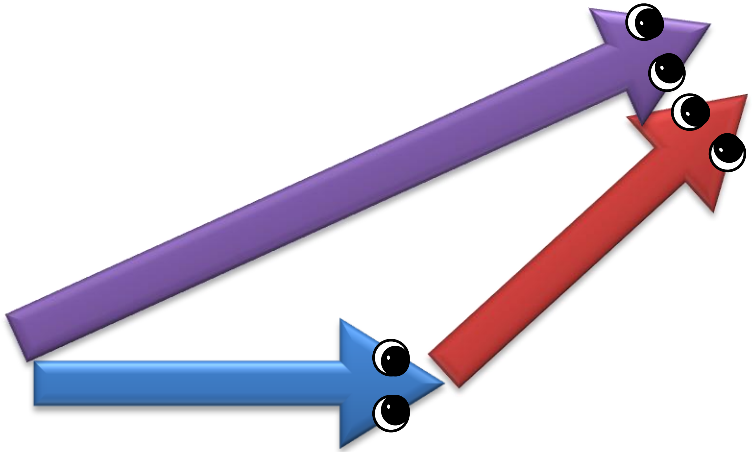
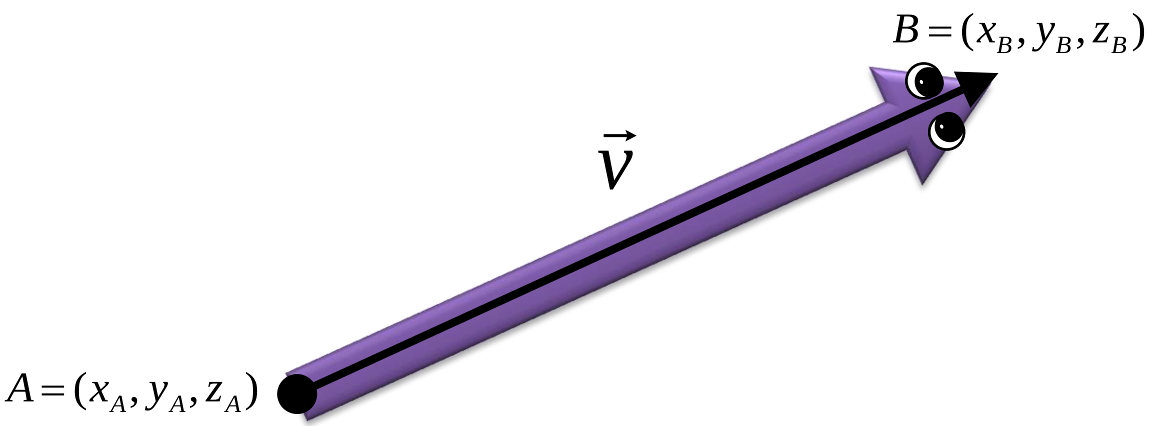


Revisão de Vetores

Profª Rossana B. Queiroz

Vetores?

- Não estamos falando de *arrays*, estamos falando dos vetores da Matemática
  - Segmentos de reta orientados



$$\vec{v} = B - A$$

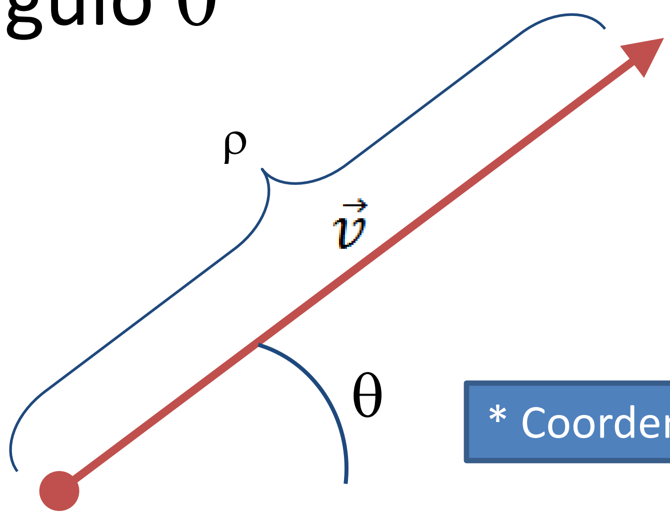
$$\begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{cases}$$

Quando usamos vetores?

