

Conjuntos numéricos

Conjunto é o agrupamento de elementos que possuem características semelhantes. Os Conjuntos numéricos especificamente são compostos por números.

Divididos em:

- Conjunto dos Naturais (N),
- Conjunto dos Inteiros (Z),
- Conjunto dos Racionais (Q),
- Conjunto dos Irracionais (I),
- Conjunto dos Reais (R).

Números Naturais

Pertencem ao conjunto dos naturais os números inteiros positivos incluindo o zero. Representado pela **letra N** maiúscula. Os elementos dos conjuntos devem estar sempre entre chaves.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$

- Quando for representar o Conjunto dos Naturais não – nulos (excluindo o zero) devemos colocar * ao lado do N.

Representado assim:

$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$

A reticência indica que sempre é possível acrescentar mais um elemento.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ ou $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Qualquer que seja o elemento de N, ele sempre tem um sucessor. Também falamos em antecessor de um número.

- 6 é o sucessor de 5.
- 7 é o sucessor de 6.
- 19 é antecessor de 20.
- 47 é o antecessor de 48.

Como todo número natural tem um sucessor, dizemos que o conjunto *N* é *infinito*.

Quando um conjunto é finito?

O conjunto dos números naturais maiores que 5 é infinito: $\{6, 7, 8, 9, \dots\}$

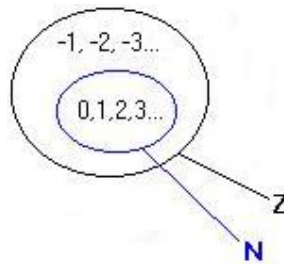
Já o conjunto dos números naturais menores que 5 é finito: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Veja mais alguns exemplos de conjuntos finitos.

- O conjunto dos alunos da classe.
- O conjunto dos professores da escola.
- O conjunto das pessoas que formam a população brasileira.

Números Inteiros

Pertencem ao conjunto dos números inteiros **os números negativos, os números positivos e o zero**. Fazendo uma comparação entre os números naturais e os inteiros percebemos que o conjunto dos naturais está contido no conjunto dos inteiros.



Interseção do conjunto dos naturais e dos inteiros.

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}$$

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

$$N \subset Z$$

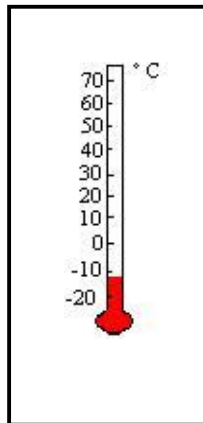
O **conjunto dos números inteiros** é representado pela letra **Z** maiúscula. Os números positivos são representados com o sinal de (+) positivo na frente ou com sinal nenhum (+2 ou 2), já os números negativos são representados com o sinal de negativo (-) na sua frente (-2).

► Os números inteiros são encontrados com frequência em nosso cotidiano, por exemplo:

♦ Exemplo 1:

Um termômetro em certa cidade que marcou 10°C acima de zero durante o dia, à noite e na manhã seguinte o termômetro passou a marcar 3°C abaixo de zero. Qual a relação dessas temperaturas com os números inteiros?

Quando falamos *acima de zero*, estamos nos referindo aos *números positivos* e quando falamos dos números *abaixo de zero* estamos referindo aos *números negativos*.



+10° C ----- 10° C acima de zero

- 3° C ----- 3° C abaixo de zero

♦ Exemplo 2:

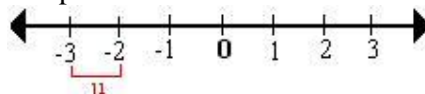
Vamos imaginar agora que uma pessoa tem R\$500,00 depositados num banco e faça sucessivas retiradas:

- dos R\$500,00 retira R\$200,00 e fica com R\$300,00
- dos R\$300,00 retira R\$200,00 e fica com R\$100,00
- dos R\$100,00 retira R\$200,00 e fica devendo R\$ 100,00

A última retirada fez com que a pessoa ficasse devendo dinheiro ao banco. Assim:

Dever R\$100,00 significa ter R\$100,00 menos que zero. Essa dívida pode ser representada por – **R\$100,00**.

► Oposto de um número inteiro



O oposto de um número positivo é um número negativo simétrico. Por exemplo: o oposto de +2 é -2; o oposto de -3 é +3.

