第四讲
螺旋的微分

潘阳 博士
上海交通大学

向量与矩阵的微分

如果一个向量是可微的，那么它的微分形式如下：

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{u} \triangleq \lim_{\triangle s \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(s+\triangle s) - \boldsymbol{u}(s)}{\triangle s} = \lim_{\triangle s \to 0} \frac{1}{\triangle s}\begin{bmatrix} u_1(s+\triangle s) - u_1(s) \\ u_2(s+\triangle s) - u_2(s) \\ \vdots \\ u_n(s+\triangle s) - u_n(s) \end{bmatrix}$$

矩阵也可以看作是一个向量，因此以上公式对矩阵依然成立。向量的微分依然是向量，也处于向量空间中。

性质：

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{u} + \frac{d}{ds}\boldsymbol{v}$$
$$\frac{d}{ds}(a\boldsymbol{u}) = a\frac{d}{ds}\boldsymbol{u}$$
$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{d}{ds}\boldsymbol{v}$$
$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\frac{d}{ds}\boldsymbol{v}$$

再一次的， $\boldsymbol{u}\times$是一个矩阵！

向量与矩阵的微分

位姿矩阵的微分

对于旋转矩阵R： $R \in SO(3)$,其中$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times 3} | RR^T = I, det(R) > 0\}$

对$RR^T = I$两侧求导：

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0 \Rightarrow \dot{R}R^T + \left(\dot{R}R^T\right)^T = 0$$

$\dot{R}R^T$为反对称矩阵，定义这个矩阵的叉乘向量为角速度：

$$\omega \times \triangleq \dot{R}R^T$$

于是有：

$$\dot{R} = \omega \times R$$

前文已叙述过点速度，因此位姿矩阵的微分如下：

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\vec{p}} \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \times R & \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{p} \\ & 0 \end{bmatrix}$$

向量与矩阵的微分

螺旋转换矩阵的微分

速度螺旋转换矩阵同构于位姿矩阵：

$$T = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \times R \\ & R \end{bmatrix}$$

对该矩阵求导：

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\vec{p}} \times R + \vec{p} \times \dot{R} \\ & \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times R & (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{p}) \times R + \vec{p} \times \vec{\omega} \times R \\ & \vec{\omega} \times R \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times R & \vec{\omega} \times \vec{p} \times R + \vec{v} \times R \\ & \vec{\omega} \times R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & \vec{p} \times R \\ & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T$$

Hint: $(\vec{\omega} \times \vec{p}) \times + \vec{p} \times \vec{\omega} \times = \vec{\omega} \times \vec{p} \times$可以用叉乘的jacobi恒等式$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$来证明

同理易证：

$$\dot{T}^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T^*$$

向量与矩阵的微分

螺旋叉乘算子

$$\hat{v}\times=\begin{bmatrix}\vec{\omega}\times & \vec{v}\times\\ & \vec{\omega}\times\end{bmatrix}$$

$$\hat{v}\times^{*}=\begin{bmatrix}\vec{\omega}\times & \\ \vec{v}\times & \vec{\omega}\times\end{bmatrix}$$

于是：

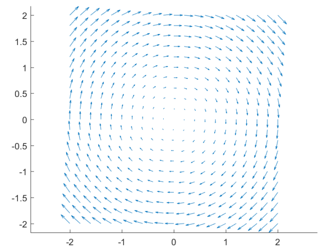
$$\dot{T}=\hat{v}\times T$$

$$\dot{T}^{*}=\hat{v}\times^{*}T$$

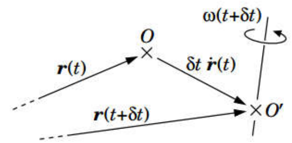
空间加速度——速度螺旋的微分

空间加速度（Spatial accleration）

$$\hat{a}=\dot{\hat{v}}=\begin{bmatrix}\dot{\vec{v}}\\ \dot{\vec{\omega}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{\alpha}\end{bmatrix}$$



刚体的速度场
空间加速度描述该速度场的变化



$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}_O$$
$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}\neq\ddot{\vec{r}}_O$$

