COMBINATÓRIA

Você faz um levantamento entre os 87 assinantes de seu boletim informativo, preparando-se para lançar seu novo programa de computador. Os resultados de seu levantamento revelam que 68 assinantes têm disponível um sistema baseado em Windows, 34 têm disponível um sistema Unix e 30 têm acesso a um Mac. Além disso, 19 têm acesso a ambos, Windows e Unix, 11 têm acesso a ambos, Unix e Mac, e 23 podem usar tanto Windows quanto Mac.

Pergunta: Quantos de seus assinantes têm acesso a todos os três tipos de sistema?

Esse é um exemplo de um problema de contagem; você pode querer contar o número de elementos em uma determinada coleção ou conjunto - o conjunto de todos os assinantes com acesso aos três sistemas.

A teoria dos conjuntos é uma das pedras fundamentais da matemática. Muitos conceitos em matemática e em ciência da computação podem ser expressos de maneira conveniente na linguagem de conjuntos. Operações podem ser efetuadas em conjuntos para gerar novos conjuntos. Embora a maioria dos conjuntos de interesse para cientistas da computação sejam finitos ou enumeráveis, existem conjuntos que têm tantos elementos que não podem ser enumerados.

Há muitas vezes interesse em contar o número de elementos em um conjunto finito. Essa pode não ser uma tarefa trivial. Contar os elementos em um tal conjunto pode ser possível quebrando-se o evento em uma seqüência de subeventos ou de subeventos disjuntos, sem resultados possíveis em comum.

CONJUNTOS

Definições são importantes em qualquer ciência porque contribuem para a comunicação precisa. No entanto, se procurarmos uma palavra em um dicionário, a definição é expressa usando-se outras palavras, que são definidas usando-se ainda outras palavras, e assim por diante. Desse modo, temos que ter um ponto de partida para as definições onde o significado fique claro; nosso ponto de partida nessa discussão é a noção de conjunto, um termo que não definiremos formalmente. Ao invés disso, usaremos, simplesmente, a idéia intuitiva de que um conjunto é uma coleção de objetos. Em geral, todos os objetos em um conjunto têm alguma propriedade em comum (além de pertencerem ao mesmo conjunto!); qualquer objeto que tem essa propriedade pertence ao conjunto e qualquer objeto que não tem essa propriedade não pertence ao conjunto.

NOTAÇÃO

Usaremos letras maiúsculas para denotar conjuntos e o símbolo $\in$ para denotar pertinência em um conjunto. Assim, $a \in A$ significa que *a* pertence a *A*, ou é um elemento do conjunto *A*, e $b \notin A$ significa que *b* não pertence ao conjunto *A*. Usamos chaves para indicar um conjunto.

Exemplo: Se A = {violeta, verde, castanho}, então verde $\in A$ e magenta $\notin A$.

Os elementos em um conjunto não têm nenhuma ordem, de modo que {violeta, verde, castanho} é o mesmo que { verde, castanho, violeta}. Além disso, cada elemento do conjunto é listado apenas uma vez; é redundante listá-lo de novo.

Dois conjuntos são **iguais** se contêm os mesmos elementos. (Em uma definição, "se" significa, realmente, "se, e somente se"; logo, dois conjuntos são iguais se, e somente se, contêm os mesmos elementos.)

Ao descrever um conjunto particular, temos que identificar seus elementos. Para um **conjunto finito** (um com *n* elementos para algum inteiro não-negativo *n)*, podemos fazer isso simplesmente listando todos os elementos, como fizemos com o conjunto *A* no Exemplo 1. Embora seja impossível listar todos os elementos de um **conjunto infinito** (um que não é finito), para alguns conjuntos infinitos podemos indicar a forma geral listando os primeiros elementos. Assim, poderíamos escrever {2, 4, 6, ... } para expressar o conjunto S de todos os inteiros positivos pares. (Embora essa seja uma prática comum, existe o perigo de que o leitor não veja a forma geral que o escritor tem em mente.) S também pode ser definido por recorrência, explicitando-se um dos elementos de S e descrevendo-se, depois, os outros elementos de S em termos dos elementos já conhecidos. Por exemplo:

a) 2 E S
b) Se *n* E S, então (*n* + 2) E S

Mas a maneira mais clara de se descrever esse conjunto S particular é através da propriedade que caracteriza os elementos do conjunto em palavras, isto é, S = {x | x é um inteiro positivo par}. Existem conjuntos para os quais a primeira maneira não funciona; a segunda é, muitas vezes, difícil de usar. Em geral, a terceira maneira é a melhor opção.

