

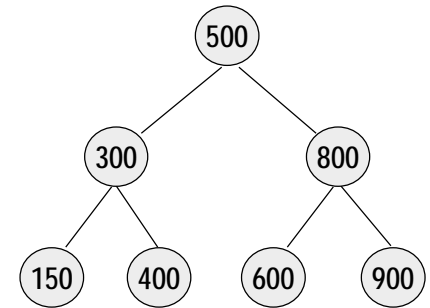
Árvores Balanceadas

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Árvores Binárias de Pesquisa

- Apresentam uma relação de ordem
- A ordem é definida pela chave
- Operações:
 - inserir
 - consultar
 - excluir



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Problemas com ABP

Exemplo:

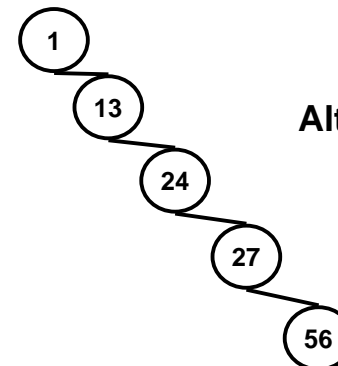
- Inserção: 10, 5, 15, 20, 25, 30, 35
- Inserção: 1, 13, 24, 27, 56

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Problemas com ABP

- Desbalanceamento progressivo
- Exemplo:
 - inserção: 1, 13, 24, 27, 56



Alternativa de solução:

- Árvores balanceadas
- AVL

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

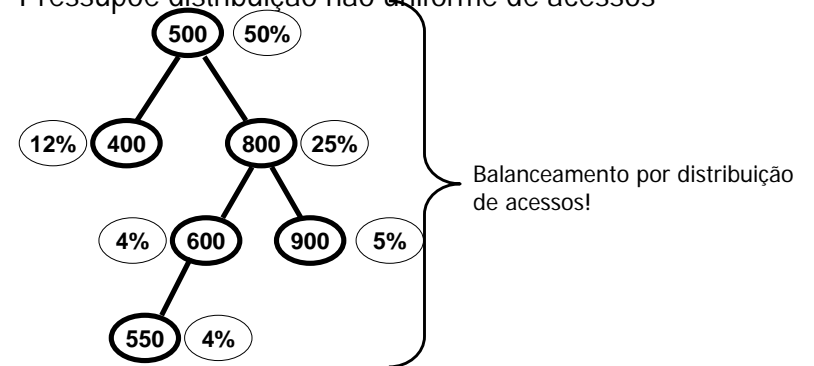
Estruturas de Dados - Árvores

Balanceamento de Árvores

- Distribuição equilibrada dos nós
 - otimizar as operações de consulta
 - diminuir o número médio de comparações
- Distribuição
 - uniforme
 - não uniforme
 - chaves mais solicitadas mais perto da raiz

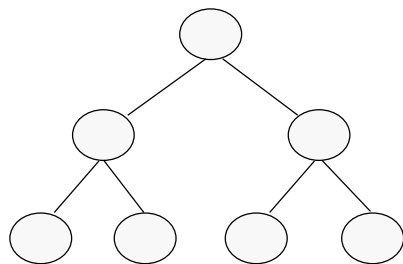
Por Frequência

- Por frequência de acesso
 - Pressupõe distribuição não uniforme de acessos

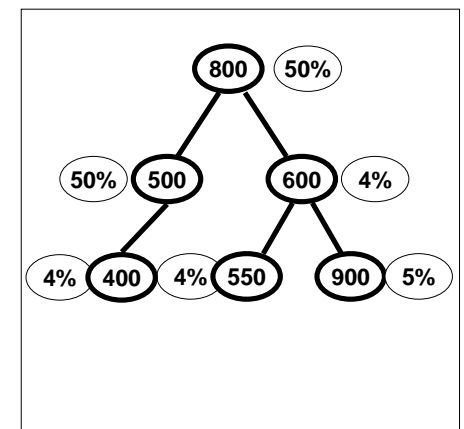
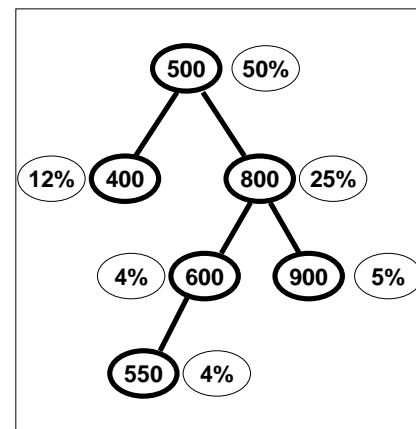


Árvores balanceadas por ALTURA

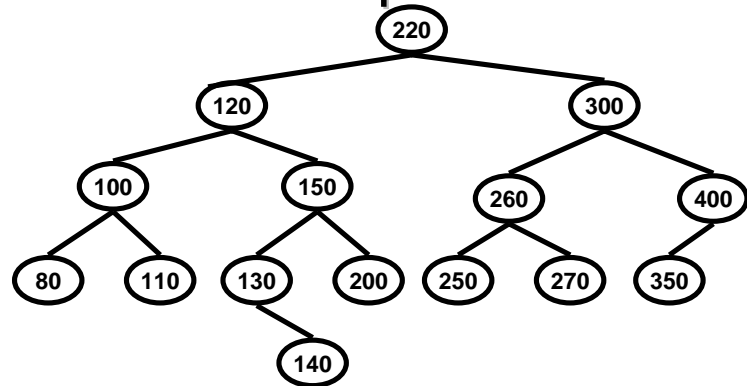
Uma árvore binária é
completamente balanceada
se a distância média dos nodos até a raiz for mínima



Por Frequência X Por Altura



Balanceamento por ALTURA



Árvore não completamente balanceada

Árvores AVL

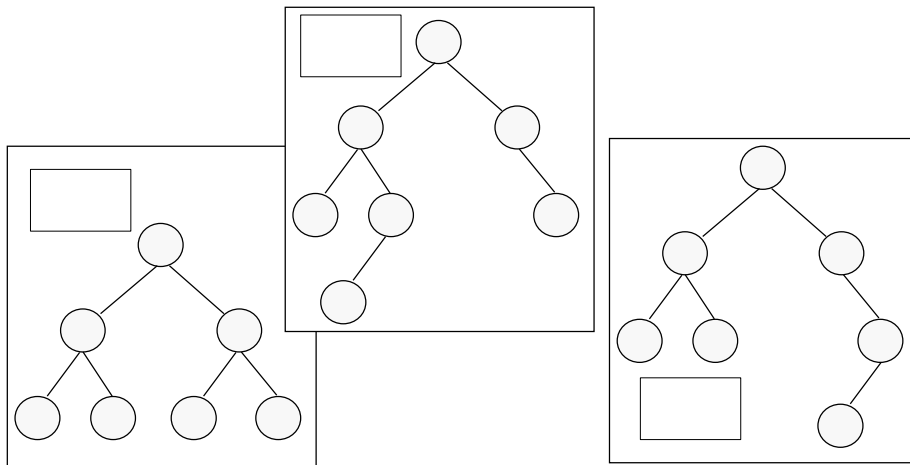
Adelson-Velskii e Landis (1962)

Uma árvore AVL é uma **árvore binária de pesquisa (ABP)** construída de tal modo que a altura de sua subárvore direita difere da altura da subárvore esquerda de no máximo 1.

Árvores AVL

Adelson-Velskii e Landis (1962)

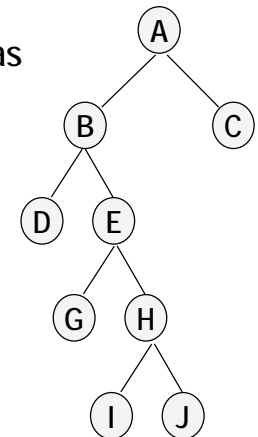
- árvores **FATOR(1)** são chamadas **Árvores AVL**



Árvores balanceadas por altura

$HB(k)$ -Tree \rightarrow Height-Balanced k -Tree

- árvore binária
- para qualquer nodo, as alturas de suas duas subárvores não diferem de mais do que k unidades
- cada uma das subárvores do nodo apresenta a propriedade **FATOR(k)**



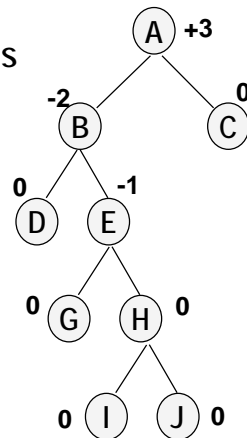
Árvores balanceadas por altura

HB(k)-Tree → Height-Balanced k-Tree

- árvore binária
- para qualquer nodo, as alturas de suas duas subárvores não diferem de mais do que k unidades
- cada uma das subárvores do nodo apresenta a propriedade $FATOR(k)$

Ex: verificar se a árvore ao lado é

FATOR(1) → Não
FATOR(2) → Não
FATOR(3) → Sim



Árvores AVL

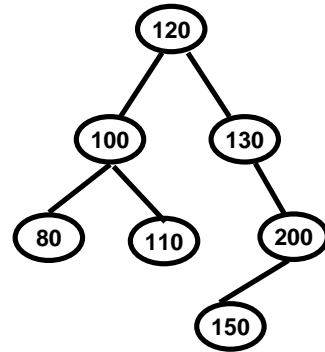
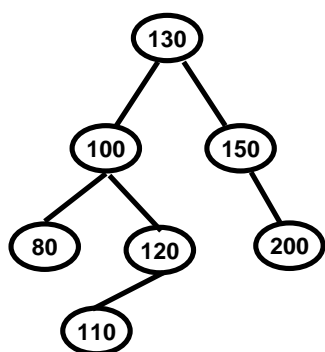
Adelson-Velskii e Landis (1962)

- árvores FATOR(1) são chamadas Árvores AVL

Uma árvore AVL é uma **árvore binária de pesquisa (ABP)** construída de tal modo que a altura de sua subárvore direita difere da altura da subárvore esquerda de no máximo 1.