空间速度中$\vec{a}$仅仅代表导数，并不代表任何一点的点加速度！
空间速度中$\vec{\alpha}$代表刚体的角加速度

空间加速度——速度螺旋的微分

空间加速度的坐标系转换

$$^{O}\hat{v}={}^{O}T_A\cdot{}^{A}\hat{v}$$

两边同时求导：

$$\begin{aligned}^{O}\hat{a}&={}^{O}\dot{T}_A\cdot{}^{A}\hat{v}+{}^{O}T_A\cdot{}^{A}\hat{a}\\&={}^{O}\hat{v}_A\times{}^{O}T_A\cdot{}^{A}\hat{v}+{}^{O}T_A\cdot{}^{A}\hat{a}\\&={}^{O}\hat{v}_A\times{}^{O}\hat{v}+{}^{O}T_A\cdot{}^{A}\hat{a}\end{aligned}$$

空间加速度与点加速度的关系：

$$\dot{\vec{r}}=\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

两边求导：

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}&=\dot{\vec{v}}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\\&=\vec{a}+\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\end{aligned}$$

空间加速度——速度螺旋的微分

练习：

已知在地面坐标系O中，A坐标系的位姿矩阵$^{O}P_A$，螺旋速度$^{O}\hat{v}_A$，螺旋加速度$^{O}\hat{a}_A$，现在已知B在A坐标系下的螺旋速度为$^{A}\hat{v}_B$，请求出：

1. B在O坐标系下的速度
2. 若B在A中的螺旋速度不变，请求出B在O中的螺旋加速度
3. 若B在A中的螺旋加速度为$^{A}\hat{a}_B$，请求出B在O中的螺旋加速度

空间加速度——速度螺旋的微分

空间加速度与雅可比矩阵：

$$\hat{v}_{ee} = J \cdot \dot{\vec{\theta}}$$

两边同时求导：

$$\hat{a}_{ee} = J \cdot \ddot{\vec{\theta}} + \dot{J} \cdot \dot{\vec{\theta}}$$

对于串联机构：

$$J = [\hat{v}_{j1} \quad \cdots \quad \hat{v}_{jn}]$$

于是：

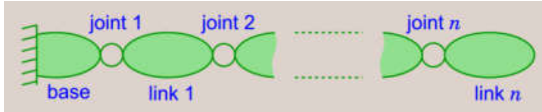
$$\dot{J} = [\hat{a}_{j1} \quad \cdots \quad \hat{a}_{jn}]$$

$\hat{a}_{ji}$为关节速度螺旋的微分。若该螺旋固定在杆件k上，那么有：

$$\hat{a}_{ji} = \left(T_k \cdot \hat{v}_{jio}\right) = \hat{v}_k \times T_i \cdot \hat{v}_{j2o}$$

空间加速度——速度螺旋的微分

Problem 5 串联机器人的加速度输入输出关系：



已知：

- 当前各关节当前的单位速度螺旋$\hat{v}_j$
- 当前各杆件位姿P_i和速度$\hat{v}_i$

Step 1：

- 根据各关节的速度螺旋$\hat{v}_j$和各杆件的速度$\hat{v}_i$，求出$\hat{a}_j$

Step 2：

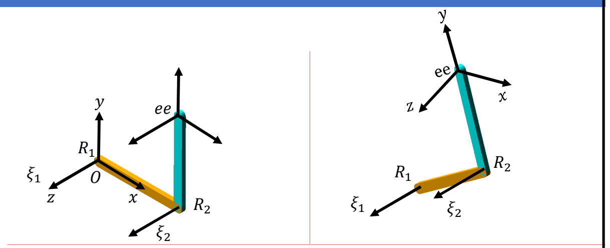
- 将各个单位加速度螺旋组合，得到雅可比矩阵的微分$\dot{J}$

空间加速度——速度螺旋的微分

示例：RR机构的加速度输入输出关系

Step 1：

- 根据各关节的速度螺旋$\hat{v}_j$和各杆件的速度$\hat{v}_i$，求出$\hat{a}_j$



起始状态　　　　转动之后

R1可以看作固定地面上（也可以看作固定在L1上）：　R2可以看作固定L1上（也可以看作固定在L2上）：

$$\hat{v}_{j1} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{a}_{j1} = \hat{v}_0 \times \hat{v}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

