a.

**COMBINATÓRIA**

Exemplo 2: A última parte do seu número de telefone contém quatro dígitos. Quantos desses números de quatro dígitos existem?

Podemos construir números de quatro dígitos através de uma seqüência de tarefas: escolher o primeiro dígito, depois o segundo, depois o terceiro e, finalmente, o quarto. O primeiro dígito pode ser qualquer um dos 10 dígitos, de O a 9, de modo que há 10 possibilidades para a primeira tarefa. Da mesma forma, existem 10 escolhas diferentes possíveis para cada um dos segundo, terceiro e quarto dígitos. Usando o princípio da multiplicação, simplesmente multiplicamos o número de possibilidades para cada tarefa na seqüência. Portanto, existem 10 . 10 . 10 . 10 = 10.000 números diferentes .

Se um elemento não puder ser usado de novo - isto é, se não são permitidas repetições - o número de possibilidades é afetado.

Exemplo 3: Com relação ao Exemplo 2, quantos números de quatro dígitos existem se um mesmo dígito não puder ser repetido?

Novamente temos uma seqüência de tarefas para selecionar os quatro dígitos, só que agora não podemos ter repetições. Temos 10 possibilidades para o primeiro dígito mas apenas 9 para o segundo, já que não podemos escolher um dígito igual ao primeiro, e assim por diante. Existem 10 . 9 . 8 . 7 = 5.040 números diferentes .

Exemplo 4:

a. De quantas maneiras podemos escolher três representantes em um grupo de 25 pessoas?
b. De quantas maneiras podemos escolher três representantes, para três comissões, em um grupo de 25 pessoas, se um representante pode participar de mais de uma comissão?

Em (a), existem três tarefas sucessivas sem repetições. A primeira tarefa, escolher o primeiro representante, tem 25 possibilidades. A segunda tem apenas 24 possibilidades, e a terceira, 23. O número total de possibilidades é 25 . 24· 23 = 13.800. Em (b), as mesmas três tarefas são feitas sucessivamente mas são permitidas repetições. O número total de resultados possíveis é 25 ·25 . 25 = 15.625 .

<u>Problema prático:</u> Se um homem tem quatro ternos, oito camisas e cinco gravatas, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir? 4.8.5=160

## O PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

Exemplo 5: Suponha que queremos selecionar uma sobremesa entre três tortas e quatro bolos. De quantas maneiras isso pode ser feito? Temos dois eventos, um com três resultados possíveis (a escolha de uma torta) e outro com quatro (a escolha de um bolo). No entanto, não temos uma seqüência de dois eventos aqui, já que só comeremos uma sobremesa, que será escolhida dentre as possibilidades de dois conjuntos disjuntos. O número de escolhas possíveis é o número total de escolha que temos, 3 + 4 = 7.

Exemplo 6: Um consumidor deseja comprar um veículo de uma concessionária. A concessionária tem 23 automóveis e 14 caminhões em estoque. Quantas escolhas possíveis o consumidor tem?

O consumidor pode escolher um carro ou um caminhão. Esses são eventos disjuntos: a escolha de um carro tem 23 possibilidades, e a de um caminhão, 14. Pelo princípio da adição, a escolha de um veículo tem 23+14 = 37 possibilidades. Note a condição necessária de que os eventos *A* e *B* sejam conjuntos disjuntos. Assim, se um consumidor desejasse comprar um veículo de uma concessionária com 23 automóveis, 14 caminhões e 17 veículos vermelhos em estoque, não poderíamos concluir que o consumidor tem 14+17 escolhas!