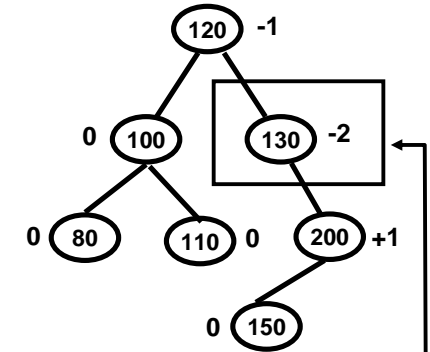
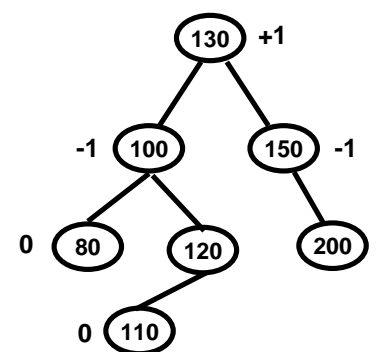
Exercício:

Verifique quais das ABP são AVL:



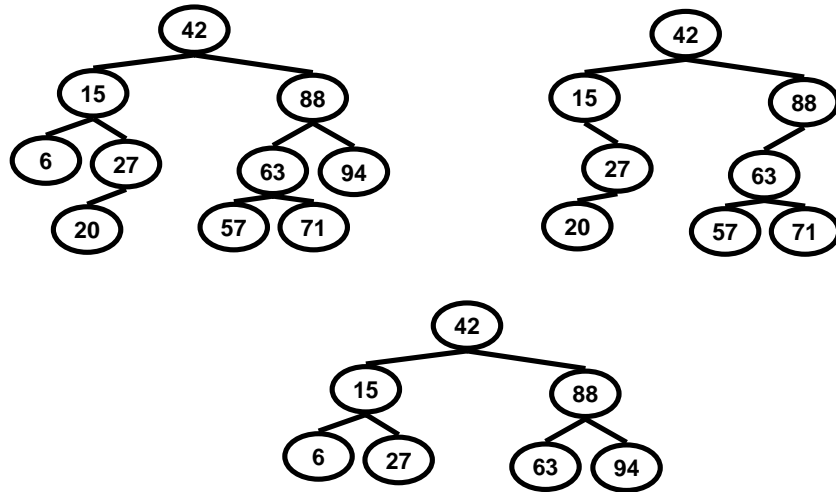
Exercício: Resposta

Verifique quais das ABP são AVL:



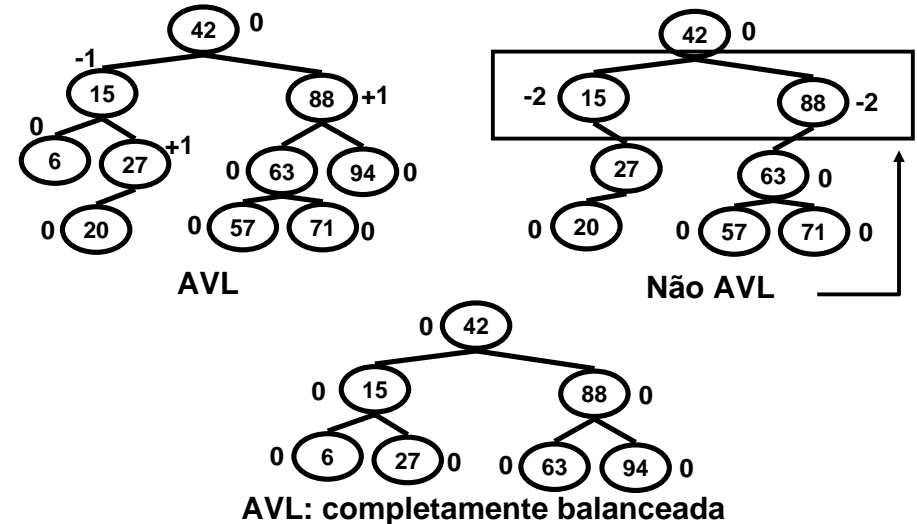
Exercício

Verifique quais das ABP são AVL:



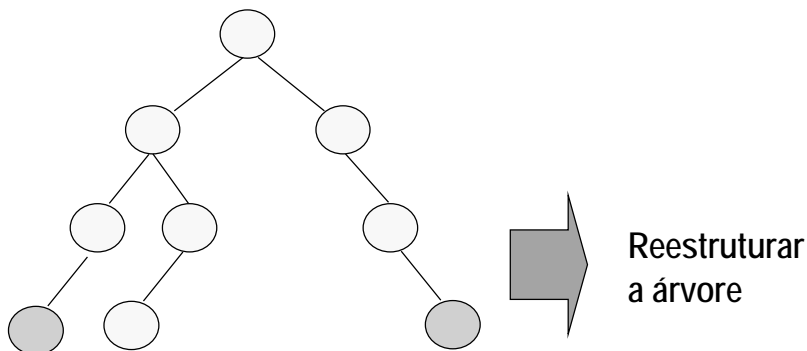
Exercício: Resposta

Verifique quais das ABP são AVL:



Operações

- por exemplo: INSERÇÃO
- deve ser preservada a propriedade AVL



Operações

- Como manter uma árvore AVL sempre balanceada após uma inserção ou exclusão?
 - Através de uma operação de ROTAÇÃO
- Característica da operação
 - preservar a ordem das chaves
 - basta uma execução da operação de rotação para tornar a árvore AVL novamente

Balanceamento de Árvore AVL com Rotação

☞ Rotação Simples

- à direita
- à esquerda

☞ Rotação Dupla

- à direita
- à esquerda

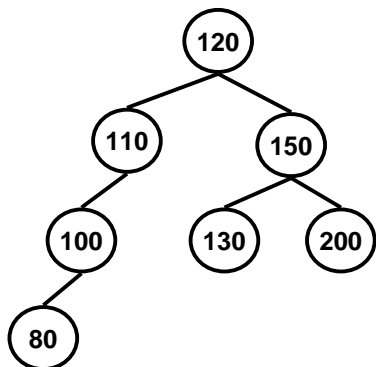
Rotação Simples DIREITA

Toda vez que uma subárvore fica com um fator:

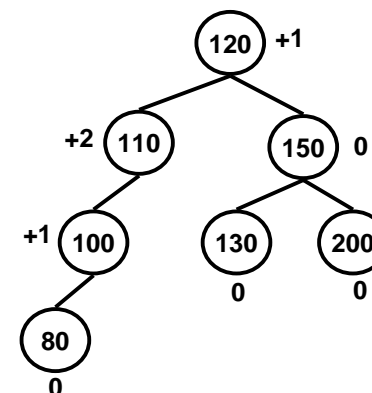
- positivo e sua subárvore da esquerda também tem um fator positivo

ROTAÇÃO SIMPLES À DIREITA

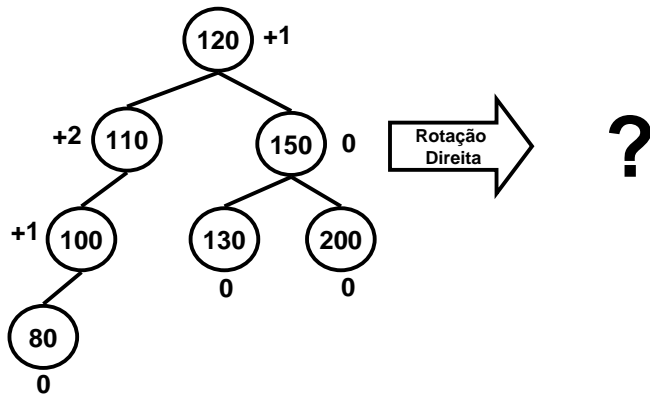
Rotação Direita



Rotação Direita



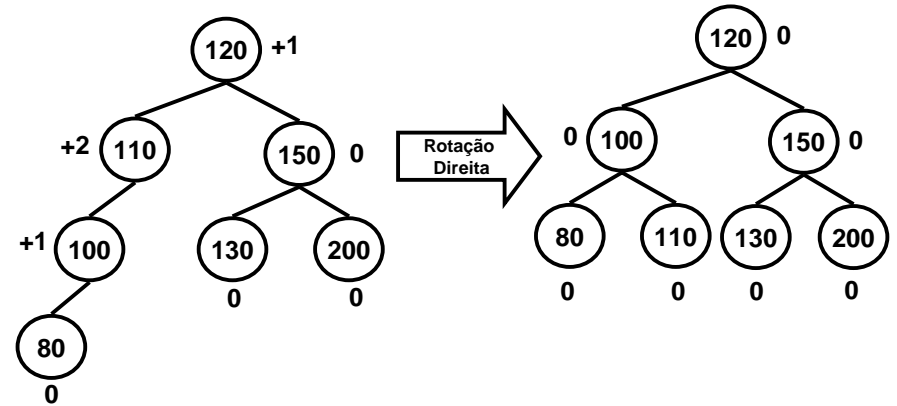
Rotação Direita



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Rotação Direita

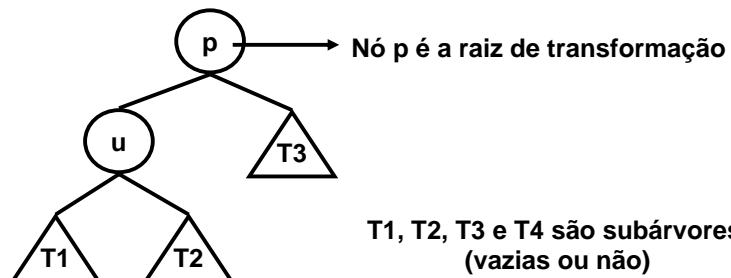


Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Balanceamento de Árvore AVL com Rotação