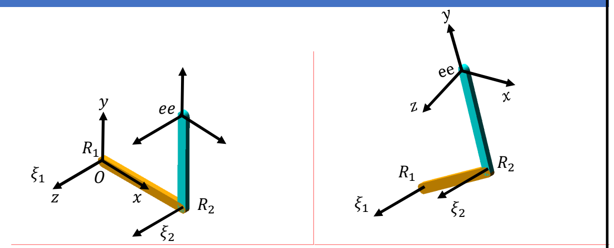
$$\hat{v}_{j2} = \begin{bmatrix} 0.5646 \\ -0.8253 \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{a}_{j2} = \hat{v}_1 \times \hat{v}_{j2} = \begin{bmatrix} 0.4127 \\ 0.2823 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

空间加速度——速度螺旋的微分

示例：RR机构的加速度输入输出关系

Step 2：

- 将各个单位加速度螺旋组合，得到雅可比矩阵的微分$\dot{J}$



起始状态　　　　转动之后

$$\dot{J} = [\hat{a}_{j1} \quad \hat{a}_{j2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0.4127 \\ 0 & 0.2823 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{a}_{ee} = J \cdot \ddot{\vec{\theta}} + \dot{J} \cdot \dot{\vec{\theta}} = J \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \dot{J} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

空间力的微分

力本身是可以突变的!

如果某个力螺旋在某个坐标系下是可微的，那么它在所有坐标系下都可微

单位约束力矩阵相对其所在的杆件是不变的，因此单位约束力矩阵可微

设某约束固定在杆件A上，在相对A坐标系它的单位约束矩阵为${}^{A}C$，那么它在O坐标系下的单位约束矩阵为：

$$ {}^{O}C = {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}C $$

A相对O的速度为$\hat{v}$，那么：

$$ {}^{O}\dot{C} = {}^{O}\dot{T}^{*}{}_{A}\,{}^{A}C + {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}\dot{C} = \hat{v}\times^{*}\,{}^{O}T_A\,{}^{A}C = \hat{v}\times^{*}\,{}^{O}C $$

空间力的微分

练习：

已知在地面坐标系O中，A坐标系的位姿矩阵位于原点，且以速度$(-1,1,0\mid -2,0,2)$运动，请求出：

1. A所定义的转动副的约束力的导数
2. A所定义的移动副的约束力的导数

空间力的微分

$$ C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{i,1} & \cdots & C_{i,k} & \cdots & C_{i,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{j,1} & \cdots & C_{j,k} & \cdots & C_{j,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,k} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix} $$

运动副 k 约束杆件 i,j，那么：

$$ C_{ik} = -T_i^{*}C_{iko} = -C_{jk} \neq 0 $$
$$ C_{lk} = 0, l \neq i,j $$

$$ \dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{1,1} & \cdots & \dot{C}_{1,k} & \cdots & \dot{C}_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \dot{C}_{i,1} & \cdots & \dot{C}_{i,k} & \cdots & \dot{C}_{i,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \dot{C}_{j,1} & \cdots & \dot{C}_{j,k} & \cdots & \dot{C}_{j,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \dot{C}_{m,1} & \cdots & \dot{C}_{m,k} & \cdots & \dot{C}_{m,n} \end{bmatrix} $$

其中运动副 k 约束杆件 i,j，那么：

$$ \dot{C}_{ik} = \hat{v}_i \times^{*} C_{ik} = -\dot{C}_{jk} \neq 0 $$
$$ C_{lk} = 0, l \neq i,j $$

