11. Transformações Geométricas

11.1 Transformações 2D

11.1.1 Translação

Se um ponto P(x, y) sofre uma translação T(dx, dy), como mostra a Figura 11.1, sua nova posição P'(x', y') será dada por:

$$x' = x + dx \qquad (11.1a)$$

$$y' = y + dy \qquad (11.1b)$$

Matricialmente pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

ou, de forma compacta:

$$\boxed{P' = P + T} \qquad (2.3)$$

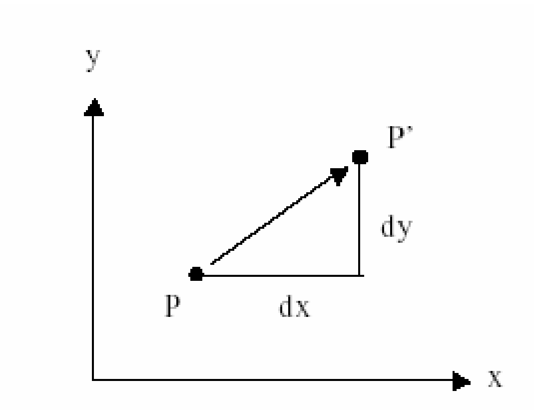

Figura 11.1 - Translação de um ponto.

11.1.2 Mudança de escala

Uma mudança de escala aplicada a um ponto isolado produz o efeito de alongar ou encurtar as componentes do vetor posição do ponto. Considerando uma mudança de escala S(sx, sy), sendo sx e sy os fatores de escala nas direções x e y respectivamente, as novas coordenadas de um ponto P(x, y) são dadas por:

$$x' = sx \cdot x \qquad (11.4a)$$

$$y' = sy \cdot y \qquad (11.4b)$$

Matricialmente se tem que:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (11.5)$$

e de forma compacta,

$$\boxed{P' = S \cdot P} \qquad (11.6)$$

11.1.3 Rotação

Aplicar uma transformação de rotação R(q) a um ponto P(x, y) significa rotacionar de um ângulo q o vetor posição do ponto em relação à origem (Figura 11.2). As coordenadas do ponto após a rotação são iguais a:

$$x' = x \cdot \cos\Theta - y \cdot \sin\Theta \qquad (11.7a)$$

$$y' = x \cdot \sin\Theta + y \cdot \cos\Theta \qquad (11.7b)$$

Matricialmente, a transformação é representada por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (11.8)$$

De forma compacta,

$$\boxed{P' = R \, . \, P} \qquad (11.9)$$

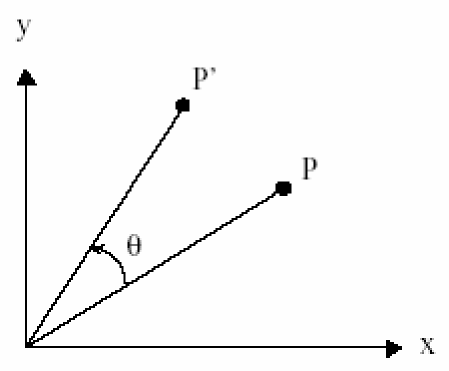

Figura 11.2 - Rotação de um ponto.

11.1.4 Coordenadas homogêneas

Em coordenadas homogêneas [7, 8], cada ponto é representado pelas coordenadas (x, y, w). Dois pontos, P = (x, y, w) e P′ = (x′, y′, w′) representam o mesmo ponto se e somente se as coordenadas de um são proporcionais às coordenadas do outro:

$$P \equiv P' \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = t . \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} \qquad (11.10)$$

Pelo menos uma das coordenadas homogêneas deve ser diferente de zero. O ponto (0, 0, 0) não faz parte do sistema de coordenadas homogêneas. Se $w \neq 0$, então:

$$(x, y, w) \equiv \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1\right) \qquad (11.11)$$

Para $w \neq 0$, x/w e y/w representam as coordenadas cartesianas de (x, y, w). Os pontos para os quais w = 0 representam pontos no infinito. Os pontos (tx, ty, tw), para $t \neq 0$, representam uma reta em 3D. Conseqüentemente, cada ponto do sistema de coordenadas homogêneas representa uma reta em 3D cuja direção passa pela origem (Figura 11.3).

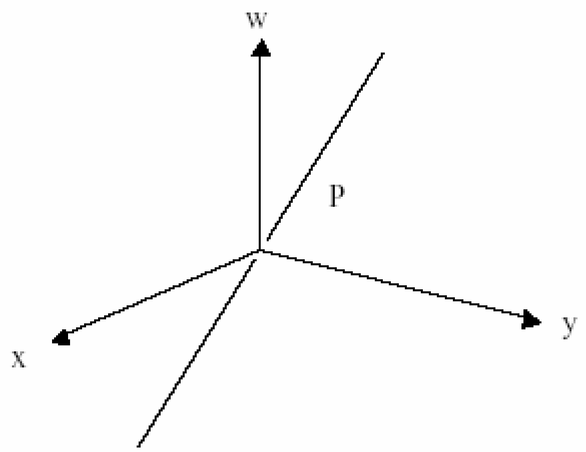

Figura 11.3 - Representação de um ponto em coordenadas homogêneas.

Os pontos em coordenadas homogêneas são normalizados dividindo-se suas coordenadas por w, obtendo-se pontos na forma (x, y, 1). O conjunto de todos os pontos normalizados forma o plano definido por w = 1, no espaço x-y-w (Figura 11.4).

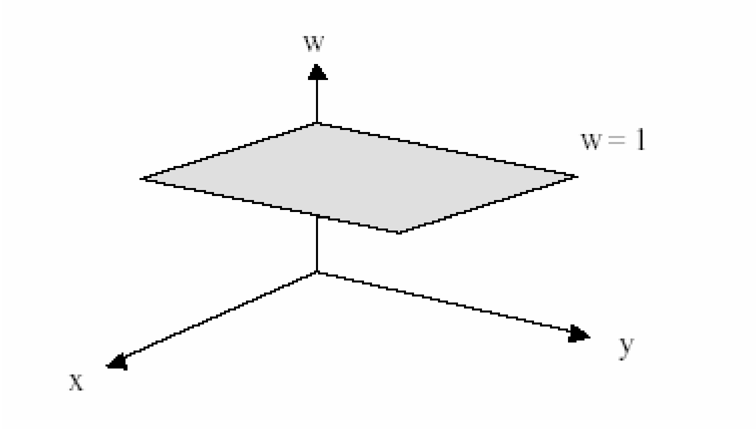

Figura 11.4 - Representação geométrica da normalização de pontos.

