

# 第五讲

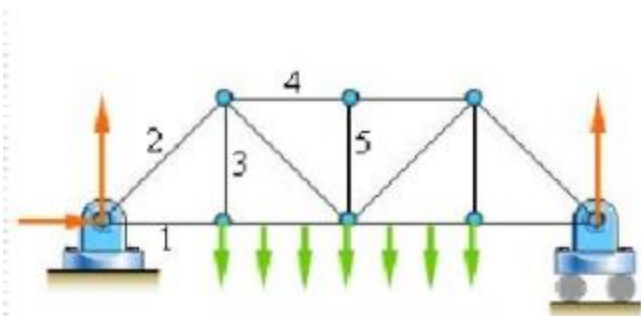
## 动力学方程的建立

潘阳 博士  
上海交通大学

# 数学模型的定义与分类

## 静态模型(static)

- 只关心平衡态或平稳态 (static or steady)
- 与时间无关



静态桁架系统

## 动态模型(dynamic)

- 系统状态随时间改变
- 时间、状态、演化方程 (time, state manifold, evolution function)
- 演化方程为微分方程：

$$\dot{x} = v(x)$$



动态双摆系统

# 机器人学科中的数学模型

## 3. 机器人动力学

三问题：

正问题：力  $\rightarrow$  加速度  $\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta})$

逆问题：加速度  $\rightarrow$  力  $\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta) (\tau - h(\theta, \dot{\theta}))$

标定问题：力与加速度  $\rightarrow$  惯量

三要素：

时间： $t$

状态： $\theta \quad \dot{\theta}$

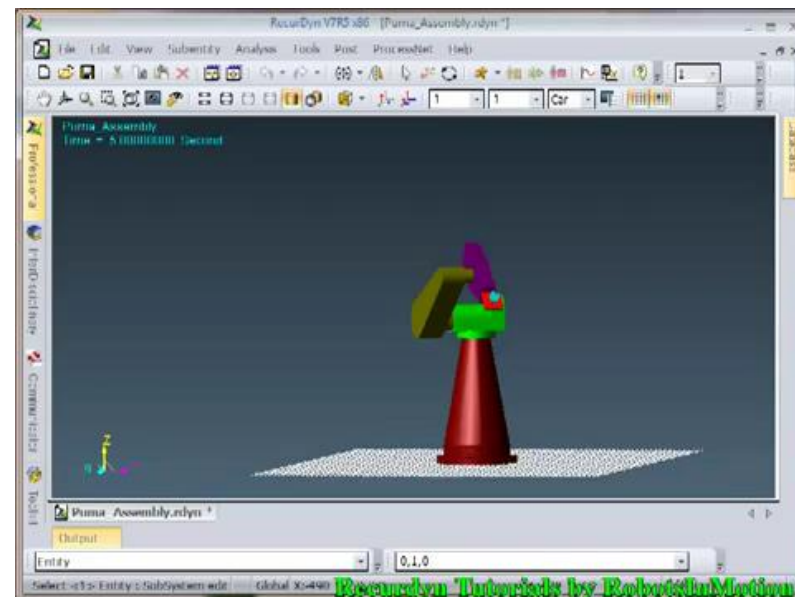
演化方程： $\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta) (\tau - h(\theta, \dot{\theta}))$

动力学的特点

- 动态系统
- 线性系统（仿射变换）
- 微分方程



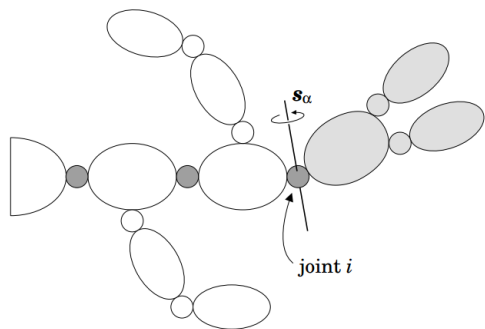
Puma机器人逆动力学



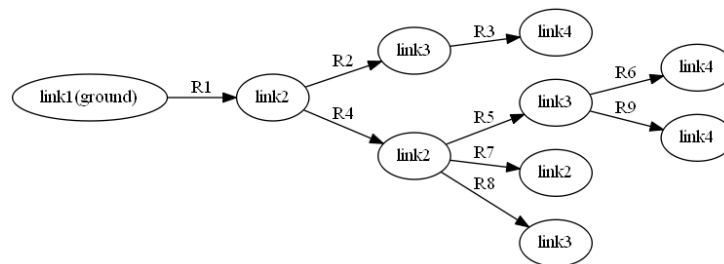
Puma机器人正动力学

# 机器人动力学的建模方法

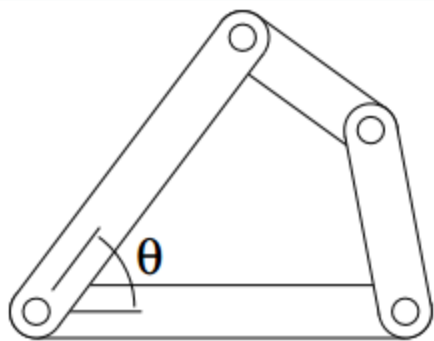
## 机器人机构拓扑分类



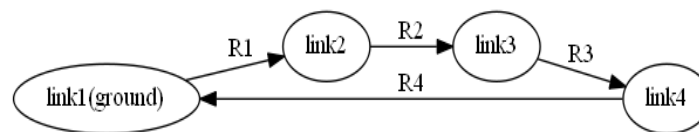
树形拓扑



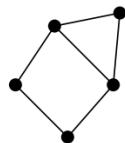
- 杆件与约束满足： $n_c = n_p - 1$
- 可以定义约束的极性 (Polarity)



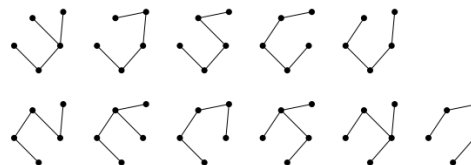
环形拓扑



original graph



every possible spanning tree



- 杆件与约束满足： $n_c > n_p - 1$
- 包含树结构

# 机器人动力学的建模方法

## 机器人动力学建模方法

### 拉格朗日法 (Lagrangian Formulation)

引入拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

引入势能函数：

$$\mathcal{L} = T - V$$

产生N个二阶方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

### 牛顿欧拉法 (Newton-Euler Formulation)

单个杆件平衡方程：

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta})$$

递归关系：

$$M_{i,i-1} = M_i^{-1} M_{i-1}$$

递归计算：

```
while forward recursion do
   $T_{\lambda(i),i}$  = function of  $q_i$ 
   $V_i = \text{Ad}_{T_{\lambda(i),i}^{-1}} V_{\lambda(i)} + S_i \dot{q}_i$ 
   $\dot{V}_i = \text{Ad}_{T_{\lambda(i),i}^{-1}} \dot{V}_{\lambda(i)} + \text{ad}_{V_i}^* S_i \dot{q}_i + \dot{S}_i \dot{q}_i + S_i \ddot{q}_i$ 
end while
while backward recursion do
   $F_i = \mathcal{I}_i \dot{V}_i - \text{ad}_{V_i}^* \mathcal{I}_i V_i - F_i^{\text{ext}} + \sum_{k \in \mu(i)} \text{Ad}_{T_{i,k}^{-1}}^* F_k$ 
   $\tau_i = S_i^T F_i$ 
end while
```