空间加速度——速度螺旋的微分

Problem 6 求出所有杆件的空间加速度：

根据约束力不做功，可得：

$$ C_{\mathrm{k}}^{T}\left(\hat{v}_j - \hat{v}_{\mathrm{i}}\right) = 0 $$

两边求导：

$$ \dot{C}_k^{T}\left(\hat{v}_j - \hat{v}_i\right) + C_k^{T}\left(\hat{a}_j - \hat{a}_i\right) = 0 $$
$$ C_k^{T}\left(\hat{a}_j - \hat{a}_i\right) = -\dot{C}_k^{T}\left(\hat{v}_j - \hat{v}_i\right) $$

其中k固定在i上：

$$ \dot{C}_k = \hat{v}_{\mathrm{i}} \times^{*} C_k $$

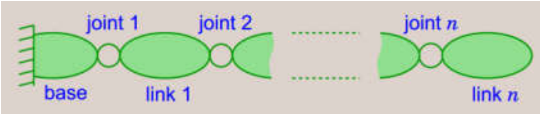
对所有杆件求导：

$$ C^{T}\cdot a = \dot{c}_v - \dot{C}^{T}\cdot v = c_a $$

$$ \dot{c}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\vec{\theta}} \end{bmatrix} $$

空间加速度——速度螺旋的微分

Problem 6 求出所有杆件的空间加速度：



已知：

- 当前各杆件的速度$\hat{v}_i$
- 当前的约束矩阵C
- 当前的输入加速度$\ddot{\theta}$

Step 1：

- 求出$\dot{C}$和$\dot{c}_v$

Step 2：

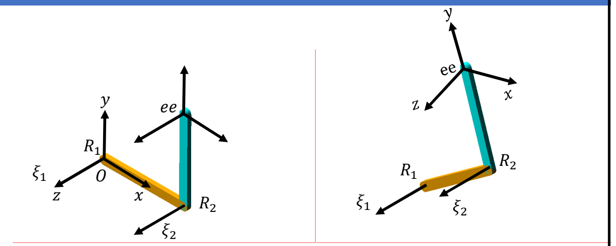
- 求出所有杆件的加速度$\hat{a}_i$

空间加速度——速度螺旋的微分

示例：求出所有杆件的空间加速度

Step 1：

- 求出$\dot{C}$和$\dot{c}_v$



起始状态　　转动之后

$$C^T=\begin{bmatrix} C_{00}^T & & \\ -C_{01}^T & C_{11}^T & \\ & -C_{12}^T & C_{22}^T \\ -C_{03}^T & C_{13}^T & \\ & -C_{14}^T & C_{24}^T \end{bmatrix}$$

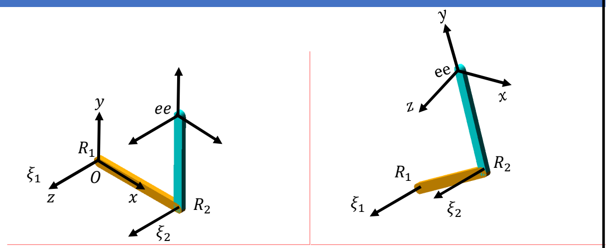
$$\dot{C}^T=\begin{bmatrix} (\hat{v}_0\times^* C_{00})^T & & \\ -(\hat{v}_0\times^* C_{01})^T & (\hat{v}_0\times^* C_{01})^T & \\ & -(\hat{v}_1\times^* C_{12})^T & (\hat{v}_1\times^* C_{12})^T \\ -(\hat{v}_0\times^* C_{03})^T & (\hat{v}_0\times^* C_{03})^T & \\ & -(\hat{v}_1\times^* C_{14})^T & (\hat{v}_1\times^* C_{14})^T \end{bmatrix}$$

空间加速度——速度螺旋的微分

示例：求出所有杆件的空间加速度

Step 2：

- 求出所有杆件的加速度



起始状态　　转动之后

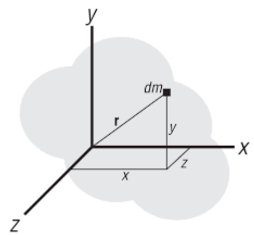
$$\begin{bmatrix} C_{00}^T & & \\ -C_{01}^T & C_{11}^T & \\ & -C_{12}^T & C_{22}^T \\ -C_{03}^T & C_{13}^T & \\ & -C_{14}^T & C_{24}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\\ \hat{a}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix}-\dot{C}^T\begin{bmatrix}\hat{v}_0\\ \hat{v}_1\\ \hat{v}_2\end{bmatrix}$$