- Quando precisamos representar grandezas que não conseguimos descrever usando apenas um número (escalares) - <u>intensidade</u>, mas também necessitamos informar <u>direção</u> e <u>sentido</u> para dar o significado completo a elas.
- Exemplos de grandezas vetoriais:
  - Deslocamento, Velocidade, Aceleração, Força
- Usos em CG
  - Vetor normal, vetor direção, lançamento de raios, campos de força, fluxos, etc

Como trabalhar com vetores?

- Usualmente, informamos a intensidade ρ (comprimento do vetor) e a direção e sentido como um ângulo θ



* Coordenadas polares

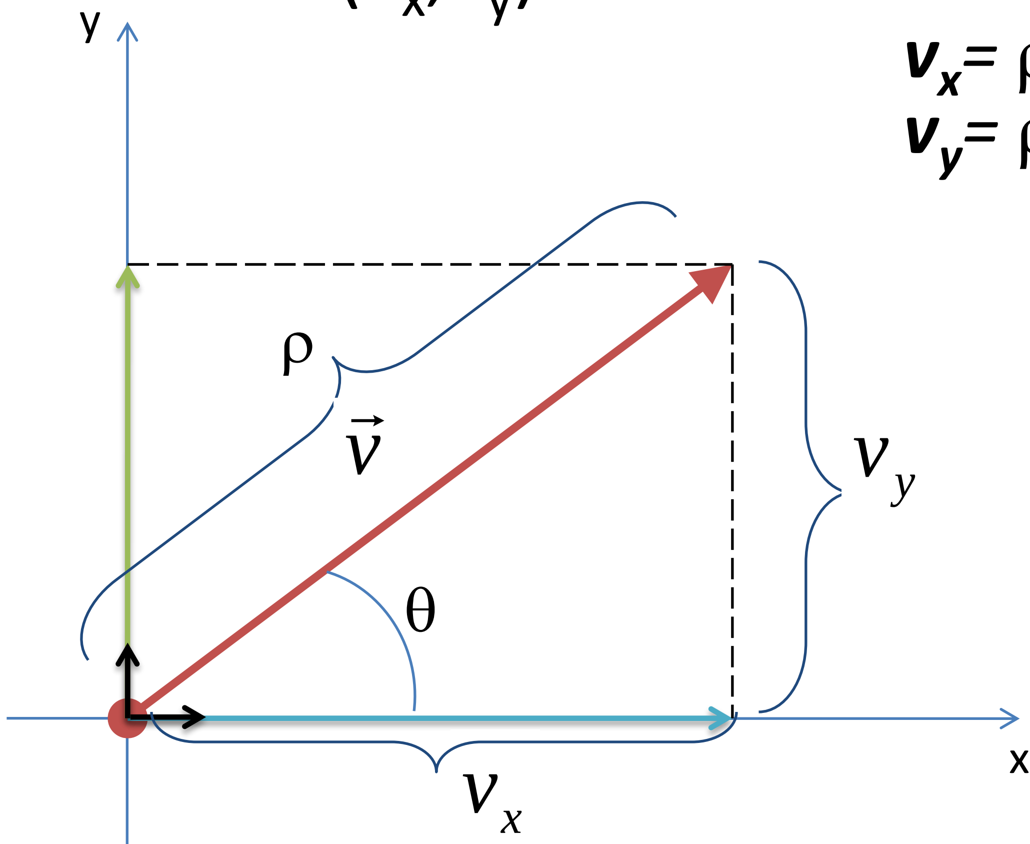
↓

Coordenadas retangulares

Decomposição de vetores em componentes ortogonais

- Conversão das coordenadas polares (ρ, θ) para cartesianas (v_x,v_y)

$\boldsymbol{v_x}= \rho.\mathit{cos}\ \theta$
$\boldsymbol{v_y}= \rho.\mathit{sen}\ \theta$



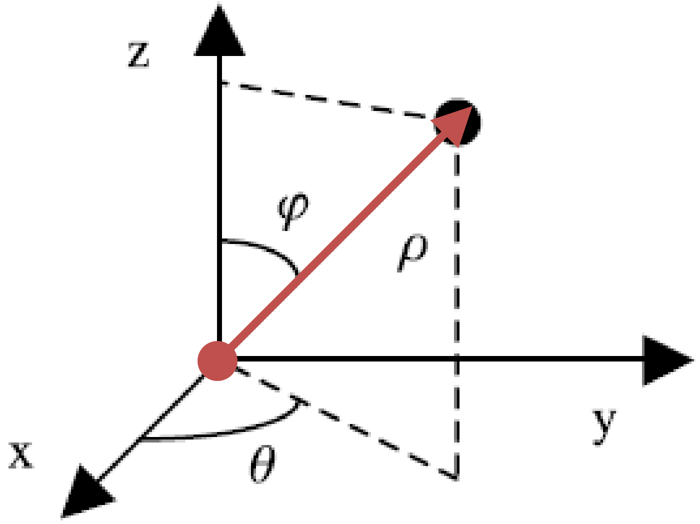
Decomposição de vetores em componentes ortogonais