### 其他方法

凯恩法：

R/W方法：

高斯原理法：

空间向量法：

# 机器人动力学的建模方法

## 机器人动力学建模方法

### Robot Dynamics

The three main algorithms in robot dynamics are:

#### Recursive Newton–Euler Algorithm

- calculates inverse dynamics
- complexity  $O(n)$

#### Articulated–Body Algorithm

- calculates forward dynamics
- complexity  $O(n)$

#### Composite–Rigid–Body Algorithm

- calculates  $\mathbf{H}$
- complexity  $O(nd)$

# 机器人动力学的建模方法

## 树形拓扑的动力学计算复杂度

拉格朗日法  
(Lagrangian Formulation)

牛顿欧拉法  
(Newton-Euler Formulation)

树形正解

$O(N)$

$O(N)$

树形反解

$O(N)$

$O(N)$

环形正解

$O(N^3)$

$O(N^3)$

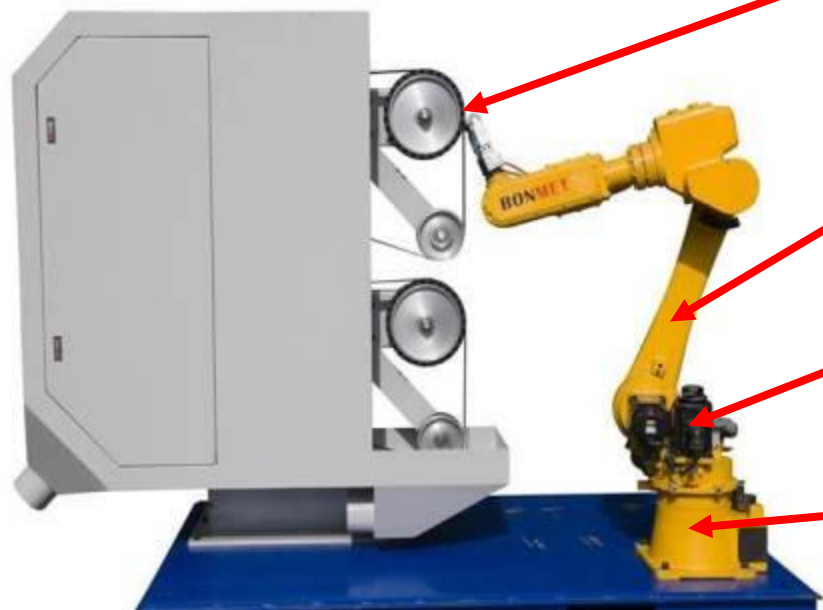
环形反解

$O(N^3)$

$O(N^3)$

# 机器人动力学的建模方法

## 机器人动力学的研究对象



外力 (Force)      外力、重力、摩擦力、科氏力……

杆件 (Part)      惯量、位置、速度、加速度……

驱动 (Motion)      约束力, 位置、速度、加速度……

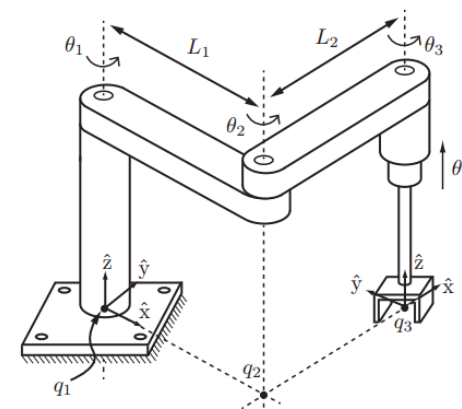
关节 (Joint)      约束力, 位置、速度、加速度……



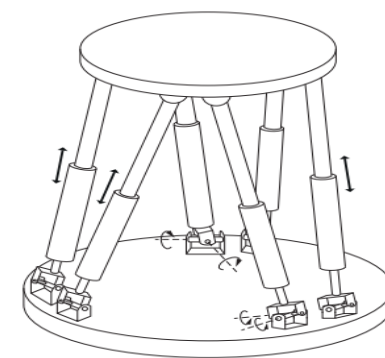
# 机器人动力学的建模方法

## 机器人动力学中的已知量与未知量

	固有属性	运动学求解的变量	动力学的未知量
外力 (Force)	重力		外力、摩擦力、科氏力……
杆件 (Part)	惯量	位置、速度	加速度
驱动 (Motion)		位置、速度	约束力、加速度
关节 (Joint)		位置、速度	约束力、加速度



串联机构杆件位置好求



并联机构杆件位置多于驱动位置

# 通用动力学平衡方程

力平衡方程：

$$-I \cdot a + C \cdot \eta = f_p$$

虚约束不做功：

$$C^T \cdot a = c_a$$

写在一起：

$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

普适的动力学方程！

该方程为线性方程，未知数包含：

- 所有杆件的加速度，6m个未知数
- 所有驱动的约束坐标，k个未知数

# 通用动力学平衡方程

## Problem 7: 动力学逆问题

已知：

- 当前各杆件的速度 $\hat{v}_i$ ，初始惯量 $I_{i0}$ ，
- 当前的输入加速度 $\ddot{\theta}$
- 当前的约束矩阵 $C$

Step 1：

- 求出各杆件在0坐标系下的惯量 ${}^0I_i$

Step 2：

- 求出 $f_p$

Step 3：

- 求出 $c_a$

Step 4：

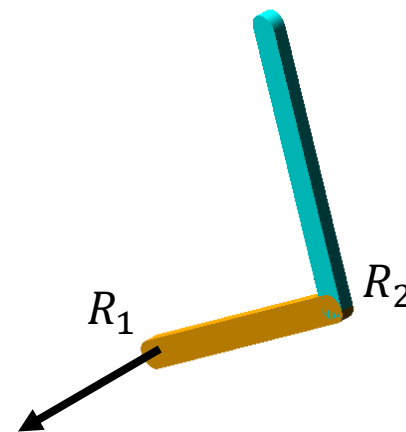
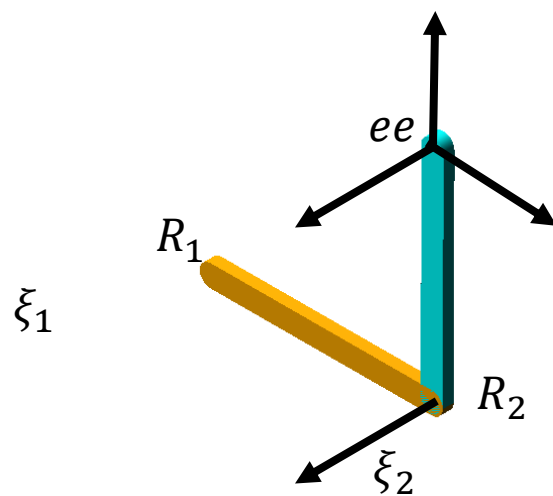
- 求出所有杆件加速度 $\hat{a}_i$ 和所有约束力 $\eta$