## USANDO OS DOIS PRINCÍPIOS JUNTOS

Exemplo 7: Com referência ao Exemplo 24, suponha que queremos encontrar de quantas maneiras diferentes a criança pode *escolher* o doce, ao invés do número de conjuntos de doces que ela pode ter. Então, escolher uma bala rosa e depois um chiclete amarelo não é a mesma coisa que escolher primeiro um chiclete amarelo e depois uma bala rosa. Podemos considerar dois casos disjuntos - a escolha de balas ou de chicletes primeiro. Cada um desses casos (pelo princípio da multiplicação) tem seis possibilidades, de modo que (pelo princípio da adição) existem 6 + 6 = 12 maneiras diferentes de escolher os doces.

Exemplo 8: Quantos números de quatro dígitos começam com 4 ou 5?

Podemos considerar dois casos disjuntos - os números que começam com 4 e os que começam com 5. Contando os que começam com quatro, há uma escolha possível para o primeiro dígito e 10 escolhas possíveis para cada um dos outros três dígitos. Logo, pelo princípio da multiplicação, existem 1 . 10 . 10 . 10 = 1.000 maneiras de se obter um número com quatro dígitos começando com 4. O mesmo raciocínio mostra que existem 1.000 maneiras de se obter um número com quatro dígitos começando com 5. Pelo princípio da adição, existem 1.000 + 1.000 = 2.000 possibilidades ao todo.

Exemplo 9: Se uma mulher tem sete blusas, cinco saias e nove vestidos, de quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

7.5+9=44

Exemplo 10: Quantos inteiros de três dígitos (números entre 100 e 999, inclusive) são pares?

Uma solução baseia-se no fato de que os números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Considerando esses casos separados, o número de inteiros com três dígitos terminando em 0 podem ser encontrados escolhendo-se os três dígitos sucessivamente. Existem 9 escolhas, de 1 a 9, para o primeiro dígito; 10 escolhas, de 0 a 9, para o segundo; e uma escolha, 0, para o terceiro. Pelo princípio da multiplicação, existem 90 números terminando em 0. Analogamente, existem 90 números terminando em 2, em 4, em 6 e em 8, de modo que, pelo princípio da adição, existem 90 + 90 + 90 + 90 + 90 = 450 números.

Uma outra solução é devida ao fato de que existem apenas 5 escolhas para o terceiro dígito. Pelo princípio da multiplicação, existem 9 . 10 . 5 = 450 números.

Para esse problema existe uma terceira solução, do tipo "acidente feliz". Existem 999 - 100 + 1 = 900 inteiros com três dígitos. Como metade é par e metade é ímpar, 450 são pares.

Exemplo 11: Suponha que os quatro últimos dígitos de um número de telefone têm que incluir pelo menos um dígito repetido. Quantos desses números existem?

Embora seja possível resolver esse problema usando diretamente o princípio da adição, isso é difícil já que existem muitos casos a serem considerados. Por exemplo, se os dois primeiros dígitos são iguais mas o terceiro e o quarto são diferentes, existem 10 . 1 . 9 . 8 maneiras disso acontecer. Se o primeiro terceiro são iguais mas o segundo e o quarto são diferentes, existem 10 . 9 . 1 . 8 possibilidades. Se os primeiros dígitos são iguais e os dois últimos também são iguais mas diferentes dos dois primeiros, existem 10 . 1 . 9 . 1 números desses. É claro que existem muitos outros casos.

Ao invés disso, vamos resolver o problema observando que os números com repetição de dígitos e os sem repetição formam conjuntos disjuntos cuja união é o conjunto de todos os números com quatro dígitos. Podemos encontrar o número de inteiros com dígitos repetidos subtraindo o número casos sem repetição (5.040, de acordo com o Exemplo 3) do número total de possibilidades (10.000, acordo com o Exemplo 2). Portanto, existem 4.960 números com algarismos repetidos.