- Conversão das coordenadas polares (ρ, θ) para cartesianas (v_x,v_y)

```
//Decompõe um vetor 2D, dado seu comprimento rho e o
// ângulo em graus theta
vec2 CalculaComponentesDoVetor(float rho, float theta)
{
		vec2 v;
		float angulorad = GrausParaRadianos(theta);
		float v.x = rho*cos(angulorad);
		float v.y = rho*sin(angulorad);
		return v;
}
```

Decomposição de vetores em componentes ortogonais

- E em 3D?
  - O vetor é definido pela distância ρ (rho) de uma origem e dois ângulos θ (theta) e φ (fi)



Decomposição de vetores em componentes ortogonais

- E em 3D?
  - Conversão de coordenadas esféricas para cartesianas
  - Para converter um vetor descrito em coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) em coordenadas cartesianas (x,y,z), utilizamos as seguintes equações:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\varphi \end{aligned}}$$

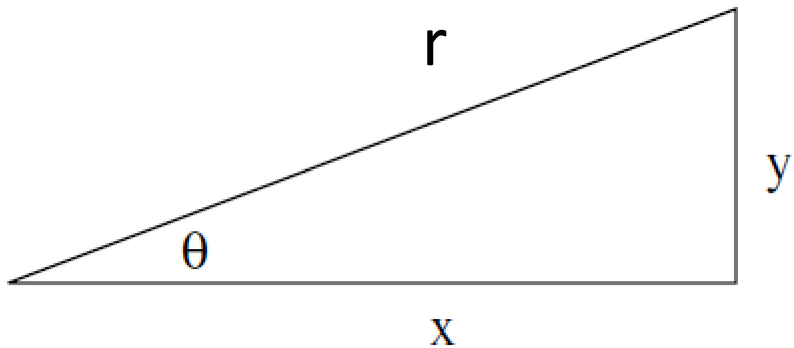
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = arctan\frac{y}{x}$$

$$\varphi = arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

“Daonde” tiraram isso?!?!

- Trigonometria, teorema de Pitágoras!
  - http://www.dummies.com/how-to/content/trigonometry-for-dummies-cheat-sheet.html



$\sin\theta = y/r$

$\cos\theta = x/r$

$\tan\theta = y/x$

$x = r\cos\theta = y/\tan\theta$

$y = r\sin\theta = x\tan\theta$

$r = y/\sin\theta = x/\cos\theta$

$\sin^{-1}(y/r) = \theta$

$\cos^{-1}(x/r) = \theta$

$\tan^{-1}(y/x) = \theta$

Comprimento do Vetor

- E se eu tenho o vetor já decomposto, como eu recupero o comprimento dele?
  - De novo, Pitágoras em ação (x,y e z são as componentes do vetor)