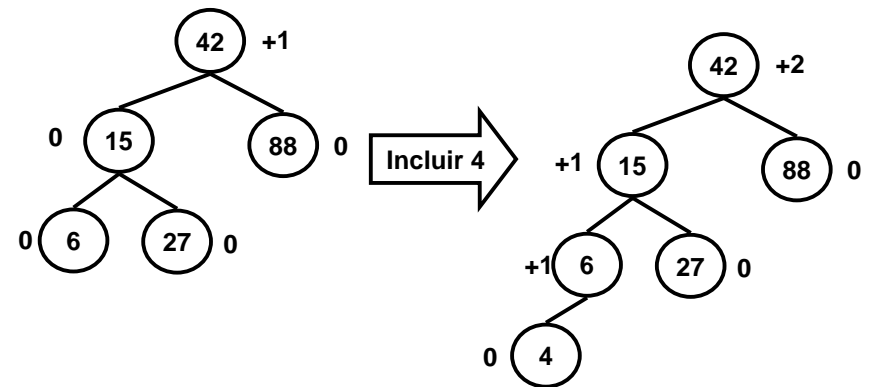
☞ Rotação Simples
• à direita



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

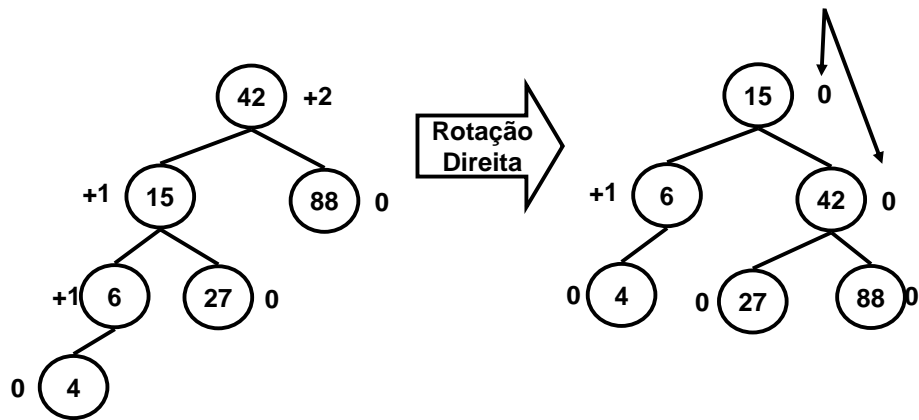
Rotação Direita



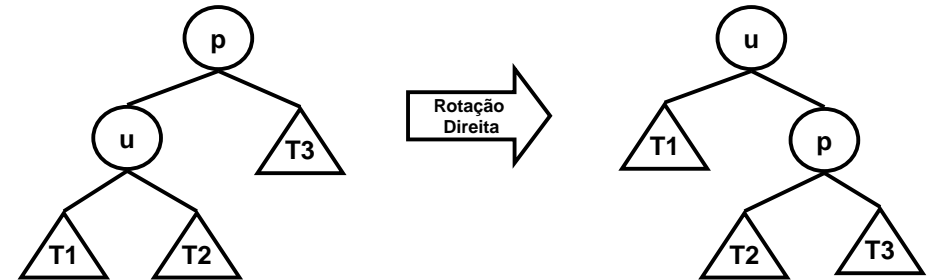
Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

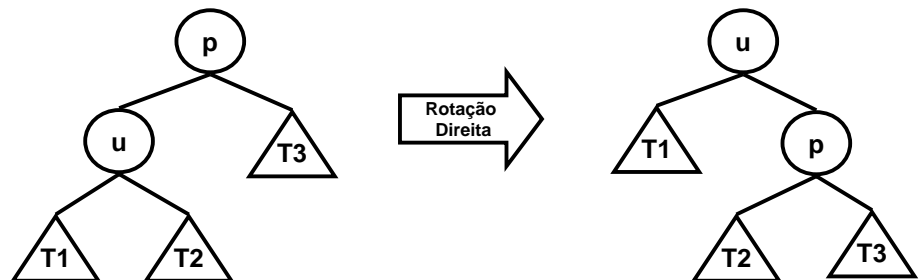
Rotação Direita



Rotação Direita



Rotação Direita



```

procedure rotacao_direita(var pt: pno;
var ptu: pno;
begin
    ptu:= pt^.esq;
    pt^.esq:= ptu^.dir;
    ptu^.dir:= pt;
    pt^.bal:= 0;
    pt:= ptu;
end;
    
```

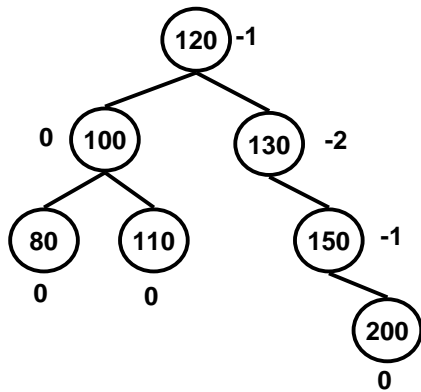
Rotação Simples ESQUERDA

Toda vez que uma subárvore fica com um fator:

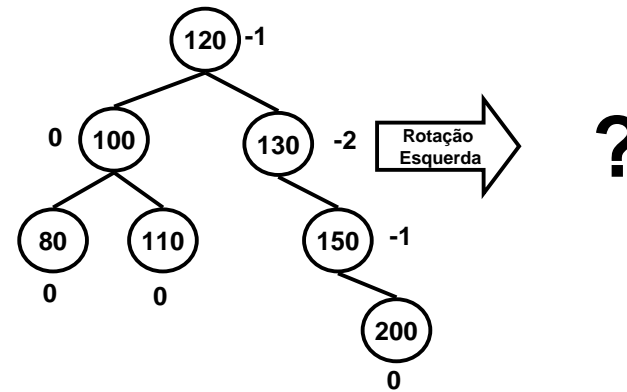
- negativo e sua subárvore da direita também tem um fator negativo

