VI. Encaminhamentos de encargo total mínimo

Considere-se um grafo (orientado ou não) em que se associa a cada um dos seus arcos (arestas) um dado encargo real (distância, custo, tempo, etc.); admita-se a escolha de um qualquer par de vértices e a necessidade de conhecer o caminho (cadeia), entre eles, com Encargo Total Mínimo (por exemplo. se aos arcos são associadas distâncias, escolhidos dois vértices pretende-se conhecer a distância mínima entre eles)

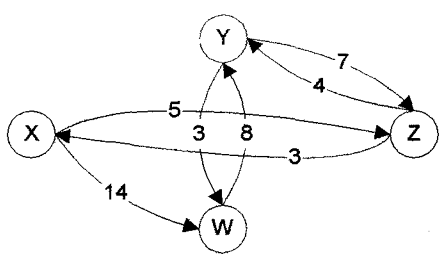
Para resolver problemas deste tipo há algoritmia diversa (Ford, Faure, Bellman, Dijkstra, Floyd, Hasse, entre outros) que envolvem maior ou menor complexidade de cálculo (número de operações elementares ou seja, adições, multiplicações e testes).

O algoritmo de Floyd apesar de ser o mais complexo dos apresentados tem a vantagem de ser de programação fácil (uma única matriz) e ser de difusão total, ou seja, quando aplicado permite obter o Encargo Total Mínimo entre qualquer par de vértices do grafo e o Encaminhamento associado (o que não sucede com outros métodos que são de difusão parcial).

A aplicação do método supõe que no grafo não há circuitos com encargo total negativo (absorventes).

1. Algoritmo de Floyd

Considere-se o Grafo da figura e respectiva matriz de distâncias (km) para calcular a Matriz de Distâncias Mínimas.



	X	Y	Z	W
X		∞	5	14
Y	∞		7	3
Z	3	4		∞
W	∞	8	∞	

Para os pares de vértices não ligados por arco considera-se a distância "+∞" por se tratar de minimização de uma função (distância total).

O cálculo será efectuado com a seguinte sequência considerando c_{ij} a distância entre os vértices "i" e "j":

Nas colunas "k =1 a n" executar:

Nas linhas "i =1 a m" executar:

Em cada linha "i" de "j=1 a n" executar:

$z = c_{ik} + c_{kj}$

se $z < c_{ij}$ substituir $c_{ij} = z$

Nova coluna da linha

Nova linha

Nova coluna

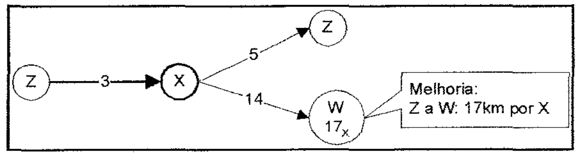
O processo descrito "traduz-se do seguinte modo:

1. Percorrer a matriz, por colunas, elemento a elemento.
2. Somar cada elemento c_{ij} (operador) aos elementos da linha com índice "j" (índice igual ao da coluna do operador); a linha de valores obtida compara-se com a linha do operador sendo os valores desta linha substituídos se são superiores aos calculados (melhoria).

3. Quando se efectuam substituições, ao novo valor de distância agrega-se o índice da coluna do operador (vértice intermédio) para posteriormente reconstituir o encaminhamento.
4. Quando o operador c_{ij} não é finito ou i = j é desnecessário proceder como referido em 2.

Retomando o grafo proposto e respectiva matriz de distâncias, veja-se passo a passo como executar:

Coluna de X	
Operador	Tarefa
$c_{xx} = 0$	Diagonal Principal (i = j); desnecessário
$c_{yx} = \infty$	Desnecessário; através de X não é possível melhorar distância de Y aos restantes vértices.
$c_{zx} = 3$	• Somar à linha de X obtendo: 3 ∞ 8 17 • Comparar com linha corrente do operador (linha Z) 3 4 0 ∞ • Melhoria para ZW = 17km passando por X • Registar em ZW, 17_X
$c_{wx} = \infty$	Desnecessário; através de X não é possível melhorar distância de W aos restantes vértices.