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

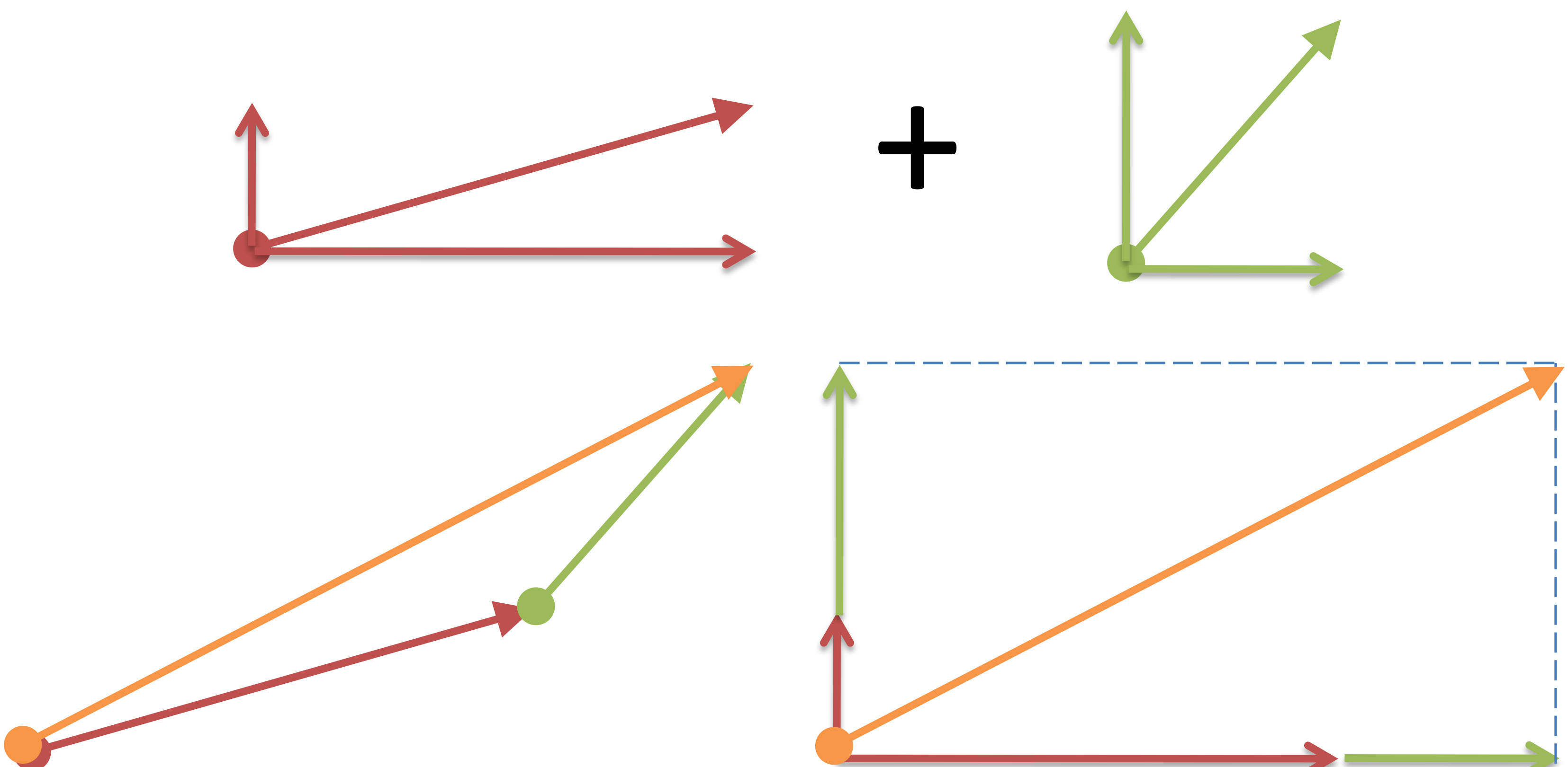
- Na matemática, isso se chama **módulo** ou **norma** do vetor

OBS.: através dessa mesma forma, é possível calcular a distância entre 2 pontos quaisquer (chamada **distância euclidiana**)