ROTAÇÃO SIMPLES À ESQUERDA

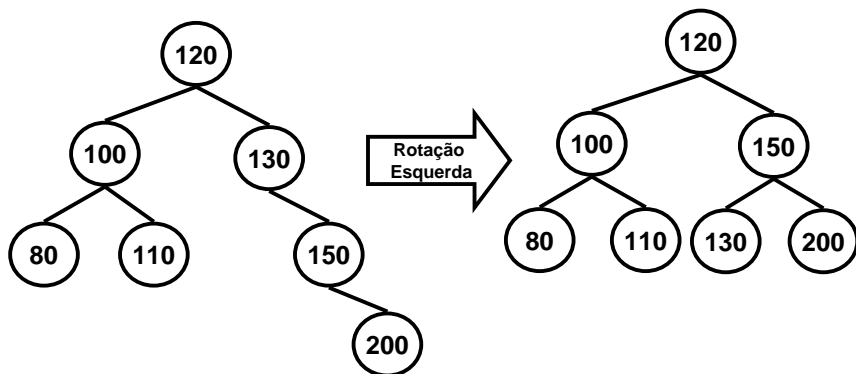
Rotação Esquerda



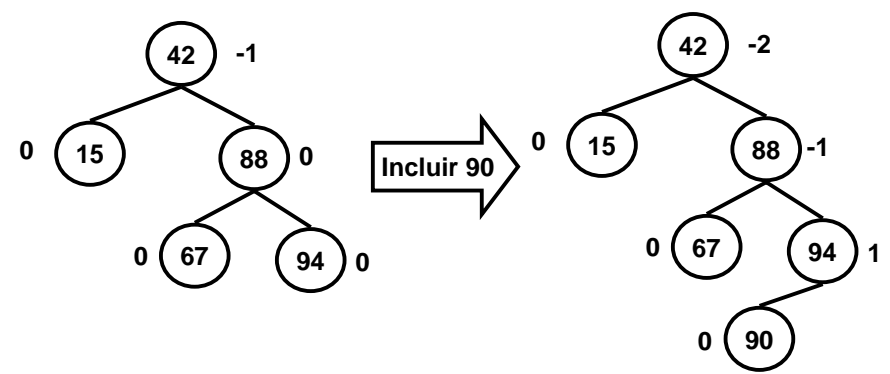
Rotação Esquerda



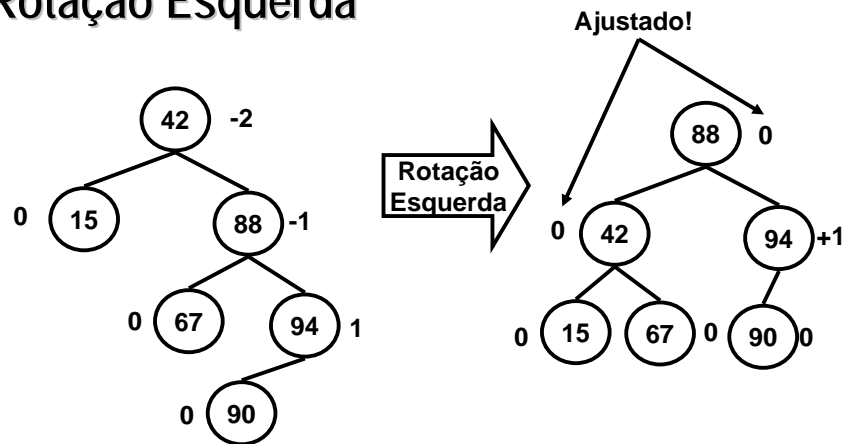
Rotação Esquerda



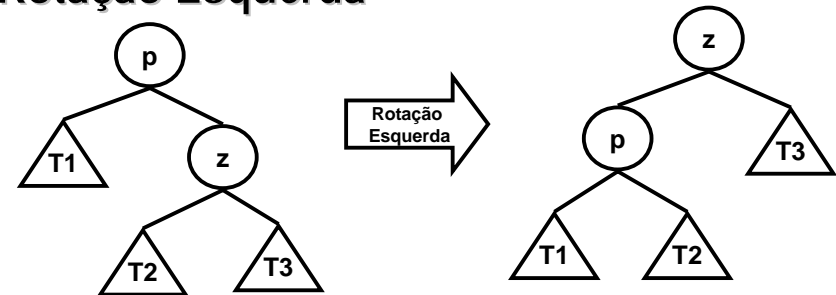
Rotação Esquerda



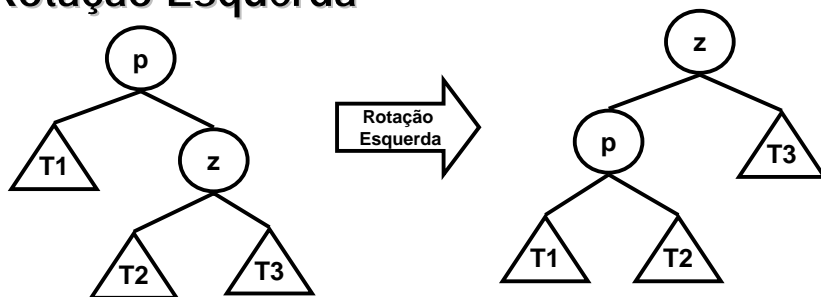
Rotação Esquerda



Rotação Esquerda



Rotação Esquerda



```

procedure rotacao_esquerda(var pt: pno);
var ptu: pno;
begin
  ptu:= pt^.dir;
  pt^.dir:= ptu^.esq;
  ptu^.esq:= pt;
  pt^.bal:= 0;
  pt:= ptu;
end;
    
```

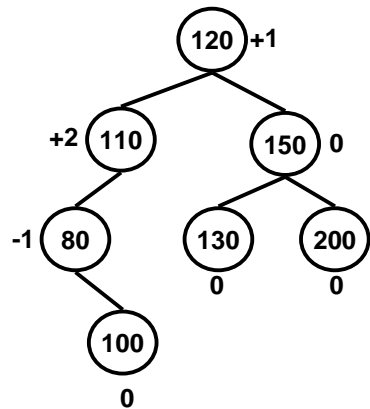
Rotação Dupla DIREITA

Toda vez que uma subárvore fica com um fator:

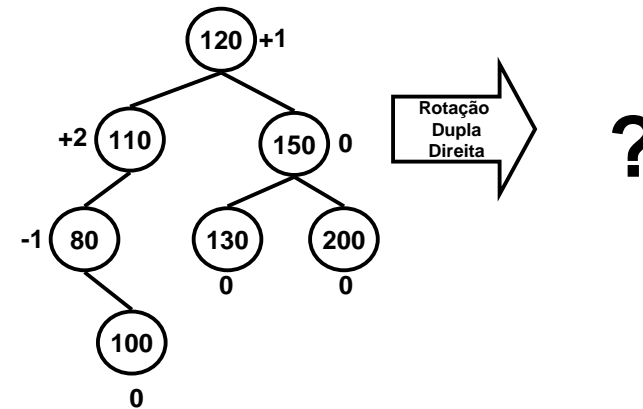
- positivo e sua subárvore da esquerda tem um fator negativo

