

VII. Árvore Geradora Mínima (Minimum Spanning Tree)

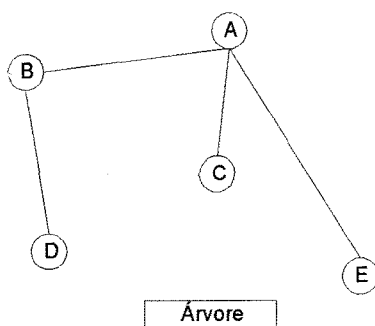
1. Árvore

O grafo não orientado $G = \{V, A\}$ em que " V " é um conjunto com 2 ou mais vértices e " A " é o conjunto das arestas, constitui uma "Árvore" se é *Conexo e Acíclico (sem ciclos)*.

São definições equivalentes:

- G é acíclico e tem " $n-1$ " arestas (sendo " n " o número de vértices)
- G é conexo e tem " $n-1$ " arestas
- G é acíclico mas passa a ter ciclo se aumentado com mais uma aresta
- G é conexo mas suprimindo qualquer aresta passará a ter duas componentes conexas (deixa de ser conexo)
- Em G há uma e só uma cadeia entre cada par dos seus vértices

O grafo da figura é uma *Árvore*.



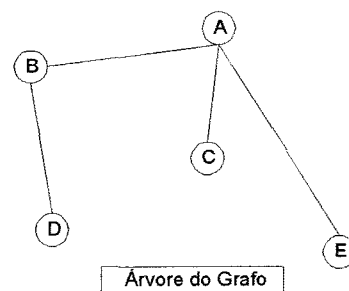
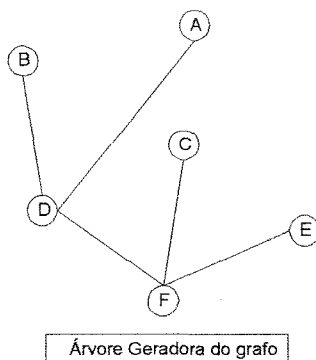
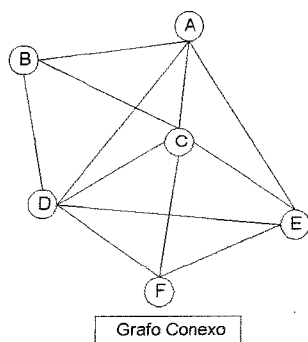
Qualquer Árvore tem pelo menos dois vértices Suspensos (extremos de uma única aresta).

2. Árvore Geradora Mínima

Um grafo G , conexo, admite várias *Árvores*.

Uma *Árvore* com todos os vértices do grafo G denomina-se *Árvore Geradora* ou de *Suporte* ou *Máxima*.

Na figura tem-se o grafo G , uma *Árvore Geradora* e uma *Árvore* de G :



A condição necessária e suficiente para que o grafo G admita uma *Árvore Geradora* é que G seja conexo.

Um grafo G pode admitir mais do que uma *Árvore Geradora*.

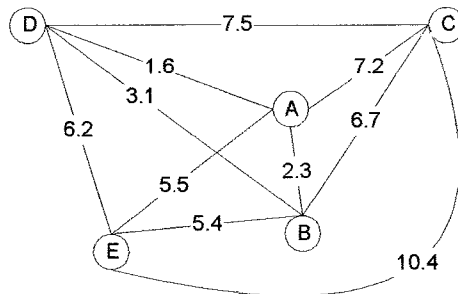
Se às arestas de um grafo associarmos um "encargo" c_{ij} a *Árvore Geradora* com Encargo Total Mínimo designa-se *Árvore Geradora Mínima*.

3. Cálculo da Árvore Geradora Mínima

Uma empresa pretende, a partir de um sistema de captação de água situado em "D", montar um sistema de rega com aspersão em "A", "B", "C" e "E" (ver figura).

Os custos da instalação (possível) de condutas entre os diferentes pontos da rede estão associadas a cada uma das arestas.

Que condutas devem ser instaladas Minimizando o custo total da instalação?

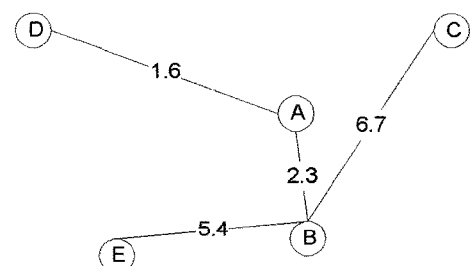
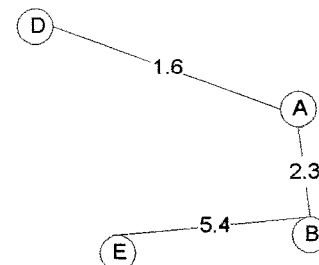
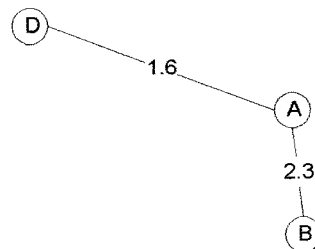
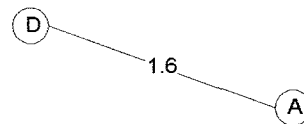


A solução do problema é a *Árvore Geradora Mínima (a.g.m.)* do Grafo.