11.1.5 Translação usando coordenadas homogêneas

A transformação de translação, em coordenadas cartesianas, é expressa por uma operação de adição de vetores. Entretanto, através do uso de coordenadas homogêneas normalizadas é possível representar a translação por um produto de matrizes, da mesma forma que as transformações de mudança de escala e rotação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

De forma compacta,

$$\boxed{P' = T(dx, dy) \, . \, P} \quad (11.13)$$

Se duas translações, $T(dx_1, dy_1)$ e $T(dx_2, dy_2)$, são aplicadas nesta ordem a um ponto P(x, y), pode-se escrever que:

$$P' = T(dx_1, dy_1) \cdot P \tag{11.14}$$

$$P'' = T(dx_2, dy_2) \cdot P' \tag{11.15}$$

Então,

$$\begin{aligned} P'' &= T(dx_2, dy_2) \cdot (T(dx_1, dy_1) \cdot P) = \\ &= T(dx_2, dy_2) \cdot T(dx_1, dy_1) \cdot P \end{aligned} \tag{11.16}$$

$$T(dx_2, dy_2).T(dx_1, dy_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

Conseqüentemente,

$$\boxed{T(dx_2, dy_2) \cdot T(dx_1, dy_1) = T(dx_1+dx_2, dy_1+dy_2)} \tag{11.18}$$

Ou seja, a aplicação de uma seqüência de translações resulta em uma translação cujos deslocamentos são a soma dos deslocamentos de cada translação aplicada. A matriz resultante $T(dx_1+dx_2, dy_1+dy_2)$ denomina-se composição de $T(dx_1, dy_1)$ e $T(dx_2, dy_2)$. A ordem de aplicação das translações não altera o resultado.

11.1.6 Mudança de escala usando coordenadas homogêneas

Mudanças de escala em coordenadas homogêneas são representadas matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11.19)$$

ou de forma compacta,

$$\boxed{P' = S(s_x, s_y) \,.\, P} \qquad (11.20)$$

Se duas mudanças de escala $S(sx_1, sy_1)$ e $S(sx_2, sy_2)$ são aplicadas consecutivamente a um ponto $P(x, y)$ obtém-se as expressões:

$$P' = S(sx_1, sy_1) \,.\, P \qquad (11.21)$$

$$P'' = S(sx_2, sy_2) \,.\, P' \qquad (11.22)$$

Substituindo (11.21) em (11.22) se tem que:

$$P'' = S(sx_2, sy_2).(S(sx_1, sy_1).P) = S(sx_2,sy_2).S(sx_1,sy_1).P \qquad (11.23)$$

$$S(s_{x2}, s_{y2}).S(s_{x1}, s_{y1}) = \begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.24)$$

e portanto,

$$\boxed{S\,(s_{x2}, s_{y2}).\, S\,(s_{x1}, s_{y1}) \quad = \quad S\,(s_{x1}.s_{x2}, s_{y1}.s_{y2})} \qquad (11.25)$$

O resultado acima mostra que uma composição de mudanças de escala produz uma transformação cujos fatores de escala são os produtos dos fatores de cada transformação envolvida na composição. Assim como na translação, a transformação resultante independe da ordem de aplicação das mudanças de escala.

11.1.7 Rotação usando coordenadas homogêneas

A rotação de um ponto P(x, y) é representada matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11.26)$$

ou,

$$\boxed{P' = R(\theta) \,.\, P} \qquad (11.27)$$

Aplicando uma seqüência de rotações $R(q_1)$ e $R(q_2)$ a um ponto P(x, y) obtém-se:

$$P' = R(q_1) \,.\, P \qquad (11.28)$$

$$P'' = R(q_2) \,.\, P' \qquad (11.29)$$

Introduzindo (11.28) em (11.29):

$$P'' = R(\theta_2) \,.\, (\, R(\theta_1) \,.\, P \,) = R(\theta_2) \,.\, R(\theta_1) \,.\, P \qquad (11.30)$$

$$R(\theta_2).R(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos\theta_2.\cos\theta_1 - \sin\theta_2.\sin\theta_1) & (-\cos\theta_2.\sin\theta_1 - \sin\theta_2.\cos\theta_1) & 0 \\ (\sin\theta_2.\cos\theta_1 + \cos\theta_2.\sin\theta_1) & (-\sin\theta_2.\sin\theta_1 + \cos\theta_2.\cos\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.31)$$

Da expressão acima se conclui que:

$$\boxed{R(\theta_2)\,.\,R(\theta_1) \quad = \quad R(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (11.32)$$

Ou seja, a transformação resultante de uma composição de rotações pode ser obtida somando-se os ângulos das rotações envolvidas. Mais uma vez, a ordem de aplicação das rotações não altera o resultado final.

11.1.8 Transformações de corpo rígido

Uma matriz de transformação do tipo,

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.33)$$

onde a submatriz r_{ij} é uma matriz ortogonal e tx e ty são reais arbitrários, preserva ângulos e comprimentos. Transformações representadas por matrizes deste tipo denominam-se *transformações de corpo rígido*.

A submatriz de R(Θ) em (11.26),

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

é ortogonal e, portanto, a matriz de rotação representa uma transformação de corpo rígido.

Uma matriz M é ortogonal se as seguintes relações se verificam:

$$M^{-1} = M^{t} \quad (11.35)$$

$$M^{t}.M = M.M^{t} = I \quad (11.36)$$

sendo I a matriz identidade.

Uma seqüência arbitrária de rotações e translações tem a forma da matriz em (11.33), e portanto dá origem a uma transformação de corpo rígido.

11.1.9 Transformações afins

Seqüências de rotações, translações e mudanças de escala dão origem a *transformações afins*, e têm a propriedade de preservar paralelismo de retas. No entanto, não preservam ângulos e comprimentos (Figura 11.5).

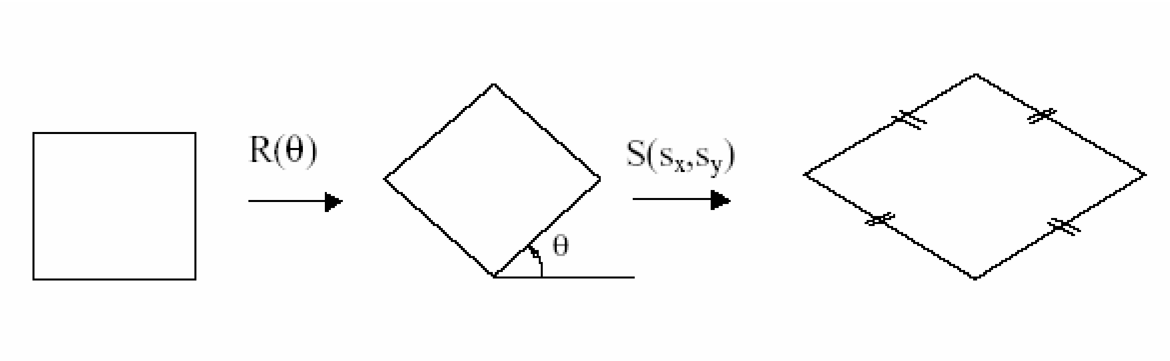

Figura 11.5 - Transformação *afim*.

11.1.10 Composição de transformações

A composição de transformações tem por objetivo ganhar eficiência com a aplicação de uma única matriz composta, ao invés de uma série de transformações.

Considere, por exemplo, o problema de rotacionar o objeto da Figura 11.6 em torno de um ponto $P_1(x_1, y_1)$. O efeito desejado pode ser obtido através da seguinte seqüência de transformações:

1. Translação do objeto tal que $P_1 \equiv 0$ (Figura 11.7a).
2. Rotação (Figura 11.7b).
3. Translação do objeto tal que P_1 retorne à posição original (Figura 11.7c).

