Grafos Isomorfos

1. Revisão de funções

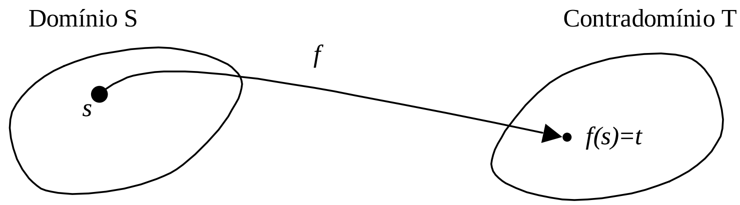
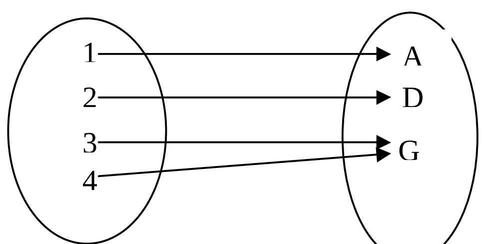


Figura 1

uma função *f* de *S* em *T*, é um subconjunto de $S \times T$ onde cada elemento de *S* aparece exatamente uma única vez como primeiro componente de um par ordenado (*s*,*t*). *S* é o domínio e *T* é o contradomínio da função. Se o par ordenado (*s*,*t*) pertence à função, então f é denotado por f(s); *t* é a imagem de *s* por *f*, *s* é a pré-imagem de *t* por *f*, e diz-se que *f* leva *s* em *t*.

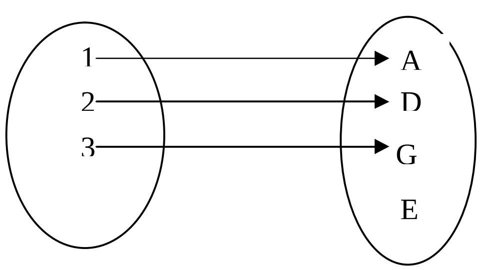
1.1. Propriedades das Funções
1.1.1. Funções Sobrejetivas (todo elemento de B é a imagem de pelo menos um elemento de A)

Seja $f: S \rightarrow T$ uma função arbitrária com domínio *S* e contradomínio *T*. Parte da definição de uma função é que cada elemento de *S* tem uma imagem por *f* e que todas as imagens são elementos de *T*; o conjunto *I* destas imagens é chamado conjunto imagem da função *f*. assim, $I=\{f(s) \mid s \in S\}$, ou $I=f(S)$. Obviamente $I \subseteq T$; Se acontecer de $I = T$, isto é, o conjunto imagem ser igual ao contradomínio, a função é dita *sobrejtiva*. Para mostrarmos que uma função é sobrejetiva, precisamos mostrar que $T \subseteq I$ e, então, teremos mostrado que $I=T$. Precisamos mostrar então que um elemento arbitrário do contradomínio é um elemento da imagem, isto é, que algum elemento do domínio é levado nele. Por outro lado se pudermos exibir um elemento do contradomínio que seja imagem de qualquer elemento do domínio, então teremos provado que a função é *sobrejetiva*.



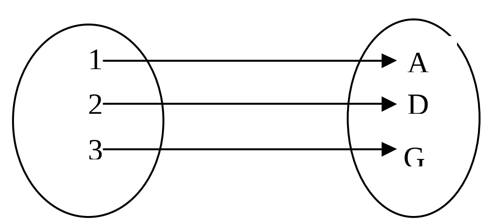
1.1.2. Funções Injetivas (quaisquer dois elementos distintos de A, sempre possuem imagens distintas em B)

A definição de funções garante que há apenas uma imagem para cada elemento do domínio. No entanto, um dado elemento da imagem pode ter mais de uma pré-imagem. *A função f é injetiva ou um-para-um se nenhum elemento de T for imagem de dois elementos distintos de S.*



1.1.3. Funções Bijetivas

Uma função f é *bijetiva* se for ao mesmo tempo *injetiva* e *sobrejetiva*.



2. Isomorfismo

Definição: Dois grafos $G_1(V_1,E_1)$ e $G_2(V_2,E_2)$ são ditos *isomorfos entre si* se existe uma correspondência entre os seus vértices e arestas de tal maneira que a relação de incidência seja preservada. Em outros termos, temos $|V_1|=$

$|V_2|$ e existe uma função unívoca f: V_1-->V_2, tal que (i,j) é elemento de E_1 se e somente se $(f(i),f(j))$ é elemento de E_2.

Para determinar que dois grafos são isomorfos requer que encontremos a bijeção (ou, para grafos não simples, as bijeções) e então mostremos que a propriedade da adjacência (ou relação entre arestas e seus extremos) é preservada. Para mostrar que dois grafos não são isomorfos, precisamos mostrar que a(s) bijeção(ões) necessária(s) existe(m). Entretanto este método se tornaria inviável em grafos que tivessem um grande número de arestas e vértices. Podemos procurar outras razões pelas quais tais bijeções não existem e portanto descobrir se existe ou não o isomorfismo. Apesar de não ser uma tarefa simples em todos os casos, existem certas condições sob as quais se torna fácil ver que dois grafos não são isomorfos. Essas condições incluem:

- um grafo ter mais vértices do que outro
- um grafo ter mais arestas do que outro
- um grafo ter arestas paralelas e o outro não
- um grafo ter laço e o outro não
- um grafo ter um vértice de grau k e o outro não
- um grafo ser conexo e o outro não
- um grafo ter um ciclo e o outro não.

