INDUÇÃO

PRIMEIRO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

Imagine que você está subindo uma escada infinitamente alta. Como você sabe se será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto? Suponha que você faça as seguintes hipóteses sobre sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo. (Note que essa asserção é um condicional.)

Se a proposição 1 e o condicional 2 são ambos verdadeiros, então, pela proposição 1, você consegue chegar no primeiro degrau e, portanto, pela proposição 2, consegue chegar no segundo; novamente pela proposição 2, você consegue chegar no terceiro degrau; mais uma vez pela proposição 2, você consegue chegar no quarto degrau; e assim por diante. Você pode subir tão alto quanto quiser. Ambas as hipóteses são necessárias. Se apenas a primeira proposição fosse verdadeira, você não teria nenhuma garantia de passar do primeiro degrau e, se apenas a segunda fosse verdadeira, você poderia não ser capaz de começar nunca. Vamos supor que os degraus da escada estejam numerados pelos inteiros positivos - 1,2, 3, etc. Agora pense sobre uma propriedade específica que um número possa ter. Ao invés de "chegar a um degrau arbitrariamente alto”, podemos falar sobre um inteiro positivo arbitrário tendo essa probabilidade. Vamos usar a notação P(n) para dizer que o inteiro positivo n tem a propriedade P. Como usar a mesma técnica que usamos para subir a escada para provar que, qualquer que seja o inteiro positivo n, temos P(n)? As duas proposições que precisamos provar são:

1) P(1) (1 tem a propriedade P)
2) Para qualquer inteiro positivo k, P(k) $\rightarrow$ P(k + 1) (Se qualquer nº tem a propriedade P, o próximo também tem)

Se pudermos provar ambas as proposições 1 e 2, então P(n) é válida para qualquer inteiro positivo n, da mesma forma que você poderia subir até um degrau arbitrário da escada.
O fundamento para argumentos desse tipo é o primeiro princípio de indução matemática.

Primeiro Princípio de Indução Matemática

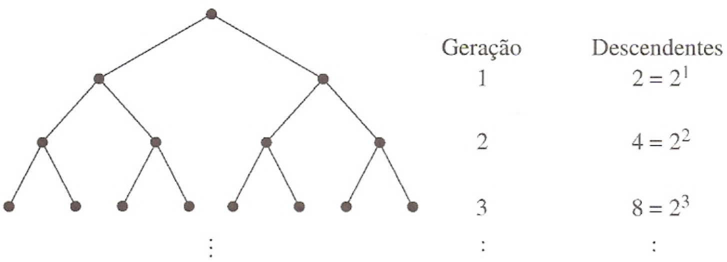
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ P(1)\ \textit{é verdade} \\ 2)\ (\forall k)[P(k)\ verdade \rightarrow P(k+1)\ verdade] \end{array}\right\} \rightarrow P(n)\ \textit{é verdade para todo inteiro positivo } n$$

O primeiro princípio de indução matemática é um condicional. A conclusão é uma proposição da forma “P(n) é verdade para todo inteiro positivo n". Portanto, sempre que quisermos provar que alguma coisa é verdade para todo inteiro positivo n, é bastante provável que a indução matemática seja uma técnica apropriada.
Para mostrar que a conclusão desse condicional é verdadeira, precisamos provar que as duas hipóteses, 1 e 2, são verdadeiras. Para provar a proposição 1, basta mostrar que o número 1 tem a propriedade P, geralmente uma tarefa trivial. A proposição 2 é um condicional que tem que ser válido para todo k. Para provar esse condicional, suponha que P(k) é verdade para um inteiro positivo arbitrário k e mostre, baseado nessa hipótese, que P(k + 1) é verdade. Você deve se convencer de que supor que o número k tem a propriedade P não é a mesma coisa que supor o que queremos provar (essa é uma confusão comum na primeira vez que se encontra uma demonstração desse tipo). Essa é, simplesmente, a maneira de proceder para obter uma demonstração direta do condicional P(k) $\rightarrow$ P(k + 1).
Ao fazer uma demonstração por indução, o estabelecimento da veracidade da proposição 1 é chamado de base da indução ou passo básico da demonstração por indução. O

estabelecimento da veracidade de $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ é o passo indutivo. Quando supomos que P(k) é verdade para provar o passo indutivo, P(k) é chamada de hipótese de indução.
Todos os métodos de demonstração de que falamos neste capítulo são técnicas para o raciocínio dedutivo - maneiras de provar uma conjectura que talvez tenha sido formulada por um raciocínio indutivo. A indução matemática também é uma técnica dedutiva e não um método de raciocínio indutivo (não se confunda com a terminologia usada). Nas outras técnicas de demonstração, podemos começar com uma hipótese e juntar diversos fatos até que "tropeçamos" na conclusão. De fato, mesmo que a nossa conjectura esteja ligeiramente incorreta, podemos ver qual deve ser a conclusão correta ao fazer a demonstração. Na indução matemática, no entanto, precisamos saber, desde o início, qual é a forma exata da propriedade P(n) que queremos estabelecer. A indução matemática, portanto, não é uma técnica de demonstração exploratória - pode apenas confirmar uma conjectura correta.