即：$C^T\cdot a=\dot{c}_v-\dot{C}^T\cdot v$

可以求出任意机构所有杆件的加速度！

空间惯量的定义

空间惯量（Spatial inertia）



$$I=\begin{bmatrix} \mathrm{m}\cdot E & -m\cdot\vec{c}\times \\ m\cdot\vec{c}\times & I_{33}\end{bmatrix}=\int\begin{bmatrix} E & -\vec{r}\times \\ \vec{r}\times & -\vec{r}\times\vec{r}\times\end{bmatrix}dm=\int\begin{bmatrix} 1 & & & & z & -y \\ & 1 & & -z & & x \\ & & 1 & y & -x & \\ & -z & y & y^2+z^2 & -xy & -xz \\ z & & -x & -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -y & x & & -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}dm$$

空间惯量的定义

空间惯量的坐标系转换

$$
\begin{aligned}
{}^{O}I &= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{r_O}\times \\ \vec{r_O}\times & -\vec{r_O}\times\vec{r_O}\times \end{bmatrix} dm \\
&= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{p}\times -(\bar{R}\cdot\vec{r_A})\times \\ \vec{p}\times +(\bar{R}\cdot\vec{r_A})\times & -(\vec{p}\times +(\bar{R}\cdot\vec{r_A})\times)\cdot(\vec{p}\times +(\bar{R}\cdot\vec{r_A})\times) \end{bmatrix} dm \\
&= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{p}\times -\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T \\ \vec{p}\times +\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T & -(\vec{p}\times +\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T)\cdot(\vec{p}\times +\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T) \end{bmatrix} dm \\
&= \int \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{p}\times -\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T \\ \vec{p}\times +\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T & -\vec{p}\times\vec{p}\times -\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T\vec{p}\times -\vec{p}\times\bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\bar{R}^T - \bar{R}\cdot\vec{r_A}\times\vec{r_A}\times\bar{R}^T \end{bmatrix} dm \\
&= \int \begin{bmatrix} \bar{R} & 0 \\ \vec{p}\times\bar{R} & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{r_A}\times \\ \vec{r_A}\times & -\vec{r_A}\times\vec{r_A}\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}^T & -\bar{R}^T\cdot\vec{p}\times \\ & \bar{R}^T \end{bmatrix} dm \\
&= \int {}^{O}T_A^{*} \begin{bmatrix} \bar{E} & -\vec{r_A}\times \\ \vec{r_A}\times & -\vec{r_A}\times\vec{r_A}\times \end{bmatrix} {}^{O}T_A^{*T} dm = {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T
\end{aligned}
$$

$$
{}^{O}I = {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T
$$

特别的，在质心坐标系下，有：$I = \begin{bmatrix} \mathrm{m}\cdot E & \\ & I_{33} \end{bmatrix}$

空间惯量的微分

空间惯量的微分

$$
{}^{O}I = {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{O}\dot{I} &= {}^{O}\dot{T}_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T + {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}\dot{T}_A^{*}\right)^T + {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}\dot{I}\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T \\
&= {}^{O}\hat{v}_A\times^{*}\,{}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T + {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}\hat{v}_A\times^{*}\,{}^{O}T_A^{*}\right)^T + {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}\dot{I}\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T \\
&= {}^{O}\hat{v}_A\times^{*}\,{}^{O}I - {}^{O}I\,{}^{O}\hat{v}_A\times + {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}\dot{I}\left({}^{O}T_A^{*}\right)^T
\end{aligned}
$$

若A坐标系位于刚体之上：

$$
{}^{O}\dot{I} = {}^{O}\hat{v}_A\times^{*}\,{}^{O}I - {}^{O}I\,{}^{O}\hat{v}_A\times
$$