Após percorrida a 1ª coluna (vértice X como ponto intermédio), a matriz de distâncias tem registados os seguintes valores:

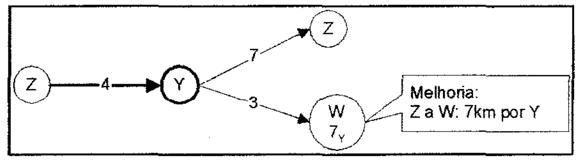
	X	Y	Z	W
X		∞	5	14
Y	∞		7	3
Z	3	4		**17_X**
W	∞	8	∞	

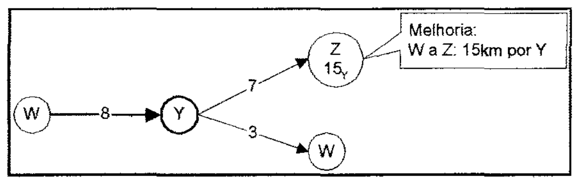
<u>No momento</u>, o encaminhamento mais favorável de Z para W é:

$Z \Rightarrow X \Rightarrow W$ no total de 17 km

Terminada a procura de melhores encaminhamentos entre cada par de vértices <u>usando X como ponto intermédio</u>, passa-se à coluna seguinte em que o ponto intermédio será o vértice Y.

Coluna de Y	
Operador	Tarefa
$c_{xy} = \infty$	Desnecessário; através de Y não é possível melhorar distância de X aos restantes vértices.
$c_{yy} = \infty$	Diagonal Principal (i = j); desnecessário
$c_{zy} = 4$	• Somar à linha de Y obtendo: ∞ 4 11 7 • Comparar com linha corrente do operador (linha Z) 3 4 0 17_X • Melhoria para ZW = 7 km passando por Y • Registar em ZW, 7_Y
$c_{wy} = 8$	• Somar à linha de Y obtendo: ∞ 8 15 11 • Comparar com linha corrente do operador (linha W) ∞ 8 ∞ 0 • Melhoria para WZ = 15 km passando por Y • Registar em WZ, 15_Y





Após percorrida a 2ª coluna (vértice Y como ponto intermédio), a matriz de distâncias tem registados os seguintes valores:

	X	Y	Z	W
X		∞	5	14
Y	∞		7	3
Z	3	4		**7_Y**
W	∞	**8**	**15_Y**	

<u>*No momento*</u>*, o encaminhamento mais favorável de Z para W é:*

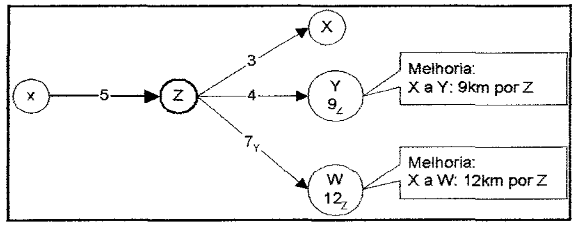
$Z \Rightarrow Y \Rightarrow W$ no total de 7 km

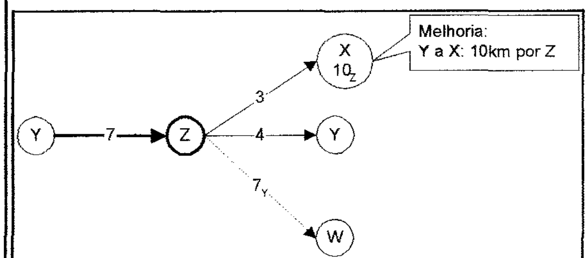
e o encaminhamento mais favorável de W para Z é:

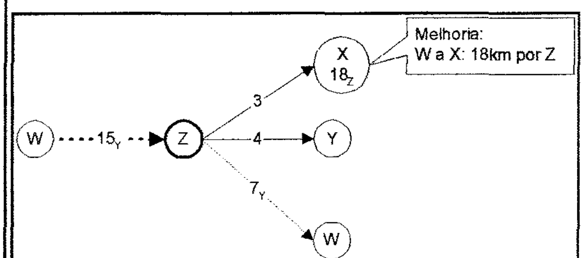
$W \Rightarrow Y \Rightarrow Z$ no total de 15 km

Terminada a procura de melhores encaminhamentos entre cada par de vértices <u>usando Y como ponto intermédio</u>, passa-se à coluna seguinte em que o ponto intermédio será o vértice Z.

