

# 第四讲 螺旋的微分

潘阳 博士  
上海交通大学

## 向量与矩阵的微分

如果一个向量是可微的，那么它的微分形式如下：

$$\frac{d}{ds} \mathbf{u} \triangleq \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(s + \Delta s) - \mathbf{u}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \begin{bmatrix} u_1(s + \Delta s) - u_1(s) \\ u_2(s + \Delta s) - u_2(s) \\ \vdots \\ u_n(s + \Delta s) - u_n(s) \end{bmatrix}$$

矩阵也可以看作是一个向量，因此以上公式对矩阵依然成立。向量的微分依然是向量，也处于向量空间中。

性质：

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \frac{d}{ds} \mathbf{u} + \frac{d}{ds} \mathbf{v} \\ \frac{d}{ds} (a\mathbf{u}) &= a \frac{d}{ds} \mathbf{u} \\ \frac{d}{ds} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= \frac{d}{ds} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{v} \\ \frac{d}{ds} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \frac{d}{ds} \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d}{ds} \mathbf{v} \end{aligned}$$

再一次的， $\mathbf{u} \times$ 是一个矩阵！

## 向量与矩阵的微分

位姿矩阵的微分

对于旋转矩阵 $R$ ： $R \in SO(3)$ ,其中 $SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | RR^T = I, \det(R) > 0\}$

对 $RR^T = I$ 两侧求导：

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \Rightarrow \dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0$$

$\dot{R}R^T$ 为反对称矩阵，定义这个矩阵的叉乘向量为角速度：

$$\omega \times \triangleq \dot{R}R^T$$

于是有：

$$\dot{R} = \omega \times R$$

前文已叙述过点速度，因此位姿矩阵的微分如下：

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\vec{p}} \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \times R & \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{p} \\ & 0 \end{bmatrix}$$

## 向量与矩阵的微分

螺旋转换矩阵的微分

速度螺旋转换矩阵同构于位姿矩阵：

$$T = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \times R \\ & R \end{bmatrix}$$

对该矩阵求导：

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\vec{p}} \times R + \vec{p} \times \dot{R} \\ & \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times R & (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{p}) \times R + \vec{p} \times \vec{\omega} \times R \\ & \vec{\omega} \times R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times R & \vec{\omega} \times \vec{p} \times R + \vec{v} \times R \\ & \vec{\omega} \times R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \vec{p} \times R \\ & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T \end{aligned}$$

Hint:  $(\vec{\omega} \times \vec{p}) \times \vec{p} \times \vec{\omega} \times = \vec{\omega} \times \vec{p} \times$ 可以用叉乘的jacobi恒等式 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ 来证明  
同理易证：

$$\dot{T}^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T^*$$

# 向量与矩阵的微分

螺旋叉乘算子

$$\hat{v} \times = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} \times^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix}$$

于是：

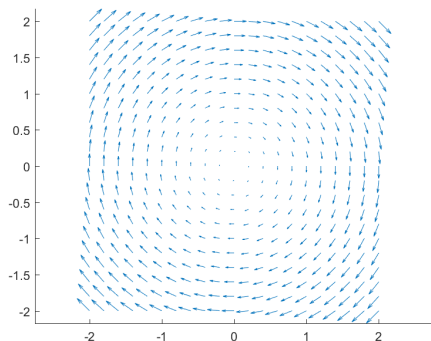
$$\dot{T} = \hat{v} \times T$$

$$T^* = \hat{v} \times^* T$$

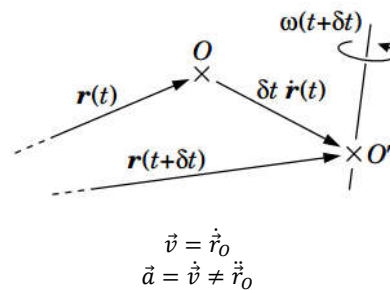
## 空间加速度——速度螺旋的微分

空间加速度 (Spatial acceleration)

$$\hat{a} = \hat{v} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{v}} \\ \dot{\vec{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix}$$