# 通用动力学平衡方程

## Problem 7: 动力学逆问题

Step 1 :

- 求出各杆件在0坐标系下的惯量  ${}^0I_i$



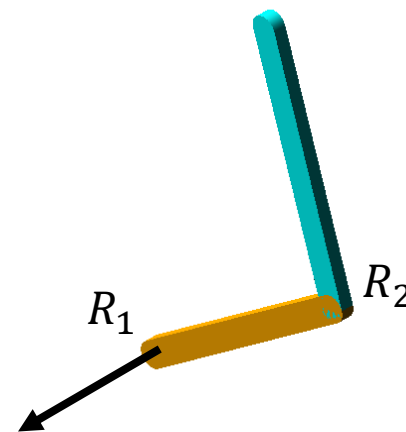
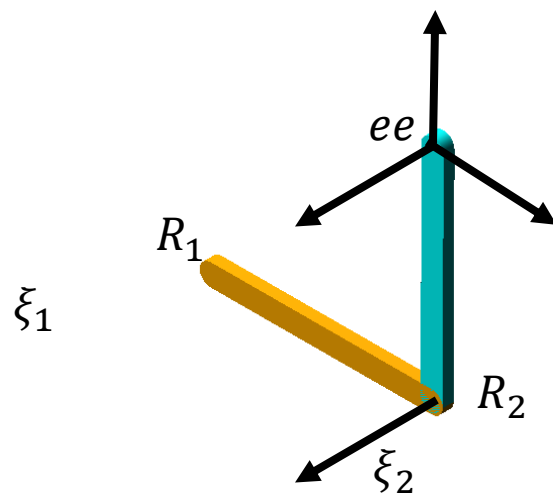
$$I_1 = T_1^* \cdot I_{10} \cdot (T_1^*)^T$$
$$I_2 = T_2^* \cdot I_{20} \cdot (T_2^*)^T$$

# 通用动力学平衡方程

## Problem 7: 动力学逆问题

Step 2 :

- 求出  $f_p$



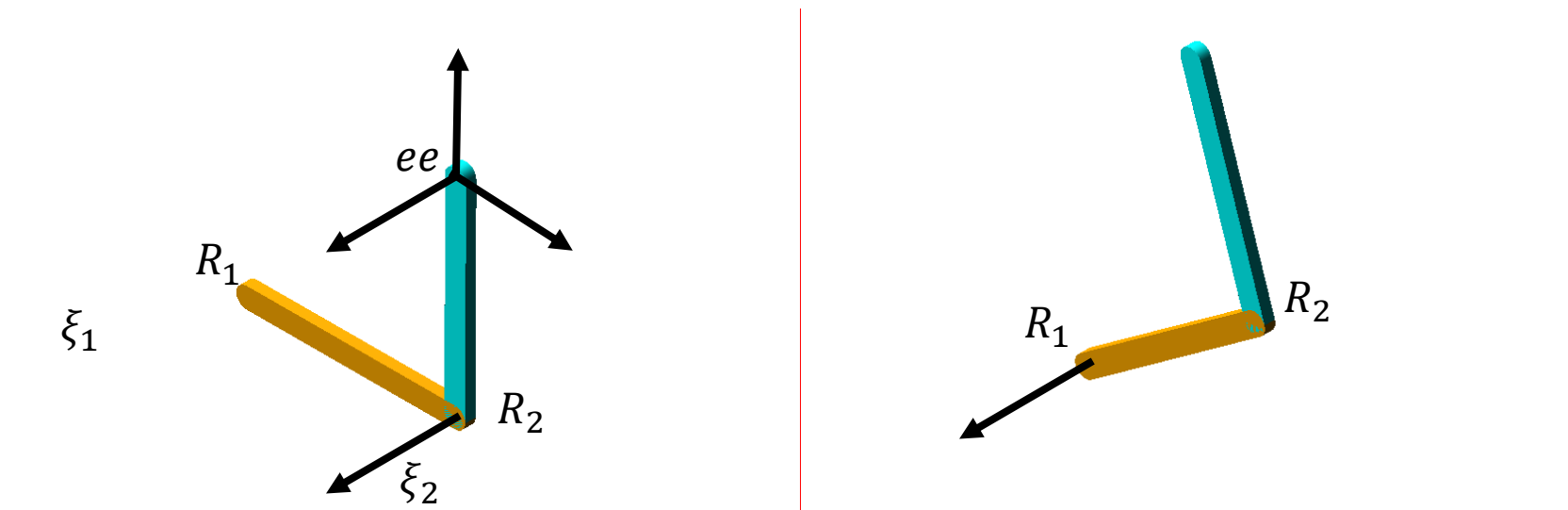
$$f_{p1} = -\hat{f}_{e1} - I_1 \hat{g} + \hat{v}_1 \times^* I_1 \hat{v}_1$$
$$f_{p2} = -\hat{f}_{e2} - I_2 \hat{g} + \hat{v}_2 \times^* I_2 \hat{v}_2$$

# 通用动力学平衡方程

## Problem 7: 动力学逆问题

Step 3 :

