PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES

PERMUTAÇÕES

O Exemplo 3 discutiu o problema de contar todas as possibilidades para os quatro últimos dígitos de um número de telefone sem dígitos repetidos. Neste problema, o número 1259 não é igual ao número 2951, já que a ordem dos quatro dígitos é importante. Um arranjo ordenado de objetos é chamado de permutação. Cada um desses números é uma permutação de 4 objetos distintos escolhidos em um conjunto de 10 objetos distintos (os dígitos). Quantas dessas permutações existem? A resposta, encontrada usando-se o princípio de multiplicação, é 10. 9. 8. 7 - existem 10 escolhas possíveis para o primeiro dígito, depois 9 para o segundo, já que não são permitidas repetições, 8 para o próximo dígito e 7 para o quarto dígito. O número de permutações de r objetos distintos escolhidos entre n objetos distintos é denotado por P(n, r). Portanto, a solução do problema dos números de quatro dígitos sem repetição pode ser expressa como P(10, 4).

Pode-se escrever uma fórmula para P(n, r) usando a função fatorial. Para um inteiro positivo n, *n fatorial* é definido como n(n - 1)(n - 2) ... 1 e denotado por n!; 0! é definido como tendo o valor 1. Da definição de n!, vemos que

$$n! = n(n - 1)!$$

e que, para r < n,

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= n(n - 1) ... (n - r + I)$$

Usando a função fatorial,

$$P(10, 4) = 10*9*8*7$$

$$= \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{6*5*4*3*2*1} = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

Em geral, P(n, r) é dado pela fórmula

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad para \;\; 0 \le r \le n$$

o valor de P(7, 3) é

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1} = 7*6*5 = 210 \text{ (Exemplo 14)}$$

Três casos especiais que podem aparecer ao se calcular P(n, r) são as duas "condições de contorno" P(n, 0) e P(n, n) e também P(n, 1). De acordo com a fórmula,

$$P(n,0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \text{ (Exemplo 15)}$$

Isso pode ser interpretado dizendo-se que existe apenas um arranjo ordenado de zero objetos - o conjunto vazio.

$$P(n,1) = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

Essa fórmula reflete o fato de que existem n arranjos ordenados de um objeto. (Cada arranjo consiste no objeto, de modo que basta contar de quantas maneiras podemos obter um objeto.)

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Essa fórmula diz que existem n! arranjos ordenados de n objetos distintos. (Isso reflete, simplesmente, o princípio de multiplicação - n escolhas para o primeiro objeto, n - 1 para o segundo, e assim por diante, com apenas uma escolha para o n-ésimo objeto.)

O número de permutações de 3 objetos, digamos a, b e c, é dado por P(3, 3) = 3! = 3 ·2· 1 = 6. As 6 permutações de a, b e c são

abc, acb, bac, bca, cab, cba (Exemplo 16)

Exemplo 17: Quantas palavras de três letras (que podem não fazer sentido) podem ser formadas a partir da palavra "compilar" se nenhuma letra pode ser repetida? Nesse caso a ordem das letras faz diferença, e queremos saber o número de permutações de três objetos distintos retirados de um conjunto de 8 objetos.

Exemplo 18: Dez atletas competem em um evento olímpico. São dadas medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas maneiras podem ser dadas às medalhas?

Problema 4: De quantas maneiras pode-se selecionar um presidente e um vice-presidente de um grupo de 20 pessoas?

Problema 5: De quantas maneiras seis pessoas podem se sentar em uma fileira de seis cadeiras?

Problemas de contagem podem ter outros problemas de contagem como tarefas auxiliares.

Exemplo 19: Uma biblioteca tem 4 livros sobre sistemas operacionais, 7 sobre programação e 3 sobre estruturas de dado. Vamos ver de quantas maneiras esses livros podem ser arrumados em uma prateleira, dado que todos os livros sobre o mesmo assunto devem ficar juntos.