Coluna de Z	
Operador	Tarefa
$c_{xz} = 5$	• Somar à linha de Z obtendo: 8 9 5 12 • Comparar com linha corrente do operador (linha X) 0 ∞ 5 14 • Melhoria para XY = 9 km passando por Z • Melhoria para XW = 12 km passando por Z • Registar em XY, 9_Z ; em XW, 12_Z
$C_{yz} = 7$	• Somar à linha de Z obtendo: 10 11 7 14 • Comparar com linha corrente do operador (linha Y) ∞ 0 7 3 • Melhoria para YX = 10 km passando por Z • Registar em YX, 10_Z
$c_{zz} = 0$	Diagonal Principal (i = j); desnecessário
$c_{wz} = 15$	• Somar à linha de Z obtendo: 18 19 15 22 • Comparar com linha corrente do operador (linha W) ∞ 8 15 0 • Melhoria para WX = 18 km passando por Z Registar em WX, 18_Z







Após percorrida a 3ª coluna (vértice Z como ponto intermédio), a matriz de distâncias tem registados os seguintes valores:

	X	Y	Z	W
X		**9_Z**	5	**12_Z**
Y	**10_Z**		7	3
Z	3	4		7_Y
W	**18_Z**	8	15_Y	

<u>*No momento*</u>*, o encaminhamento mais favorável de X para Y é:*

$X \Rightarrow Z \Rightarrow Y$ no total de 9 km

o encaminhamento mais favorável de X para W é:

$X \Rightarrow Z \Rightarrow Y \Rightarrow W$ no total de 12 km

o encaminhamento mais favorável de Y para X é:

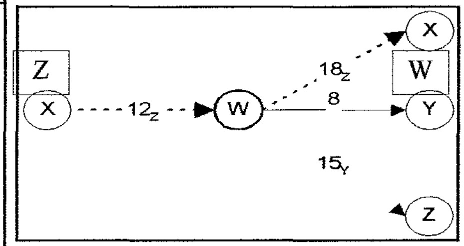
$Y \Rightarrow Z \Rightarrow X$ no total de 10 km

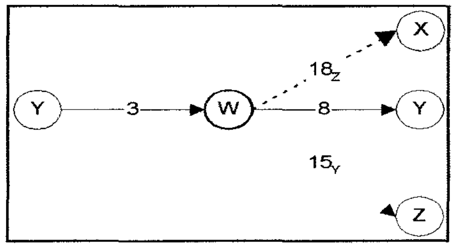
e o encaminhamento mais favorável de W para X é:

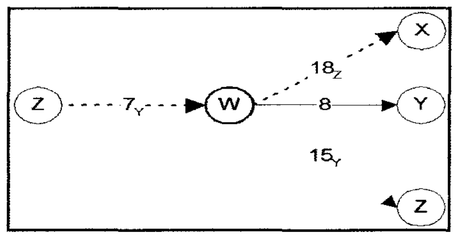
$W \Rightarrow Y \Rightarrow Z \Rightarrow X$ no total de 18 km

Terminada a procura de melhores encaminhamentos entre cada par de vértices <u>usando Z como ponto intermédio</u>, passa-se à coluna seguinte em que o ponto intermédio será o vértice W.

Coluna de W	
Operador	Tarefa
$c_{xw} = 12$	• Somar à linha de W obtendo: 30 20 27 12 • Comparar com linha corrente do operador (linha X) 0 9 5 12 • Não há melhoria(s)
$c_{yw} = 3$	• Somar à linha de W obtendo: 21 11 18 3 • Comparar com linha corrente do operador (linha Y) 10 0 7 3 • Não há melhoria(s)
$c_{zw} = 7$	• Somar à linha de W obtendo: 25 15 22 7 • Comparar com linha corrente do operador (linha Z) 3 4 0 7 • Não há melhoria(s)
$c_{ww} = 15$	Diagonal Principal (i = j); desnecessário







Após percorrida a 4ª coluna (vértice W como ponto intermédio), obteve-se a Matriz de Distâncias Mínimas entre qualquer par de vértices do grafo:

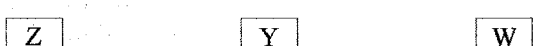
	X	Y	Z	W
X		9_Z	5	12_Z
Y	10_Z		7	3
Z	3	4		7_Y
W	18_Z	8	15_Y	

Nesta matriz obtém-se por leitura directa a distância mínima entre qualquer par de vértices.