刚体的速度场  
空间加速度描述该速度场的变化



空间速度中 $\vec{a}$ 仅代表导数，**并不代表**任何一点的点加速度！  
空间速度中 $\vec{a}$ 代表刚体的角加速度

## 空间加速度——速度螺旋的微分

空间加速度的坐标系转换

$${}^O\hat{v} = {}^OT_A \cdot {}^A\hat{v}$$

两边同时求导：

$$\begin{aligned} {}^O\hat{a} &= {}^O\dot{T}_A \cdot {}^A\hat{v} + {}^OT_A \cdot {}^A\hat{a} \\ &= {}^O\hat{v}_A \times {}^OT_A \cdot {}^A\hat{v} + {}^OT_A \cdot {}^A\hat{a} \\ &= {}^O\hat{v}_A \times {}^O\hat{v} + {}^OT_A \cdot {}^A\hat{a} \end{aligned}$$

空间加速度与点加速度的关系：

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

两边求导：

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

## 空间加速度——速度螺旋的微分

练习：

已知在地面坐标系O中，A坐标系的位姿矩阵 ${}^OP_A$ ，螺旋速度 ${}^O\hat{v}_A$ ，螺旋加速度 ${}^O\hat{a}_A$ ，现在已知B在A坐标系下的螺旋速度为 ${}^A\hat{v}_B$ ，请求出：

1. B在O坐标系下的速度
2. 若B在A中的螺旋速度不变，请求出B在O中的螺旋加速度
3. 若B在A中的螺旋加速度为 ${}^A\hat{a}_B$ ，请求出B在O中的螺旋加速度

## 空间加速度——速度螺旋的微分

空间加速度与雅可比矩阵：

$$\hat{v}_{ee} = J \cdot \dot{\hat{\theta}}$$

两边同时求导：

$$\hat{a}_{ee} = J \cdot \ddot{\hat{\theta}} + \dot{J} \cdot \dot{\hat{\theta}}$$

对于串联机构：

$$J = [\hat{v}_{j1} \quad \dots \quad \hat{v}_{jn}]$$

于是：

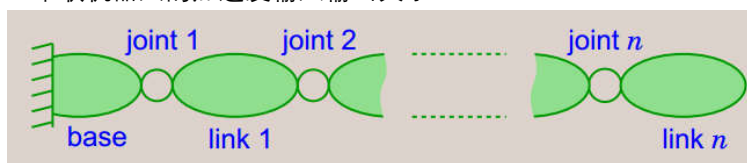
$$\dot{J} = [\hat{a}_{j1} \quad \dots \quad \hat{a}_{jn}]$$

$\hat{a}_{ji}$  为关节速度螺旋的微分。若该螺旋固定在杆件k上，那么有：

$$\hat{a}_{ji} = (T_k \cdot \hat{v}_{jio}) = \hat{v}_k \times T_i \cdot \hat{v}_{j2o}$$

## 空间加速度——速度螺旋的微分

Problem 5 串联机器人的加速度输入输出关系：



已知：

- 当前各关节当前的单位速度螺旋  $\hat{v}_j$
- 当前各杆件位姿  $P_i$  和速度  $\hat{v}_i$

Step 1：

- 根据各关节的速度螺旋  $\hat{v}_j$  和各杆件的速度  $\hat{v}_i$ ，求出  $\hat{a}_j$

Step 2：

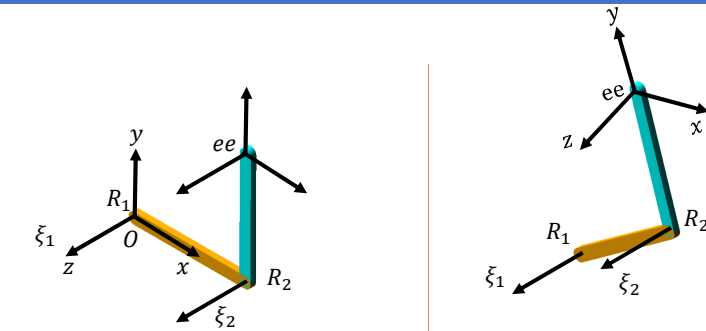
- 将各个单位加速度螺旋组合，得到雅可比矩阵的微分  $\dot{J}$

## 空间加速度——速度螺旋的微分

示例：RR机构的加速度输入输出关系

Step 1：

- 根据各关节的速度螺旋 $\hat{v}_j$ 和各杆件的速度 $\hat{v}_i$ ，求出 $\hat{a}_j$



起始状态

转动之后

R1可以看作固定地面上（也可以看作固定在L1上）： R2可以看作固定L1上（也可以看作固定在L2上）：

$$\hat{v}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{a}_{j1} = \hat{v}_0 \times \hat{v}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

