau après avoir transformé l'axe $ACDHI$ en autoroute et obtenir le graphe suivant :

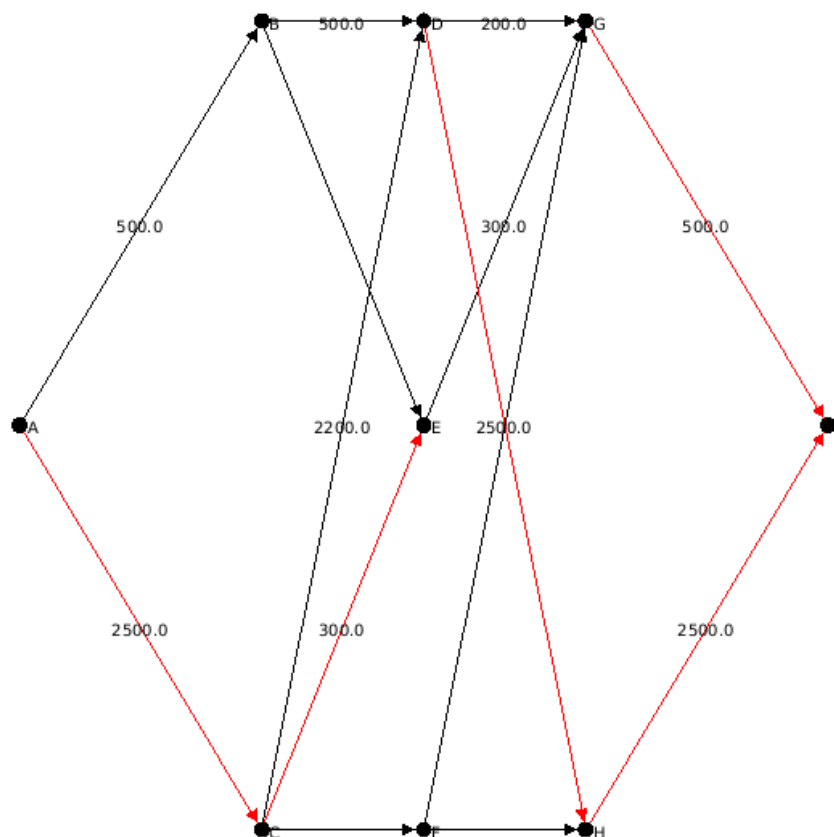


Figure 9: Graphe et flots après augmentation de AC

Il est aisé de voir qu'ici la coupe minimum est $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ et $S' = \{I\}$, en sommant les flots des arêtes traversant cette coupe (GI et HI), on obtient 3000, qui est le flot max du réseau après avoir transformé l'axe $ACDHI$ en autoroute.

IV) Conclusion

Ainsi, en ce qui concerne les questions posées, les différentes parties précédemment exposées permettent d'affirmer que :

- 1000 est le flot maximal du réseau dans la situation initiale
- L'ordre des travaux de transformation en autoroute pour toujours avoir un flot maximal est $DH \rightarrow CD \rightarrow HI \rightarrow AC$