Exemplo 12: Para se conectar um computador na Internet, é necessário que seja atribuído a ele um endereço IP *(Internet Protocol*, ou protocolo da Internet). Isso permite que o computador seja "encontrado" na rede, da mesma forma que um endereço postal permite que um prédio seja "encontrado" pelo correio usual. A versão: de IP, IPv4, usa um endereço numérico de 32 bits, ou 4 bytes (1 byte é igual a 8 bits). Um endereço IP é representado, em geral, por uma *notação decimal com pontos,* que fornece quatro números separado por pontos, cada um deles representando um dos quatro bytes. Por exemplo,

128.12.15.26

representa o endereço IP

10000000 00001100 00001111 00011010

A primeira parte de um endereço IP, *IdRede*[6], identifica a rede da qual a máquina faz parte, e o resto, *IdComp,* identifica o computador. Três classes de endereços IP são de uso geral, embora duas outras classes estejam identificadas no padrão IP. As três classes diferem no número relativo de bytes usados no IdRede no IdComp. Os primeiros algarismos no IdRede determinam a classe.

| | Primeiros Bits | IdRede | IdComp |
|---|---|---|---|
| Classe A | 0 | 7 bits para completar 1 byte | 3 bytes |
| Classe B | 10 | 14 bits para completar 2 bytes | 2 bytes |
| Classe C | 110 | 21 bits para completar 3 bytes | 1 byte |

As redes da classe A têm potencial para serem as maiores, já que permitem um número maior de IdComp diferentes; as redes da classe C são as menores.
Note que esse é um esquema de endereçamento hierárquico. Um roteador que está tentando decidir para onde mandar um pacote de dados olha primeiro os primeiros bits para determinar a classe, o que lhe diz então o número de bytes que devem ser procurados para determinar a rede. O(s) byte(s) no IdComp nunca precisa(m) ser consultado(s) antes de o pacote de dados chegar na rede correta. Endereços postais são hierárquicos em ordem inversa, com a informação mais específica dada antes.

Utilizando essa informação, pode-se estimar o número de endereços IP possíveis usando os princípios da multiplicação e da adição da seguinte maneira:

(n.º de IdRedes de classe A)(n.º IdComps de classe A) + (n.º de IdRedes de classe B) (n.º IdComps de classe B) + (n.º de IdRedes de classe C)(n.º IdComps de classe C)

$= 2^7 2^{24} + 2^{14} 2^{16} + 2^{21} 2^8$

$= 2.147.483.648 + 1.073.741.824 + 536.870.912$

$= 3.758.096.384$

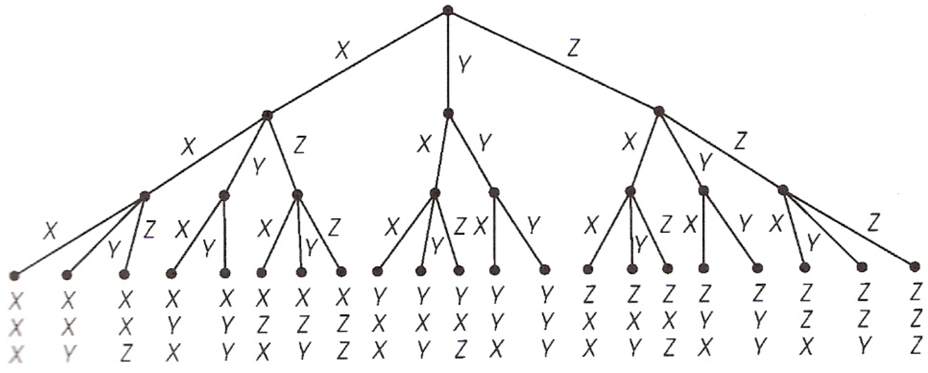
Isso nos dá uma estimativa por cima, já que algumas combinações de bits não podem ser usadas como endereços IP, mas o número de fato ainda é bem grande. Apesar disso, devido ao crescimento rápido da Internet, o número de endereços IP vai acabar algum dia. Está se começando um novo protocolo IP, chamado Protocolo Internet da Próxima Geração *(Next Generation Internet Protocol*, também conhecido por IPv6), que usa 128 bits para o endereço.