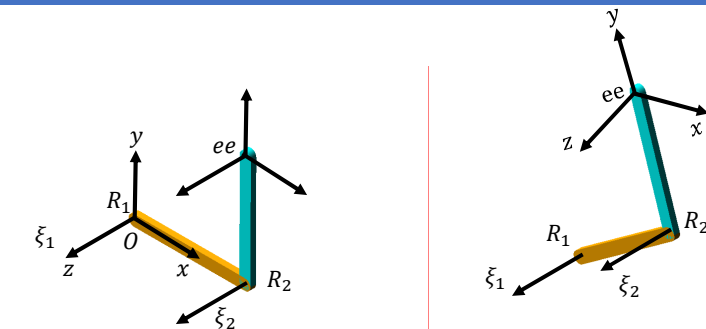
$$\hat{v}_{j2} = \begin{bmatrix} 0.5646 \\ -0.8253 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{a}_{j2} = \hat{v}_1 \times \hat{v}_{j2} = \begin{bmatrix} 0.4127 \\ 0.2823 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 空间加速度——速度螺旋的微分

示例：RR机构的加速度输入输出关系

Step 2：

- 将各个单位加速度螺旋组合，得到雅可比矩阵的微分 $j$



起始状态

转动之后

$$j = [\hat{a}_{j1} \quad \hat{a}_{j2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0.4127 \\ 0 & 0.2823 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_{ee} = J \cdot \ddot{\theta} + j \cdot \dot{\theta} = J \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

## 空间力的微分

力本身是可以突变的！

如果某个力螺旋在某个坐标系下是可微的，那么它在所有坐标系下都可微

单位约束力矩阵相对其所在的杆件是不变的，因此单位约束力矩阵可微

设某约束固定在杆件A上，在相对A坐标系它的单位约束矩阵为 ${}^A C$ ，那么它在O坐标系下的单位约束矩阵为：

$${}^O C = {}^O T_A^* {}^A C$$

A相对O的速度为 $\hat{v}$ ，那么：

$${}^O \dot{C} = {}^O \dot{T}_A^* {}^A C + {}^O T_A^* {}^A \dot{C} = \hat{v} \times^* {}^O T_A^* {}^A C = \hat{v} \times^* {}^O C$$

## 空间力的微分

练习：

已知在地面坐标系O中，A坐标系的位姿矩阵位于原点，且以速度 $(-1,1,0 \mid -2,0,2)$ 运动，请求出：

1. A所定义的转动副的约束力的导数
2. A所定义的移动副的约束力的导数

## 空间力的微分

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i,1} & \cdots & C_{i,k} & \cdots & C_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{j,1} & \cdots & C_{j,k} & \cdots & C_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,k} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix}$$

运动副  $k$  约束杆件  $i, j$ ，那么：

$$C_{ik} = -T_i^* C_{iko} = -C_{jk} \neq 0 \\ C_{lk} = 0, l \neq i, j$$

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{1,1} & \cdots & \dot{C}_{1,k} & \cdots & \dot{C}_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dot{C}_{i,1} & \cdots & \dot{C}_{i,k} & \cdots & \dot{C}_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dot{C}_{j,1} & \cdots & \dot{C}_{j,k} & \cdots & \dot{C}_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dot{C}_{m,1} & \cdots & \dot{C}_{m,k} & \cdots & \dot{C}_{m,n} \end{bmatrix}$$

其中运动副  $k$  约束杆件  $i, j$ ，那么：

$$\dot{C}_{ik} = \hat{v}_i \times^* C_{ik} = -\dot{C}_{jk} \neq 0 \\ \dot{C}_{lk} = 0, l \neq i, j$$