DEMONSTRAÇÕES POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

Suponha que um ancestral Silva casou e teve dois filhos. Vamos chamar esses dois filhos de geração 1. Suponha, agora, que cada um desses filhos teve dois filhos; então, a geração 2 contém quatro descendentes. Isso continua de geração em geração. A árvore genealógica da família Silva, portanto, tem a forma ilustrada na Figura abaixo.



Parece que a geração n contém 2^n descendentes. Mais formalmente, se denotarmos por P(n) o número de descendentes em cada geração, nossa conjectura é que

$$P(n) = 2^n$$

Podemos usar indução para provar que nossa conjectura para P(n) está correta.
O passo básico é estabelecer P(l), que é a equação

$$P(l) = 2^1 = 2$$

Isso é verdade, pois nos foi dito que Silva teve dois filhos. Vamos supor, agora, que nossa conjectura está correta para uma geração arbitrária k, $k \geq 1$, isto é, vamos supor que

$$P(k) = 2^k$$

e tentar mostrar que

$$P(k + 1) = 2^{k+l}$$

Nessa família, cada descendente tem dois filhos, de modo que o número de descendentes na geração k + 1 será o dobro do número de descendentes na geração k, ou seja, P(k + 1) = 2P(k). Pela hipótese de indução, $P(k) = 2^k$, logo

$$P(k + 1) = 2P(k) = 2(2^k) = 2^{k+l}$$

e, de fato,

$$P(k + 1) = 2^{k+l}$$

Isso completa nossa demonstração. Agora que estamos tranqüilos sobre o clã dos Silva, podemos aplicar o método de demonstração por indução a problemas menos óbvios.
Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n. A propriedade P(n) aqui é que a Eq. (1) é válida. O termo à esquerda do sinal de igualdade é a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2n-1. Embora possamos verificar a veracidade dessa equação para qualquer valor particular de n substituindo esse valor na equação, não podemos substituir n por todos os inteiros positivos que existem. Assim, uma demonstração por exaustão não funciona. Uma demonstração por indução é apropriada.

O passo básico é estabelecer P(1), que é a Eq. (1) quando n tem o valor 1, ou seja,

$$P(1): \quad 1 = 1^2$$

Isso é certamente verdade. Para a hipótese de indução, vamos supor P(k) para um inteiro positivo arbitrário k, que é a Eq. (1) quando n tem o valor k, isso é,

$$P(k): \quad 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2 \quad (2)$$

(Note que P(k) não é a equação $(2k - 1) = k^2$, que só é verdade para k = 1.) Usando a hipótese de indução, queremos mostrar P(k + 1), que é a Eq. (1) quando n assume o valor k + 1, ou seja,

$$P(k + 1): \quad 1 + 3 + 5 + ... + [2(k + 1) – 1] \overset{?}{=} (k + 1)^2 \quad (3)$$

(O ponto de interrogação em cima do sinal de igualdade é para nos lembrar de que é esse fato que queremos provar, ao invés de ser alguma coisa que já sabemos.)

A chave de uma demonstração por indução é encontrar um modo de relacionar o que queremos saber - P(k + 1), Eq. (3) - e o que supusemos - P(k), Eq. (2). O lado esquerdo de P(k + 1) pode ser reescrito mostrando-se a penúltima parcela:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) – 1]$$

Essa expressão contém o termo à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (2). Como estamos supondo que P(k) é válida, podemos substituir esse termo pelo termo à direita do sinal de igualdade na Eq. (2). Obtemos, então,

$$\begin{aligned}
&1 + 3 + 5 + ... + [2(k + 1) – 1] \\
&= 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) – l] \\
&= k^2 + [2(k + 1) – 1] \\
&= k^2 + [2k + 2 - 1] \\
&= k^2 + 2k + l \\
&= (k + 1)^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$1 + 3 + 5 + ... + [2(k + 1) – 1] = (k + 1)^2$$

o que mostra a validade de P(k + 1) provando, assim, que a Eq. (1) é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

A Tabela abaixo resume os três passos necessários para uma demonstração usando o primeiro princípio de indução.