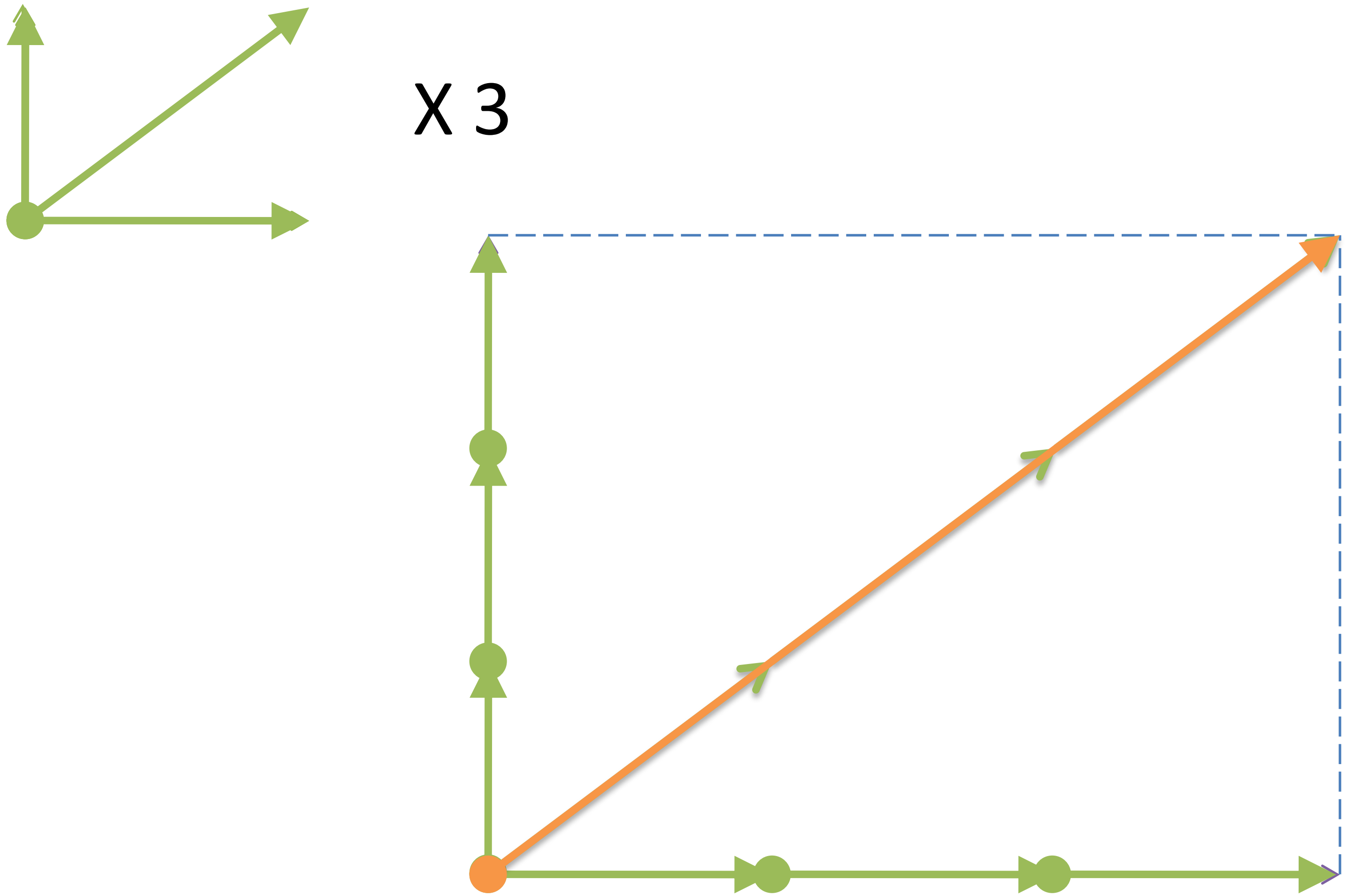
Ok, ok, agora...

- Já sei criar um vetor que vai de um ponto A para um ponto B (e já tenho assim ele decomposto)
- Já sei calcular o comprimento desse vetor e o ângulo por ele formado em relação ao sistema de eixos ortogonais (Pitágoras!!)
- Se me fornecerem o comprimento e o ângulo, já sei decompor em coordenadas cartesianas (Pitágoras!!).

Soma de Vetores



Multiplicação por escalar



Módulo e normalização de um vetor

- O módulo (comprimento) do vetor ***v** = a**i** + b**j** + c**k*** é:

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- Para encontrar o vetor unitário (de módulo 1) na direção de **v**, faz-se:

$$\vec{u}_v = \frac{a}{|\vec{v}|}\vec{i} + \frac{b}{|\vec{v}|}\vec{j} + \frac{c}{|\vec{v}|}\vec{k}$$

- Este processo chama-se *normalização* de um vetor (encontrar o vetor unitário que o representa)

“Norma” vs. Normalização

- Módulo (norma) de um vetor

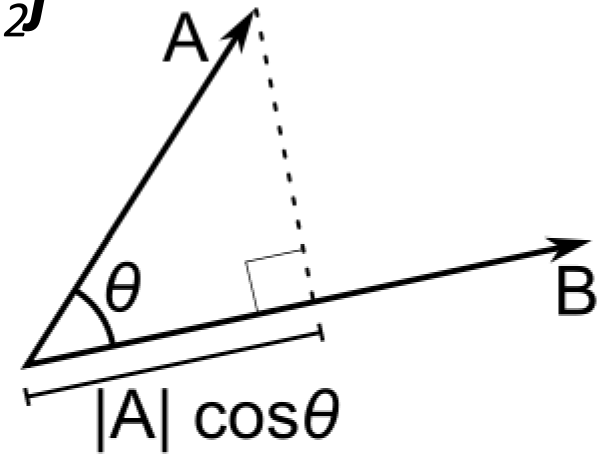
```
float norm(vec3 v) {
    return sqrt(v.x*v.x + v.y*v.y+ v.z*v.z );
}
```