## 空间加速度——速度螺旋的微分

Problem 6 求出所有杆件的空间加速度：

根据约束力不做功，可得：

$$C_k^T (\hat{v}_j - \hat{v}_i) = 0$$

两边求导：

$$\dot{C}_k^T (\hat{v}_j - \hat{v}_i) + C_k^T (\hat{a}_j - \hat{a}_i) = 0$$

$$C_k^T (\hat{a}_j - \hat{a}_i) = -\dot{C}_k^T (\hat{v}_j - \hat{v}_i)$$

其中  $k$  固定在  $i$  上：

$$\dot{C}_k = \hat{v}_i \times^* C_k$$

对所有杆件求导：

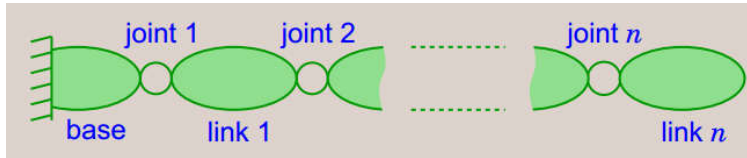
$$C^T \cdot a = \dot{c}_v - \dot{C}^T \cdot v = c_a$$

$$\dot{c}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$



# 空间加速度——速度螺旋的微分

Problem 6 求出所有杆件的空间加速度：



已知：

- 当前各杆件的速度  $\hat{v}_i$
- 当前的约束矩阵  $C$
- 当前的输入加速度  $\ddot{\theta}$

Step 1：

- 求出  $\dot{C}$  和  $\dot{c}_v$

Step 2：

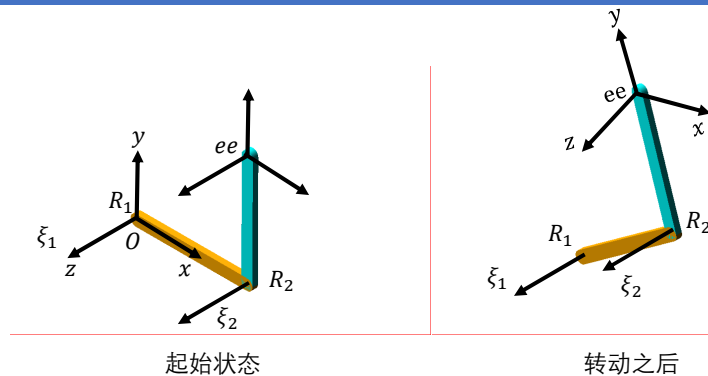
- 求出所有杆件的加速度  $\hat{a}_i$

# 空间加速度——速度螺旋的微分

示例：求出所有杆件的空间加速度

Step 1：

- 求出  $\dot{C}$  和  $\dot{c}_v$



$$C^T = \begin{bmatrix} C_{00}^T & & \\ -C_{01}^T & C_{11}^T & \\ -C_{03}^T & -C_{12}^T & C_{22}^T \\ & C_{13}^T & \\ & -C_{14}^T & C_{24}^T \end{bmatrix}$$

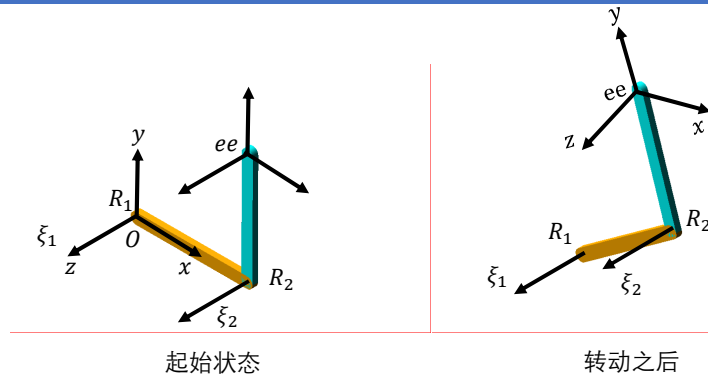
$$\dot{C}^T = \begin{bmatrix} (\hat{v}_0 \times^* C_{00})^T & & \\ -(\hat{v}_0 \times^* C_{01})^T & (\hat{v}_0 \times^* C_{01})^T & \\ -(\hat{v}_0 \times^* C_{03})^T & -(\hat{v}_1 \times^* C_{12})^T & (\hat{v}_1 \times^* C_{12})^T \\ & (\hat{v}_0 \times^* C_{03})^T & \\ & -(\hat{v}_1 \times^* C_{14})^T & (\hat{v}_1 \times^* C_{14})^T \end{bmatrix}$$