- 求出  $c_a$



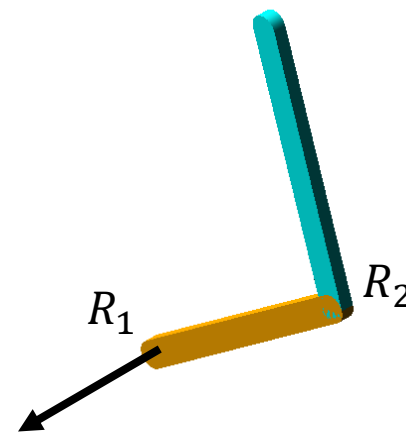
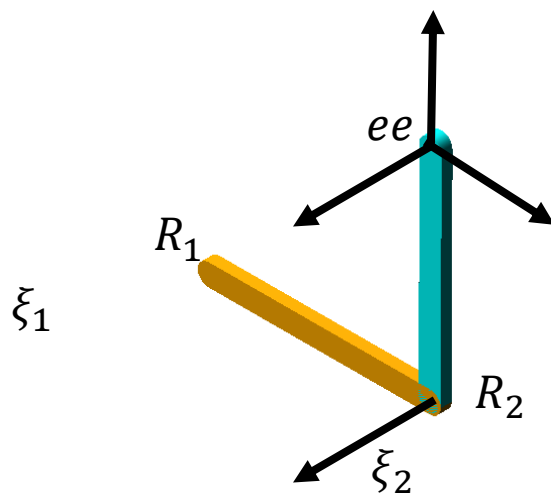
$$c_a = \dot{c}_v - \dot{C}^T \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \dot{C}^T \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

# 通用动力学平衡方程

## Problem 7: 动力学逆问题

Step 4 :

- 求出所有杆件加速度 $\hat{a}_i$ 和所有约束力 $\eta$



$$\begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

# 通用动力学平衡方程

## Problem 8: 动力学正问题

已知：

- 当前各杆件的速度 $\hat{v}_i$ ，初始惯量 $I_{i0}$ ，
- 当前的输入力 $\vec{f}_m$ ，为电机的驱动力，不是力螺旋
- 当前的约束矩阵 $C$

Step 1：

- 求出各杆件在O坐标系下的惯量 ${}^O I_i$

Step 2：

- 求出 $f_p$

Step 3：

- 求出 $c_a$

Step 4：

- 求出所有杆件加速度 $\hat{a}_i$ 和所有约束力 $\eta$

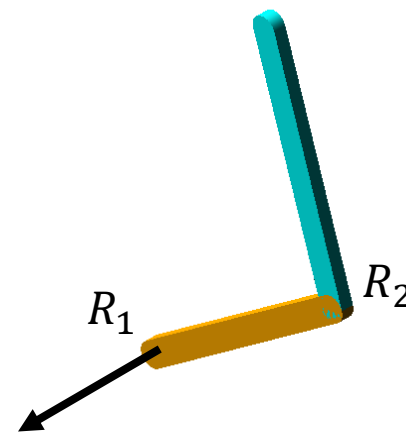
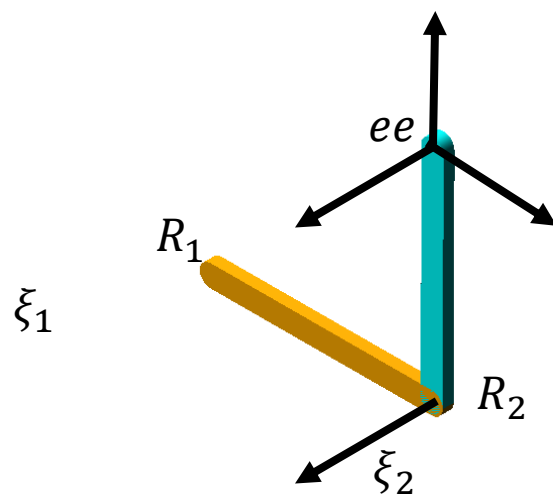


# 通用动力学平衡方程

## Problem 8: 动力学正问题

Step 1 :

- 求出各杆件在0坐标系下的惯量  ${}^0I_i$



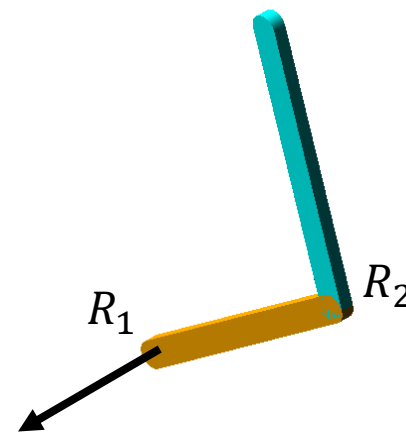
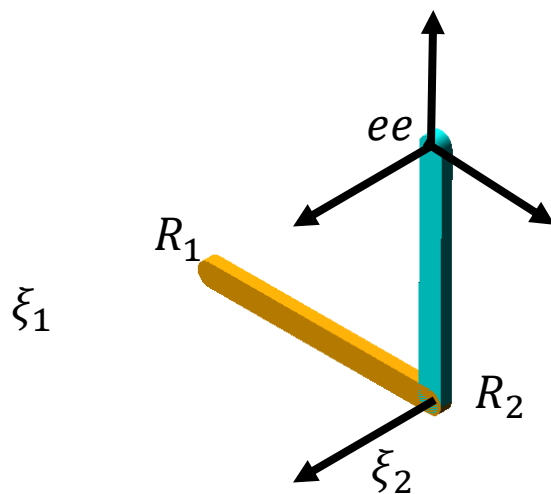
$$I_1 = T_1^* \cdot I_{1o} \cdot (T_1^*)^T$$
$$I_2 = T_2^* \cdot I_{2o} \cdot (T_2^*)^T$$

# 通用动力学平衡方程

## Problem 8: 动力学正问题

Step 2 :

- 求出  $f_p$



现在已知电机驱动力，因此在计算杆件受力时需要加上驱动力

$$\begin{aligned} f_{p1} &= -\hat{f}_{e1} - I_1 \hat{g} - \hat{v}_1 \times^* I_1 \hat{v}_1 + C_{13}^T \cdot f_{m1} - C_{14}^T \cdot f_{m2} \\ f_{p2} &= -\hat{f}_{e2} - I_2 \hat{g} - \hat{v}_2 \times^* I_2 \hat{v}_2 + C_{24}^T \cdot f_{m2} \end{aligned}$$

此时，约束矩阵要去掉驱动的约束：

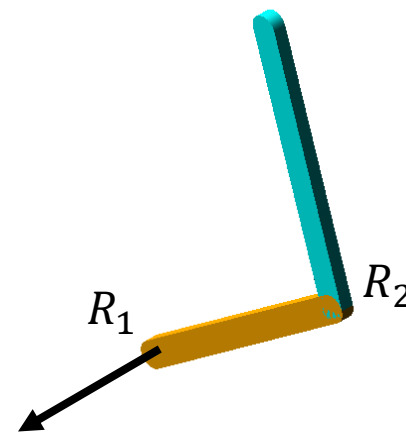
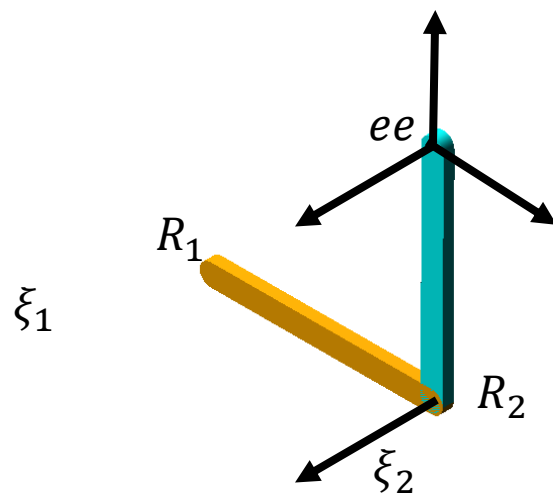
	地面	L1	L2	
$C^T =$	$\begin{bmatrix} C_{00}^T \\ -C_{01}^T \\ C_{11}^T \\ -C_{12}^T \end{bmatrix}$		$C_{22}^T$	固定地面
				R1
				R2