ROTAÇÃO DUPLA À DIREITA

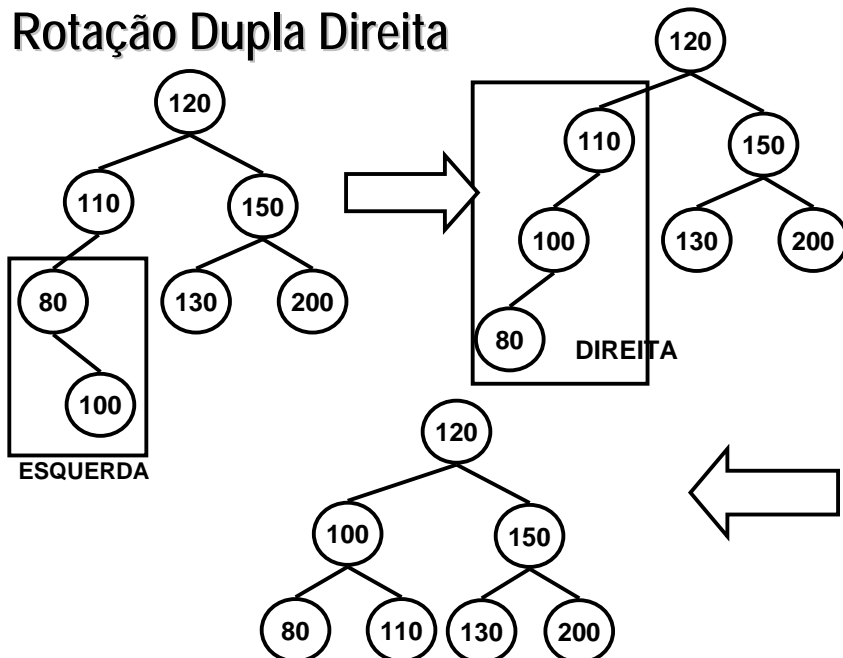
Rotação Dupla Direita



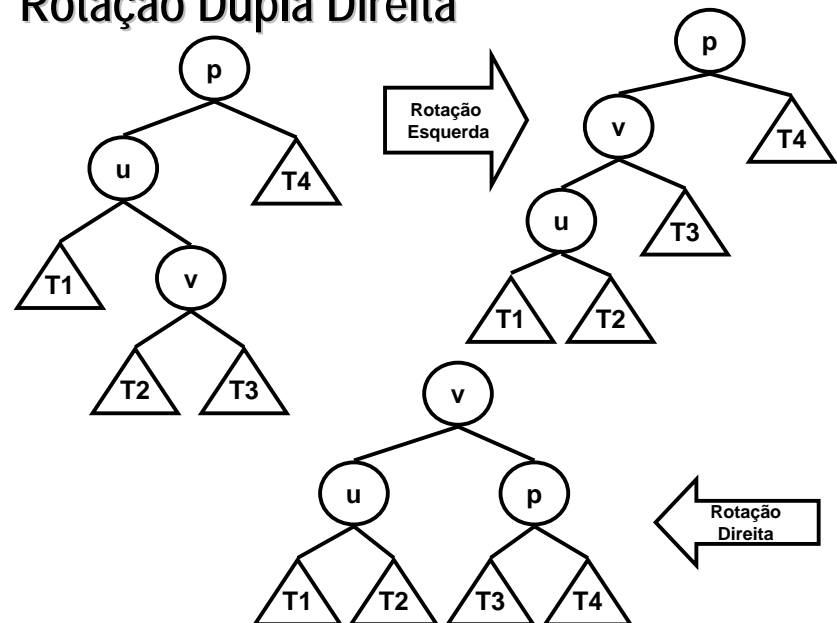
Rotação Dupla Direita



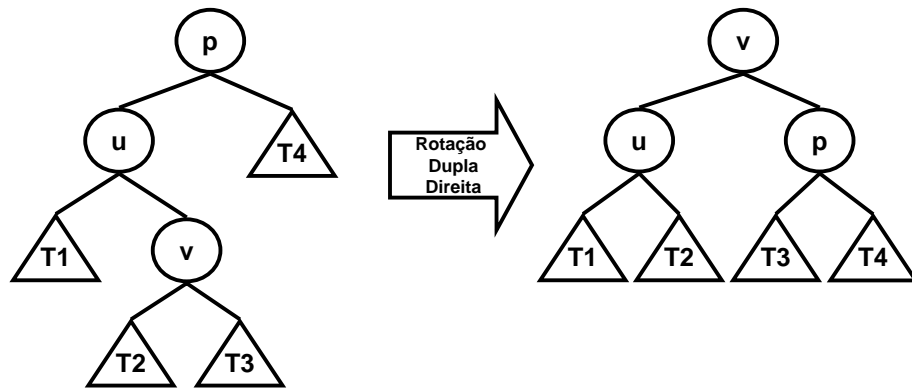
Rotação Dupla Direita



Rotação Dupla Direita



Rotação Dupla Direita

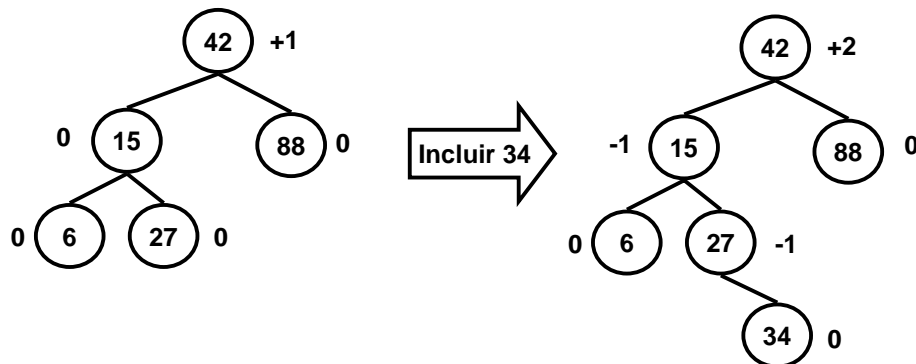


Rotação Dupla Direita

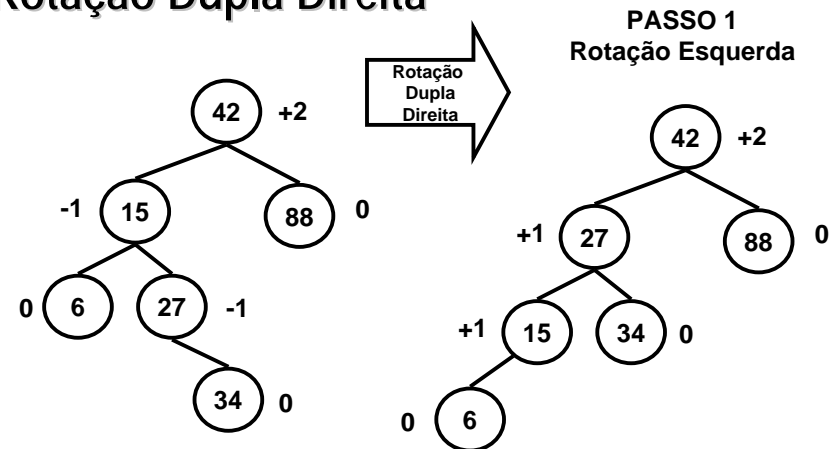
```

procedure rotacao_esquerda_direita (var pt: pno);
var ptu, ptv: pno;
begin
  ptu:= pt^.esq;
  ptv:= ptu^.dir;
  ptu^.dir:= ptv^.esq;
  ptv^.esq:= ptu;
  pt^.esq:= ptv^.dir;
  ptv^.dir:= pt;
  if ptv^.bal = -1
    then pt^.bal:= 1
    else pt^.bal:= 0;
  if ptv^.bal = 1
    then ptu^.bal:= -1;
    else ptu^.bal:= 0;
  pt:= ptv;
end;
    
```

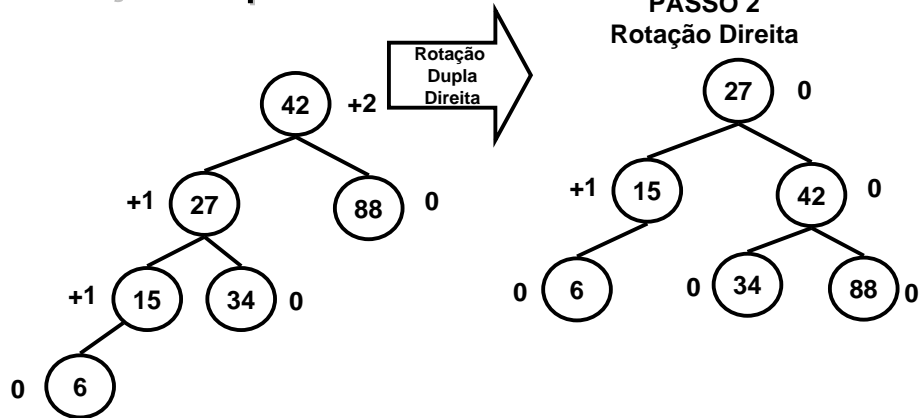
Rotação Dupla Direita



Rotação Dupla Direita



Rotação Dupla Direita



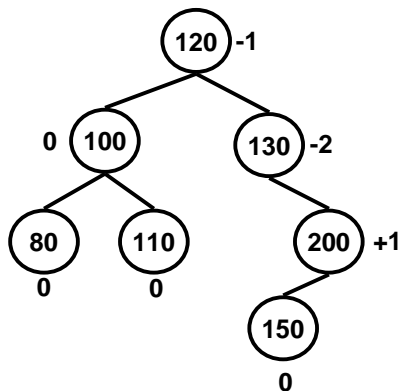
Rotação Dupla ESQUERDA

Toda vez que uma subárvore fica com um fator:

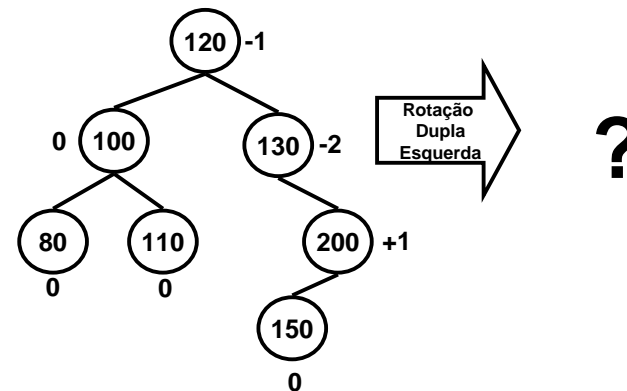
- negativo e sua subárvore da direita tem um fator positivo