## 空间加速度——速度螺旋的微分

示例：求出所有杆件的空间加速度

Step 2：

- 求出所有杆件的加速度



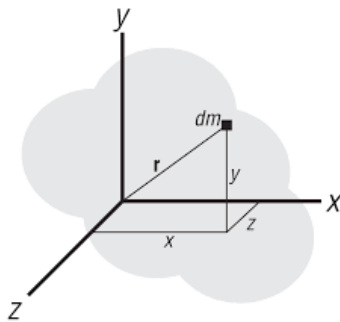
$$\begin{bmatrix} C_{00}^T & & \\ -C_{01}^T & C_{11}^T & \\ & -C_{12}^T & C_{22}^T \\ -C_{03}^T & C_{13}^T & \\ & -C_{14}^T & C_{24}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} - \dot{C}^T \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{即：} C^T \cdot a = \dot{c}_v - \dot{C}^T \cdot v$$

可以求出任意机构所有杆件的加速度！

## 空间惯量的定义

空间惯量（Spatial inertia）



$$I = \begin{bmatrix} m \cdot E & -m \cdot \vec{c} \times \\ m \cdot \vec{c} \times & I_{33} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} E & -\vec{r} \times \\ \vec{r} \times & -\vec{r} \times \vec{r} \times \end{bmatrix} dm = \int \begin{bmatrix} 1 & & & z & -y \\ & 1 & -z & y & x \\ & -z & y & y^2 + z^2 & -xy \\ z & -x & -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -y & x & -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$

## 空间惯量的定义

空间惯量的坐标系转换

$$\begin{aligned}
 {}^O I &= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{r}_O \times \\ \vec{r}_O \times & -\vec{r}_O \times \vec{r}_O \times \end{bmatrix} dm \\
 &= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{p} \times -(\bar{R} \cdot \vec{r}_A) \times \\ \vec{p} \times +(\bar{R} \cdot \vec{r}_A) \times & -(\vec{p} \times +(\bar{R} \cdot \vec{r}_A) \times) \cdot (\vec{p} \times +(\bar{R} \cdot \vec{r}_A) \times) \end{bmatrix} dm \\
 &= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{p} \times -\bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T \\ \vec{p} \times +\bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T & -(\vec{p} \times +\bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T) \cdot (\vec{p} \times +\bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T) \end{bmatrix} dm \\
 &= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{p} \times -\bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T \\ \vec{p} \times +\bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T & -\vec{p} \times \vec{p} \times -\bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T \vec{p} \times -\vec{p} \times \bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \bar{R}^T - \bar{R} \cdot \vec{r}_A \times \vec{r}_A \times \bar{R}^T \end{bmatrix} dm \\
 &= \int \begin{bmatrix} \bar{R} & 0 \\ \vec{p} \times \bar{R} & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{r}_A \times \\ \vec{r}_A \times & -\vec{r}_A \times \vec{r}_A \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}^T & -\bar{R}^T \cdot \vec{p} \times \\ & \bar{R}^T \end{bmatrix} dm \\
 &= \int {}^O T_A^* \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{r}_A \times \\ \vec{r}_A \times & -\vec{r}_A \times \vec{r}_A \times \end{bmatrix} {}^O T_A^{*T} dm = {}^O T_A^{*T} {}^A I ({}^O T_A^*)^T \\
 {}^O I &= {}^O T_A^{*T} {}^A I ({}^O T_A^*)^T
 \end{aligned}$$