# 通用动力学平衡方程

## Problem 8: 动力学正问题

Step 3 :

- 求出  $c_a$



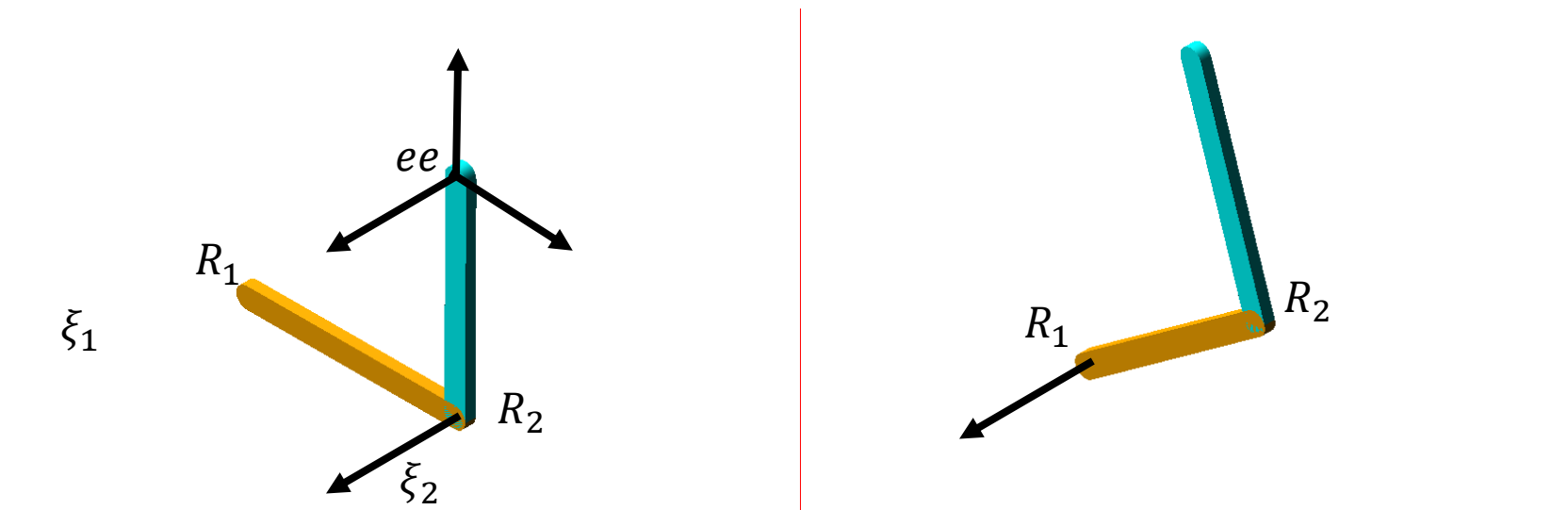
$$c_a = \dot{c}_v - \dot{C}^T \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{C}^T \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

# 通用动力学平衡方程

## Problem 8: 动力学正问题

Step 4 :

- 求出所有杆件加速度 $\hat{a}_i$ 和所有约束力 $\eta$



$$\begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

此时，杆件的相对加速度为：

$$\hat{a}_{ji}\ddot{\theta}_i = \hat{a}_i - \hat{a}_{i-1} - \hat{v}_{i-1} \times \hat{v}_i = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix}$$

那么驱动加速度为：

$$\ddot{\theta}_i = \|\vec{\alpha}\|$$

# 通用动力学平衡方程

Problem 9: 将方程化为通用形式

动力学方程的通用形式：

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta})$$

$$\begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{c}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_p \\ -\dot{C}^T \cdot c_v \end{bmatrix}$$

而：

$$\dot{c}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$
$$\eta = \begin{bmatrix} \vec{\tau}_j \\ \vec{\tau}_m \end{bmatrix}$$