ROTAÇÃO DUPLA À ESQUERDA

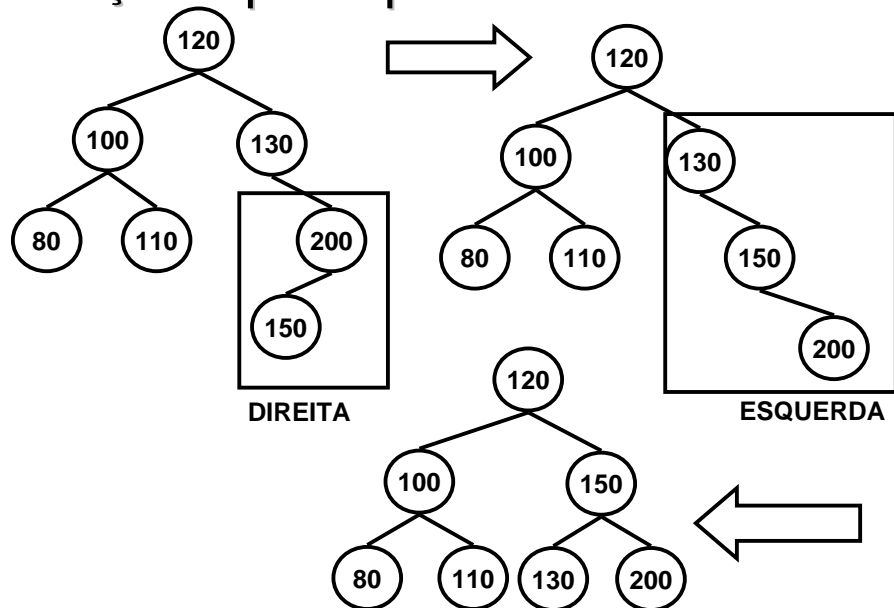
Rotação Dupla Esquerda



Rotação Dupla Esquerda



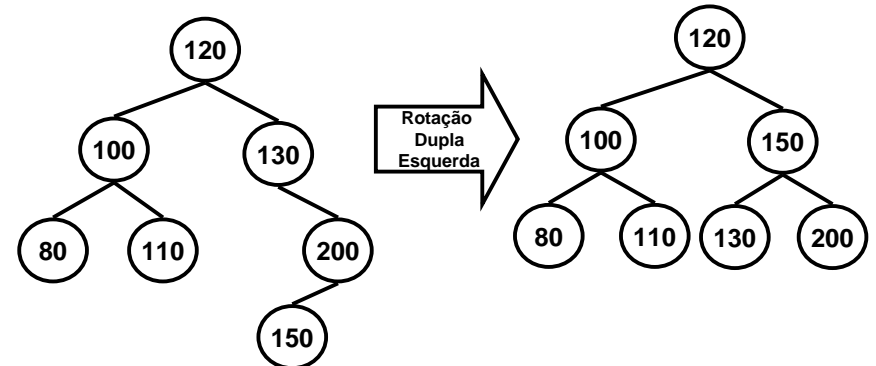
Rotação Dupla Esquerda



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

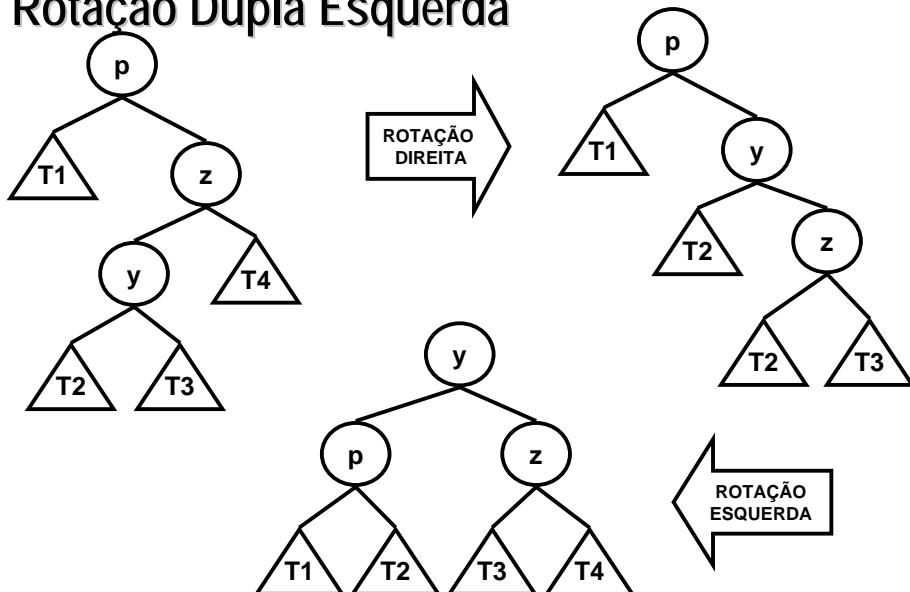
Rotação Dupla Esquerda



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

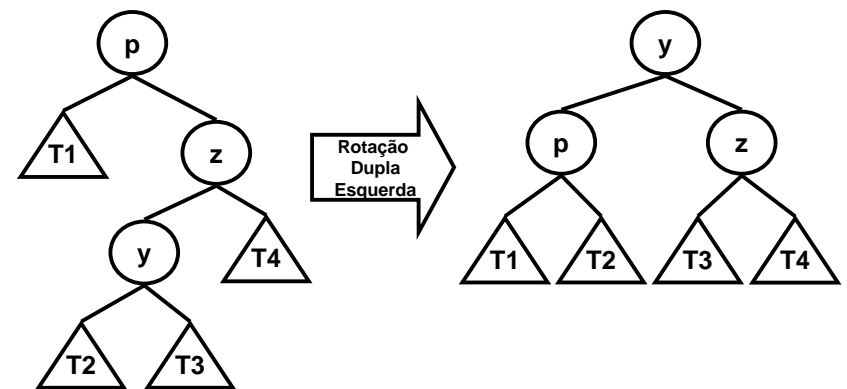
Rotação Dupla Esquerda



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Rotação Dupla Esquerda



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

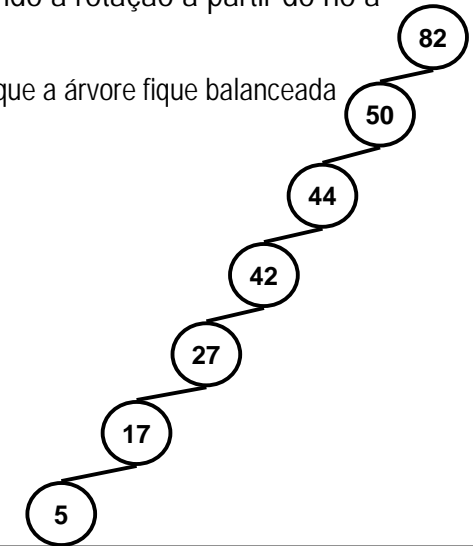
Estruturas de Dados - Árvores

Rotação Dupla Esquerda

```
procedure rotacao_direita_esquerda (var pt: pno);  
  var ptu, ptv: pno;  
begin  
  ptu:= pt^.dir;  
  ptv:= ptu^.esq;  
  ptu^.esq:= ptv^.dir;  
  ptv^.dir:= ptu;  
  pt^.dir:= ptv^.esq;  
  ptv^.esq:= pt;  
  if ptv^.bal = 1  
    then pt^.bal:= -1  
    else pt^.bal:= 0;  
  if ptv^.bal = -1  
    then ptu^.bal:= 1;  
    else ptu^.bal:= 0;  
  pt:= ptv;  
end;
```

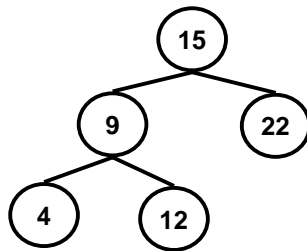
Exemplos de Rotação

- Re-estruturar a árvore fazendo a rotação a partir do nó a esquerda, imediato a raiz.
 - Repetir o procedimento até que a árvore fique balanceada
 - não precisa ser AVL



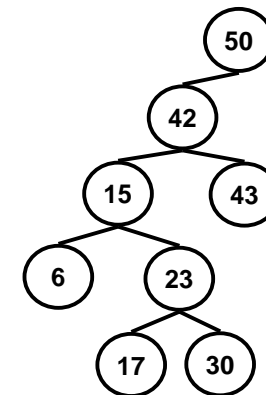
Exemplos de Rotação (Esquerda e Direita)

- Considere a árvore abaixo, no qual 12 está entre 9 e 15.
 - Fazendo a rotação direita em 9, onde ficará 12?
 - Terminada a rotação a direita, tente agora a rotação a esquerda em 15.

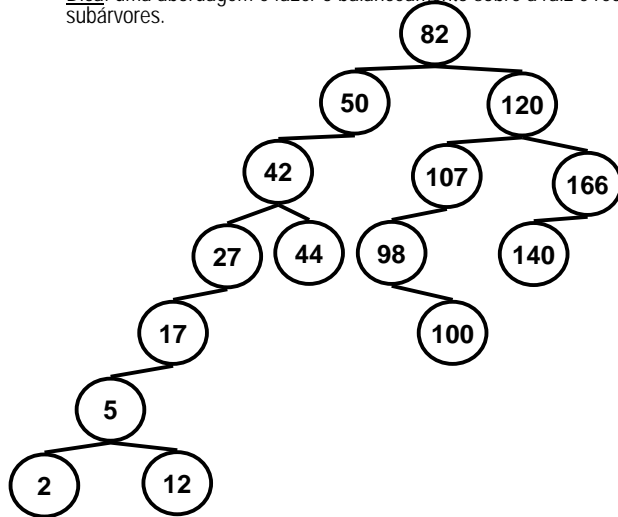


Exemplos de Rotação (dentro da árvore)

- Considere a árvore abaixo:
 - Execute a rotação em 15. O que acontece com o nó 42 (que é pai de 15)?
 - Execute agora a operação oposta em 42. O que acontece com 15 (que é pai de 42)?



- Mostre que a árvore abaixo pode ser completamente balanceada usando rotações a direita e a esquerda.
- Vamos ver quem consegue estruturar a árvore com o caminho mais curto da raiz até as folhas (altura da árvore)?
 - Dica: uma abordagem é fazer o balanceamento sobre a raiz e recursivamente nas suas subárvores.



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

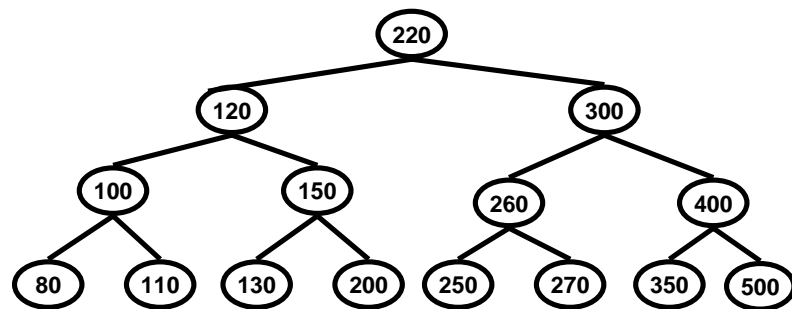
Exemplos de Rotação

<http://www.cs.queensu.ca/home/jstewart/applets/bst/bst-rotation.html>

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Inserção de Árvores AVL

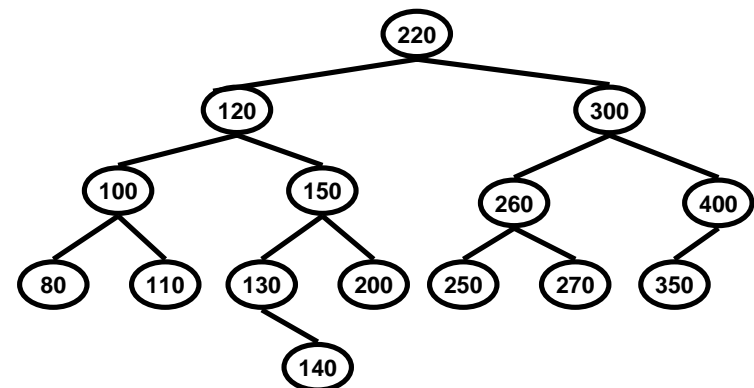


Excluir 500
Inserir 140

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Inserção de Árvores AVL



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

AVL

Adelson-Velskii e Landis (1962)

- árvores FATOR(1) são chamadas Árvores AVL

Uma árvore AVL é uma *árvore binária de pesquisa (ABP)* construída de tal modo que a altura de sua subárvore direita difere da altura da subárvore esquerda de no máximo 1.