É conveniente usar uma notação padrão para determinados conjuntos, de modo que possamos nos referir mais facilmente a eles. Usaremos as seguintes notações:

N = conjunto de todos os inteiros não-negativos (note que 0 E N)

Z = conjunto de todos os inteiros
Q = conjunto de todos os números racionais
IR = conjunto de todos os números reais
C = conjunto de todos os números complexos

Algumas vezes vamos nos referir ao conjunto que não tem elementos (o conjunto vazio), denotado por Ø ou por { }.

CONTAGEM

A **combinatória** é o ramo da matemática que trata de contagem. Problemas de contagem são importantes sempre que temos recursos finitos (Quanto espaço de armazenamento um determinado banco de dados usa? Quantos usuários uma determinada configuração de computador pode suportar?) ou quando estamos interessados em eficiência (Quantos cálculos são efetuados por um determinado algoritmo?).
Problemas de contagem se resumem, muitas vezes, em determinar o número de elementos em algum conjunto finito. Essa questão, aparentemente trivial, pode ser difícil de responder. Já respondemos muitas perguntas de "quantos" - quantas linhas tem uma tabela-verdade com *n* letras de proposição e quantos subconjuntos tem um conjunto com *n* elementos? (De fato, como já observamos, essas duas perguntas podem ser consideradas como uma só.)

O PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

Exemplo 1: Uma criança pode escolher uma entre duas balas, uma rosa e outra preta, e um entre três chicletes, um amarelo, outro verde e outro branco. Quantos conjuntos diferentes a criança pode ter?

Podemos resolver esse problema separando a tarefa de escolha dos doces em duas etapas seqüenciais: escolher primeiro a bala e depois o chiclete. A árvore na Fig. 3.3 mostra que existem 2 X 3 = 6 possibilidades: {R,A}, {R, V}, {R, B}, {P, A}, {P, V} e {P, B}.

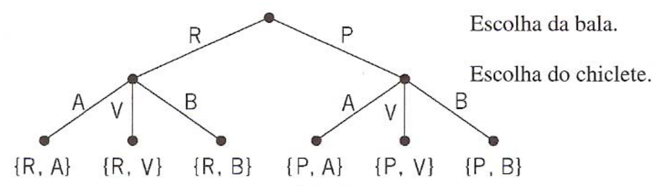

Fig. 3.3

Nesse problema a seqüência dos eventos poderia ser trocada; a criança poderia escolher primeiro o chiclete e depois a bala, resultando na árvore da Fig. 3.4, mas o número de possibilidades é o mesmo (3 X 2 = 6). Pensar em uma seqüência de eventos sucessivos nos ajuda a resolver o problema, mas a ordem da seqüência não faz parte do problema, pois o conjunto {R, A} é igual a {A, R}.

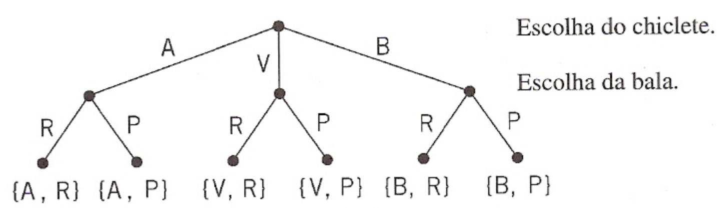

Fig. 3.4

O Exemplo ilustra o fato de que o número total de resultados possíveis para uma seqüência de eventos pode ser obtido multiplicando-se o número de possibilidades do primeiro evento pelo número de possibilidades do segundo. Essa idéia é resumida no *princípio da multiplicação.*

Princípio da Multiplicação: **Se existem *n1* resultados possíveis para um primeiro evento e n2 para o segundo, então existem *n1* n2* resultados possíveis para a seqüência dos dois eventos.**

O princípio da multiplicação pode ser estendido, por indução, a uma seqüência com qualquer número finito de eventos. O princípio da multiplicação é útil sempre que quisermos contar o número total de possibilidades para uma tarefa que pode ser dividida em uma seqüência de etapas sucessivas.

Exemplo 2: A última parte do seu número de telefone contém quatro dígitos. Quantos desses números de quatro dígitos existem?

Exemplo 3: Com relação ao Exemplo 2, quantos números de quatro dígitos existem se um mesmo dígito não puder ser repetido?

Exemplo 4:

a. De quantas maneiras podemos escolher três representantes em um grupo de 25 pessoas?
b. De quantas maneiras podemos escolher três representantes, para três comissões, em um grupo de 25 pessoas, se um representante pode participar de mais de uma comissão?