此时，有：

$$
{}^{O}\dot{I}\,{}^{O}\hat{v} = {}^{O}\hat{v}\times^{*}\,{}^{O}I\,{}^{O}\hat{v} - {}^{O}I\,{}^{O}\hat{v}\times{}^{O}\hat{v} = {}^{O}\hat{v}\times^{*}\,{}^{O}I\,{}^{O}\hat{v}
$$

空间惯量的定义

练习：

已知某刚体的质心位于(1,0,0)处，质量为4kg，在质心坐标系下惯量矩阵为单位阵，且质心坐标系方向与O坐标系重合，请求出：

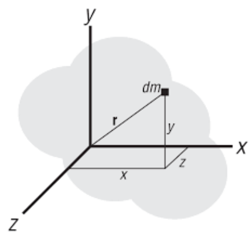
1. 该刚体在O点的惯量矩阵
2. 若刚体以速度$(-1,1,0\mid-2,0,2)$运动，请求出该惯量矩阵的微分形式。

螺旋的力平衡方程

牛顿定律：f=ma

对图中小质量块列平衡方程：

$$
d\vec{f} = \ddot{\vec{r}}\cdot dm
$$



写成对O点的力螺旋形式：

$$
\begin{bmatrix} d\vec{f} \\ \vec{r}\times d\vec{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}} \\ \vec{r}\times\ddot{\vec{r}} \end{bmatrix}\cdot dm
$$

$$
\begin{bmatrix} d\vec{f} \\ \vec{r}\times d\vec{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}+\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \\ \vec{r}\times\vec{a}+\vec{r}\times\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{r}\times\vec{\omega}\times\vec{v}+\vec{r}\times\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \end{bmatrix}\cdot dm
$$

两侧积分：

$$
\hat{f}_{net} = \begin{bmatrix} \vec{a}+\vec{\alpha}\times\vec{c}+\vec{\omega}\times\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{c} \\ \vec{c}\times\dot{\vec{v}}+\vec{c}\times\vec{\omega}\times\vec{v} \end{bmatrix} m + \int \left(\begin{bmatrix} \\ \vec{r}\times\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{r}\times\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} \end{bmatrix}\right) dm
$$

螺旋的力平衡方程

$$\hat{f}_{net} = \begin{bmatrix} \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{c} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{\omega} \times \vec{v} \end{bmatrix} m + \int \left(\begin{bmatrix} \\ \vec{r} \times \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \end{bmatrix} \right) dm$$

其中：

$$\begin{bmatrix} \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{c} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{c} \\ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{\omega} \times \vec{v} \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} m & -m\vec{c}\times \\ m\vec{c}\times & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega}\times & \\ \vec{v}\times & \vec{\omega}\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -m\vec{c}\times \\ m\vec{c}\times & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\int (\vec{r} \times \vec{\alpha} \times \vec{r})\, dm = \int (-\vec{r} \times \vec{r} \times \vec{\alpha})\, dm = I_{33}\vec{\alpha}$$

$$\int (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r})\, dm = \int -\vec{\omega} \times \vec{r} \times \vec{r} \times \vec{\omega}\, dm = \vec{\omega} \times I_{33}\vec{\omega}$$

于是：

$$\hat{f}_{net} = \begin{bmatrix} m & -m\vec{c}\times \\ m\vec{c}\times & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega}\times & \\ \vec{v}\times & \vec{\omega}\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -m\vec{c}\times \\ m\vec{c}\times & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = I\hat{a} + \hat{v} \times^{*} I\hat{v}$$

外力的计算

重力：$\hat{f}_g$

重力加速度的螺旋形式：

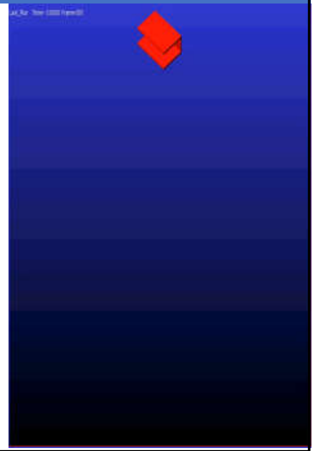
$$\hat{g} = [0,0,-9.8,0,0,0]^T$$

这里Z轴的负方向为重力方向

刚体所受重力：

$$\hat{f}_g = I\hat{g}$$

注意：上式必须处于静定的坐标系中。



外力的计算

约束力：$\hat{f}_c$

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{i,1} & \cdots & C_{i,k} & \cdots & C_{i,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{j,1} & \cdots & C_{j,k} & \cdots & C_{j,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,k} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix}$$

