8 LOGARITMO

8.1 Generalidades

Conceito

Se $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$ e $x \in R$, $x > 0$, então o número real y tal que $a^y = x$ é denominado logaritmo de x na base a e denota-se $y = \log_a (x)$.

Exemplos:

1. $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 (8) = 3$
2. $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 (16) = 2$
3. $5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 (1) = 0$
4. $2^{-3} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \log_2 \left(\dfrac{1}{8}\right) = -3$
5. $10^3 = 1.000 \Leftrightarrow \log_{10} (1.000) = 3$

Casos especiais:

1. Se $a = 10$, dizemos que y é o logaritmo decimal de x e denotamos: $y = \log (x)$.
2. Se $a = e$ (aproximadamente 2,718281), dizemos que y é o logaritmo natural de x e denotamos $y = ln\ (x)$.

Tendo em vista o desenvolvimento das calculadoras eletrônicas, passaremos a utilizar sempre a base e.

8.2 Propriedades dos logaritmos

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(e) = 1$
3. $\ln(x \,.\, y) = \ln(x) + \ln(y)$
4. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
5. $\ln(x^{\alpha}) = \alpha \ln(x), \alpha \in R$
6. $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Exemplos:

1. Calcule o valor de $K = 1 + 3{,}3 \log(85)$

Solução:

Observe que log (85) está escrito na base 10. Devemos efetuar a mudança da base 10 para a base e, utilizando para isso a 6ª propriedade: $\log(85) = \dfrac{\ln(85)}{\ln(10)} = \dfrac{4{,}4427}{2{,}3026} = 1{,}9294$.

Portanto, $K = 1 + 3{,}3\,(1{,}9294) = 7{,}3671$

2. Resolva a equação: $2^x = 30$

Solução:

Observe que a dificuldade desta equação reside na presença da variável x como expoente da base 2. A 5ª propriedade de logaritmo elimina essa dificuldade. Exatamente por isso, vamos introduzir logaritmo na equação.

Se $2^x = 30$, então $\ln(2^x) = \ln(30)$.

Aplicando a 5ª propriedade, obtemos:

$$x \ln(2) = \ln(30) \text{ ou } x = \frac{\ln(30)}{\ln(2)} = 4{,}9069$$

3. Resolva a equação: $4 = (x)^{0,2}$

Solução:

Observe que a dificuldade desta equação reside na presença de 0,2 como expoente da base x. A 5ª propriedade de logaritmo elimina essa dificuldade. Exatamente por isso, vamos introduzir logaritmo na equação.

Se $4 = (x)^{0,2}$, então $\ln(4) = \ln(x)^{0,2}$

Aplicando a 5ª propriedade, obtemos:

$$\ln(4) = 0{,}2 \ln(x) \text{ ou } \ln(x) = \frac{\ln(4)}{0{,}2} = 6{,}93115$$

Portanto, $x = e^{6{,}9315} = 1.024$

4. Resolva a equação: $\log_2(x) \,.\, \ln(2) = 1$

Solução:

Observe que esta equação apresenta logaritmos na base 2 e na base e. A solução fica facilitada quando todos os logaritmos estão escritos na mesma base.

Utilizando-se a 6ª propriedade dos logaritmos, escrevemos: $\log_2(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Substituindo este valor na equação original, obtemos:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \ln(2) = 1 \text{ ou } \ln(x) = 1.$$

Portanto, $x = e^1$ ou $x = e$

8.3 Exercícios

Resolver as equações com o auxílio de logaritmos.

1. $25^x = 10$
2. $3^{2x} = 125$
- • 3. $4^{3x-1} = 72{,}5$
4. $10^{5x} = 432$
- • 5. $\log_x(2) \,.\, \ln(x) + \ln(x-2) = 0$
6. $35 = (1 + x)^4$
7. $42{,}74 = (1 + x)^{0{,}23}$
- • 8. $\dfrac{2^{3x+1}}{3^{2x-1}} = 5^x$
9. $7 \,.\, 3^{2x+1} = 4^{3x-2}$
10. $x^{x^2-7x} = 1$

Respostas:

1. $x = 0{,}7153$
2. $x = 2{,}1975$
3. $x = 1{,}3633$
4. $x = 0{,}5271$
5. $x = 2{,}5000$
6. $x = 1{,}4323$