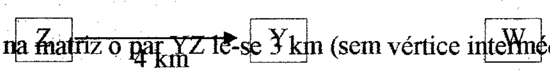
Para reconstituir o caminho associado àquelas distâncias, no caso de não se tratar de caminho com um único arco, vejam-se os exemplos seguintes:

- Caminho de Z para W ; distância mínima 7 km

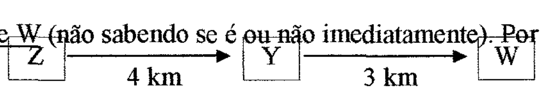
  Na matriz temos ZW= 7_Y o que significa que entre Z e W está o vértice Y. Notar que apenas se sabe que Y antecede W (não sabendo se é ou não imediatamente). Por isso tem-se:



  Consultando na matriz o par ZY lê-se 4 km (sem vértice intermédio). Actualiza-se a figura anterior:



  Consultando na matriz o par YZ lê-se 3 km (sem vértice intermédio) com o que se atinge o destino:



- Caminho de X para W ; distância mínima 12 km

  Na matriz temos XW= 12_Z o que significa que entre X e W está o vértice Z. Notar que apenas se sabe que Z antecede W (não sabendo se é ou não imediatamente). Por isso tem-se:

Consultando na matriz o par XZ lê-se 5 km (sem vértice intermédio). Actualiza-se a figura anterior:

Consultando na matriz o par ZW= 7_Y significa que entre Z e W está o vértice Y. Notar que <u>apenas se sabe que Y antecede W</u> (não sabendo se é ou não imediatamente). Por isso tem-se:

$\boxed{X} \xrightarrow[5\ km]{} \boxed{Z} \qquad \boxed{W}$

Consultando na matriz o par ZY lê-se 4 km (sem vértice intermédio). Actualiza-se a figura anterior:

$\boxed{X} \xrightarrow[5\ km]{} \boxed{Z} \qquad \boxed{Y} \qquad \boxed{W}$

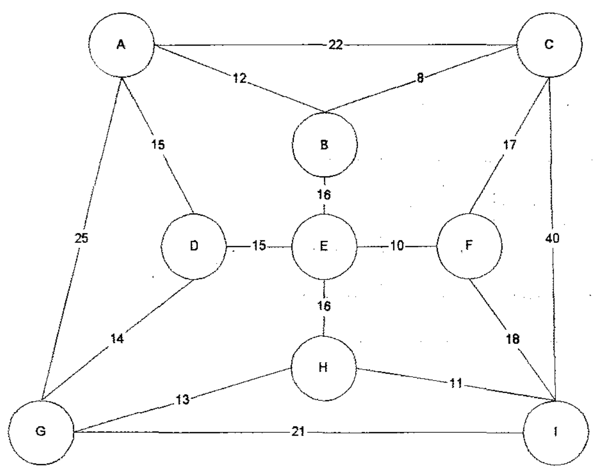
Consultando na matriz o par YW lê-se 3 km (sem vértice intermédio) com o que se atinge o destino:

$\boxed{X} \xrightarrow[5\ km]{} \boxed{Z} \xrightarrow[4\ km]{} \boxed{Y} \qquad \boxed{W}$

$\boxed{X} \xrightarrow[5\ km]{} \boxed{Z} \xrightarrow[4\ km]{} \boxed{Y} \xrightarrow[3\ km]{} \boxed{W}$

2. Localizações no grafo

Considere-se o grafo da figura G=(V,U), a matriz de distâncias e a matriz de distâncias mínimas (km):



Matriz de distâncias

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		12	22	15			25		
B	12		8		16				
C	22	8				17			40
D	15				15		14		
E		16		15		10		16	
F			17		10				18
G	25			14				13	21
H					16		13		11
I			40			18	21	11	

Matriz de distâncias mínimas

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		12	20	15	28	37	25	38	46
B	12		8	27	16	25	37	32	43
C	20	8		35	24	17	45	40	35
D	15	27	35		15	25	14	27	35
E	28	16	24	15		10	29	16	27
F	37	25	17	25	10		39	26	18
G	25	37	45	14	29	39		13	21
H	38	32	40	27	16	26	13		11
I	46	43	35	35	27	18	21	11	

a. Afastamento (excentricidade) do vértice v_i no grafo G(V,U)

É o maior encargo de v_i a um dos v_k ($i \neq k$).

