1

Algoritmos em Grafos: Introdução

R. Rossetti, A.P. Rocha, A. Pereira, P.B. Silva, T. Fernandes
CAL, MIEIC, FEUP
Março de 2011

2

Índice

- Revisão de conceitos e definições
- Exemplificar aplicações
- Representação
- Pesquisa em profundidade e em largura
- Ordenação topológica

3

Revisão de conceitos e definições

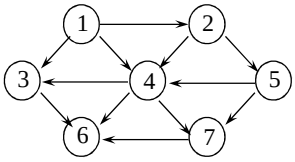
4

Conceito de grafo

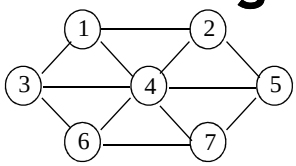
- Grafo G = (V, E)
  - V — conjunto de vértices (ou nós)
  - E — conjunto de arestas (ou arcos)
    - cada aresta é um par de vértices (v, w), em que v, w $\in$ V
    - se o par for ordenado, o grafo é dirigido, ou digrafo
    - um vértice w é adjacente a um vértice v se e só se (v, w)$\in$E
    - num grafo não dirigido com aresta (v, w) e, logo, (w, v), w é adjacente a v e v adjacente a w
    - as arestas têm por vezes associado um custo ou peso

5

Grafos dirigidos e não dirigidos



G1= (Cruzamentos, Ruas)



G2 = (Cidades, Estradas)

- Algumas aplicações
  - Tráfego, transporte (controlo, gestão)
  - Navegação GPS
  - Abastecimento de água e redes de saneamento (gestão de carga)
  - Gestão de redes de energia
  - Workflows e cadeias de decisão
  - Planeamento e gestão de projectos
  - Compiladores, sistemas de ficheiros, jogos, criptografia, redes, Internet
  - Redes Bayesianas e probabilísticas (Processo de Manchester)

6

Caminhos e ciclos

- Caminho - sequência de vértices v_1, …, v_n tais que $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $1 \leq i < n$
  - comprimento do caminho é o número de arestas, n-1
  - se n = 1, caminho reduz-se a um vértice e tem comprimento 0
  - anel - caminho v, v $\Rightarrow$ (v, v) $\in$ E , comprimento 1; raro
  - caminho simples - todos os vértices distintos excepto possivelmente o primeiro e o último
- Ciclo - caminho de comprimento ≥ 1 com $v_1 = v_n$
  - num grafo não dirigido requer-se que as arestas sejam diferentes
  - DAG (Grafo Dirigido Acíclico) é um grafo dirigido sem ciclo. Para qualquer vértice v, não há nenhuma ligação dirigida começando e acabando em v.

7

Conectividade e densidade

- Conectividade:
  - Grafo não dirigido é conexo sse houver um caminho a ligar qualquer par de vértices
  - Digrafo com a mesma propriedade: fortemente conexo, se p/ todo v, w ∈ ***V*** existir em ***G*** um caminho de v para w e w para v.
  - Digrafo fracamente conexo (ou não fortemente conexo): se, para toda bipartição (***X***, ***Y***) de seu conjunto de vértices ***V***, alguma aresta (***x***, ***y***) tem uma ponta em ***X*** e outra em ***Y***. Ou seja, não há bipartição vazia!
- Densidade:
  - Grafo denso — $|E| = \Theta(V^2)$
    - Grafo completo — existe uma aresta entre qualquer par de nós
  - Grafo esparso — $|E| = \Theta(V)$

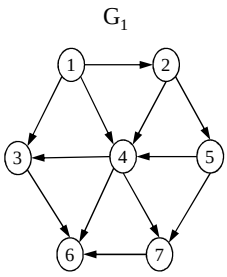
8

Representação

9

Matriz de adjacências

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0

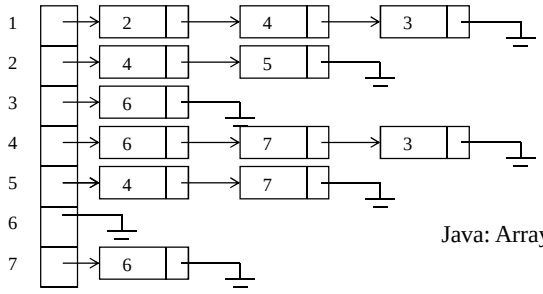


- a[u][v] = 1 sse (u, v) ∈ E
- elementos da matriz podem ser os pesos (0 – não há aresta)
- grafo não dirigido – matriz simétrica
- apropriada para grafos densos
  - 3000 cruzamentos x 12 000 troços de ruas (4 por cruzamento) = 9 000 000 de elementos na matriz!

10

Lista de adjacências

- Estrutura típica para grafos esparsos
  - para cada vértice, mantém-se a lista dos vértices adjacentes
  - vector de cabeças de lista, indexado pelos vértices
  - espaço é O(|E| + |V|)
  - pesquisa de adjacentes em tempo proporcional ao número destes
- Grafo não dirigido: lista com dobro do espaço



Java: ArrayList<LinkedList<Integer>>

11

Representação

- Normalmente precisamos de guardar informação adicional em cada vértice e em cada aresta (nome, peso, etc.), pelo que se opta por uma representação mais complexa, como por exemplo:

```
class Graph {
   ArrayList<Vertex> vertexSet;
}

class Vertex {
   String name;
   LinkedList<Edge> adj; //arestas a sair deste
vértice
}

class Edge {
   Vertex dest;
   double weight;
}
```


12

Referências e mais informação

- "Data Structures and Algorithm Analysis in Java", Second Edition, Mark Allen Weiss, Addison Wesley, 2006
- "Introduction to Algorithms", Second Edition, Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, The MIT Press, 2001