FATOR (1)

[-1,1]

AVL - Rotações

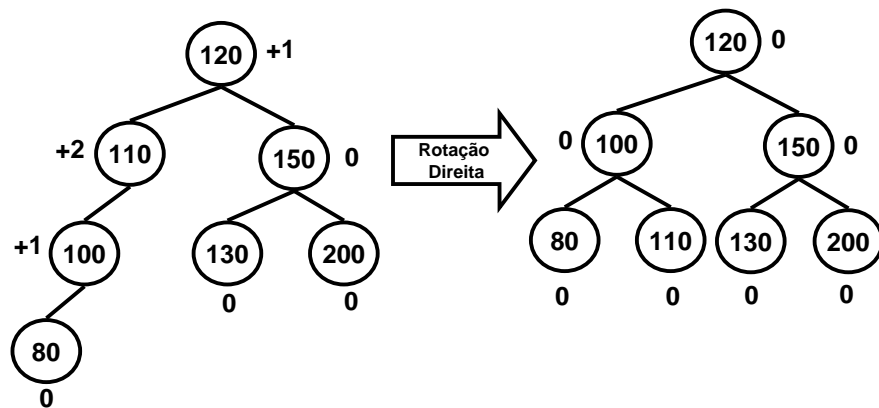
☞ Rotação Simples

- à direita
 - raiz fator positivo
 - subárvore fator positivo
- à esquerda
 - raiz – fator negativo
 - subárvore – fator negativo

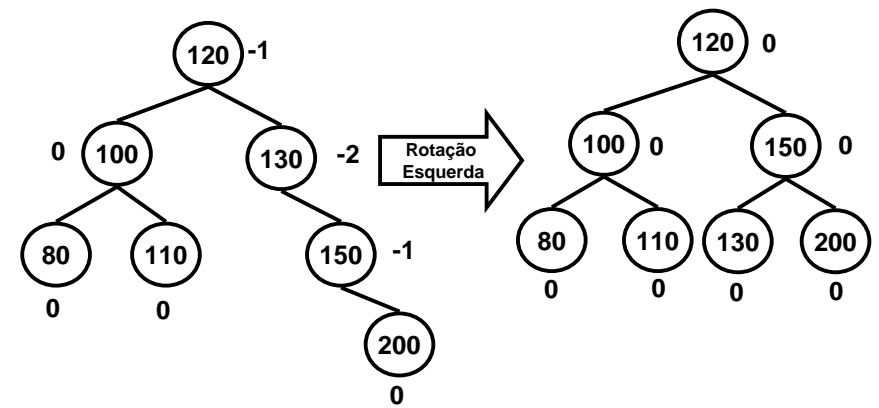
☞ Rotação Dupla

- à direita
 - raiz fator positivo
 - subárvore fator negativo
- à esquerda
 - raiz – fator negativo
 - subárvore – fator positivo

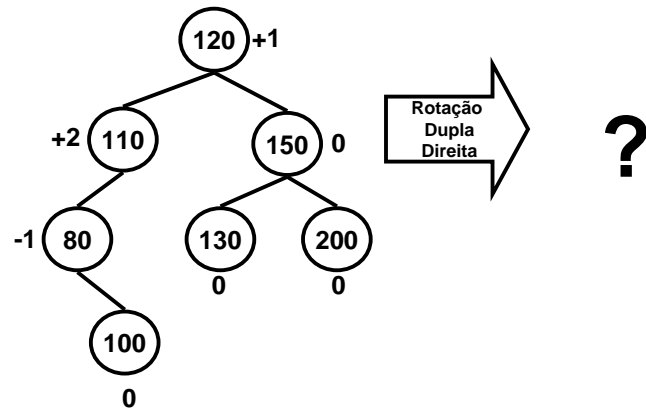
Rotação Direita



Rotação Esquerda



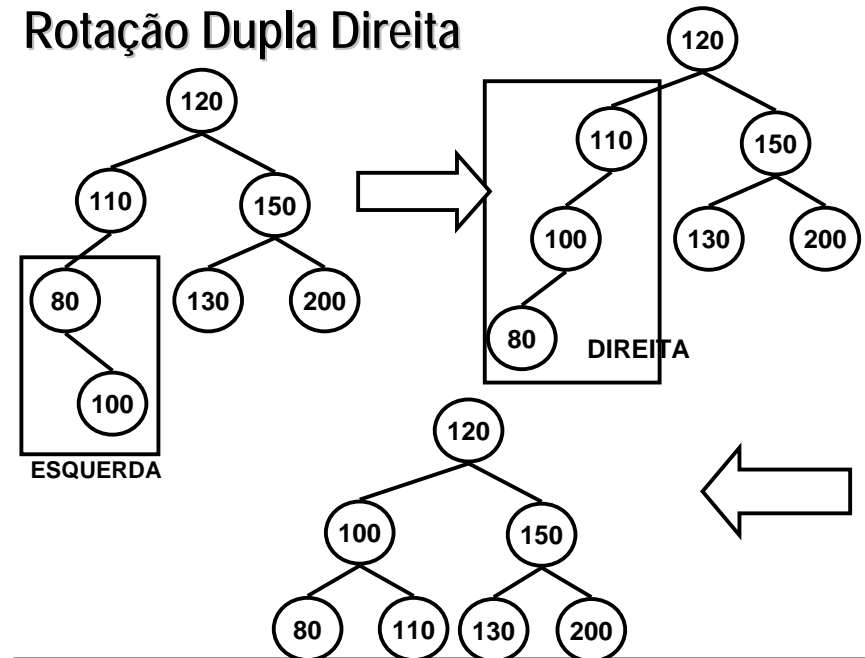
Rotação Dupla Direita



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

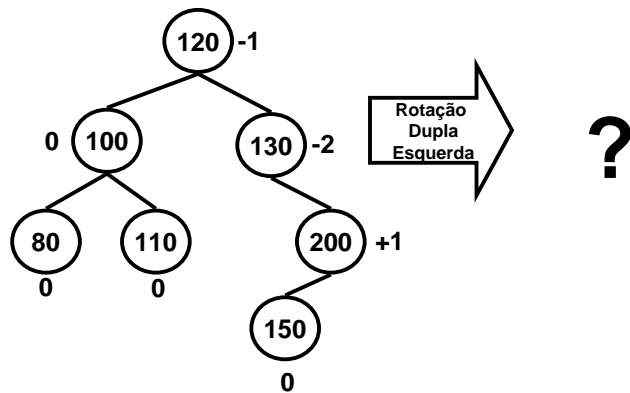
Rotação Dupla Direita



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

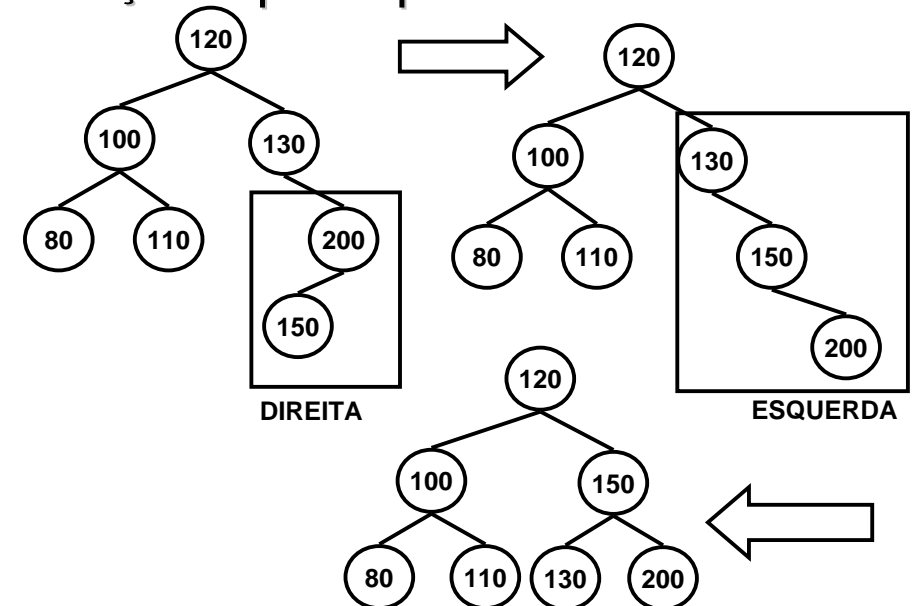
Rotação Dupla Esquerda



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Rotação Dupla Esquerda



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Exercícios

- Inserir em AVL, refazendo a árvore quando tiver rotação e anotando as rotações realizadas:
–50, 40, 30, 45, 47, 55, 56, 1, 2, 3

Inserção de nodos em árvores AVL Alguns Problemas

- Percorre-se a árvore verificando se a chave já existe ou não
 - Em caso positivo, encerra a tentativa de inserção
 - Caso contrário, a busca encontra o local correto de inserção do novo nó
- Verifica-se se a inclusão tornará a árvore desbalanceada
 - Em caso negativo, o processo termina
 - Caso contrário, deve-se efetuar o balanceamento da árvore
- Descobre-se qual a operação de rotação a ser executada
- Executa-se a rotação

Inserção de nodos em árvores AVL

- Como saber se a árvore está balanceada?
 - Verificando se existe um nó “desregulado”
- Como saber se um nó está desregulado?
 - Determina-se as alturas de suas sub-árvores e subtrai-se uma da outra
- Procedimento muito lento!
- Como ser mais eficiente?
 - Para cada nó v de uma árvore, armazena-se uma variável `balanço`, onde
 $\text{balanço}(v) = \text{altura}(v.\text{esq}) - \text{altura}(v.\text{dir})$

Inserção de nodos em árvores AVL Alguns problemas...

- Que valores são possíveis para balanço?
 - -1, 0, 1
- De novo, como ser eficiente no cálculo do balanço?
 - Dado q , como o nodo inserido.
 - Se q pertencer à sub-árvore esquerda de v e essa inclusão resultar em aumento na altura da sub-árvore, então
 $\text{balanço}(v) := \text{balanço}(v) + 1$
 - Se $\text{balanço}(v) = 2$, então v está desregulado
 - Se q pertencer à sub-árvore direita de v e essa inclusão resultar em aumento na altura da sub-árvore, então
 $\text{balanço}(v) := \text{balanço}(v) - 1$
 - Se $\text{balanço}(v) = -2$, então v está desregulado

Inserção de nodos em árvores AVL

Alguns problemas...

