RESOLVENDO RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Desenvolvemos dois algoritmos, um iterativo, o outro recorrente, para calcular um valor S(n) para a seqüência S do Exemplo 1. No entanto, existe uma maneira ainda mais fácil para calcular S(n). Lembre que

$$S(1) = 2 \qquad (1)$$

$$S(n) = 2S(n-1) \text{ para } n \geq 2 \qquad (2)$$

Como

$$S(1) = 2 = 2^1$$
$$S(2) = 4 = 2^2$$
$$S(3) = 8 = 2^3$$
$$S(4) = 16 = 2^4$$

e assim por diante, vemos que

$$S(n) = 2^n \qquad (3)$$

Usando a equação (3), podemos substituir um valor para n e calcular diretamente S(n) sem ter que calcular - explicitamente ou implicitamente por recorrência - todos os valores menores de S antes. Uma equação como (3), na qual podemos substituir um valor e obter diretamente o que queremos, é chamada uma **solução em forma fechada** para a relação de recorrência (2) sujeita à condição básica (1). Quando encontramos uma solução em forma fechada, dizemos que resolvemos a relação de recorrência.

Relações de recorrência podem ser usadas para diversas coisas, do crescimento populacional de determinada espécie à proliferação de vírus computacionais. É claro que sempre que possível seria bom encontrar uma solução em forma fechada.

Uma técnica para resolver relações de recorrência é uma abordagem do tipo "expandir, conjecturar e verificar", que usa repetidamente a relação de recorrência para expandir a expressão a partir do n-ésimo termo até podermos ter uma idéia da forma geral. Finalmente essa conjectura é verificada por indução matemática.

Exemplo 12: Considere novamente a condição básica e a relação de recorrência para a seqüência S do Exemplo 1:

$$S(1) = 2 \qquad (4)$$
$$S(n) = 2S(n - 1) \text{ para } n \geq 2 \qquad (5)$$

Vamos fingir que não sabemos a solução em forma fechada e usar a abordagem de expandir, conjecturar e verificar para encontrá-la. Começando com S(n), expandimos usando repetidamente a relação de recorrência. Lembre-se sempre de que a relação de recorrência é uma receita que diz que qualquer elemento de S pode ser substituído por duas vezes o elemento anterior. Aplicamos essa receita a S para n, n - 1, n - 2, e assim por diante:

$$\begin{aligned} S(n) &= 2S(n - 1) \\ &= 2[2S(n - 2)] = 2^2S(n - 2) \\ &= 2^2 [2S(n - 3)] \\ &= 2^3S(n - 3) \end{aligned}$$

Olhando o padrão que está se desenvolvendo, conjecturamos que, após k tais expansões, a equação tem a forma

$$S(n) = 2^kS(n - k)$$

Essa expansão dos elementos de S em função de elementos anteriores tem que parar quando n - k = 1, isto é, quando k = n - 1. Nesse ponto, temos

$$\begin{aligned} S(n) &= 2^{n-1}S[n - (n - 1)] \\ &= 2^{n-1}S(1) = 2^{n-1}(2) = 2^n \end{aligned}$$

que expressa a solução em forma fechada.

Ainda não terminamos, no entanto, pois conjecturamos qual deveria ser a forma geral. Precisamos confirmar nossa solução em forma fechada por indução no valor de n. A proposição que queremos provar, portanto, é que $S(n) = 2^n$ para $n \geq 1$. Para a base da indução, $S(1) = 2^1$. Isso é verdadeiro pela Eq. (4). Vamos supor que $S(k) = 2^k$. Então

$$\begin{aligned} S(k + 1) &= 2S(k) && \text{(pela Eq. (5))} \\ &= 2(2^k) && \text{(pela hipótese de indução)} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Isso prova que nossa solução em forma fechada está correta.

Exercício 8: Encontre uma solução em forma fechada para a relação de recorrência, sujeita à condição básica, para a seqüência T.