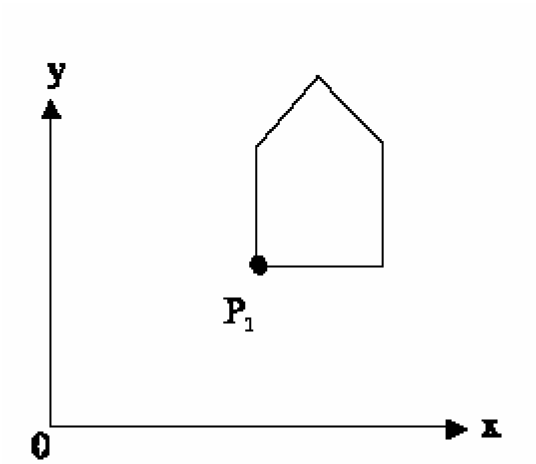

Figura 11.6

A transformação composta correspondente à seqüência de transformações é dada por:

$$T(x_1,y_1)\,.\,R(\theta)\,.T(-x_1,-y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & (x_1(1-\cos\theta)+y_1\sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & (y_1(1-\cos\theta)-x_1\sin\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.37}$$

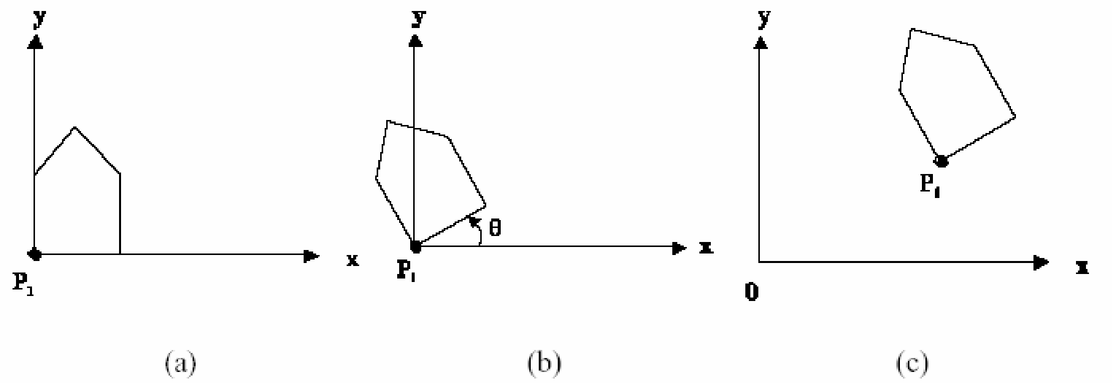

Figura 11.7 - Seqüência de transformações para rotacionar o objeto em torno de um ponto.

Da mesma forma, a seguinte seqüência de transformações pode ser utilizada para mudar a escala do mesmo objeto em relação a um ponto $P_1(x_1,y_1)$:

1. Translação tal que $P_1 \equiv 0$ (Figura 11.8a).
2. Mudança de escala (Figura 11.8b).
3. Translação tal que P_1 retorne à posição original (Figura 11.8c).

Neste caso, a transformação resultante é dada por:

$$T(x_1,y_1) \,.\, S(s_x,s_y) \,.\, T(-x_1,-y_1) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1.(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_1.(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(11.8)

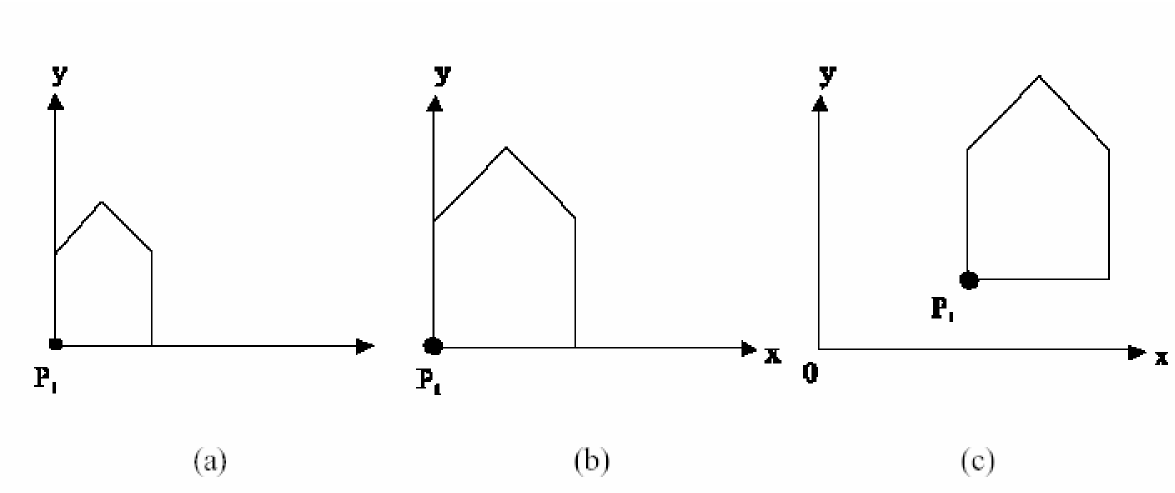

Figura 11.8 - Seqüência de transformações para mudança de escala do objeto em relação a um ponto.

Outro exemplo de composição de transformações é o problema da mudança de escala e rotação de um objeto em relação a um ponto $P_1(x_1,y_1)$ e reposicionamento do objeto através da translação $P_1 \rightarrow P_2(x_2, y_2)$ (Figura 11.9). Neste caso, a seguinte seqüência pode ser empregada:

1. Translação P_1 -> 0 (Figura 11.10a).
2. Mudança de escala (Figura 11.10b).
3. Rotação (Figura 11.10c).
4. Translação P_1 -> P_2 (Figura 11.10d).

A transformação composta é:

$$T(x_2, y_2) \,.\, R(\theta) \,.\, S(s_x, s_y) \,.\, T(-x_1, -y_1) \qquad (11.39)$$

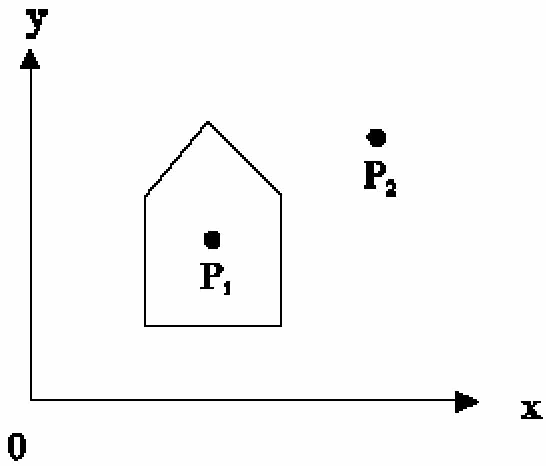

Figura 11.9 - Mudança de escala e rotação em relação a P_1 e translação P_1 -> P_2.