[6]Essa tenninologia não é padrão. A tenninologia em inglês, *netid* e *hostid*, é usada com freqüência.

ÁRVORES DE DECISÃO

Problema 2: Explique por que o princípio da multiplicação não se aplica ao Exemplo 13.
R: Embora o problema consista em eventos sucessivos – as cinco jogadas – o numero de resultados possíveis de cada evento não é constante, mas varia entre um e dois dependendo do resultado do evento anterior.

Problema 3: Desenhe uma árvore de decisão para o número de cadeias formadas com X, *Y e* Z de comprimento 3 que não contenham Z imediatamente após *Y* .



21 cadeias

PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES

PERMUTAÇÕES

Exemplo 17: Quantas palavras de três letras (que podem não fazer sentido) podem ser formadas a partir da palavra "compilar" se nenhuma letra pode ser repetida? Nesse caso a ordem das letras faz diferença, e queremos saber o número de permutações de três objetos distintos retirados de um conjunto de 8 objetos. A resposta é P(8, 3) = 8!/5! = 336.

Note que poderíamos ter resolvido o Exemplo anterior simplesmente usando o princípio da multiplicação: existem 8 escolhas para a primeira letra, sete para a segunda e 6 para a terceira, logo a resposta é 8 . 7 . 6 = 336. P(n, r) nos dá, simplesmente, uma nova maneira de pensar sobre o problema, além de uma notação compacta.

Exemplo 18: Dez atletas competem em um evento olímpico. São dadas medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas maneiras podem ser dadas às medalhas?
Esse é, essencialmente, o mesmo problema que o do Exemplo anterior. A ordem é importante; dados três vencedores A, B e C, o resultado A - ouro, B - prata, C - bronze é diferente do resultado C - ouro, A - prata, B - bronze. Queremos, portanto, o número de arranjos ordenados de 3 objetos de um conjunto de 10, ou P(10, 3). Usando a fórmula para P(n, r), P(10, 3) = 10!/7! = 10 . 9 . 8 = 720.

Problema 4: De quantas maneiras pode-se selecionar um presidente e um vice-presidente de um grupo de 20 pessoas?

$$P(20,2) = \frac{20!}{18!} = 380$$

Problema 5: De quantas maneiras seis pessoas podem se sentar em uma fileira de seis cadeiras?

$$6! = 720$$

Exemplo 19: Uma biblioteca tem 4 livros sobre sistemas operacionais, 7 sobre programação e 3 sobre estruturas de dado. Vamos ver de quantas maneiras esses livros podem ser arrumados em uma prateleira, dado que todos os livros sobre o mesmo assunto devem ficar juntos. Podemos pensar nesse problema como uma seqüência de tarefas. Vamos considerar, primeiro, a tarefa de se arrumar três assuntos. Existem 3! resultados possíveis para essa tarefa, isto é, existem 3! ordens possíveis para os assuntos. As próximas tarefas são arrumar os livros sobre sistemas operacionais (4! possibilidades), depois arrumar os livros sobre programação (7! possibilidades) e, finalmente, arrumar os livros sobre estruturas de dados (3! possibilidades). Portanto, pelo princípio de multiplicação, o número final de ordens possíveis de todos os livros é (3!)(4!)(7!)(3!) = 4.354.560 .

COMBINAÇÕES

Exemplo 20: O valor de C(7, 3) é

$$\frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{3*2*1*4*3*2*1} = \frac{7*6*5}{3*2*1} = 7*5 = 35$$

Exemplo 22: Quantas mãos de pôquer, com 5 cartas cada, podem ser distribuídas com um baralho de 52 cartas? Aqui a ordem não importa, já que queremos saber, simplesmente, quais cartas ficaram em cada mão. Queremos o número de maneiras de escolher 5 objetos entre 52, que é um problema de combinações. A resposta é C(52, 5) = 52!/(5!47!) = 2.598.960.