COMBINAÇÕES

Algumas vezes queremos selecionar r objetos de um conjunto de n objetos, mas não nos importamos com a ordem. Nesse caso estamos contando o número de combinações de r objetos distintos escolhidos entre n objetos distintos, que denotamos por C(n, r). Para cada uma dessas combinações, existem r! maneiras de ordenar os r objetos escolhidos. Pelo princípio da multiplicação, o número de permutações de r objetos distintos escolhidos entre n objetos é o produto do número de escolhas possíveis dos objetos, C(n, r), pelo número de maneiras de ordenar os objetos escolhidos, r! Logo,

$$C(n, r) \,.\, r! = P(n, r)$$

ou

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \ para\ 0 \le r \le n$$

Outras notações usadas para C(n, r) são

$${}_nC_r,\ C_r^n,\ \binom{n}{r}$$

Exemplo 20: O valor de C(7, 3) é:

Exemplo 21: Os casos especiais para C(n, r) são C(n, 0), C(n, 1) e C(n, n). A fórmula para C(n, O),

$$C(n,0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

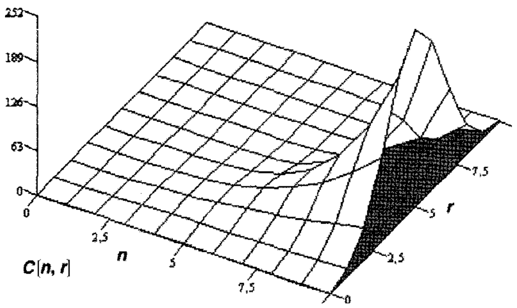
reflete o fato de que existe uma única maneira de escolher zero objetos entre n objetos: escolher o conjunto vazio.

$$C(n,1) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

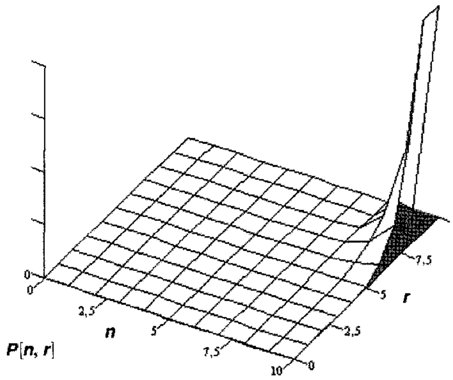
Essa fórmula indica que existem n maneiras de selecionar 1 objeto entre n objetos.

$$C(n,n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

Nessa última fórmula vemos que existe uma única maneira de selecionar n objetos entre n objetos: escolher todos os objetos.
Na fórmula para C(n, r), suponha que n é mantido fixo e r é aumentado. Então r! aumenta, o que faz com que C(n, r) tenda a se tomar menor, mas, por outro lado, (n - r)! diminui, o que faz com que C(n, r) tenda a se tomar maior. Para valores pequenos de r, o aumento em r! não é tão grande quanto a diminuição em (n-r)!, de modo que C(n, r) aumenta de 1 a n e até valores maiores. Chega uma hora, no entanto, que o aumento em r! toma-se maior do que a diminuição em (n - r)!, e os valores de C(n, r) começam a diminuir até chegar a 1 quando r = n, como calculamos no exemplo 20. A Fig. a ilustra o aumento e a diminuição dos valores de C(n, r) para um n fixo. Para P(n, r), quando n é mantido fixo e r aumenta, n - r, e, portanto, (n - r)!, diminui, de modo que P(n, r) aumenta. Então, os valores de P(n, r) para $0 \leq r \leq n$ crescem de 1 a n! passando por n, como calculamos no Exemplo 15. Veja a Fig. b; note a diferença nas escalas verticais das Figs. a e b.



(a)



(b)

Exemplo 22: Quantas mãos de pôquer, com 5 cartas cada, podem ser distribuídas com um baralho de 52 cartas?

Ao contrário dos problemas anteriores, a resposta do Exemplo 22 não pode ser obtida facilmente aplicando-se o princípio da multiplicação. Logo, C(n, r) nos dá uma maneira de resolver novos problemas.

Exemplo 23: Dez atletas competem em um evento olímpico; três serão declarados vencedores. De quantas maneiras podem ser escolhidos os vencedores?

Problema 6: De quantas maneiras é possível escolher uma comissão de 3 pessoas em um grupo de 12?