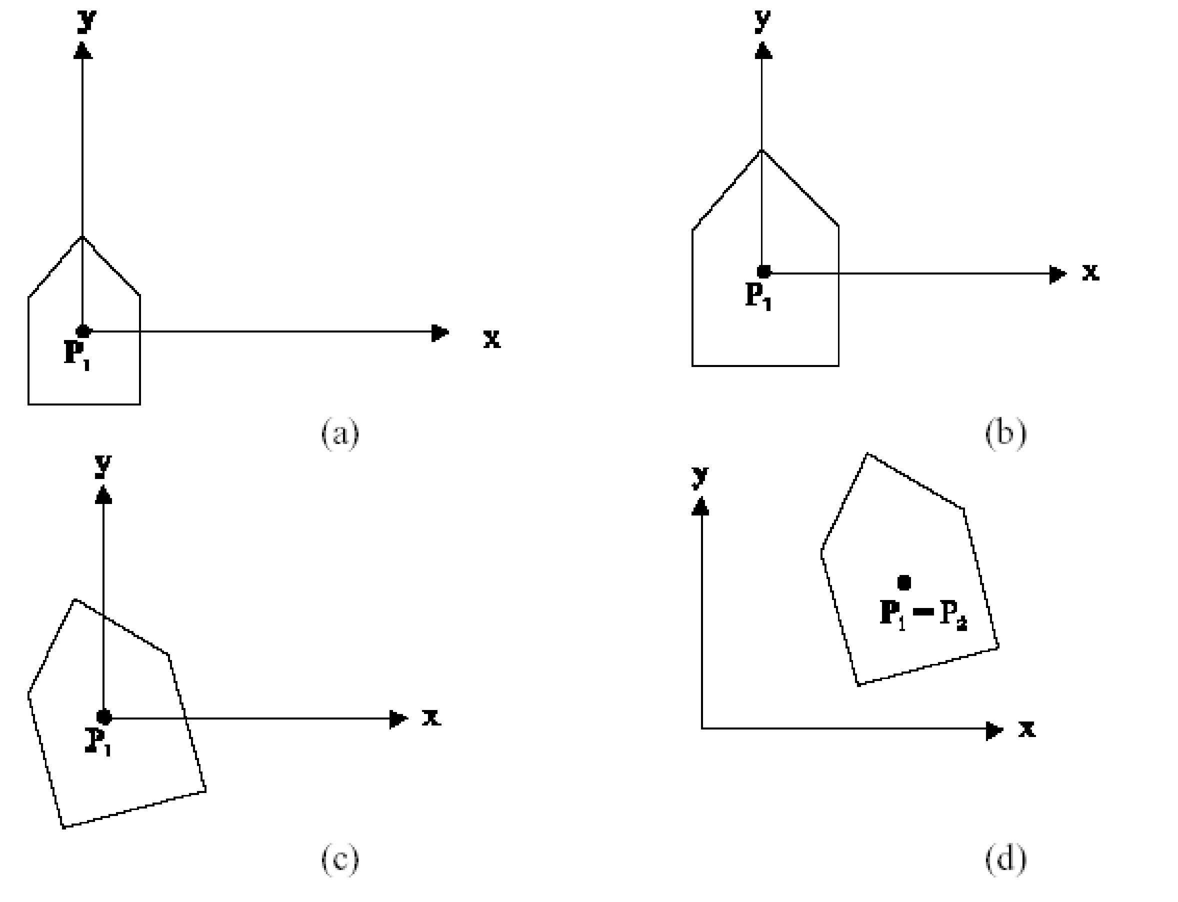

Figura 11.10 - Seqüência de transformações para mudança de escala e rotação em relação a um ponto e reposicionamento do objeto.

Uma transformação composta incluindo transformações de rotação, mudança de escala e translação produz uma matriz M na forma:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.40)$$

A submatriz r_{ij} é uma composição de rotações e mudanças de escala, enquanto t_x e t_y são translações compostas.

O produto da matriz M por um ponto P(x, y) implica em nove multiplicações e seis adições:

$$x' = r_{11} . x + r_{12} . y + t_x .1 \qquad (11.41a)$$
$$y' = r_{21} . x + r_{22} . y + t_y .1 \qquad (11.41b)$$
$$1 = 0 . x + 0 . y + 1 . 1 \qquad (11.41c)$$

A estrutura de M permite, no entanto, a seguinte simplificação,

$$x' = r_{11} . x + r_{12} . y + t_x \qquad (11.42a)$$
$$y' = r_{21} . x + r_{22} . y + t_y \qquad (11.42b)$$

reduzindo o número de operações para quatro multiplicações e quatro adições, o que representa uma significativa redução, considerando-se que milhares de pontos podem ser transformados.

11.1.11 Coordenadas de mundo e coordenadas de dispositivo

Coordenadas de mundo são aquelas com as quais os objetos são inicialmente representados. O mapeamento de uma janela do sistema de coordenadas de mundo (Figura 11.11) em uma região do dispositivo de saída gráfica (Figura 11.12) pode ser obtido através da seguinte seqüência de transformações:

1. Translação da janela para a origem do sistema de coordenadas de mundo (Figura 11.13a).
2. Mudança de escala para enquadrar a janela de WCS na região de visualização do dispositivo (Figura 11.13b).
3. Translação $T(u_{min}, v_{min})$ no sistema de coordenadas de dispositivo (Figura 11.13c).

A transformação resultante é:

$$M_{wv} = T(u_{min}, v_{min}) \,.\, S(s_x, s_y) \,.\, T(-x_{min}, -y_{min}) \tag{11.43}$$

sendo s_x e s_y dados por:

$$s_x = \frac{u_{max} - u_{min}}{x_{max} - x_{min}} \tag{11.44a}$$

$$s_y = \frac{v_{max} - v_{min}}{y_{max} - y_{min}} \tag{11.44b}$$

Efetuando os produtos matriciais em (11.43) obtém-se:

$$M_{wv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{min} \\ 0 & 1 & v_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{min} \\ 0 & 1 & -y_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = $$
$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & -x_{min} . s_x + u_{min} \\ 0 & s_y & -y_{min} . s_y + v_{min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.45}$$

As coordenadas (u, v) no dispositivo de saída de um ponto P(x, y) são então dadas por:

$$
\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = M_{wv} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x - x_{min}).s_x + u_{min} \\ (y - y_{min}).s_y + v_{min} \\ 1 \end{bmatrix}
$$

(11.46)

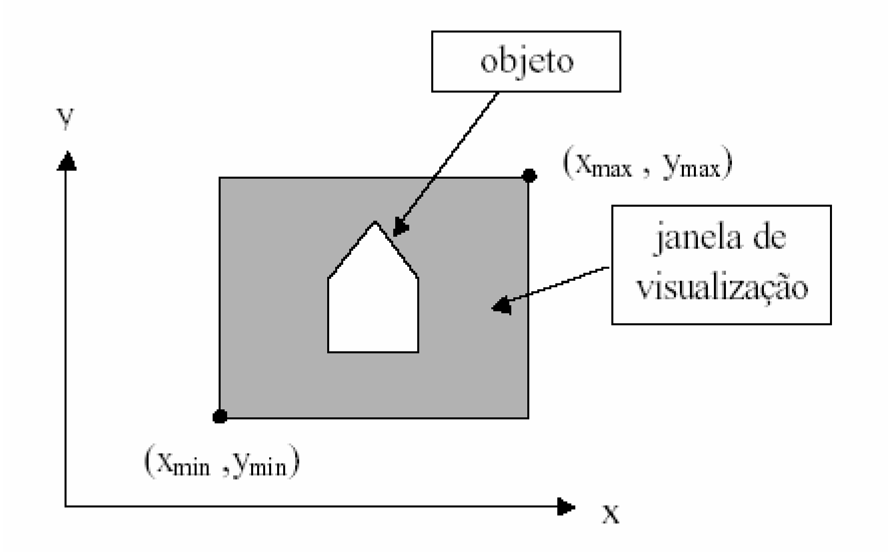

Figura 11.11 - representação de um objeto em coordenadas de mundo (*world coordinates system*, WCS).