其中 $\vec{\tau}_j$ 是所有关节的约束力， $\vec{\tau}_m$ 是驱动的驱动力

去最上面方程的子方程：

$$\vec{\tau}_m = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta})$$

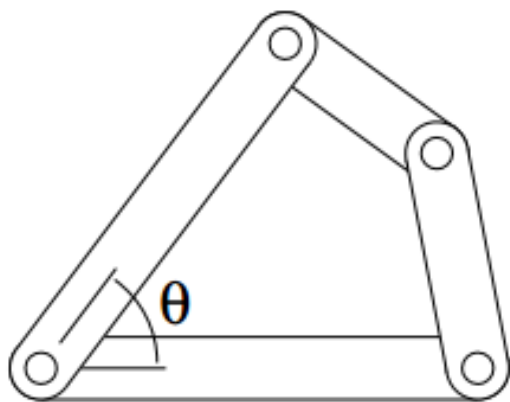
# 动力学系统的分类

## 常见动力学模型的分类

$C$ 为约束矩阵，为 $m \times n$ 维， $m$ 是6的倍数

过约束

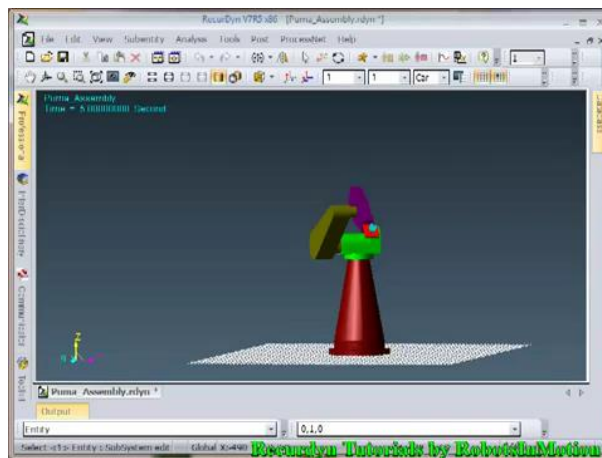
$$\text{rank}(C) = m < n$$



四杆机构是个过约束机构

欠约束

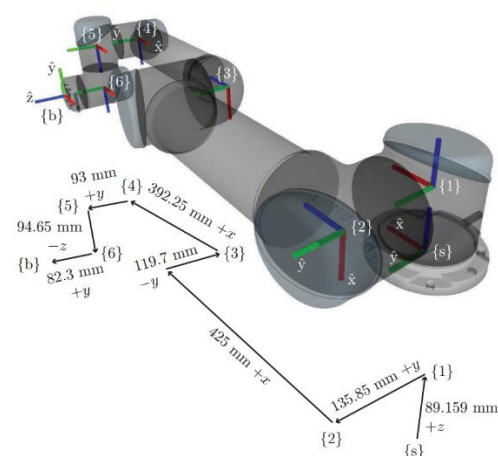
$$\text{rank}(C) < m$$



正动力学问题属于欠约束问题

完全约束

$$\text{rank}(C) = m = n$$



六轴的逆动力学问题是完全约束问题

# 动力学系统的分类

## 常见动力学模型的分类

### 有质点的系统

有地系统



Stewart是有地系统

无地系统

$$\text{rank}(C) \leq m - 6$$



腿式机器人是无地系统

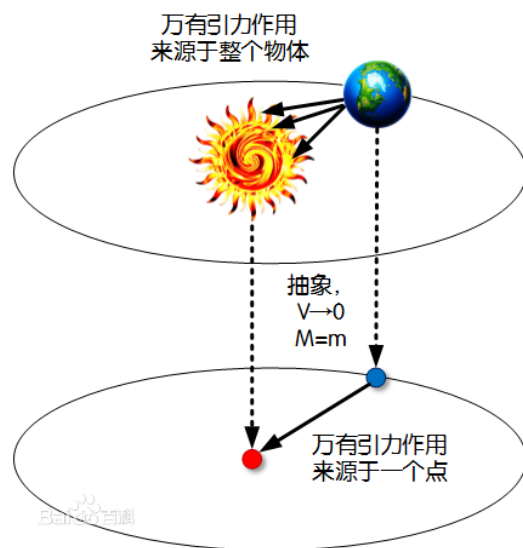
# 动力学系统的分类

## 常见动力学模型的分类

$I$ 为惯量矩阵，为 $m \times m$ 维， $m$ 是6的倍数

有质点或零惯量的系统

$$\text{rank}(I) < m$$



行星被抽象成了质点

所有杆件惯量都可逆的系统

$$\text{rank}(I) = m$$



所有刚体都有有效惯量



# 动力学方程无解的条件

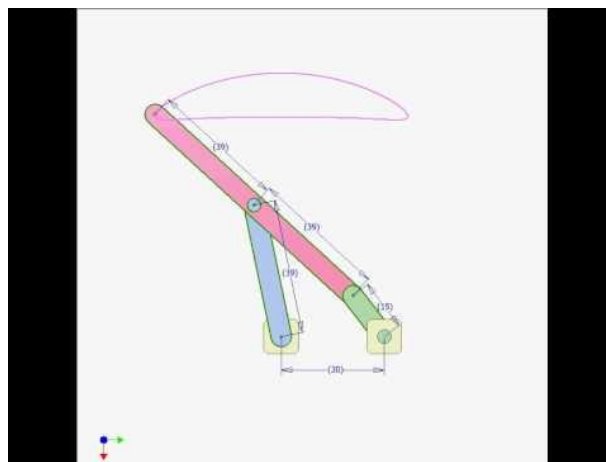
动力学模型的失效，意味这动力学方程无解！

$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

失效条件1:

$$\text{rank}(C^T) < \text{rank}([C^T \quad c_a])$$

过约束失效（stuck），俗称“憋劲”



四杆机构在奇异点会导致动力学模型无解

# 动力学方程无解的条件

动力学模型的失效，意味这动力学方程无解！

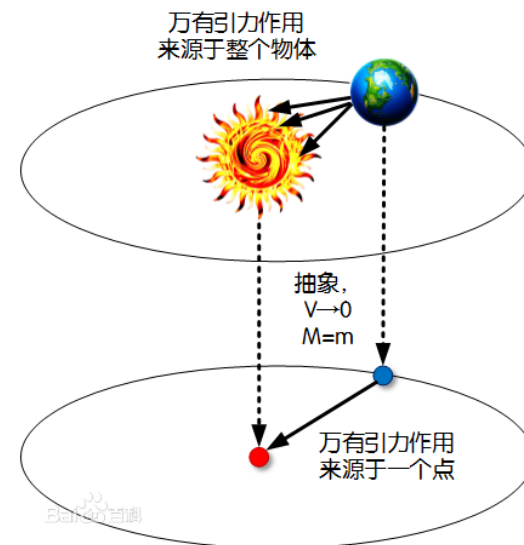
$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

失效条件2:

$$\text{rank}(C^T) = \text{rank}([C^T \quad c_a])$$

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}\right) < \text{rank}\left(\begin{bmatrix} -I & C & f_p \\ C^T & & c_a \end{bmatrix}\right)$$