Observe o grafo abaixo:

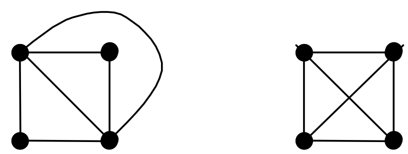


Figura 2

Quais condições acima são satisfeitas e quais não satisfeitas ao analisarmos se os grafos são ou não isomorfos?

Observe a próxima figura:

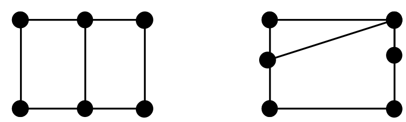


Figura 3

Quais das condições acima são satisfeitas para não se ter isomorfismo?

A relação de isomorfia é uma relação de equivalência. Significa isto que

- Todo o grafo é isomorfo a si mesmo. (*reflexividade*)
- Se grafo é isomorfo a um segundo grafo então também o segundo é isomorfo ao primeiro. (*simetria*)
- Se um grafo é isomorfo a um segundo, que por sua vez é isomorfo a um terceiro grafo, então o o primeiro é isomorfo ao terceiro. (*transitividade*)

Eis alguns exemplos de grafos isomorfos:

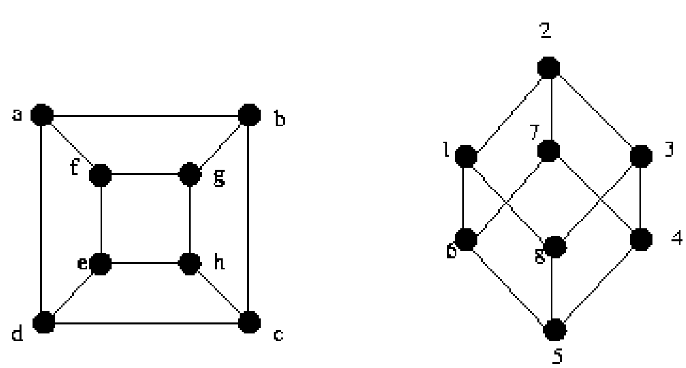


Figura 4

Para ver o isomorfismo dos grafos da figura 4, podemos utilizar a seguinte função:

f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 8, f(e) = 5, f(f) = 6, f(g) = 7, f(h) = 4.

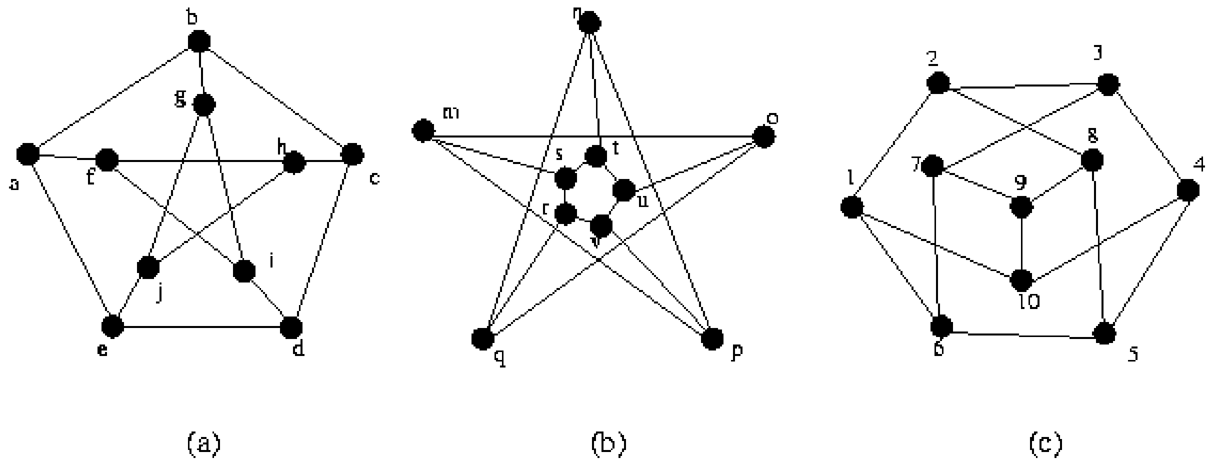


Figura 5

Para ver o isomorfismo dos grafos 5(a) e 5(b), utilize a seguinte função:

f(a) = s, f(b) = t, f(c) = u, f(d) = v, f(e) = r, f(f) = m, f(g) = n, f(h) = o, f(i) = p, f(j) = q

Para ver o isomorfismo dos grafos 6(a) e 6(c), utilize a seguinte função:

f(a) = 1, f(b) = 10, f(c) = 4, f(d) = 5, f(e) = 6, f(f) = 2, f(g) = 9, f(h) = 3, f(i) = 8, f(j) = 7.