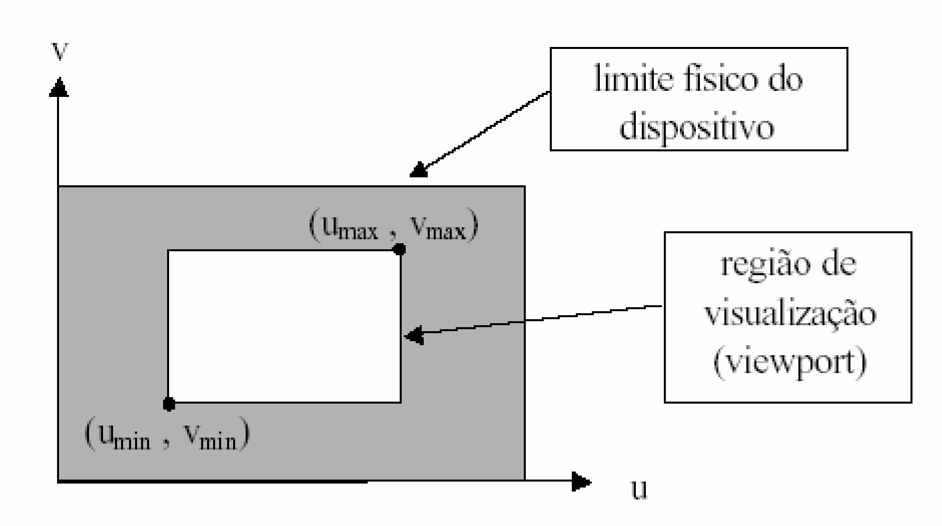

Figura 11.12 - Sistema de coordenadas de dispositivo (*device coordinates system*, DCS).

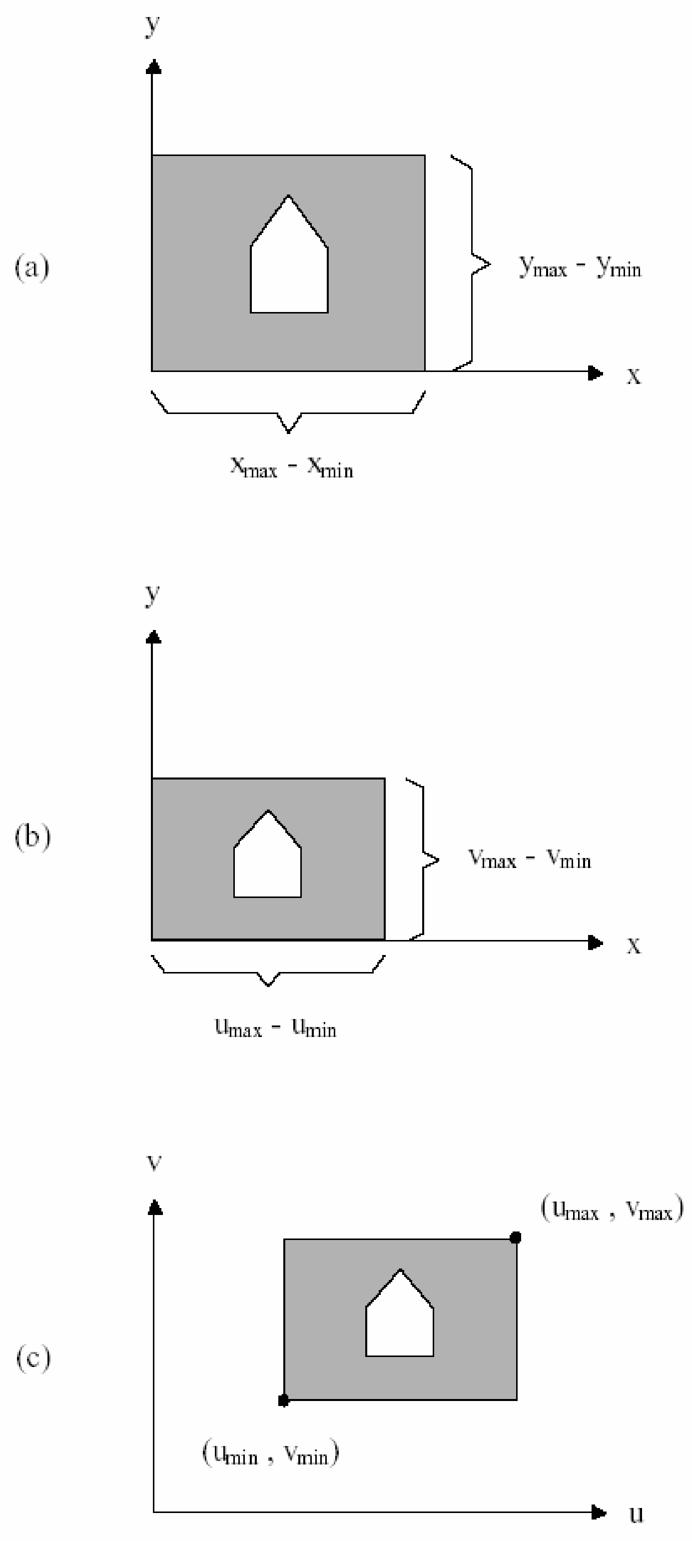

Figura 11.13 - Transformações necessárias para representação de um objeto no dispositivo de saída.

11.2 Transformações 3D

Assim como as transformações 2D podem ser representadas por matrizes 3x3 usando coordenadas homogêneas, as transformações 3D podem ser representadas por matrizes 4x4. As coordenadas homogêneas de pontos do espaço são dadas por:

$$(x, y, z, w) \quad (11.47)$$

Assim como em duas dimensões, os pontos (x, y, z, w), para $w \neq 0$, são representados na forma:

$$\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, 1\right) \quad (11.48)$$

Cada ponto do espaço é representado por uma reta em 4D cuja direção passa pela origem, e a normalização de todos os pontos em coordenadas homogêneas dá origem a um subespaço 3D do espaço 4D definido por w = 1.

11.2.1 Transformações básicas

Em três dimensões, as transformações de translação T(dx,dy,dz) e mudança de escala S(sx, sy, sz) são representadas pelas matrizes:

$$T(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.49)$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

Considerando os sentidos da Figura 11.14, as rotações Rx, Ry e Rz, em torno respectivamente dos eixos x, y, z, são dadas pelas seguintes transformações:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.51)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.52)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.53)$$

Como se pode verificar, as matrizes Rx, Ry e Rz são ortogonais.

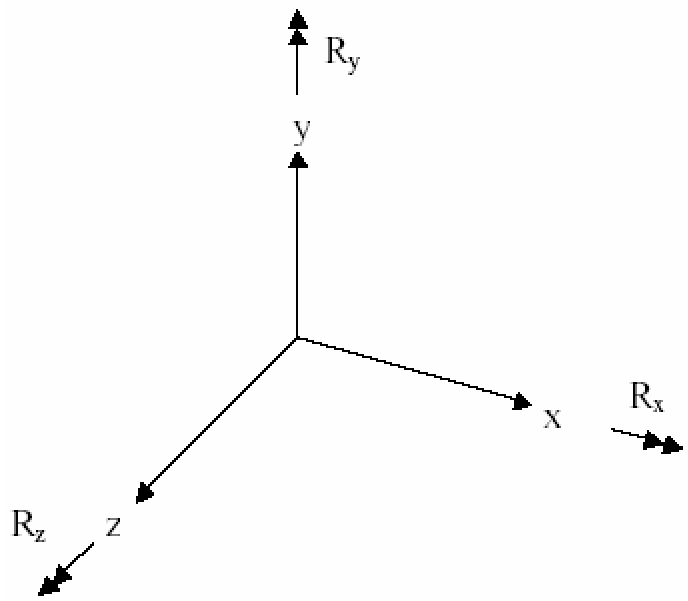

Figura 11.14 - Sentidos positivos das rotações em torno dos eixos x, y, z.