运动副 k 约束杆件 i,j ，那么：

$$C_{ik} = -T_i^{*} C_{iko} = -C_{jk} \neq 0$$
$$C_{lk} = 0, l \neq i, j$$

C_{ik}是关节k约束力一组基，假设在这组基下，约束力的坐标为η_k，那么k对i和j的约束力为：

$$\hat{f}_{ci} = C_{ik} \cdot \eta_k$$

$$\hat{f}_{cj} = C_{jk} \cdot \eta_k = -\hat{f}_{ci}$$

力的作用是相互的！

外力的计算

某个杆件所受的约束力为所有的约束矩阵C_{ij}乘以约束坐标η_i之和：

$$\hat{f}_{cj} = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, \eta_j$$

于是所有杆件的约束力：

$$f_c = \begin{bmatrix} \hat{f}_{c1} \\ \vdots \\ \hat{f}_{cm} \end{bmatrix} = C \cdot \eta$$

除了约束力以外，机器人系统还可能收到接触力、碰撞力等其他外力。

力平衡方程

单个杆件的力平衡方程：

$$\hat{f}_{net} = I\hat{a} + \hat{v} \times^* I\hat{v}$$

其中合力包括重力、约束力、其他外力：

$$\hat{f}_{net} = \hat{f}_g + \hat{f}_c + \hat{f}_e$$

于是：

$$-I\hat{a} + \hat{f}_c = -\hat{f}_e - I\hat{g} + \hat{v} \times^* I\hat{v}$$

对系统中所有杆件列方程，有：

$$-\begin{bmatrix} I_1 & & & \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m,1} & C_{m,2} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{f}_{e1} - I_1\hat{g} + \hat{v}_1 \times^* I_1\hat{v}_1 \\ -\hat{f}_{e2} - I_2\hat{g} + \hat{v}_2 \times^* I_2\hat{v}_1 \\ \vdots \\ -\hat{f}_{em} - I_{\mathrm{m}}\hat{g} + \hat{v}_m \times^* I_m\hat{v}_1 \end{bmatrix} = f_p$$

即：

$$-I \cdot a + C \cdot \eta = f_p$$

小结

- 螺旋转换矩阵，可以借助6维速度螺旋的叉乘来实现：

$$\dot{T} = \hat{v} \times T = \begin{bmatrix} \vec{\omega}\times & \vec{v}\times \\ & \vec{\omega}\times \end{bmatrix} T$$

$$\dot{T}^* = \hat{v} \times^* T^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega}\times & \\ \vec{v}\times & \vec{\omega}\times \end{bmatrix} T^*$$

- 空间加速度是速度旋量的导数，它并不表示刚体上任意一点的加速度
- 空间加速度与点加速度的关系：

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- 空间力未必可微，但是约束力矩阵可微：

$${}^{O}\dot{C} = {}^{O}\dot{T}^{*}{}_{A}\,{}^{A}C + {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}\dot{C} = \hat{v} \times^{*}\, {}^{O}T_A\,{}^{A}C = \hat{v} \times^{*}\, {}^{O}C$$

- 空间惯量为6x6的矩阵，其定义可以用牛顿定律推导

小结

- 空间惯量的转换和微分形式如下：

$${}^{O}I = {}^{O}T_A^{*}\,{}^{A}I\left({}^{O}T_A^{*}\right)^{T}$$

$${}^{O}\dot{I} = {}^{O}\hat{v}_A \times^{*}\, {}^{O}I - {}^{O}I\,{}^{O}\hat{v}_A \times$$

- 通过对虚功方程求导，可以求出所有杆件的加速度
- 通过力平衡分析，可以列出所有杆件的力平衡方程