特别的，在质心坐标系下，有： $I = \begin{bmatrix} m \cdot E & \\ & I_{33} \end{bmatrix}$

## 空间惯量的微分

空间惯量的微分

$$\begin{aligned}
 {}^O I &= {}^O T_A^{*T} {}^A I ({}^O T_A^*)^T \\
 {}^O \dot{I} &= {}^O \dot{T}_A^{*T} {}^A I ({}^O T_A^*)^T + {}^O T_A^{*T} {}^A \dot{I} ({}^O T_A^*)^T + {}^O T_A^{*T} {}^A I ({}^O \dot{T}_A^*)^T \\
 &= {}^O \hat{v}_A \times^* {}^O T_A^{*T} {}^A I ({}^O T_A^*)^T + {}^O T_A^{*T} {}^A I ({}^O \hat{v}_A \times^* {}^O T_A^*)^T + {}^O T_A^{*T} {}^A I ({}^O T_A^*)^T \\
 &= {}^O \hat{v}_A \times^* {}^O I - {}^O I {}^O \hat{v}_A \times + {}^O T_A^{*T} {}^A \dot{I} ({}^O T_A^*)^T
 \end{aligned}$$

若A坐标系位于刚体之上：

$${}^O \dot{I} = {}^O \hat{v}_A \times^* {}^O I - {}^O I {}^O \hat{v}_A \times$$

此时，有：

$${}^O \dot{I} {}^O \hat{v} = {}^O \hat{v} \times^* {}^O I {}^O \hat{v} - {}^O I {}^O \hat{v} \times {}^O \hat{v} = {}^O \hat{v} \times^* {}^O I {}^O \hat{v}$$

## 空间惯量的定义

练习:

已知某刚体的质心位于(1,0,0)处, 质量为4kg, 在质心坐标系下惯量矩阵为单位阵, 且质心坐标系方向与O坐标系重合, 请求出:

1. 该刚体在O点的惯量矩阵
2. 若刚体以速度(-1,1,0 | -2,0,2)运动, 请求出该惯量矩阵的微分形式。

## 螺旋的力平衡方程

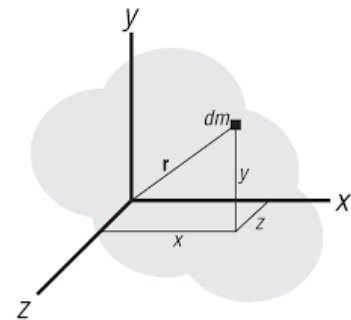
牛顿定律:  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$

对图中小质量块列平衡方程:

$$d\vec{f} = \ddot{\vec{r}} \cdot dm$$

写成对O点的力螺旋形式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\vec{f} \\ \vec{r} \times d\vec{f} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \end{bmatrix} \cdot dm \\ \begin{bmatrix} d\vec{f} \\ \vec{r} \times d\vec{f} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{r} \times \vec{a} + \vec{r} \times \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \end{bmatrix} \cdot dm \end{aligned}$$



两侧积分:

$$\hat{f}_{net} = \begin{bmatrix} \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{c} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times \vec{v} + \vec{c} \times \vec{\omega} \times \vec{v} \end{bmatrix} m + \int \left( \begin{bmatrix} \vec{r} \times \vec{a} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \end{bmatrix} \right) dm$$

## 螺旋的力平衡方程

$$\hat{f}_{net} = \begin{bmatrix} \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{c} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{\omega} \times \vec{v} \end{bmatrix} m + \int \left( \left[ \vec{r} \times \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \right] \right) dm$$

其中:

$$\begin{bmatrix} \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{c} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{\omega} \times \vec{v} \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} m & -m\vec{c} \times \\ m\vec{c} \times & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -m\vec{c} \times \\ m\vec{c} \times & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\int (\vec{r} \times \vec{\alpha} \times \vec{r}) dm = \int (-\vec{r} \times \vec{r} \times \vec{\alpha}) dm = I_{33} \vec{\alpha}$$

$$\int (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int -\vec{\omega} \times \vec{r} \times \vec{r} \times \vec{\omega} dm = \vec{\omega} \times I_{33} \vec{\omega}$$

于是:

$$\hat{f}_{net} = \begin{bmatrix} m & -m\vec{c} \times \\ m\vec{c} \times & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -m\vec{c} \times \\ m\vec{c} \times & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = I \hat{a} + \hat{v} \times^* I \hat{v}$$