11.2.2 Operações inversas

Se um ponto sofre uma determinada transformação, a operação inversa desta transformação retorna o ponto à sua posição original, ou seja:

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{-1} = I \tag{11.54}$$

As operações inversas das transformações de translação, mudança de escala e rotação são dadas pelas expressões:

$$T^{-1}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.55}$$

$$S^{-1} = S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(11.56)

$$R_x^{-1}(\theta) = R_x^t(\theta) = R_x(-\theta)$$ (11.57a)

$$R_y^{-1}(\theta) = R_y^t(\theta) = R_y(-\theta)$$ (11.57b)

$$R_z^{-1}(\theta) = R_z^t(\theta) = R_z(-\theta)$$ (11.57c)

11.2.3 Composição de transformações

A matriz resultante de uma seqüência arbitrária de transformações de translação, mudança de escala e rotação tem a forma:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(11.58)

onde a submatriz r_{ij} refere-se à composição de rotações e mudanças de escala, e o vetor coluna $(tx, ty, tz, 1)^t$ representa uma composição de translações. Como exemplo de composição de transformações, seja o problema de transformar os segmentos de reta P_1P_2 e P_1P_3 de sua posição original (Figura 11.15a) para a posição da Figura 11.15b. Para obter o efeito desejado, as seguintes transformações devem ser empregadas:

1. Translação P1 -> 0.
2. Rotação em torno do eixo y, tal que o segmento P_1P_3 que fique contido no plano yz.
3. Rotação em torno do eixo x, tal que o segmento P_1P_3 fique contido no eixo z.
4. Rotação em torno do eixo z, tal que o segmento P_1P_3 fique contido no plano yz.

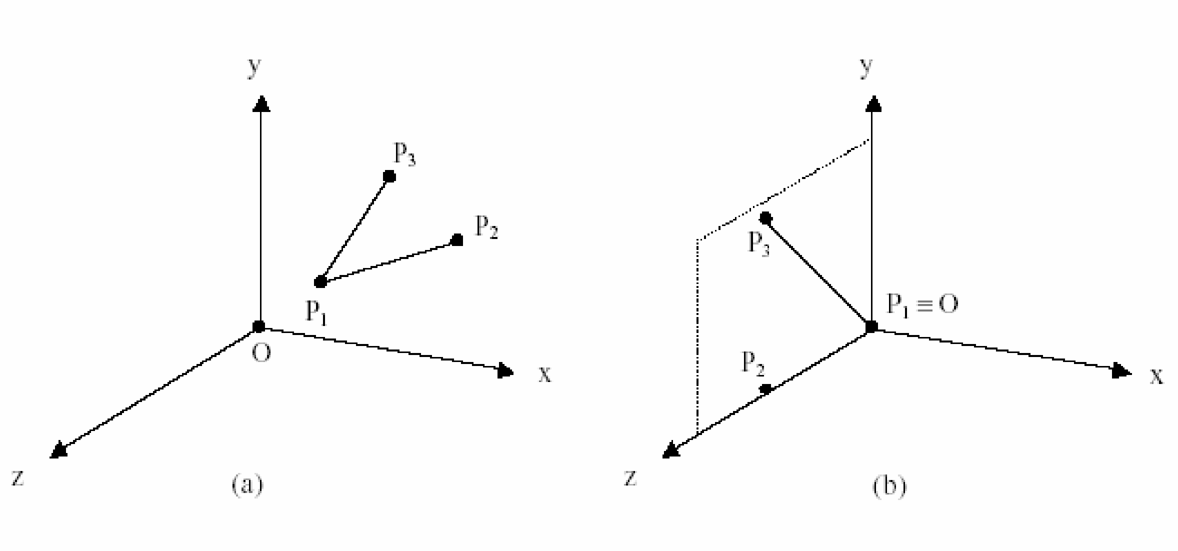

Figura 11.15 - (a) Posição original. (b) Posição final.

Aplicando a translação T(-x1, -y1, -z1) o ponto P1 translada-se para a origem (Figura 11.16), obtendo-se as novas coordenadas:

$$P_1' = T(-x_1,-y_1,-z_1).P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11.59)$$

$$P_2' = T(-x_1,-y_1,-z_1).P_2 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.60)$$

$$P_3' = T(-x_1,-y_1,-z_1).P_3 = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.61)$$

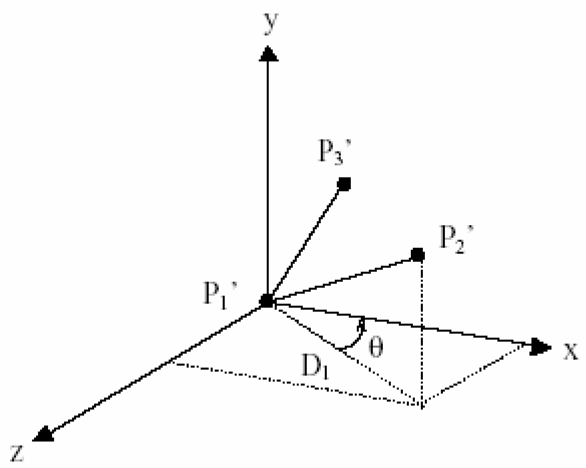

Figura 11.16 - Posição dos segmentos após translação de P1 para a origem.

Observando a Figura 11.16 verifica-se que, para o segmento P1'P2' ficar contido no plano yz, uma rotação $R_y(-(90-\theta))$ deve ser aplicada. Tendo em conta que:

$$\cos(-(90-\theta)) = \cos(\theta - 90) = \sin\theta = \frac{z_2'}{D_1} = \frac{z_2 - z_1}{D_1} \quad (11.62)$$

$$\sin(\theta - 90) = -\cos\theta = \frac{-x_2'}{D_1} = -\frac{x_2 - x_1}{D_1} \qquad (11.63)$$

$$D_1 = \sqrt{x_2'^2 + z_2'^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (11.64)$$

as coordenadas dos pontos transformados P1'', P2'' e P3'' são iguais a:

$$P_1'' = R_y(\theta\text{-}90) \;.\; P_1' \qquad (11.65)$$

$$P_2'' = R_y(\theta\text{-}90) \;.\; P_2' \qquad (11.66)$$

$$P_3'' = R_y(\theta\text{-}90) \;.\; P_3' \qquad (11.67)$$

sendo a matriz Ry dada por:

$$R_y(\theta - 90) = \begin{bmatrix} \dfrac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 & -\dfrac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 & \dfrac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.68)$$

Efetuando os produtos em (11.65), (11.66) e (11.67) obtém-se:

$$P_1'' = \begin{bmatrix} \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 & -\frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 & \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P_1' \tag{11.69}$$

$$P_2'' = \begin{bmatrix} \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 & -\frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 & \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - y_1 \\ D_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.70}$$

$$P_3'' = \begin{bmatrix} \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 & -\frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x_2 - x_1}{D_1} & 0 & \frac{z_2 - z_1}{D_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3'' \\ y_3'' \\ z_3'' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11.71}$$