No caso de grafo orientado, no vértice v_i podem medir-se as excentricidades exterior $e^+_{v_i}$ e interior $e^-_{v_i}$.

No grafo não orientado da figura a excentricidade de "A" é de 46 km (Max da 1ª linha da matriz de distâncias mínimas)

A matriz de distâncias mínimas pode ser orlada com a excentricidade de cada vértice como mostra a figura seguinte:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Excentricidade (km)	Obs.
A		12	20	15	28	37	25	38	**46**	**46 (max)**	Max{Max} = (diâmetro =46 km)
B	12		8	27	16	25	37	32	**43**	43	
C	20	8		35	24	17	**45**	40	35	45	
D	15	27	**35**		15	25	14	27	**35**	35	
E	28	16	24	15		10	**29**	16	27	**29 (min)**	Min{Max} ≡ centro; raio = 29 km
F	37	25	17	25	10		**39**	26	18	39	
G	25	37	**45**	14	29	39		13	21	45	
H	38	32	**40**	27	16	26	13		11	40	
I	**46**	43	35	35	27	18	21	11		**46 (max)**	

b. Diâmetro do Grafo G(V,U)

Maior valor das excentricidades dos vértices do grafo.

No grafo da figura o diâmetro é de 46 km

c. Raio do grafo G(V,U)

Menor valor das excentricidades dos vértices do grafo.

No grafo da figura o raio é de 29 km.

d. Centro do Grafo Não Orientado

Vértice v_i com excentricidade igual ao raio do grafo.

O centro do grafo da figura é o vértice "E" (excentricidade = raio = 29 km). É o vértice que, sob o ponto de vista de distância, oferece melhores condições para uma instalação de equipamento colectivo. Se o quartel dos bombeiros se situar em "E" todas as suas intervenções se situam, no máximo, a 29 km.

e. Centros do Grafo Orientado

Se o grafo é orientado há que considerar os *Centros Exterior e Interior do grafo.*

Como a denominação sugere, o centro exterior é o vértice v_i com menor excentricidade exterior; o centro interior é o vértice com menor excentricidade interior.

f. Vértice Periférico do Grafo G(V,U)

É o vértice v_i com excentricidade igual ao diâmetro.

No grafo da figura, "A" é o vértice periférico.

g. Mediana do Grafo

É o vértice v_i para o qual a soma dos encargos aos restantes vértices do grafo tem valor mínimo.

A matriz de distâncias mínimas pode ser orlada com a soma das distâncias de cada vértice como mostra a figura seguinte:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Soma (km)	Obs.
A		12	20	15	28	37	25	38	46	221	
B	12		8	27	16	25	37	32	43	200	
C	20	8		35	24	17	45	40	35	224	
D	15	27	35		15	25	14	27	35	193	
E	28	16	24	15		10	29	16	27	**165 (min)**	Mediana
F	37	25	17	25	10		39	26	18	197	
G	25	37	45	14	29	39		13	21	223	
H	38	32	40	27	16	26	13		11	203	
I	46	43	35	35	27	18	21	11		236	

No grafo da figura, o vértice "E" é a mediana do grafo. É o vértice que, sob o ponto de vista de distância, oferece melhores condições para uma instalação de tipo logístico (apoio de uma rede) pois a totalidade das distâncias a percorrer é mínima.

h. Anti-Centro do Grafo

É o vértice v_i cujo menor encargo para os restantes vértices do grafo tem valor máximo.

No grafo não orientado da figura, "D" é o anti-centro do grafo.

A matriz de distâncias mínimas pode ser orlada com a menor distância de cada vértice como mostra a figura seguinte:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Min (km)	Obs.
A		**12**	20	15	28	37	25	38	46	12	
B	12		**8**	27	16	25	37	32	43	8	
C	20	**8**		35	24	17	45	40	35	8	
D	15	27	35		15	25	**14**	27	35	**14 (max)**	Max{Min} ≡ anticentro
E	28	16	24	15		**10**	29	16	27	10	
F	37	25	17	25	**10**		39	26	18	10	
G	25	37	45	**14**	29	39		13	21	13	
H	38	32	40	27	16	26	13		**11**	11	
I	46	43	35	35	27	18	21	**11**		11	