Lembre-se de que a diferença entre permutações e combinações consiste em se os objetos são simplesmente selecionados ou são selecionados e ordenados. Se a ordem é relevante, o problema envolve permutações; se a ordem não é relevante, o problema envolve combinações. Por exemplo, o Problema 4 é um problema de permutações - duas pessoas devem ser selecionadas e ordenadas, o primeiro como presidente e o segundo como vice-presidente - enquanto o Problema 6 é um problema de combinações - três pessoas são selecionadas mas não ordenadas.
Ao se resolver problemas de contagem, C(n, r) pode ser usada em conjunção com o princípio da multiplicação ou o princípio da adição.

Exemplo 24: Uma comissão de 8 alunos deve ser escolhida em um grupo contendo 19 alunos do primeiro ano e 34 do segundo ano.
a) De quantas maneiras é possível selecionar 3 alunos do primeiro ano e 5 do segundo?
b) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão contendo exatamente 1 aluno do primeiro ano?
c) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão contendo no máximo 1 aluno do primeiro ano?
d) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão contendo pelo menos 1 aluno do primeiro?

Como a ordem dos indivíduos escolhidos é irrelevante, esses são problemas de combinações.

A função fatorial cresce muito rapidamente. Um número como 100! não pode ser calculado na maior parte das calculadoras (ou na maior parte dos computadores, a menos que se use aritmética de precisão dupla), mas expressões da forma

$$\frac{100!}{25!75!}$$

podem ser calculadas cancelando-se, primeiro, os fatores comuns.

ELIMINAÇÃO DE DUPLICATAS

Mencionamos, anteriormente, que problemas de contagem podem ser resolvidos freqüentemente de diversas maneiras. Infelizmente, também é fácil encontrar supostas soluções que parecem razoáveis mas estão erradas. Em geral, estão erradas porque alguma coisa é contada mais de uma vez (algumas vezes, um objeto é completamente esquecido e não é contado).

Exemplo 25: Considere, novamente, o item (d) do Exemplo 24, o número de maneiras de se selecionar uma comissão com pelo menos 1 aluno do primeiro ano. Uma solução errada é a seguinte: pense em uma seqüência de duas tarefas, escolhendo um aluno do primeiro ano e depois escolhendo o resto da comissão. Existem C(19, 1) maneiras de se escolher 1 aluno do primeiro ano. Uma vez escolhido um aluno do primeiro ano, estamos livres para escolher os outros 7 membros da comissão entre as 52 pessoas, sem restrições, com C(52, 7) escolhas. Pelo princípio da multiplicação, isso nos dá C(19, 1) . C(52, 7), um número maior do que a resposta correta.

O problema é o seguinte: suponha que Diana e Felipe são alunos do primeiro ano. Em uma das escolhas que contamos, Diana é a aluna escolhida primeiro e escolhemos o resto da comissão de modo que Felipe esteja entre eles, juntos com outros seis. Mas contamos, também, a opção de escolher primeiro Felipe como aluno do primeiro ano e compor a comissão com Diana e os outros mesmos seis membros anteriores. Essa é a mesma comissão de antes e foi contada duas vezes.

Problema 7: Uma comissão com dois elementos, contendo necessariamente um aluno de matemática, vai ser escolhida entre quatro alunos de matemática e três de física. Calcule os dois valores a seguir:
a) C(7, 2) - C(3, 2) (solução correta: todas as comissões possíveis menos as que não têm alunos de matemática).
b) C(4,1) . C(6,1) (solução errada: escolha um aluno de matemática e depois escolha o resto da comissão).

Note que C(4, 1) . C(6, 1) - C(4, 2) também dá a resposta correta, pois C(4, 2) é o número de comissões com dois alunos de matemática e são essas que foram contadas duas vezes em C(4, 1) . C(6, 1).

Exemplo 26:
a) Quantas permutações distintas podem ser feitas com os caracteres que formam a palavra FLÓRIDA?
b) Quantas permutações distintas podem ser feitas com os caracteres que formam a palavra MISSISSIPPI?

Em geral, suponha que temos n objetos dos quais um conjunto de n_1 são indistinguíveis entre si, um outro conjunto de n_2 são indistinguíveis entre si, e assim por diante, até um conjunto de n_k objetos que são indistinguíveis entre si. O número de permutações distintas desses n objetos é

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)...(n_k!)}$$

Problema 8: Quantas permutações distintas existem dos caracteres na palavra MONGOOSES?

PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES COM REPETIÇÕES

Nossas fórmulas para P(n, r) e C(n, r) supõem que arrumamos ou selecionamos r objetos entre os n disponíveis usando cada objeto apenas uma vez. Portanto, $r \leq n$. Suponha, entretanto, que os n objetos estão disponíveis para serem usados quantas vezes quisermos. Por exemplo, construímos palavras usando as 23 letras do nosso alfabeto; as palavras podem ser tão longas quanto quisermos, com as letras usadas repetidamente ou podemos retirar cartas de um baralho, recolocando uma carta após cada retirada; podemos retirar quantas cartas quisermos e usá-las repetidamente. Podemos ainda falar em permutações ou combinações de r objetos entre n, mas, com a possibilidade de repetições, r pode ser maior do que n.
Contar o número de permutações com repetições de r objetos entre n objetos distintos é fácil. Temos n escolhas para o primeiro objeto e, como são permitidas repetições, n escolhas para o segundo, n escolhas para o terceiro, e assim por diante. Logo, o número de permutações com repetições de r objetos escolhidos entre n objetos distintos é n^r.
Para determinar o número de combinações com repetições de r objetos escolhidos entre n objetos distintos, vamos usar uma idéia bem esperta.

Exemplo 27: Um joalheiro, ao projetar um broche, decidiu usar cinco pedras preciosas escolhidas entre diamantes, rubis e esmeraldas. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidas as pedras?

Como não estamos interessados em arrumar as pedras preciosas em ordem, esse é um problema de combinações e não de permutações. Queremos o número de combinações com repetição de cinco objetos escolhidos entre três objetos. O broche pode conter um diamante, três rubis e uma esmeralda, por exemplo, ou cinco diamantes. Podemos representar essas possibilidades representando as pedras preciosas escolhidas por cinco asteriscos e colocando marcadores verticais entre os asteriscos para representar a distribuição entre os três tipos de pedras preciosas. Por exemplo, podemos representar a escolha de um diamante, três rubis e uma esmeralda por

*|***|*

enquanto a escolha de cinco diamantes seria representada por

***** | |

Estamos, portanto, considerando sete posições (representando as cinco pedras preciosas e os dois marcadores verticais) e as escolhas diferentes são representadas por quais das sete posições são ocupadas por asteriscos. Então, contamos o número de maneiras de escolher cinco itens entre sete, que é C(7, 5), ou seja

$$\frac{7!}{5!2!}$$

Em geral, se usarmos o mesmo esquema para representar uma combinação com repetição de r objetos escolhidos entre n objetos distintos, teremos que ter n - 1 marcadores para indicar o número de cópias de cada um dos n objetos. Isso nos dá r + (n - 1) posições a serem preenchidas e queremos saber o número de maneiras de selecionar r dessas posições. Queremos, portanto,

$$C(r+n-1, r) = \frac{(r+n-1)!}{r!(r+n-1-r)!} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Isso está de acordo com o resultado do Exemplo 27, onde r = 5 e n = 3.

Problema 9: Seis crianças escolhem um pirulito cada, entre uma seleção de pirulitos vermelhos, amarelos e verdes. De quantas maneiras isso pode ser feito? (Não interessa qual criança pega qual pirulito.)

A Tabela abaixo resume as técnicas que podem ser aplicadas em circunstâncias variadas, embora possam existir diversas maneiras legítimas de resolver qualquer problema de contagem.

Você quer contar o número de ...	Técnica a ser tentada
Subconjuntos de um conjunto com n elementos	Use a fórmula 2^n.
Possibilidades de resultados de eventos sucessivos	Multiplique o número de resultados possíveis para cada evento.
Possibilidades de resultados de eventos disjuntos	Some o número de resultados possíveis para cada evento.
Possibilidades de resultados dadas escolhas específicas em cada etapa	Desenhe uma árvore de decisão e conte o número de caminhos.
Elementos em partes da interseção de conjuntos	Use a fórmula para o princípio de inclusão e exclusão.
Arranjos ordenados de r entre n objetos distintos	Use a fórmula para $P(n, r)$.
Maneiras de selecionar r entre n objetos distintos	Use a fórmula para $C(n, r)$.
Maneiras de selecionar, com repetição permitida, r entre n objetos distintos	Use a fórmula para $C(r + n - 1, r)$.