Para tornar o segmento P1’’P2’’ coincidente com o eixo z, deve-se aplicar uma rotação Rx(f(Θ)) em torno do eixo x (Figura 11.17). Considerando as relações:

$$\cos\phi = \frac{z_2''}{D_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{11.72}$$

$$\sin\phi = \frac{y_2''}{D_2} = \frac{y_2 - y_1}{D_2} \qquad (11.73)$$

$$D_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (11.74)$$

a matriz Rx(f(Θ)) será dada por:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D_1}{D_2} & \frac{y_1 - y_2}{D_2} & 0 \\ 0 & \frac{y_2 - y_1}{D_2} & \frac{D_1}{D_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.75)$$

Aplicando esta rotação aos pontos P1'', P2'' e P3'' obtém-se:

$$P_1''' = R_x(\phi).P_1'' = \begin{bmatrix} x_1''' \\ y_1''' \\ z_1''' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11.76)$$

$$P_2''' = R_x(\phi).P_2'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{D_1}{D_2} & \dfrac{y_1 - y_2}{D_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{y_2 - y_1}{D_2} & \dfrac{D_1}{D_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - y_1 \\ D_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(11.77)

$$P_3''' = R_x(\phi).P_3'' = \begin{bmatrix} x_3''' \\ y_3''' \\ z_3''' \\ 1 \end{bmatrix}$$

(11.78)

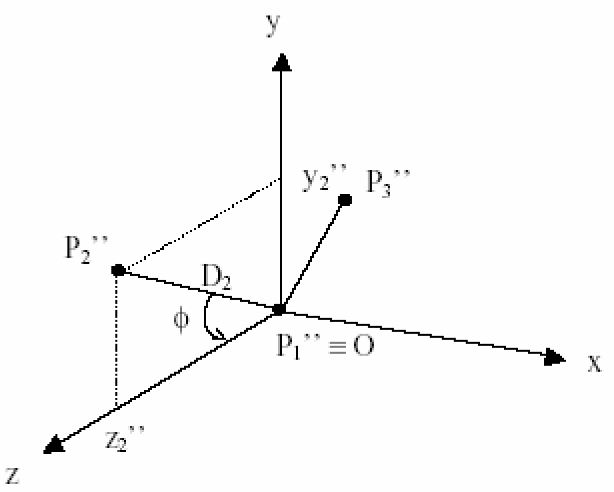

Figura 11.17 - Posição dos segmentos após rotação Ry.

Finalmente, para posicionar o segmento P1'''P3''' no plano yz, deve-se aplicar uma rotação Rz(a) em torno de z (Figura 11.18). Os elementos desta matriz são dados por:

$$\cos\alpha = \frac{y_3'''}{D_3}$$

(11.79)

$$\sin\alpha = \frac{x_3'''}{D_3} \qquad (11.80)$$

$$D_3 = \sqrt{x_3'''^2 + y_3'''^2} \qquad (11.81)$$

A transformação composta resultante será então igual a:

$$\boxed{M = R_z(\alpha) \,.\, R_x(\phi) \,.\, R_y(\theta\text{-}90) \,.\, T(-x_1, -y_1, -z_1)} \qquad (11.82)$$

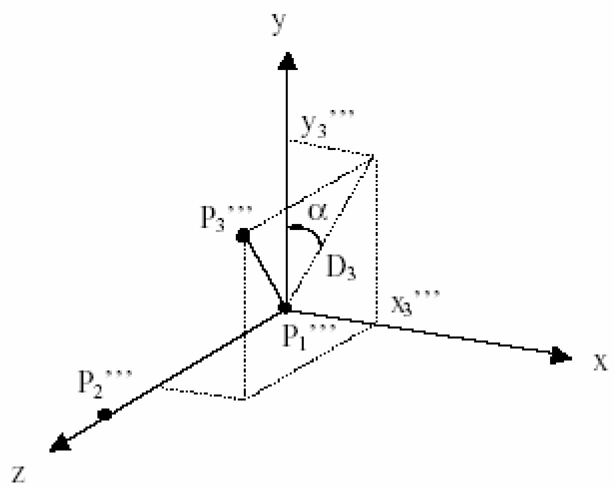

Figura 11.18 - Posição dos segmentos após rotação Rx.

11.2.4 Mudança de sistema de coordenadas

Seja $M_{j\leftarrow i}$ a transformação que converte a representação de um ponto em um sistema de coordenadas i em sua representação no sistema j:

$$P^{(j)} = M_{j \leftarrow i} \cdot P^{(i)} \qquad (11.83)$$

A matriz que transforma as coordenadas de um sistema i em coordenadas de um sistema j (Figura 11.19) é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} x^{(j)} \\ y^{(j)} \\ z^{(j)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x^{(j)}x^{(i)} & \cos x^{(j)}y^{(i)} & \cos x^{(j)}z^{(i)} & 0 \\ \cos y^{(j)}x^{(i)} & \cos y^{(j)}y^{(i)} & \cos y^{(j)}z^{(i)} & 0 \\ \cos z^{(j)}x^{(i)} & \cos z^{(j)}y^{(i)} & \cos z^{(j)}z^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \\ z^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11.84)$$

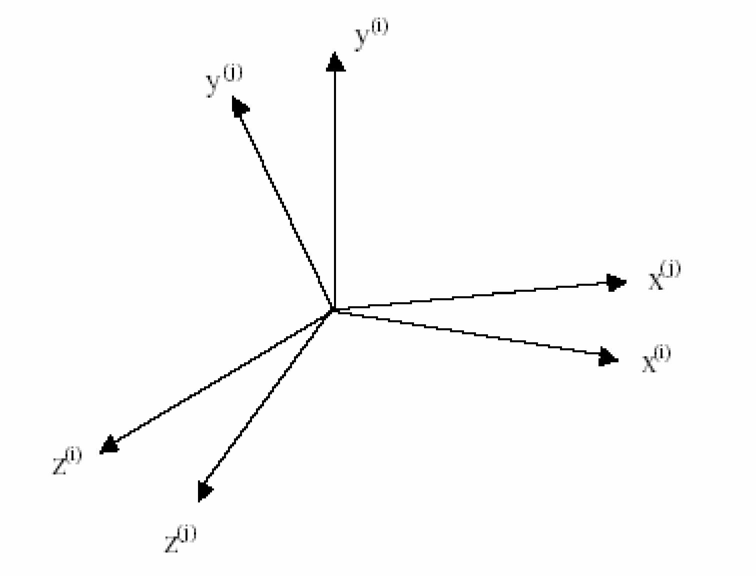

Figura 11.19 - Mudança de sistema de eixos.

A transformação de um ponto em um sistema de coordenadas é a matriz inversa da transformação correspondente a uma mudança de sistema de coordenadas.