Demonstração usando o primeiro princípio de indução	
Passo 1	Prove a base da indução.
Passo 2	Suponha P(k).
Passo 3	Prove P(k + 1).

Exemplo 1:

Prove que

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+l} - 1$$

para todo $n \geq 1$.

Novamente, indução é apropriada. P(l) é a equação

$$1 + 2 = 2^{1+1} -1 \text{ ou } 3 = 2^2 -1$$

que é verdadeira. Vamos considerar P(k)

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

como a hipótese de indução e tentar estabelecer P(k + 1):

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k+1} \stackrel{?}{=} 2^{k+l+1} - 1$$

Novamente, reescrevendo a soma à esquerda do sinal de igualdade de P(k + 1), vemos como a hipótese de indução pode ser usada:

$1+ 2 + 2^2 + ... + 2^{k+l}$
$= 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+ 1}$
$= 2^{k+l} - 1 + 2^{k+l}$ (pela hipótese de indução P(k))
$= 2(2^{k+1}) - 1$
$= 2^{k+l+l} - 1$

Portanto,

$$1+ 2 + 2^2 + ... + 2^{k+1} = 2^{k+l+1} - 1$$

o que mostra P(k + 1), concluindo a demonstração.

Exercício 01:
Prove que, para qualquer inteiro positivo n,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = (n(n+ 1))/ 2$$

Nem todas as demonstrações por indução envolvem somas. Outras identidades algébricas sobre os inteiros positivos podem ser demonstradas por indução, assim como proposições não algébricas, como o número de descendentes na geração n da família Silva.

Exemplo 2:

Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$.
P(l) é a proposição $2^1 > 1$, que certamente é verdade. Vamos supor, agora, P(k), $2^k > k$, e tentar concluir P(k + 1), $2^{k+1} > k + 1$. Começando com a expressão, em P(k + 1), à esquerda da desigualdade, observamos que $2^{k+l} = 2^k . 2$. Usando a hipótese de indução $2^k > k$ e multiplicando os dois membros dessa desigualdade por 2, obtemos $2^k \bullet 2 > k . 2$. Completando o argumento,

$$2^{k+1} = 2^k \bullet 2 > k . 2 = k + k \geq k + 1$$

Ou seja,

$$2^{k+1} > k + 1$$

Exemplo 3:

Prove que, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3 .
O passo básico é mostrar P(l), isto é, que $2^{2(1)} - 1 = 4 - 1 = 3$ é divisível por 3. Isso é evidente. Vamos supor que $2^{2k} - 1$ é divisível por 3, o que significa que $2^{2k} - 1 = 3m$ para algum inteiro m, ou seja, $2^{2k} = 3m + 1$. Queremos mostrar que $2^{2(k+l)} - 1$ é divisível por 3.

$2^{2(k+ 1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1$
$= 2^2 \cdot 2^{2k} - 1$
$= 2^2(3m + 1) - 1$ (pela hipótese de indução)
$=12m + 4 - l$
$= 12m + 3$
$= 3(4m + 1)$ onde 4m + 1 é inteiro

Portanto, $2^{2(k+l)} - 1$ é divisível por 3.

Para o primeiro passo em uma demonstração por indução, pode ser apropriado começar em 0, ou em 2 ou 3, ao invés de 1. O mesmo princípio se aplica, independentemente do degrau onde você começa a subir na escada.

Exemplo 4:

Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.
Devemos usar indução aqui, começando com a base da indução em P(4). (Testando os valores n = 1, 2 e 3, pode-se mostrar que a desigualdade não é válida para esses valores.) P(4) é a desigualdade $4^2 > 3(4)$, ou seja, 16 > 12, que é verdadeira. A hipótese de indução é que $k^2 > 3k$, onde $k \geq 4$, e queremos mostrar que $(k + 1)^2 > 3(k + 1)$.

$$\begin{aligned}
(k + 1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&> 3k + 2k + 1 \text{ (pela hipótese de indução)} \\
&\geq 3k + 8 + 1 \text{ (pois } k \geq 4) \\
&> 3k + 3 \\
&= 3(k + 1)
\end{aligned}$$

Exercício 02: Prove que $2^{n+1} < 3^n$ para todo n > 1.

SEGUNDO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

Além do primeiro princípio de indução, que temos usado,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ P(1)\ \ \acute{e}\ verdade \\ 2)\ (\forall k)[P(k)\ verdade \to P(k+1)\, verdade] \end{array}\right\} \to P(n)\, \acute{e}\, verdade\ para\, todo\, \text{int}\, eiro\ positivo\, n$$

existe um segundo princípio de indução.