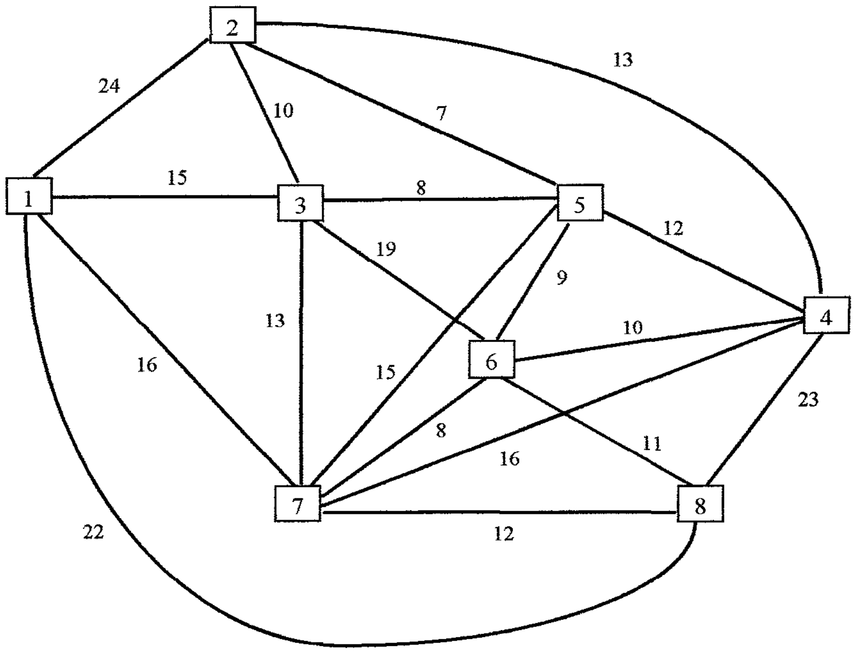
O anti-centro é o vértice que, sob o ponto de vista de distância, oferece melhores condições para uma instalação não desejável em qualquer ponto da rede (lixeira por exemplo). Veja-se que uma lixeira em "D" garante que os restantes vértices estão pelo menos a 14 km.

3. Auto Teste

a. A figura apresenta um conjunto de 8 localidades e a rede viária existente (distância em km).

Admita a necessidade de montar um centro de saúde.

Qual das localidades escolheria?



b. Os custo de transporte (por Kg) entre cada par de localidades e os custos de transbordo (carga/descarga) são os indicados na matriz seguinte:

Matriz de custos (u.m.)

	Porto	Braga	Guarda	C.Branco	Covilhã	Viseu
Porto	0.5	4.9			6.0	2.6
Braga	4.9	0.1	4.0			
Guarda		4.0	0.2	4.0	5.8	2.1
C.Branco			4.0	0.3	7.0	
Covilhã	6.0		5.8	7.0	0.5	3.1
Viseu	2.6		2.1		3.1	0.4

1) Calcule o custo mínimo (por kg) do Porto para C.Branco.

2) No custo mínimo apresentado quais os custos de transporte e transbordo ?

Qual é o itinerário associado ao custo mínimo calculado ?

c. Considere a necessidade de estabelecer um plano de investimento em equipamento informático para os próximos 4 anos.

O custo/ano da manutenção do actual equipamento é de 1000 unidades monetárias (u.m.).

Após consulta ao mercado dispõe-se da seguinte informação:

Tipo de Computador	Início da Comercialização	Custos da Conversão(u.m.)	Custos Anuais de Manutenção (u.m.)
A	1Jan/Ano 1	250	810
B	1Jan/Ano 2	200	650
C	1Jan/Ano 3	250	500
D	1Jan/Ano 4	300	400

Calcular o plano óptimo de investimento.

d. Um(a) aluno(a) do ISG desloca-se diariamente A para G.

A experiência dos últimos 2 meses permitiu-lhe estabelecer a probabilidade de não encontrar filas de trânsito lento no itinerário de ligação entre cada par de vértices (registada em cada arco da figura) .

Admitindo que a probabilidade de **não encontrar filas de trânsito lento ao longo de um itinerário** é igual ao produto das probabilidades associadas aos arcos do caminho, determine o itinerário de A para G com maior probabilidade de circular rapidamente.