Veja-se a sua determinação pelo Método Gráfico sabendo que a solução tem 5 vértices, " $n - 1 = 4$ arestas", não tem ciclos e tem pelo menos 2 vértices suspensos.

Determinação da a.g.m.:

- Seleccionar a conduta de menor custo (AD);
- Seleccionar a conduta de menor custo que ligue a A ou D. Não seleccionar aresta que estabeleça ciclo(s). A conduta a seleccionar é AB;
- Seleccionar a conduta de menor custo que ligue a A, B, ou D. Não seleccionar aresta que estabeleça ciclo(s). A conduta a seleccionar é BE;
- Seleccionar a conduta de menor custo que ligue a A, B, D ou E. Não seleccionar aresta que estabeleça ciclo(s). A conduta a seleccionar é BC;



Árvore Geradora Mínima

Na figura tem-se a *Árvore Geradora Mínima* com custo total mínimo de 16 u.m.

Como é notório ao usar o método gráfico a dificuldade reside em identificar a melhor aresta a acrescentar em cada momento evitando que tal escolha provoque ciclo(s).

O Algoritmo de Prim aplicado na matriz do grafo contorna estas dificuldades e segue exactamente a mesma sequência do método gráfico.

Para a situação precedente organiza-se a matriz do grafo. Porque este é não orientado, a matriz é simétrica sendo por isso suficiente a metade inferior ou superior daquela para aplicar o método de Prim.

- Seleccionar a conduta de menor custo (AD);

(para ligar outra aresta a "A" ou "D", a mesma tem que ter extremos em "A" ou "D"; estes extremos podem ser visualizados cortando com rectas as linhas e colunas de "A" e "D". As intersecções das rectas interditam as arestas que provocam ciclo(s).

Deste modo a escolha seguinte fica facilitada pois será feita sobre as rectas e evitando as intersecções destas.

	A	B	C	D	E
A					
B	2.3				
C	7.2	6.7			
D	1.6	3.1	7.5		
E	5.5	5.4	10.4	6.2	

- Seleccionar, nas rectas traçadas, a conduta de menor custo que ligue a A ou D.

Nas rectas traçadas o menor custo é 2.3 (BA).

Assinalar a escolha. Cortar com rectas as linhas e colunas de B e A (este último já está cortado).

	A	B	C	D	E
A					
B	2.3				
C	7.2	6.7			
D	1.6	3.1	7.5		
E	5.5	5.4	10.4	6.2	

- Seleccionar, nas rectas traçadas, a conduta de menor custo (que ligue a A, B ou D)

Nas rectas traçadas o menor custo é 5.4 (EB).

Assinalar a escolha. Cortar com rectas as linhas e colunas de E e B (este último já está cortado).

	A	B	C	D	E
A					
B	2.3				
C	7.2	6.7			
D	1.6	3.1	7.5		
E	5.5	5.4	10.4	6.2	

- Seleccionar, nas rectas traçadas, a conduta de menor custo (que ligue a A, B, D ou E)

Nas rectas traçadas o menor custo é 6.7 (CB).

Assinalar a escolha. Cortar com rectas as linhas e colunas de C e B (este último já está cortado).

	A	B	C	D	E
A					
B	2.3				
C	7.2	6.7			
D	1.6	3.1	7.5		
E	5.5	5.4	10.4	6.2	

Na matriz as arestas não escolhidas estão em intersecções de rectas pelo que se seleccionadas produzem ciclo(s); estão seleccionadas 4 arestas = n° de vértices -1; a Árvore Geradora Mínima está calculada; o conjunto de arestas é AB, CB, DA e EB (ver figura no método gráfico).

4. Auto Teste

- a. Considere a matriz de custos (u.m.) associados às arestas de um grafo G e determine a Árvore Geradora Mínima.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A		7	5	13	11	19	8	9	15	9	7	16
B	7		12	9	8	10	12	5	14	17	6	14
C	5	12		7	14	6	7	11	16	12	15	8
D	13	9	7		7	5	8	12	14	10	18	22
E	11	8	14	7		11	9	3	12	11	21	17
F	19	10	6	5	11		5	14	11	13	19	13
G	8	12	7	8	9	5		7	13	15	16	21
H	9	5	11	12	3	14	7		9	10	13	12
I	15	14	16	14	12	11	13	9		7	4	14
J	9	17	12	10	11	13	15	10	7		6	5
K	7	6	15	18	21	19	16	13	4	6		9
L	16	14	8	22	17	13	21	12	14	5	9	

- b. Uma empresa pretende acrescentar 6 terminais à sua rede de informática.

O computador central encontra-se no local "X" devendo os terminais ser instalados nos locais L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 e L_6 .

Feita a medição de distância (metros) entre locais de instalação e computador central organizou-se a matriz seguinte:

	X	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
X		34	30	35	43	35	40
L_1	34		40	40	35	39	45
L_2	30	40		35	38	37	36
L_3	35	40	35		40	38	46
L_4	43	35	38	40		43	42
L_5	35	39	37	38	43		36
L_6	40	45	36	46	42	36	

A ligação ao computador central é estabelecida com fibra óptica com custo de montagem de 1000 u.m./metro.

Calcule a instalação de custo mínimo.