Exemplo 23: Dez atletas competem em um evento olímpico; três serão declarados vencedores. De quantas maneiras podem ser escolhidos os vencedores?

Ao contrário do Exemplo 18, não há ordem entre os três vencedores, de modo que devemos, simplesmente, escolher 3 objetos entre 10. Esse é um problema de combinações e não envolve permutações. O resultado é C(10, 3) = 10 !/(3!7!) = 120. Note que existem menos maneiras de se escolher três vencedores (um problema de combinações) do que de se dar medalhas de ouro, prata e bronze aos três vencedores (um problema de permutações - Exemplo 18).

Problema 6: De quantas maneiras é possível escolher uma comissão de 3 pessoas em um grupo de 12?

$$C(12,3) = \frac{12!}{3!9!} = 220$$

Exemplo 24: Uma comissão de 8 alunos deve ser escolhida em um grupo contendo 19 alunos do primeiro ano e 34 do segundo ano.
a) De quantas maneiras é possível selecionar 3 alunos do primeiro ano e 5 do segundo?

b) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão contendo exatamente 1 aluno do primeiro ano?
c) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão contendo no máximo 1 aluno do primeiro ano?
d) De quantas maneiras é possível selecionar uma comissão contendo pelo menos 1 aluno do primeiro?

Como a ordem dos indivíduos escolhidos é irrelevante, esses são problemas de combinações.

Para o item (a), temos uma seqüência de duas tarefas, selecionar alunos do primeiro ano e selecionar alunos do segundo ano. Deve-se usar o princípio da multiplicação. (Pensar em uma seqüência de tarefas pode parecer implicar ordenação, mas isso apenas coloca os níveis na árvore de decisão, a base para o princípio da multiplicação. Não há ordenação dos alunos.) Como existem C(19, 3) maneiras de se escolher um aluno do primeiro ano e C(34, 5) maneiras de se escolher um aluno do segundo ano, a resposta é

$$C(19,3).C(34,5) = \frac{19!}{3!16!} * \frac{34!}{5!29!} = (969)(278256)$$

Para o item (b), temos, de novo, uma seqüência de tarefas: selecionar o único aluno do primeiro ano e depois selecionar o resto da comissão entre os alunos do segundo ano. Existem C(19, 1) maneiras de se selecionar um aluno do primeiro ano e C(34, 7) maneiras de se selecionar os 7 elementos restantes entre os alunos do segundo ano. Pelo princípio de multiplicação, a resposta é

$$C(19,1).C(34,7) = \frac{19!}{1!(19-1)!} * \frac{34!}{7!(34-7)!} = (19)(5379616)$$

Para o item (c), obtemos no máximo 1 aluno do primeiro ano tendo exatamente 1 aluno do primeiro ano ou 0 aluno do primeiro ano. Como esses dois eventos são disjuntos, usamos o princípio da adição. O número de maneiras de se selecionar exatamente 1 aluno do primeiro ano é a resposta do item (b). O número de maneiras de se selecionar 0 aluno do primeiro ano é o mesmo que o número de maneiras de se selecionar toda a comissão entre os 34 alunos do segundo ano, C(34, 8). Logo, a resposta é

C(19, 1) . C(34,7) + C(34, 8) = algum número grande

Podemos fazer o item (d) de diversas maneiras. Uma delas é usar o princípio da adição, considerando as possibilidades disjuntas de se ter exatamente 1 aluno do primeiro ano, exatamente 2 alunos do primeiro ano, e assim por diante, até se ter exatamente 8 alunos do primeiro ano. Poderíamos calcular cada um desses números e depois somá-los. No entanto, é mais fácil resolver o problema contando todas as maneiras possíveis de se formar a comissão com os 8 membros selecionados do total de 53 pessoas e depois eliminar (subtrair) as comissões que não contêm alunos do primeiro ano (inteiramente formadas por alunos do segundo ano). Logo, a resposta é

C(53, 8) - C(34, 8)

A função fatorial cresce muito rapidamente. Um número como 100! não pode ser calculado na maior parte das calculadoras (ou na maior parte dos computadores, a menos que se use aritmética de precisão dupla), mas expressões da forma

$$\frac{100!}{25!75!}$$

podem ser calculadas cancelando-se, primeiro, os fatores comuns.