- Mas, quando é que a inclusão de q causa aumento na altura da sub-árvore v ?
- Suponha que q seja incluído na sub-árvore à esquerda de v .
- Para q incluído na sub-árvore à direita, considere-se o caso simétrico.

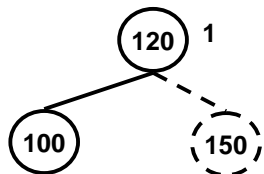
Inserção de nodos em árvores AVL

INSERÇÃO A DIREITA

- Se, antes da inclusão:
 - **Balanco(v) = 1**, então **Balanco(v)** se tornará 0
 - altura da árvore não foi alterada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, não se altera também.
 - **Balanco(v) = 0**, então **Balanco(v)** se tornará -1
 - altura da árvore foi modificada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, pode ter sido alterada também.
 - Repetir o processo (recursivamente), com v substituído por seu pai.
 - **Balanco(v) = -1**, então **Balanco(v)** se tornará -2
 - altura da árvore foi modificada e o nó está desregulado
 - Rotação correta deve ser empregada.
 - Como a árvore será redesenhada, não é necessário verificar os outros nós.

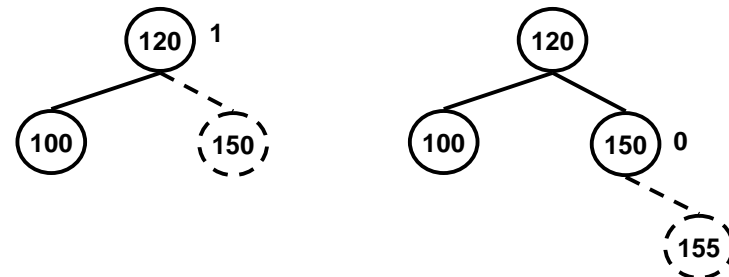
Inserção de nodos em árvores AVL

INSERÇÃO A DIREITA



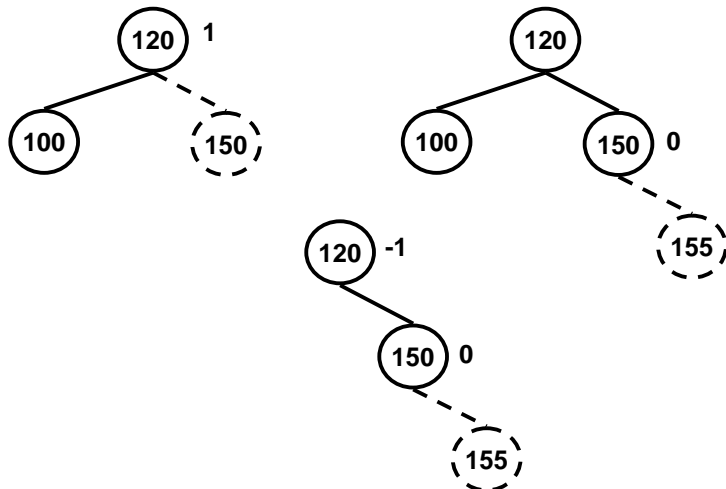
Inserção de nodos em árvores AVL

INSERÇÃO A DIREITA



Inserção de nodos em árvores AVL

INSERÇÃO A DIREITA



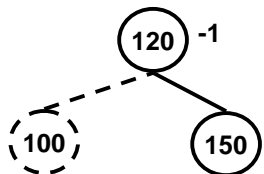
Inserção de nodos em árvores AVL

INSERÇÃO A ESQUERDA

- Se, antes da inclusão:
 - Balanco(v) = -1**, então **Balanco(v)** se tornará 0
 - altura da árvore não foi alterada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, não se altera também.
 - Balanco(v) = 0**, então **Balanco(v)** se tornará 1
 - altura da árvore foi modificada
 - Por consequência, altura dos outros nós no caminho até a raiz, pode ter sido alterada também.
 - Repetir o processo (recursivamente), com v substituído por seu pai.
 - Balanco(v) = 1**, então **Balanco(v)** se tornará 2
 - altura da árvore foi modificada e o nó está desregulado
 - Rotação correta deve ser empregada.
 - Como a árvore será redesenhada, não é necessário verificar os outros nós.

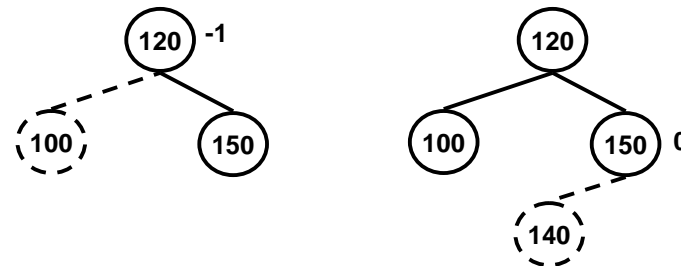
Inserção de nodos em árvores AVL

INSERÇÃO A ESQUERDA

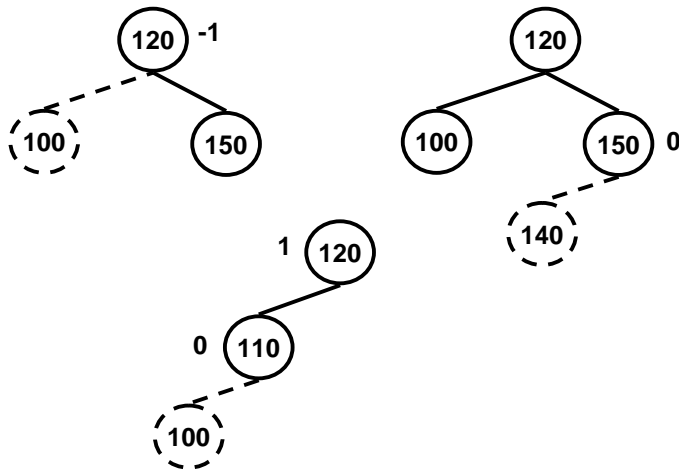


Inserção de nodos em árvores AVL

INSERÇÃO A ESQUERDA



Inserção de nodos em árvores AVL INSERÇÃO A ESQUERDA



Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Inserção de nodos em árvores AVL

```

Proc InsereAVL (var a:Arvore; x:Info; ok:lógico);
{ Insere nodo em uma árvore AVL, onde A representa a raiz da árvore,
  x, a chave a ser inserida e h a altura da árvore }
se a = nil
então início
  InicioNo(a,x);
  ok:=verdadeiro
fim;
senão
  se x = a^.Info então pare
  se x < a^.chave então início
    InsereAVL(a^.esq,x,ok);
    se ok então
      caso a^.bal seja
        1: a^.bal := 0; ok := falso;
        0: a^.bal := -1;
        -1: Caso1(a,ok); fim;
  senão início
    InsereAVL(a^.dir,x,ok);
    se ok então
      caso a^.bal seja
        -1: a^.bal := 0; ok := falso;
        0: a^.bal := 1;
        1: Caso2(a,ok); fim;
  fim;
fim;

```

Inserção de nodos em árvores AVL

```

Proc InicioNo (var a:Arvore, x:Info);
{ Aloca o novo nodo }
início
  aloca(a);
  a^.esq := nil;
  a^.dir := nil;
  a^.chave := x;
  a^.bal := 0;
fim;

```

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Inserção de nodos em árvores AVL

```

Proc Caso1 (var a:Arvore, ok:lógico);
{ Faz balanceamento da árvore }
início
  ptu = a^.esq;
  se ptu^.bal = -1
  então início
    a^.esq := ptu^.dir; ptu^.dir := a;
    a^.bal := 0; a := ptu;
  fim;
  senão início
    ptv := ptu^.dir;
    ptu^.dir := ptv^.esq; ptv^.esq := ptu;
    a^.esq := ptv^.dir; ptv^.dir := a;
    se ptv^.bal = -1 então a^.bal := 1;
    senão a^.bal := 0;
    se ptv^.bal = 1 então ptu^.bal := -1;
    senão ptu^.bal := 0;
    a := ptv;
  fim;
  a^.bal := 0;
  ok := falso;
fim;

```

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Inserção de nodos em árvores AVL

```
Proc Caso2 (var a:Arvore, ok:lógico);
{ Faz balanceamento da árvore}
início
    ptu = a^.dir;
    se ptu^.bal = 1
    então início
        a^.dir := ptu^.esq;      ptu^.esq := a;
        a^.bal := 0;             a := ptu;
    fim;
    senão início
        ptv := ptu^.esq;
        ptu^.esq := ptv^.dir; ptv^.dir := ptu;
        a^.dir := ptv^.esq;      ptv^.esq := a;
        se ptv^.bal = 1          então a^.bal := -1;
                                senão a^.bal := 0;
        se ptv^.bal = -1         então ptu^.bal := 1;
                                senão ptu^.bal := 0;
        a := ptv;
    fim;
    a^.bal := 0;
    ok := falso;
fim;
```

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

Remoção de nodos em árvores AVL

- Caso parecido com as inclusões.
- No entanto, nem sempre se consegue solucionar com uma única rotação...

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores

- <http://webpages.ull.es/users/jriera/Docencia/AVL/AVL%20tree%20applet.htm>

Renata de Matos Galante, Clesio S. Santos, Nina Edelweiss e Luciana P. Nedel

Estruturas de Dados - Árvores