Problema prático: Se um homem tem quatro ternos, oito camisas e cinco gravatas, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

Para qualquer conjunto finito S, denote por |S| o número de elementos em S. Se *A* e *B* são conjuntos finito. então

$$|A \ x \ B| = |A| \, . \, |B|$$

A x *B* denota todos os pares ordenados com primeira componente em *A* e segunda componente em *B.* Podemos formar tais pares ordenados como a seqüência de duas tarefas, escolher a primeira componente, com |A| possibilidades, e depois escolher a segunda componente, com |B| possibilidades. O resultado segue do princípio da multiplicação.

O PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

Exemplo 5: Suponha que queremos selecionar uma sobremesa entre três tortas e quatro bolos. De quantas maneiras isso pode ser feito? Temos dois eventos, um com três resultados possíveis (a escolha de uma torta) e outro com quatro (a escolha de um bolo). No entanto, não temos uma seqüência de dois eventos aqui, já que só comeremos uma sobremesa, que será escolhida dentre as possibilidades de dois conjuntos disjuntos. O número de escolhas possíveis é o número total de escolha que temos, 3 + 4 = 7. Isso ilustra o princípio da adição.

Princípio da Adição: **Se *A* e *B* são eventos disjuntos com n_1 e n_2 resultados possíveis, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento *"A* ou *B"* é $n_1 + n_2$.**

O princípio de adição pode ser estendido, por indução, a qualquer número finito de eventos disjuntos. O princípio da adição é útil sempre que quisermos contar o número total de possibilidades para uma tarefa que pode ser dividida em casos disjuntos.

Exemplo 6: Um consumidor deseja comprar um veículo de uma concessionária. A concessionária tem 23 automóveis e 14 caminhões em estoque. Quantas escolhas possíveis o consumidor tem?

Sejam A e B conjuntos finitos disjuntos. Então $|A \cup B| = |A| + |B|$

Podemos encontrar $|A \cup B|$ separando em dois casos disjuntos: primeiro contamos o número de elementos em A, $|A|$, e depois o número de elementos em B, $|B|$. Pelo princípio da adição, somamos esses dois números.

USANDO OS DOIS PRINCÍPIOS JUNTOS

O princípio da adição é usado, freqüentemente, junto com o princípio da multiplicação.

Exemplo 7: Com referência ao Exemplo 1, suponha que queremos encontrar de quantas maneiras diferentes a criança pode *escolher* o doce, ao invés do número de conjuntos de doces que ela pode ter. Então, escolher uma bala rosa e depois um chiclete amarelo não é a mesma coisa que escolher primeiro um chiclete amarelo e depois uma bala rosa. Podemos considerar dois casos disjuntos - a escolha de balas ou de chicletes primeiro. Cada um desses casos (pelo princípio da multiplicação) tem seis possibilidades, de modo que (pelo princípio da adição) existem 6 + 6 = 12 maneiras diferentes de escolher os doces.

Exemplo 8: Quantos números de quatro dígitos começam com 4 ou 5?

Exemplo 9: Se uma mulher tem sete blusas, cinco saias e nove vestidos, de quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

Um problema de contagem pode ser resolvido, muitas vezes, de mais de uma forma. Embora a existência de uma segunda solução possa parecer confusa, ela nos fornece uma excelente maneira de verificarmos nosso resultado; se duas maneiras diferentes de abordar o problema produzem a mesma resposta, isso aumenta a nossa confiança de que analisamos o problema corretamente.

Exemplo 10: Quantos inteiros de três dígitos (números entre 100 e 999, inclusive) são pares?

Exemplo 11: Suponha que os quatro últimos dígitos de um número de telefone têm que incluir pelo menos um dígito repetido. Quantos desses números existem?

Exemplo 12: Para se conectar um computador na Internet, é necessário que seja atribuído a ele um endereço IP *(Internet Protocol*, ou protocolo da Internet). Isso permite que o computador seja "encontrado" na rede, da mesma forma que um endereço postal permite que um prédio seja "encontrado" pelo correio usual. A versão: de IP, IPv4, usa um endereço numérico de 32 bits, ou 4 bytes (1 byte é igual a 8 bits). Um endereço IP é representado, em geral, por uma *notação decimal com pontos*, que fornece quatro números separado por pontos, cada um deles representando um dos quatro bytes. Por exemplo,

128.12.15.26

representa o endereço IP

10000000 00001100 00001111 00011010

A primeira parte de um endereço IP, *IdRede*[1], identifica a rede da qual a máquina faz parte, e o resto, *IdComp*, identifica o computador. Três classes de endereços IP são de uso geral, embora duas outras classes estejam identificadas no padrão IP. As três classes diferem no número relativo de bytes usados no IdRede no IdComp. Os primeiros algarismos no IdRede determinam a classe.