Exemplo 1

Em duas dimensões, a matriz que transforma um sistema de coordenadas i em outro sistema j rotacionado de um ângulo q (Figura 11.20) é dada por:

$$R_{j\leftarrow i}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(11.85)

Então, a transformação correspondente a uma rotação q de um ponto (Figura 11.21) é dada por:

$$R(\theta) = R^{-1}_{j\leftarrow i}(\theta) = R^{t}_{j\leftarrow i}(\theta) = R_{j\leftarrow i}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(11.86)

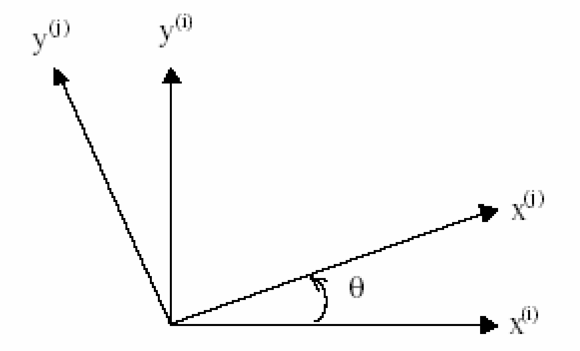

Figura 11.20 - Rotação q do sistema de eixos.

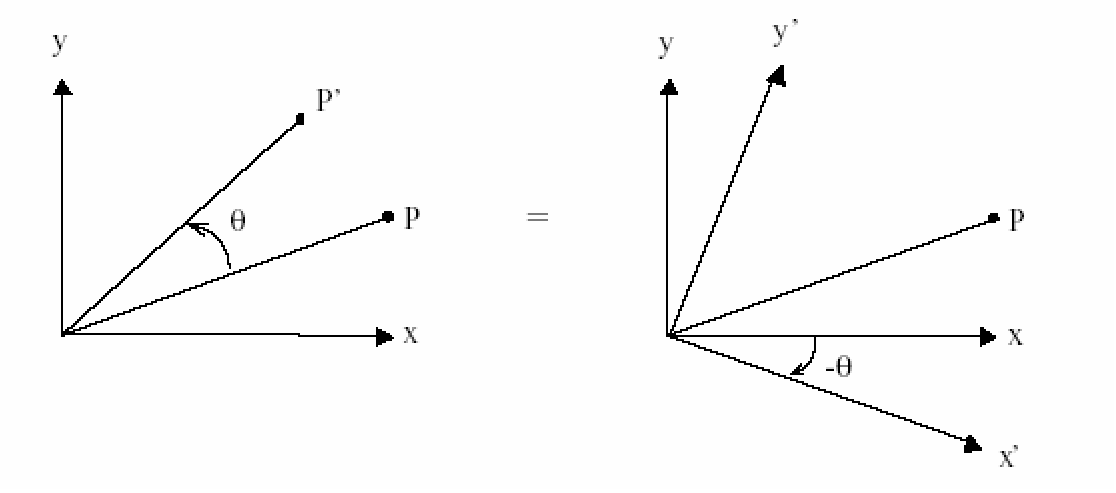

Figura 11.21 - Rotação q de um ponto.

Exemplo 2

O exemplo de transformação composta do item 11.2.3 pode ser resolvido mais facilmente através de duas mudanças de sistema, uma translação e uma rotação, como mostram as Figuras 11.22a e b.

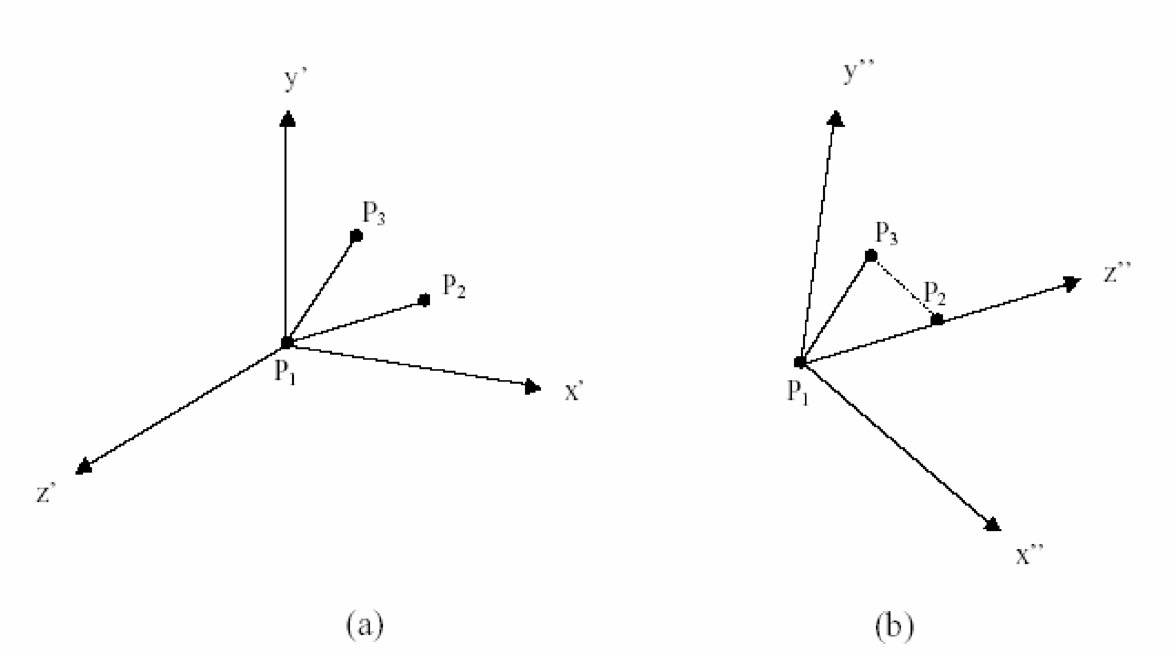

Figura 11.22 - (a) Translação e (b) rotação do sistema de eixos.

A primeira mudança de eixos é uma translação, posicionando o ponto P1 na origem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = T(-x_1, -y_1, -z_1) . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.87)$$

A outra mudança é uma rotação de eixos, dada pela relação:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x''x' & \cos x''y' & \cos x''z' & 0 \\ \cos y''x' & \cos y''y' & \cos y''z' & 0 \\ \cos z''x' & \cos z''y' & \cos z''z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.88)$$

Da Figura 11.22 conclui-se que os cossenos diretores do eixo z’’ são:

$$\cos z''x' = \frac{x'_2}{|P_1 P_2|} \quad (11.89a)$$

$$\cos z''y' = \frac{y'_2}{|P_1 P_2|} \quad (11.89b)$$

$$\cos z''z' = \frac{z'_2}{|P_1 P_2|} \quad (11.89c)$$

e portanto, o unitário na direção z’’ é:

$$w = \begin{bmatrix} \cos z''x' \\ \cos z''y' \\ \cos z''z' \end{bmatrix} \quad (11.90)$$

Como o eixo x’’ é perpendicular ao plano formado pelos dois segmentos, o vetor unitário na direção x’’ é obtido de acordo com a expressão:

$$u = \frac{P_1P_3 \times P_1P_2}{|P_1P_3 \times P_1P_2|} = \begin{bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{bmatrix} \quad (11.91)$$

E, finalmente, o vetor unitário na direção y’’ pode ser obtido em função de x’’ e z’’:

$$v = \frac{w \times u}{|w \times u|} = \begin{bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{bmatrix} \quad (11.92)$$

Substituindo (11.90), (11.91) e (11.92) em (11.88) obtém-se os eixos rotacionados:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x'} & u_{y'} & u_{z'} & 0 \\ v_{x'} & v_{y'} & v_{z'} & 0 \\ \cos z''x' & \cos z''y' & \cos z''z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.93)$$