Segundo Princípio de Indução Matemática

$$\left.\begin{array}{l} 1')\ P(1)\ \ \acute{e}\ verdade \\ 2')\ (\forall k)[P(r)\ verdade\, para\ todo\ r, \\ 1 \leq r \leq k \to P(k+1)\, verdade] \end{array}\right\} \to P(n)\ verdade\, para\, todo\, \text{int}\, eiro\ positivo\, n$$

Esses dois princípios de indução diferem nas proposições 2 e 2'. Na proposição 2, precisamos ser capazes de provar, para um inteiro positivo arbitrário k, que P(k + 1) é verdadeira baseados apenas na hipótese de que P(k) é verdadeira. Na proposição 2', podemos supor que P(r) é verdadeira para todos os inteiros r entre 1 e um inteiro positivo arbitrário k para provar P(k + 1). Isso parece nos dar muito mais "munição", de modo que pode acontecer, algumas vezes, de sermos capazes de provar o condicional em 2' sem conseguir provar o condicional em 2.
O que nos permite deduzir $(\forall n)P(n)$ em cada caso? Veremos que os dois princípios, ou seja, os dois métodos de demonstração, são equivalentes. Em outras palavras, se aceitamos como válido o primeiro princípio, então o segundo também é válido, e reciprocamente. Para provar a equivalência entre os dois princípios, vamos considerar um outro princípio, que parece tão óbvio que não necessita discussão.

Princípio da Boa Ordenação: Toda coleção de inteiros positivos que contém algum elemento tem um menor elemento.

Veremos que os seguintes condicionais são verdadeiros:

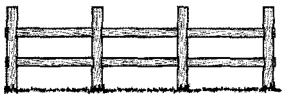
segundo princípio de indução $\rightarrow$ primeiro princípio de indução
primeiro princípio de indução $\rightarrow$ princípio da boa ordenação
princípio da boa ordenação $\rightarrow$ segundo princípio de indução

Como conseqüência, todos os três princípios são equivalentes e aceitar qualquer um deles como verdadeiro significa aceitar os outros dois também.

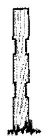
Para provar que o segundo princípio de indução implica o primeiro, suponha que aceitamos o segundo princípio como sendo um argumento válido. Queremos mostrar, então, que o primeiro princípio é válido, isto é, que podemos concluir P(n) para todo n das proposições 1 e 2. Se a proposição 1 é verdadeira, a proposição l' também é. Se a proposição 2 é verdadeira, a proposição 2' também é, pois podemos dizer que concluímos P(k + 1) de P(r) para todo r entre 1 e k, embora tenhamos usado apenas a condição P(k). (De maneira mais precisa, a proposição 2' necessita que provemos que $P(1) \wedge P(2) \wedge ... \wedge P(k) \rightarrow P(k + 1)$; mas $P(1) \wedge P(2) \wedge ... \wedge P(k) \rightarrow P(k)$ e, pela proposição 2, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$, logo $P(1) \wedge P(2) \wedge ... \wedge P(k) \rightarrow P(k + 1)$.) Pelo segundo princípio de indução podemos concluir P(n) para todo n.

Para distinguir entre uma demonstração por indução usando o primeiro ou o segundo princípio, vamos considerar um exemplo um tanto pitoresco que pode ser provado das duas maneiras.

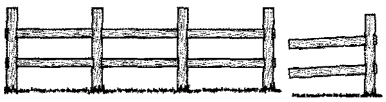
Prove que uma cerca reta com n esteios tem n - 1 seções para qualquer $n \geq 1$ (veja a Fig. a) .



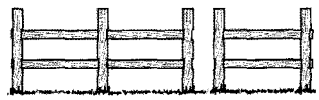
(a) Cerca com 4 esteios, 3 seções.



(b) Cerca com 1 esteio, O seção.



(c) Cerca com o último esteio e a última seção removidos.



(d) Cerca com uma seção removida.

Seja P(n) a proposição que uma cerca com n esteios tem n - 1 seções; vamos provar que P(n) é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Vamos começar com o primeiro princípio de indução. Para o passo básico, P(1) diz que uma cerca com apenas 1 esteio tem 0 seção, o que é claramente verdade (veja a Fig. b). Suponha que P(k) é verdadeira:

uma cerca com k esteios tem k - 1 seções

e tente provar P(k + 1):

(?) uma cerca com k + 1 esteios tem k seções.

Dada uma cerca com k + 1 esteios, como podemos relacioná-la a uma cerca com k esteios de modo a usar a hipótese de indução? Podemos cortar fora o último esteio e a última seção (Fig. c). A cerca resultante tem k esteios e, pela hipótese de indução, tem k - 1 seções. Portanto, a cerca original tinha k seções.