对没有质量的刚体施加力，或对没有惯量的质点施加力矩



如果万有引力是个力矩，那么质点收到力矩，会产生多大的角加速度？

# 动力学方程的优化

提高以下方程的求解速度：

$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

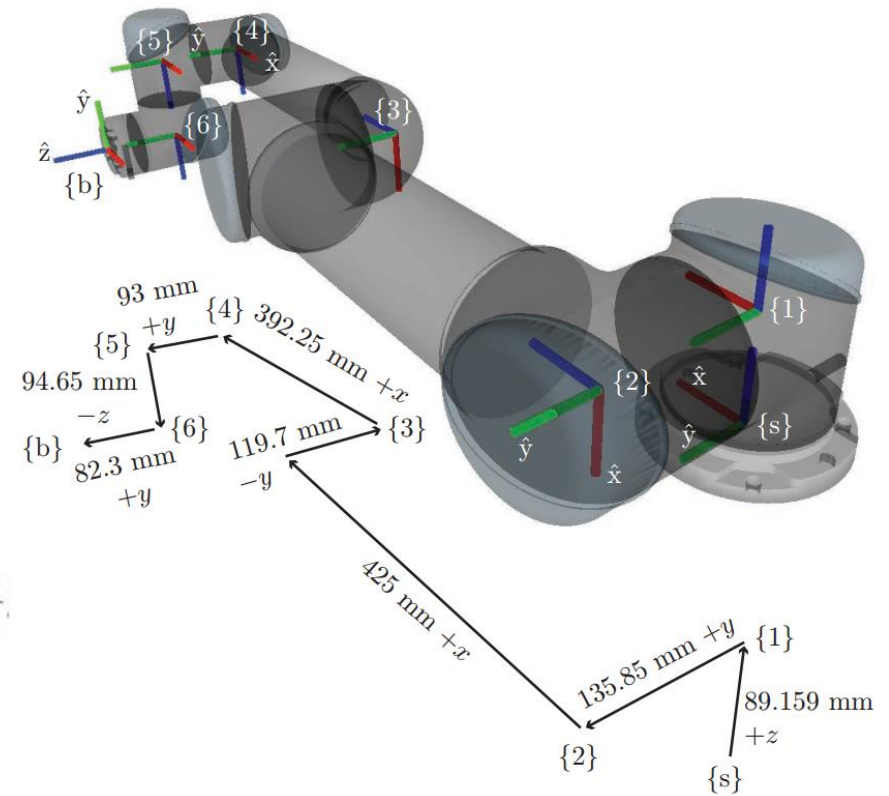
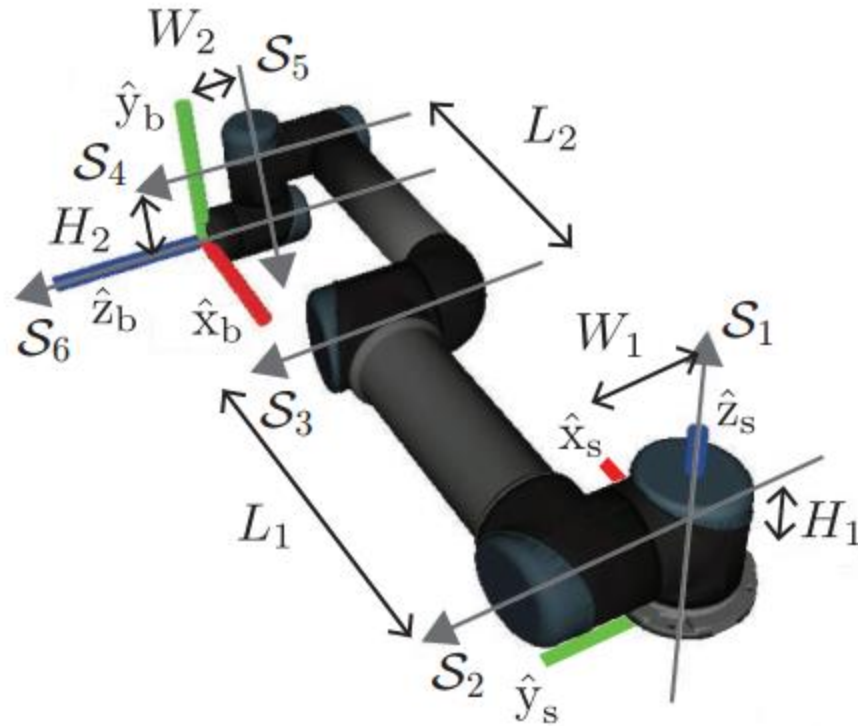
对于串联机构：

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & & & \\ & C_1 & -C_2 & & \\ & & C_2 & \ddots & \\ & & & \ddots & -C_m \\ & & & & C_m \end{bmatrix}$$

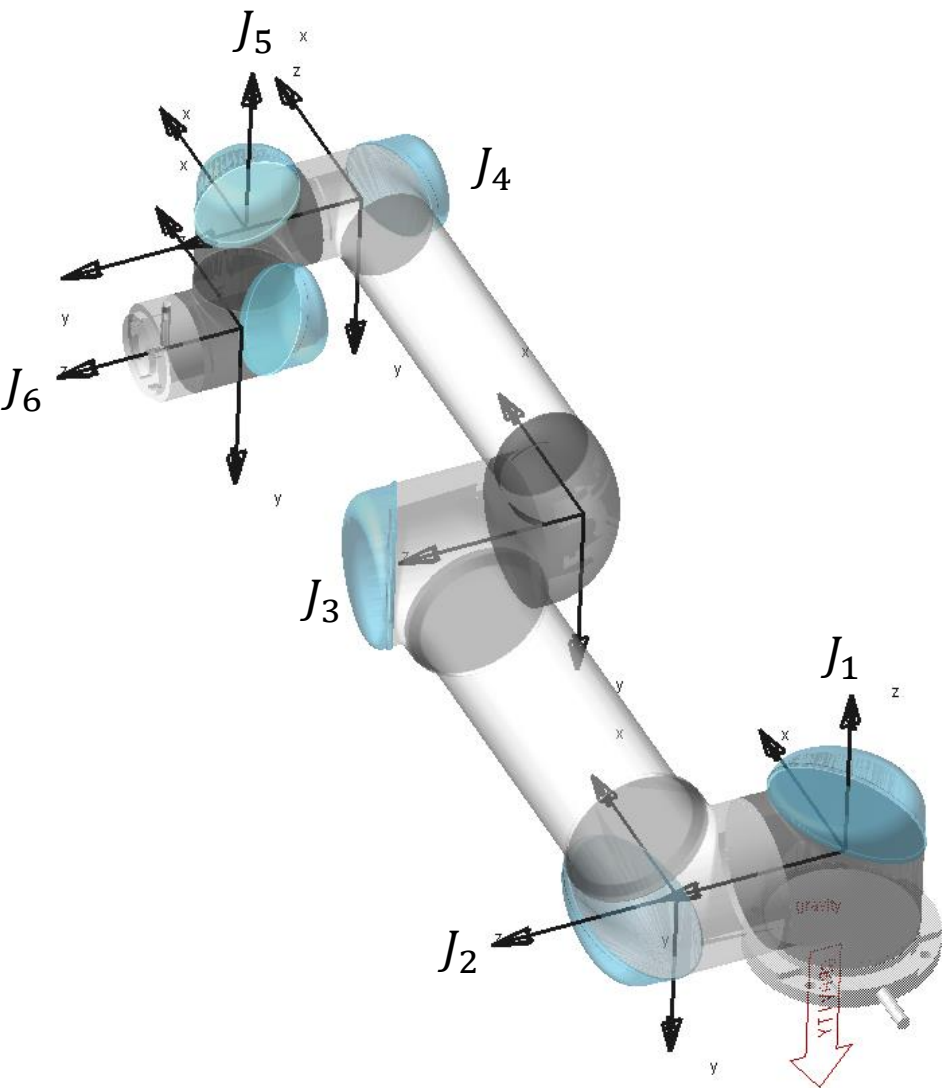
可以对其行变换，把C化成对角阵，求解复杂度为 $O(n)$ ：

$$PC = \begin{bmatrix} C_0 & & & & \\ & C_1 & & & \\ & & C_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_m \end{bmatrix}$$