► O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos:

- Inteiros não – nulos

São os números inteiros, menos o zero. Na sua representação devemos colocar * ao lado do Z.

$$Z^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$$

- Inteiros não positivos

São os números negativos incluindo o zero. Na sua representação deve ser colocado - ao lado do Z.

$$Z_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$$

- Inteiros não positivos e não – nulos

São os números inteiros do conjunto do Z_- excluindo o zero. Na sua representação devemos colocar o _ e o * ao lado do Z.

$$Z^*_ - = \{..., -3, -2, -1\}$$

- Inteiros não negativos

São os números positivos incluindo o zero. Na sua representação devemos colocar o + ao lado do Z.

$$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

O Conjunto Z_+ é igual ao Conjunto dos N

- Inteiros não negativos e não - nulos

São os números do conjunto Z_+ , excluindo o zero. Na sua representação devemos colocar o + e o * ao lado do Z.

$$Z^*_ + = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

O Conjunto $Z^*_ +$ é igual ao Conjunto N^*

Números Reais

O conjunto dos números reais surge para designar a união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. É importante lembrar que o conjunto dos números racionais é formado pelos seguintes conjuntos: Números Naturais e Números Inteiros. Vamos exemplificar os conjuntos que unidos formam os números reais. Veja:

Números Naturais (N): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,

Números Inteiros (Z): ..., -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Números Racionais (Q): 1/2, 3/4, 0,25, -5/4,

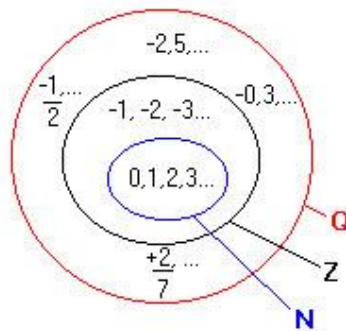
Números Irracionais (I): $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$, $1,32365498\dots$, $3,141592\dots$

Podemos concluir que o conjunto dos números reais é a união dos seguintes conjuntos:

$$\mathbf{N \cup Z \cup Q \cup I = R \text{ ou } Q \cup I = R}$$

Os números reais podem ser representados por qualquer número pertencente aos conjuntos da união acima. Essas designações de conjuntos numéricos existem no intuito de criar condições de resolução de equações e funções, as soluções devem ser dadas obedecendo aos padrões matemáticos e de acordo com a condição de existência da incógnita na expressão.

Números Racionais



Interseção dos conjuntos: Naturais, Inteiros e Racionais.

Os números decimais são aqueles números que podem ser escritos na forma de fração.

Podemos escrevê-los de algumas formas diferentes:

Por exemplo:

♦ Em forma de fração ordinária: $\frac{6}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{9}{3}$ e todos os seus opostos.

Esses números tem a forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

♦ Números decimais com finitas ordens decimais ou extensão finita:

$$\begin{aligned} 0,3 &= \frac{3}{10} \\ 0,25 &= \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \\ -0,75 &= \frac{-75}{100} = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Esses números têm a forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

♦ Número decimal com infinitas ordens decimais ou de extensão infinita periódica. São dízimas periódicas simples ou compostas:

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

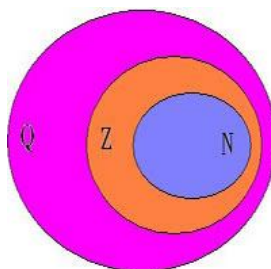
$$\frac{4}{11} = 0,363636...$$

$$\frac{23}{90} = 0,2555...$$

As dízimas periódicas de expansão infinita, que podem ser escritas na forma $\frac{a}{b}$: com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

► O conjunto dos números racionais é representado pela letra **Q** maiúscula.

$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$$



► Outros subconjuntos de **Q**:

Além de **N** e **Z**, existem outros subconjuntos de **Q**.

\mathbb{Q}^* ----- É o conjunto dos números racionais diferentes de zero.

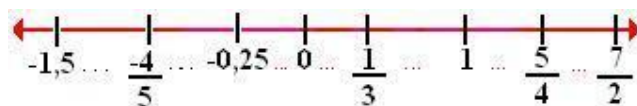
\mathbb{Q}_+ ----- É o conjunto dos números racionais positivos e o zero.

\mathbb{Q}_- ----- É o conjunto dos números racionais negativos e o zero.

\mathbb{Q}_+^* ----- É o conjunto dos números racionais positivos.

\mathbb{Q}_-^* ----- É o conjunto dos números racionais negativos.