## 外力的计算

重力:  $\hat{f}_g$

重力加速度的螺旋形式:

$$\hat{g} = [0, 0, -9.8, 0, 0, 0]^T$$

这里Z轴的负方向为重力方向

刚体所受重力:

$$\hat{f}_g = I \hat{g}$$

注意: 上式必须处于静定的坐标系中。

Unit: Plan Time: 0.0001 Frames: 001



## 外力的计算

约束力:  $\hat{f}_c$

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{i,1} & \cdots & C_{i,k} & \cdots & C_{i,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{j,1} & \cdots & C_{j,k} & \cdots & C_{j,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,k} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix}$$

运动副  $k$  约束杆件  $i, j$ , 那么:

$$\begin{aligned} C_{ik} &= -T_i^* C_{iko} = -C_{jk} \neq 0 \\ C_{lk} &= 0, l \neq i, j \end{aligned}$$

$C_{ik}$  是关节  $k$  约束力一组基, 假设在这组基下, 约束力的坐标为  $\eta_k$ , 那么  $k$  对  $i$  和  $j$  的约束力为:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{ci} &= C_{ik} \cdot \eta_k \\ \hat{f}_{cj} &= C_{jk} \cdot \eta_k = -\hat{f}_{ci} \end{aligned}$$

力的作用是相互的!

## 外力的计算

某个杆件所受的约束力为所有的约束矩阵  $C_{ij}$  乘以约束坐标  $\eta_i$  之和:

$$\hat{f}_{cj} = \sum_{j=1}^n C_{ij} \eta_j$$

于是所有杆件的约束力:

$$f_c = \begin{bmatrix} \hat{f}_{c1} \\ \vdots \\ \hat{f}_{cm} \end{bmatrix} = C \cdot \eta$$

除了约束力以外, 机器人系统还可能收到接触力、碰撞力等其他外力。

## 力平衡方程

单个杆件的力平衡方程：

$$\hat{f}_{net} = I\hat{a} + \hat{v} \times^* I\hat{v}$$

其中合力包括重力、约束力、其他外力：

$$\hat{f}_{net} = \hat{f}_g + \hat{f}_c + \hat{f}_e$$

于是：

$$-I\hat{a} + \hat{f}_c = -\hat{f}_e - I\hat{g} + \hat{v} \times^* I\hat{v}$$

对系统中所有杆件列方程，有：

$$-\begin{bmatrix} I_1 & & & \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m,1} & C_{m,2} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{f}_{e1} - I_1\hat{g} + \hat{v}_1 \times^* I_1\hat{v}_1 \\ -\hat{f}_{e2} - I_2\hat{g} + \hat{v}_2 \times^* I_2\hat{v}_1 \\ \vdots \\ -\hat{f}_{em} - I_m\hat{g} + \hat{v}_m \times^* I_m\hat{v}_1 \end{bmatrix} = f_p$$

即：

$$-I \cdot a + C \cdot \eta = f_p$$

## 小结

- 螺旋转换矩阵，可以借助6维速度螺旋的叉乘来实现：

$$\dot{T} = \hat{v} \times T = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T$$

$$\dot{T}^* = \hat{v} \times^* T^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T^*$$

- 空间加速度是速度旋量的导数，它并不表示刚体上任意一点的加速度
- 空间加速度与点加速度的关系：

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{a}} + \ddot{\vec{\alpha}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- 空间力未必可微，但是约束力矩阵可微：

$${}^0\dot{C} = {}^0T_A^* {}^AC + {}^0T_A^* {}^AC = \hat{v} \times^* {}^0T_A {}^AC = \hat{v} \times^* {}^0C$$

- 空间惯量为6x6的矩阵，其定义可以用牛顿定律推导

## 小结

- 空间惯量的转换和微分形式如下：

$${}^O I = {}^O T_A^* {}^A I ({}^O T_A^*)^T$$

$${}^O \dot{I} = {}^O \hat{v}_A \times^* {}^O I - {}^O I {}^O \hat{v}_A \times$$

- 通过对虚功方程求导，可以求出所有杆件的加速度
- 通过力平衡分析，可以列出所有杆件的力平衡方程