ELIMINAÇÃO DE DUPLICATAS

Exemplo 25: Considere, novamente, o item (d) do Exemplo 24, o número de maneiras de se selecionar uma comissão com pelo menos 1 aluno do primeiro ano. Uma solução errada é a seguinte: pense em uma seqüência de duas tarefas, escolhendo um aluno do primeiro ano e depois escolhendo o resto da comissão. Existem C(19, 1) maneiras de se escolher 1 aluno do primeiro ano. Uma vez escolhido um aluno do primeiro ano, estamos livres para escolher os outros 7 membros da comissão entre as 52 pessoas, sem restrições, com C(52, 7) escolhas. Pelo princípio da multiplicação, isso nos dá C(19, 1) . C(52, 7), um número maior do que a resposta correta.
O problema é o seguinte: suponha que Diana e Felipe são alunos do primeiro ano. Em uma das escolhas que contamos, Diana é a aluna escolhida primeiro e escolhemos o resto da comissão de modo que Felipe esteja entre eles, juntos com outros seis. Mas contamos, também, a opção de escolher primeiro Felipe como aluno do primeiro ano e compor a comissão com Diana e os outros mesmos seis membros anteriores. Essa é a mesma comissão de antes e foi contada duas vezes.

Problema 7: Uma comissão com dois elementos, contendo necessariamente um aluno de matemática, vai ser escolhida entre quatro alunos de matemática e três de física. Calcule os dois valores a seguir:
a) C(7, 2) - C(3, 2) (solução correta: todas as comissões possíveis menos as que não têm alunos de matemática). *R:18*
b) C(4,1) . C(6,1) (solução errada: escolha um aluno de matemática e depois escolha o resto da comissão). *R:24*

Note que C(4, 1) . C(6, 1) - C(4, 2) também dá a resposta correta, pois C(4, 2) é o número de comissões com dois alunos de matemática e são essas que foram contadas duas vezes em C(4, 1) . C(6, 1).

Exemplo 26:
a) Quantas permutações distintas podem ser feitas com os caracteres que formam a palavra FLÓRIDA?
b) Quantas permutações distintas podem ser feitas com os caracteres que formam a palavra MISSISSIPI?

O item (a) é um problema simples sobre o número de permutações de 7 objetos distintos, que é 7!. No entanto, a resposta do item (b) não é 11!, pois os 11 caracteres em MISSISSIPPI não são todos distintos. Isso significa que 11! conta alguns arranjos mais de uma vez (quer dizer, não podemos ver a diferença entre $MIS_1S_2ISSIPI$ e $MIS_2S_1ISSIPI$).
Considere um arranjo qualquer dessas letras. Os quatro Ss ocupam determinadas posições na cadeia. Rearrumando os Ss nessas posições obteríamos a mesma cadeia, logo nosso arranjo tem 4! cadeias iguais. Para evitar contar a mesma cadeia mais de uma vez, devemos dividir 10! por 4! para retirar todas as maneiras de se permutar os Ss nas mesmas posições. Analogamente, temos que dividir por 4! para lidar com os 4 Is. Portanto, o número de permutações distintas é

$$\frac{10!}{4!4!}$$

Problema 8: Quantas permutações distintas existem dos caracteres na palavra MONGOOSES?

$$\frac{9!}{3!2!}$$

PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES COM REPETIÇÕES

Problema 9: Seis crianças escolhem um pirulito cada, entre uma seleção de pirulitos vermelhos, amarelos e verdes. De quantas maneiras isso pode ser feito? (Não interessa qual criança pega qual pirulito.) *R: C(8,6)*