► Representação Geométrica



Entre dois números racionais existem infinitos outros números racionais.

Racionais Positivos e Racionais Negativos

O quociente de muitas divisões entre números naturais é um número racional absoluto.

$$2 : 5 = \frac{2}{5} \quad 35 : 3 = \frac{35}{3} \quad 8 : 100 = 0,08$$

Números racionais positivos e números racionais negativos que sejam quocientes de dois negativos que sejam quocientes de dois números inteiros, com divisor diferente de zero.

Por exemplo:

$$(+17) : (-4) = -\frac{17}{4}$$

$-\frac{17}{4}$ é um número racional negativo

Números Racionais Positivos

Esses números são quocientes de dois números inteiros com sinais iguais.

$$\cdot \quad (+8) : (+5) = \frac{+8}{+5} = +\frac{8}{5}$$

$$\cdot \quad (-3) : (-5) = \frac{-3}{-5} = +\frac{3}{5}$$

Números Racionais Negativos

São quocientes de dois números inteiros com sinais diferentes.

$$\cdot \quad (-8) : (+5) = \frac{-8}{+5} = -\frac{8}{5}$$

$$\cdot \quad (-3) : (+5) = \frac{-3}{+5} = -\frac{3}{5}$$

Números Racionais: Escrita Fracionária

$-\frac{2}{6}$, $-\frac{3}{9}$, e $-\frac{8}{24}$ têm valor igual a $-\frac{1}{3}$ e representam o número racional $-\frac{1}{3}$.

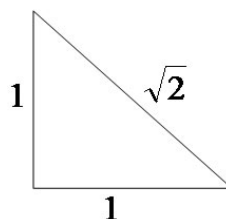
Obs.: Todo número inteiro é um número racional, pois pode ser escrito na forma fracionária:

$$-2 = \frac{-4}{+2}$$

Denominamos número racional o quociente de dois números inteiros (divisor diferente de zero), ou seja, todo número que pode ser colocado na forma fracionária, em que o numerador e denominador são números inteiros.

Números Irracionais

A história dos números reais não é recente, eles foram surgindo ao longo de inúmeras descobertas Matemáticas, um dos primeiros irracionais está diretamente ligado ao Teorema de Pitágoras, o número $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de dois) surge da aplicação da relação de Pitágoras no triângulo retângulo com catetos medindo 1 (uma) unidade.



Nessa época, o conhecimento permitia extrair somente a raiz de números que possuíam quadrados inteiros, por exemplo, $4^2 = 16$, portando $\sqrt{16} = 4$ e no caso de $\sqrt{2}$ não existia um número que, elevado ao quadrado, resultasse 2.

Outro irracional surgiu da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, resultando um número constante igual a 3,141592....., representado pela letra grega π (lê-se pi). O número de Ouro também é considerado irracional, através de pesquisas e observações o Matemático Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, estabeleceu a seguinte sequência numérica: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, Essa sequência é formada obedecendo a uma montagem lógica, observe:

1
1 + 1 = 2
2 + 1 = 3
3 + 2 = 5
5 + 3 = 8
8 + 5 = 13
13 + 8 = 21
21 + 13 = 34
34 + 21 = 55

Note que o próximo número da sequência é formado através da soma entre o atual e seu sucessor. Nessa sequência numérica, o número irracional surge da divisão entre um elemento e seu antecessor, a partir do número 21, veja:

5 : 3 = 1,666666.....
8 : 5 = 1,6
13 : 8 = 1,625
21 : 13 = 1,6153846153846153846153846153846 ...
34 : 21 = 1,6190476190476190476190476190476 ...
55 : 34 = 1,6176470588235294117647058823529 ...

John Napier, matemático que intensificou os estudos sobre logaritmos, desenvolveu uma expressão que, ao ser calculada, resulta em um número irracional:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284 \dots$$

O número irracional não admite representação na forma de fração (contrário dos números racionais) e também quando escrito na forma de decimal é um número infinito e não periódico.

Exemplos

$\pi = 3,141592653589793238462\dots$ no número pi, após a virgula, não existe formação de períodos, por isso é considerado irracional.

0,232355525447... é infinito e não é dízima periódica (pois os algarismos depois da vírgula não formam períodos), então é irracional.

2,102030569... não admite representação fracionária, pois não é dízima periódica.

Se utilizarmos uma calculadora veremos que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, entre outros, são valores que representam números irracionais.

A representação do conjunto dos irracionais é feita pela letra I maiúscula.