1. T(1) = 1
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$ para $n \geq 2$

(Sugestão: expanda, conjecture e verifique.)

Alguns tipos de relações de recorrência têm fórmulas conhecidas para suas soluções. Uma relação de recorrência para uma seqüência S(n) é dita **linear** se os valores anteriores de S que aparecem na definição aparecem apenas na primeira potência. A relação de recorrência linear mais geral tem a forma

$$S(n) = f_1(n)S(n - 1) + f_2(n)S(n - 2) + ... + f_k(n)S(n - k) + g(n)$$

onde os coeficientes f_i e g podem ser expressões envolvendo n. A relação de recorrência tem **coeficientes constantes** se todos os f_i forem constantes. Ela é de **primeira ordem** se o n-ésimo termo depende apenas do termo n - 1. Relações de recorrência lineares de primeira ordem com coeficientes constantes têm, portanto, a forma

$$S(n) = cS(n - 1) + g(n) \qquad (6)$$

Finalmente, a relação de recorrência é **homogênea** se g(n) = 0 para todo n.

Vamos encontrar a fórmula para a solução da Eq. (6), a relação de recorrência linear de primeira ordem genérica com coeficientes constantes, sujeita à condição básica de que S(1) seja conhecida. Vamos usar a abordagem de expandir, conjecturar e verificar. O que vamos fazer é uma generalização do que foi feito no Exemplo 12. Usando a Eq. (6) repetidamente e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} S(n) &= cS(n - 1) + g(n) \\ &= c[cS(n - 2) + g(n - 1)] + g(n) \\ &= c^2S(n - 2) + cg(n - 1) + g(n) \\ &= c^2 [cS(n - 3) + g(n - 2)] + cg(n - 1) + g(n) \\ &= c^3S(n - 3) + c^2g(n - 2) + cg(n - 1) + g(n) \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ . \end{aligned}$$

Após k expansões, a forma geral parece ser

$$S(n) = c^kS(n - k) + c^{k-1}g(n - (k - 1)) + ... + cg(n - 1) + g(n)$$

Se o primeiro termo da seqüência é conhecido, então a expansão termina quando n - k = 1, ou k = n - 1, quando temos

$$\begin{aligned} S(n) &= c^{n-1}S(l) + c^{n-2}g(2) + ... + cg(n - 1) + g(n) \\ &= c^{n-1}S(l) + c^{n-2}g(2) + \quad ... + c^1g(n - 1) + c^0g(n) \qquad (7) \end{aligned}$$

Podemos usar a **notação de somatório** para escrever parte dessa expressão de forma mais compacta.

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i) \qquad (8)$$

Essa, no entanto, ainda não é uma solução em forma fechada, porque precisamos encontrar uma expressão para o somatório. Em geral, ou é trivial encontrar a soma ou já encontramos seu valor usando indução matemática.

Encontramos, portanto, uma solução geral de uma vez por todas para qualquer relação de recorrência da forma (6); esse processo não precisa ser repetido. Tudo que é necessário é colocar seu problema na forma (6) para encontrar o valor de c e a fórmula para g(n), e depois substituir esses valores na expressão em (8). A notação g(n) na Eq. (6) é a notação usual para uma função de n; você pode pensar em g(n) como sendo uma "receita" para o que fazer com seu argumento n. Se, por exemplo, g(n) = 2n então g dobra o valor de qualquer que seja seu argumento: g(3) = 2(3) = 6

Exemplo 13: A seqüência S(n) do Exemplo 12,

$$S(1) = 2$$
$$S(n) = 2S(n - 1) \text{ para } n \geq 2$$

é uma relação de recorrência linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes. Em outras palavras, ela coincide com a Eq. (6) com c = 2 e g(n) = 0. Como g(n) = 0, a função g é sempre igual a 0 qualquer que seja seu argumento. Da fórmula (8), a solução em forma fechada é

$$S(n) = 2^{n-1} (2) + \sum_{i=2}^{n} 0 = 2^n$$

o que está de acordo com nosso resultado anterior.