	Primeiros Bits	IdRede	IdComp
Classe A	0	7 bits para completar 1 byte	3 bytes
Classe B	10	14 bits para completar 2 bytes	2 bytes
Classe C	110	21 bits para completar 3 bytes	1 byte

As redes da classe A têm potencial para serem as maiores, já que permitem um número maior de IdComp diferentes; as redes da classe C são as menores.
Note que esse é um esquema de endereçamento hierárquico. Um roteador que está tentando decidir para onde mandar um pacote de dados olha primeiro os primeiros bits para determinar a classe, o que lhe diz então o número de bytes que devem ser procurados para determinar a rede. O(s) byte(s) no IdComp nunca precisa(m) ser consultado(s) antes de o pacote de dados chegar na rede correta. Endereços postais são hierárquicos em ordem inversa, com a informação mais específica dada antes.

Utilizando essa informação, pode-se estimar o número de endereços IP possíveis usando os princípios da multiplicação e da adição da seguinte maneira:

(n.º de IdRedes de classe A)(n.º IdComps de classe A) + (n.º de IdRedes de classe B) (n.º IdComps de classe B) + (n.º de IdRedes de classe C)(n.º IdComps de classe C)

$= 2^7 2^{24} + 2^{14} 2^{16} + 2^{21} 2^8$

$= 2.147.483.648 + 1.073.741.824 + 536.870.912$

$= 3.758.096.384$

Isso nos dá uma estimativa por cima, já que algumas combinações de bits não podem ser usadas como endereços IP, mas o número de fato ainda é bem grande. Apesar disso, devido ao crescimento rápido da Internet, o número de endereços IP vai acabar algum dia. Está se começando um novo protocolo IP, chamado Protocolo Internet da Próxima Geração *(Next Generation Internet Protocol*, também conhecido por IPv6), que usa 128 bits para o endereço.

[1]Essa tenninologia não é padrão. A tenninologia em inglês, *netid* e *hostid*, é usada com freqüência.

ÁRVORES DE DECISÃO

Árvores como as das Figs. 3.3 e 3.4 ilustram o número de possibilidades de um evento baseado em uma série de escolhas possíveis. Tais árvores são chamadas de árvores de decisão. Essas árvores são usadas na análise de algoritmos mas, por enquanto, vamos usá-Ias para resolver problemas de contagem adicionais. As árvores das Figs. 3.3 e 3.4 nos levam ao princípio da multiplicação, já que o número de resultados possíveis em qualquer nível da árvore é o mesmo em todo o nível. Na Fig. 3.4, por exemplo, o nível 2 da árvore mostra dois resultados possíveis para cada um dos três ramos formados no nível 1. Árvores de decisão menos regulares ainda podem ser usadas para se resolver problemas de contagem onde o princípio da multiplicação não se aplica.

Exemplo 13: Antônio está jogando moedas. Cada jogada resulta em cara (C) ou coroa (K). Quantos resultados possíveis ele pode obter se jogar cinco vezes sem cair duas caras consecutivas?

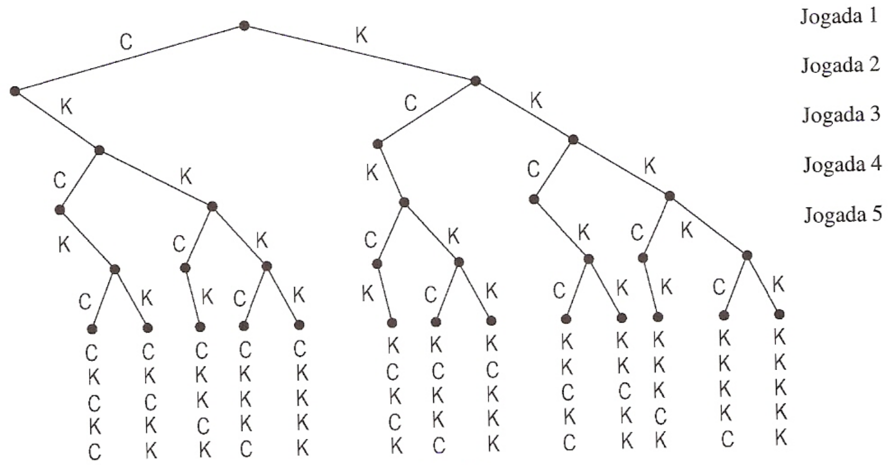

Fig. 3.5

A Fig. 3.5 mostra a árvore de decisão para esse problema. Cada jogada da moeda tem dois resultados possíveis; o ramo da esquerda está marcado com um C, denotando cara, e o da direita, com um K, denotando coroa. Existem 13 possibilidades.

Problema 2: Explique por que o princípio da multiplicação não se aplica ao Exemplo 13.

Problema 3: Desenhe uma árvore de decisão para o número de cadeias formadas com X, *Y e* Z de comprimento 3 que não contenham Z imediatamente após *Y* .