Introdução às Bases de Numeração

1. Representação numérica em diferentes bases

1.1 Base 10

A representação numérica comum utiliza a base 10. Isso significa que há 10 algarismos (ou dígitos) diferentes, denotados pelos símbolos 0 a 9.

1.2 Significado da representação numérica

Em suma, da direita para a esquerda: um algarismo na primeira posição vale por si próprio, na segunda vale pela base, na terceira pela base ao quadrado, na quarta pela base ao cubo e assim sucessivamente. Por exemplo:

$$8317 \text{ vale } 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10 + 7$$

Uma vez que 100 é 1, podemos uniformizar a representação:

$$8317 \text{ vale } 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

Em concordância com esta notação designamos as posições, da direita para esquerda, por posição 0, 1, 2 e assim sucessivamente. E designamos a potência respectiva por peso.

Assim, dizemos que um algarismo na posição 0 tem peso 10^0 , ou seja 1; na posição 1 tem peso 10^1 , ou seja 10; na posição 2 tem peso 10^2 ou seja 100, etc.

Genericamente, um dígito d_i na posição i tem peso 10^i , ou seja, vale $d_i \times 10^i$

Em geral, dado um número com os dígitos:

$d_n d_{n-1} d_2 d_1 d_0$

o seu valor numérico é:

$$d_n \times 10^n + d_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + d_2 \times 10^2 + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0$$

Dízimas periódicas

Há frações que não possuem representações decimal exata. Por exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0,333... \quad \frac{5}{6} = 0,833...$$

Aos numerais decimais em que há repetição periódica e infinita de um ou mais algarismos, dá-se o nome de numerais decimais periódicos ou dízimas periódicas. Numa dízima periódica, o algarismo ou algarismos que se repetem infinitamente, constituem o período dessa dízima.

As dízimas classificam-se em dízimas periódicas **simples** e dízimas periódicas **compostas**. Exemplos:

$\frac{5}{9} = 0,555...$ (período: 5)	$\frac{7}{3} = 2,333...$ (período: 3)	$\frac{4}{33} = 0,1212...$ (período: 12)
--	--	---

São dízimas periódicas **simples**, uma vez que o período apresenta-se logo após a vírgula.

$\frac{1}{45} = 0,0222...$ Período: 2 Parte não periódica: 0	$\frac{1.039}{900} = 1,15444...$ Período: 4 Período não periódica: 15	$\frac{61}{495} = 0,1232323...$ Período: 23 Parte não periódica: 1
--	---	--

São dízimas periódicas **compostas**, uma vez que entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica.

Observações:

Consideramos parte não periódica de uma dízima o termo situado entre vírgulas e o período. Excluimos portanto da parte não periódica o inteiro.

Podemos representar uma dízima periódica das seguintes maneiras:

0,555... ou $0,\bar{5}$

0,12323... ou $0,12\bar{3}$

Geratriz de uma dízima periódica

É possível determinar a fração (número racional) que deu origem a uma dízima periódica. Denominamos esta fração de **geratriz da dízima periódica**. Procedimentos para determinação da geratriz de uma dízima:

Dízima simples

A geratriz de uma dízima simples é uma fração que tem para numerador o período e para denominador tantos noves quantos forem os algarismos do período. Exemplos:

$$0,777... = \frac{7}{9}$$

$$0,2323... = \frac{23}{99}$$

Dízima Composta:

$\frac{n}{d}$

A geratriz de uma dízima composta é uma fração da forma $\frac{n}{d}$, onde

n é a parte não periódica seguida do período, menos a parte não periódica.

d tantos noves quantos forem os algarismos do período seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periódica.

Exemplos:

$$0,1252525... = \frac{125 - 1}{990} = \frac{124}{990}$$

$$0,047777... = \frac{047 - 04}{900} = \frac{43}{900}$$

Frações contínuas (*fraction continued*). Uma sequência de frações encadeadas. A fração contínua de um número "r" é uma expressão semelhante a figura ao lado. Se "r" é um número racional a expansão termina.

$$r = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}}$$

Fração contínua simples

A fração contínua é simples se $b_j = 1, j = 1, 2, \dots, n, \dots$, ou seja, $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$. Esse tipo de fração pode ser representada como $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. Uma fração contínua simples é finita se puder ser expressa na

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

forma: Uma fração contínua simples é periódica se (e somente se) essa fração representar um irracional que é a solução real positiva de uma equação quadrática.