Vamos agora provar o mesmo resultado usando o segundo princípio de indução. O passo básico é igual ao do caso anterior. Para a hipótese de indução, supomos que

para todo r, $1 \leq r \leq k$, uma cerca com r esteios tem r-1 seções

e tentamos provar P(k + 1):

(?) uma cerca com k + 1 esteios tem k seções

Para uma cerca com k + 1 esteios, divida a cerca em duas partes removendo uma seção (Fig. d). As duas partes da cerca têm r_1 e r_2 esteios, onde $1 \leq r_1 \leq k$, $1 \leq r_2 \leq k$ e $r_1 + r_2 = k + 1$.

Pela hipótese de indução, as duas partes têm, respectivamente, r_1 - 1 e r_2 - 1 seções, logo a cerca original tinha

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + 1 \text{ seções}$$

(O 1 extra é pela seção que foi removida.) A aritmética nos diz, então, que tínhamos

$$r_1 + r_2 - 1 = (k + 1) - 1 = k \text{ seções}$$

Isso prova que uma cerca com k + 1 esteios tem k seções, o que verifica a veracidade de P(k + 1), completando a demonstração pelo segundo princípio de indução.

Exemplo 5:

Prove que, para todo $n \geq 2$, n é um número primo ou é um produto de números primos.

Vamos adiar a decisão sobre se usamos o primeiro ou o segundo princípio de indução; o passo básico é o mesmo nos dois casos e não precisamos começar com 1. É claro que devemos começar aqui com 2. P(2) é a proposição que 2 é um número primo ou um produto de primos. Como 2 é primo, P(2) é verdadeira. Pulando adiante, para qualquer dos dois princípios precisaremos analisar o caso k + 1. Se k + 1 for primo, estamos feitos. Se k + 1 não for primo, então é um número composto e pode ser escrito na forma k + 1 = ab. Dividimos k + 1 em dois fatores e talvez nenhum deles tenha o valor k, de modo que uma hipótese apenas sobre P(k) não é suficiente. Usaremos, então, o segundo princípio de indução.
Vamos começar de novo e supor que, para todo r, $2 \leq r \leq k$, P(r) é verdadeira - r é primo ou um produto de primos. Considere agora o número k + 1. Se k + 1 for primo, terminamos. Se k + 1 não for primo, então é um número composto e pode ser escrito na forma k + 1 = ab, onde $1 < a < k + 1$ e $1 < b < k + 1$. (Essa é uma fatoração não trivial, de modo que nenhum fator pode ser igual a 1 ou a k + 1.) Portanto, $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$. A hipótese de indução pode ser aplicada a a e a b, logo cada um deles ou é um primo, ou é um produto de primos. Portanto, k + 1 é um produto de primos. Isso verifica P(k + 1) e completa a demonstração pelo segundo princípio de indução.
A demonstração no Exemplo 5 é uma demonstração de existência em vez de uma demonstração construtiva. Saber que todo número que não é primo tem uma fatoração como um produto de primos não torna fácil encontrar uma tal fatoração. Alguns sistemas de criptografia para transmitir informação de modo seguro na Internet dependem da dificuldade de decompor números grandes em seus fatores primos.

Exemplo 6:

Prove que qualquer quantia, para franquia postal, maior ou igual a 8 centavos pode ser conseguida usando-se apenas selos de 3 e 5 centavos.
A proposição P(n) agora é que precisamos apenas de selos de 3 e 5 centavos para obter n centavos em selos e queremos provar que P(n) é verdadeira para todo $n \geq 8$. A base da indução é estabelecer P(8), o que é feito pela equação

$$8 = 3 + 5$$

Por razões que ficarão claras em alguns instantes, vamos estabelecer, também, dois casos adicionais, P(9) e P(l0), pelas equações

$$9 = 3 + 3 + 3$$
$$10 = 5 + 5$$

Vamos supor, agora, que P(r) é verdadeira para qualquer r, $8 \leq r \leq k$, e considerar P(k + 1). Podemos supor que k + 1 é pelo menos 11, já que provamos P(r) para r = 8, 9 e 10. Se $k + 1 \geq 11$, então $(k + 1) - 3 = k - 2 \geq 8$ e, pela hipótese de indução, P(k - 2) é verdade. Portanto, k - 2 pode ser escrito como uma soma de números iguais a 3 e a 5; adicionando-se mais um 3, obtemos k + 1 como uma soma de números iguais a 3 e a 5. Isso prova a veracidade de P(k + 1) e completa a demonstração.