Esses exemplos devem ser suficientes para mostrar que não é sempre fácil determinar se dois grafos são isomorfos. Não existe atualmente um algoritmo eficiente para resolver esse problema. Poderiamos tentar todas as permutações possível, mas isso daria um algoritmo de complexidade em O(n!). Para que dois grafos sejam isomorfos, no mínimo essas condições tem que ser respeitadas:

1. Os dois têm o mesmo número de vértices.
2. Os dois têm o mesmo número de arestas.
3. Os dois têm o mesmo número de vértices de grau *n*, para qualquer valor *n* entre 0 e o número de vértices que o grafo contém.

Note que isso não é suficiente par que sejam isomorfos. Por exemplo, os grafos da figura 6 respeitam essas condições e não são isomorfos.

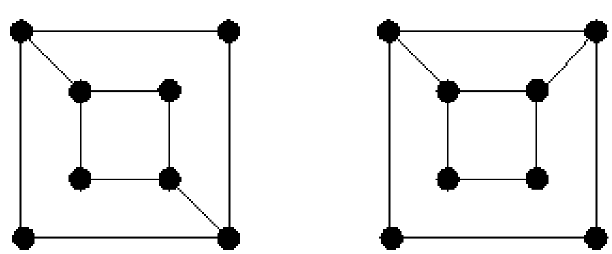


Figura 6

Mesmo se ambos grafos são regulares de grau *k*, as condições acima não são suficientes para concluir que eles são isomorfos. Veja o exemplo da figura 6'. É muito fácil ver que eles não são isomorfos apesar de que os dois são regulares de grau 3.

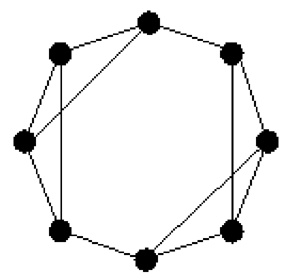


Figura 6'

Para determinar se um grafo é isomorfo, existe uma técnica (não fácil de implementar!) que consiste em modificar a maneira de desenhar um grafo para torná-lo igual ao outro, com a exceção dos rótulos dos vértices. Para explicar melhor isso, vamos ver como o grafo da figura 5a pode ser transformado em um grafo equivalente ao grafo da figura 5b. Como ilustrado na figura 8, começamos colocando fora os vértices *f, g, h, i* e *j* para obter o grafo 7b. Depois, colocamos os vértices *a, b, c, d* e j no meio, para obter o grafo isomorfo.

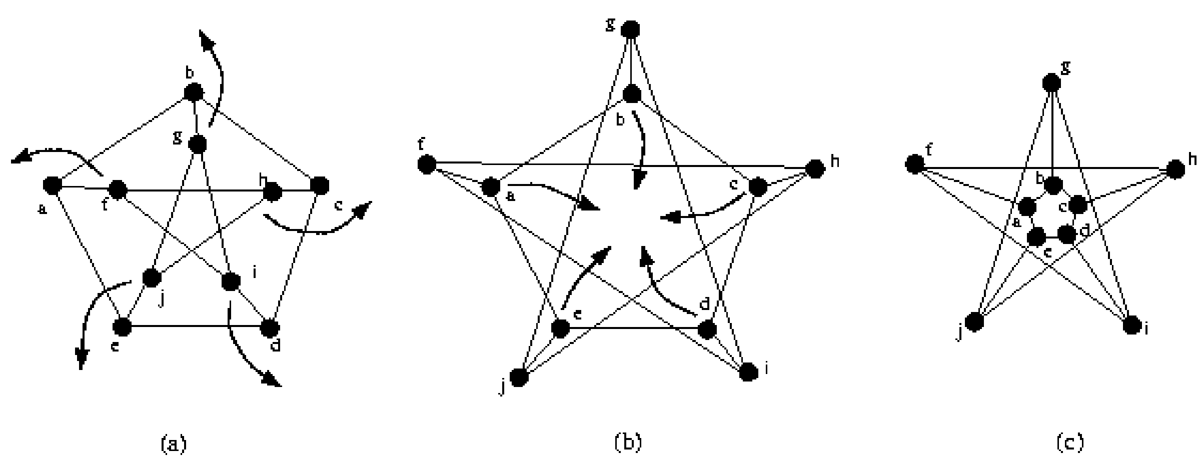


Figura 7

A classe de isomorfia de um grafo é, por definição, o conjunto de todos os outros grafos (incluindo o próprio) que lhe são isomorfos. Porque a relação de isomorfia é uma relação de equivalência as classes de isomorfia são disjuntas duas a duas e o universo de todos os grafos fica dividido nas classes de isomorfia.

GAGNON, Michel. Algoritmos e teoria dos grafos. 2001. Disponível em : <http://www.inf.ufpr.br/andre/Disciplinas/BSc/CI065/michel/Intro/intro.html#Iso>. Acesso em: 20/02/2009.

DUARTE, Pedro. Isomorfismos. 2003. Disponível em: <http://www.lmc.fc.ul.pt/~pduarte/tmf/Grafos/isomorfismos.html>. Acesso em: 20/02/2009.