- Normalização de um vetor

```
vec3 normalize(vec3 v) {
  vec3 n;
  float norm = norm(v);
          n.x = v.x/norm;
          n.y = v.y/norm;
          n.z = v.z/norm;
          return n;
}
```

Produto escalar

- $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$



$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\mathrm{A} \bullet \mathrm{B} = \|A\|\|B\| \cos\theta$$

O produto escalar de dois vetores A e B é o resultado do produto do comprimento de Apela projeção escalar de B em A.

```
float dotProduct(vec3 v1, vec3 v2) { //produto escalar
   return (v1.x*v2.x + v1.y*v2.y + v1.z*v2.z);
}
```

Uma aplicação interessante

- Ângulo entre 2 vetores:
  - Mais importante aplicação do produto escalar
- O cosseno do ângulo entre dois vetores é o produto escalar destes vetores normalizados

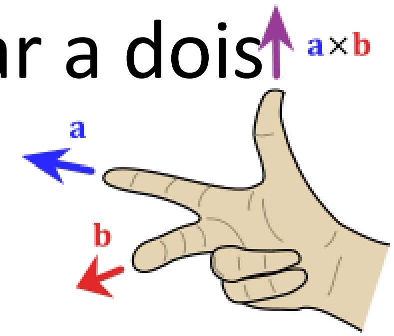
$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\|}$$

```
float angleBetween(vec3 v1, vec3 v2){
// Angulo = ArcCos (ProdutoEscalar (v1; v2) / Modulo (v1)*Modulo (v2))
return (float) acosf( dotProduct(v1,v2) / (norm(v1) * norm(v2)) );

}
```

Produto vetorial

- A partir do produto vetorial, encontramos o vetor que é *normal* ou perpendicular a dois outros vet



$$\vec{a} = a_x\vec{x} + a_y\vec{y} + a_z\vec{z}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{x} + b_y\vec{y} + b_z\vec{z}$$

$$\vec{c} = \left(a_y b_z - b_y a_z\right)\vec{x} + \left(a_z b_x - b_z a_x\right)\vec{y} + \left(a_x b_y - b_x a_y\right)\vec{z}$$

```
vec3 vprod( vec3 v1, vec3 v2) {
  /*Cuidar aqui! Muito fácil de errar a fórmula ao transcrever*/
  vec3 result( v1.y*v2.z - v1.z*v2.y,
               v1.z*v2.x - v1.x*v2.z,
               v1.x*v2.y - v1.y*v2.x);
  return result;
}
```

Videos!!

http://justmathtutoring.com/

- http://patrickjmt.com/an-introduction-to-vectors-part-1/
- http://patrickjmt.com/vector-basics-drawing-vectors-vector-addition/
- http://patrickjmt.com/finding-the-components-of-a-vector-ex-1/
- http://patrickjmt.com/finding-the-components-of-a-vector-ex-2/
- http://patrickjmt.com/vector-basics-algebraic-representations-part-1/
- http://patrickjmt.com/vector-basics-algebraic-representations-part-2/
- http://patrickjmt.com/vector-addition-and-scalar-multiplication-example-1/
- http://patrickjmt.com/vector-addition-and-scalar-multiplication-example-2/
- http://patrickjmt.com/magnitude-and-direction-of-a-vector-example-1/
- http://patrickjmt.com/magnitude-and-direction-of-a-vector-example-2/
- http://patrickjmt.com/magnitude-and-direction-of-a-vector-example-3/
- http://patrickjmt.com/when-are-two-vectors-considered-to-be-the-same/
- http://patrickjmt.com/finding-a-unit-vector-ex-1/
- http://patrickjmt.com/finding-a-unit-vector-ex-2/
- http://patrickjmt.com/word-problems-involving-velocity-or-other-forces-vectors-ex-1/
- http://patrickjmt.com/word-problems-involving-velocity-or-other-forces-vectors-ex-3/
- http://patrickjmt.com/vectors-the-dot-product/
- http://patrickjmt.com/the-cross-product/
- http://patrickjmt.com/torque-an-application-of-the-cross-product/
- http://patrickjmt.com/finding-the-vector-equation-of-a-line/