Temos agora duas maneiras alternativas para resolver uma relação de recorrência linear de primeira ordem com coeficientes constantes. A Tabela abaixo resume essas abordagens.

Para Resolver Relações de Recorrência da Forma S(n) = cS(n - 1) + g(n) Sujeita à Condição Básica S(l)	
Método	Passos
Expandir, conjecturar, verificar	1. Use a relação de recorrência repetidamente até poder adivinhar o padrão. 2. Decida qual será o padrão quando n - k = 1. 3. Verifique a fórmula resultante por indução.
Fórmula da solução	1. Coloque sua relação de recorrência na forma S(n) = cS(n-1) + g(n) para encontrar c e g(n).

	2. Use c, g(n) e S(l) na fórmula $S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$ 3. Calcule o somatório resultante para obter a expressão final.

Exemplo 14: Encontre uma solução em forma fechada para a relação de recorrência

$$S(n) = 2S(n - 1) + 3 \text{ para } n \geq 2$$

sujeita à condição básica

$$S(1) = 4$$

Usaremos o método da fórmula da solução. Comparando nossa relação de recorrência

$$S(n) = 2S(n - 1) + 3$$

com a forma geral $S(n) = cS(n - 1) + g(n)$, vemos que

$$c = 2 \qquad g(n) = 3$$

O fato de que $g(n) = 3$ diz que g tem um valor constante de 3 independentemente do valor de seu argumento; em particular, $g(i) = 3$. Substituindo na forma geral da solução $S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$, obtemos

$$S(n) = 2^{n-1}(4) + \sum_{i=2}^{n} 2^{n-i}(3)$$

$$= 2^{n-1}(2^2) + 3\sum_{i=2}^{n} 2^{n-i}$$

$$= 2^{n-1} + 3[2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^1 + 2^0]$$

$$= 2^{n+1} + 3[2^{n-1} - 1]$$

Logo, o valor de S(5), por exemplo, é $2^6 + 3(2^4 - 1) = 64 + 3(15) = 109$.

De maneira alternativa, usando o método de expandir, conjecturar e verificar, expandimos

$$\begin{aligned} S(n) &= 2S(n - 1) + 3 \\ &= 2[2S(n - 2) + 3] + 3 = 2^2S(n - 2) + 2 \cdot 3 + 3 \\ &= 2^2[2S(n - 3) + 3] + 2 \cdot 3 + 3 = 2^3S(n - 3) + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \\ &\ \ . \\ &\ \ . \\ &\ \ . \end{aligned}$$

Essa forma geral parece ser

$$S(n) = 2^kS(n - k) + 2^{k-1} \cdot 3 + 2^{k-2} \cdot 3 + ... + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3$$

a qual, quando n - k = 1 ou k = n - 1, fica

$$\begin{aligned} S(n) &= 2^{n-1}S(1) + 2^{n-2} \cdot 3 + 2^{n-3} \cdot 3 + ... + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \\ &= 2^{n+1}(4) + 3[2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^2 + 2 + 1] \\ &= 2^{n+1} + 3[2^{n-1} - 1] \end{aligned}$$

Finalmente, precisamos provar por indução que $S(n) = 2^{n+1} + 3[2^{n-1} - 1]$.

Caso básico: n = 1: $S(1) = 4 = 2^2 + 3[2^0 - 1]$, verdadeiro

Suponha $S(k) = 2^{k+1} + 3[2^{k-1} - 1]$

Prove $S(k + 1) = 2^{k+2} + 3[2^k - 1]$

$$\begin{aligned} S(k + 1) &= 2S(k) + 3 \\ &= 2(2^{k+1} + 3[2^{k-1} - 1] + 3 \\ &= 2^{k+2} + 3 \cdot 2^k - 6 + 3 \\ &= 2^{k+2} + 3[2^k - 1] \end{aligned}$$