# UR5 动力学模型



# UR5 动力学模型



各个关节的坐标系（相对于地面）：

```
j1_rpy = [0.0 0.0 0.0];  
j1_xyz = [0.0 0.0 0.089159];
```

```
j2_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];  
j2_xyz = [0.0, 0.13585, 0.089159];
```

```
j3_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];  
j3_xyz = [0.425, 0.13585 - 0.1197, 0.089159];
```

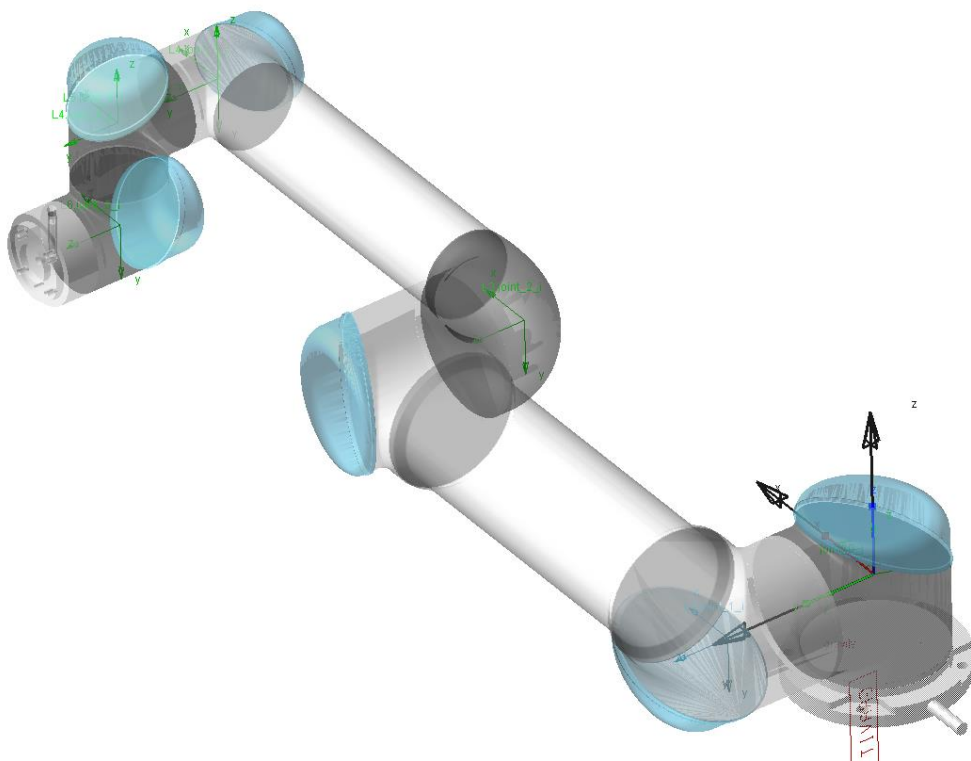
```
j4_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];  
j4_xyz = [0.425 + 0.39225, 0.13585 - 0.1197, 0.089159];
```

```
j5_rpy = [0.0 0.0 0.0];  
j5_xyz = [0.425 + 0.39225, 0.13585 - 0.1197 + 0.093, 0.089159];
```

```
j6_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];  
j6_xyz = [0.425 + 0.39225, 0.13585 - 0.1197 + 0.093, 0.089159 -  
0.09465];
```

# UR5 动力学模型

model



关节的初始速度螺旋与约束螺旋（相对于地面）：

```
cm=[  
1,0,0,0,0  
0,1,0,0,0  
0,0,1,0,0  
0,0,0,1,0  
0,0,0,0,1  
0,0,0,0,0];
```

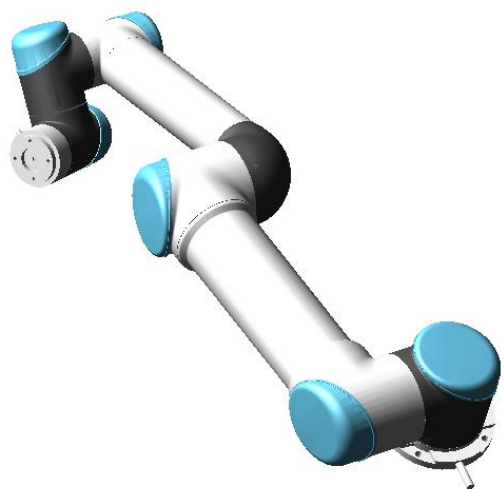
```
pm_j1o = [eul2rotm(j1_rpy,'ZYX'), j1_xyz'  
          0,0,0,1];  
j1_vso = Tv(pm_j1o)*[0;0;0;0;0;1];  
j1_cmo = Tf(pm_j1o)*cm;  
m1_cmo = Tf(pm_j1o)*[0;0;0;0;0;1];
```

.....

# UR5 动力学模型

Problem 1（计算运动学正解）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



```
P0 = eye(4);  
P1 = P(j1_vso*q(1));  
P2 = P1*P(j2_vso*q(2));  
P3 = P2*P(j3_vso*q(3));  
P4 = P3*P(j4_vso*q(4));  
P5 = P4*P(j5_vso*q(5));  
P6 = P5*P(j6_vso*q(6));
```

```
ee = P6*pm_eeo;
```

.....

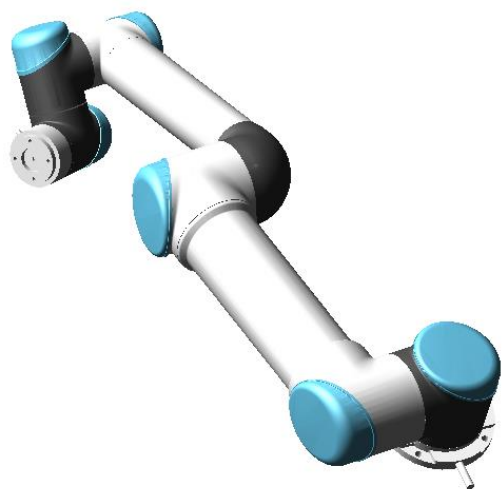
其中函数P为指数映射的函数：

```
R = eye(3) + sin(theta)*C3(w) + (1-cos(theta))*C3(w)*C3(w);  
p = (eye(3)-R)*C3(w)*v + theta * w' * v * w;
```

# UR5 动力学模型

Problem 2（速度雅可比）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



```
J = [Tv(P0)*j1_vso, Tv(P1)*j2_vso, Tv(P2)*j3_vso, Tv(P3)*j4_vso,  
Tv(P4)*j5_vso, Tv(P5)*j6_vso];
```

其中函数Tv为速度螺旋转换矩阵：

```
function Tv = Tv(pm)
```

```
R = pm(1:3,1:3);
```

```
p = pm(1:3,4);
```

```
Tv = [  
      R          C3(p)*R  
      zeros(3,3) R          ];
```

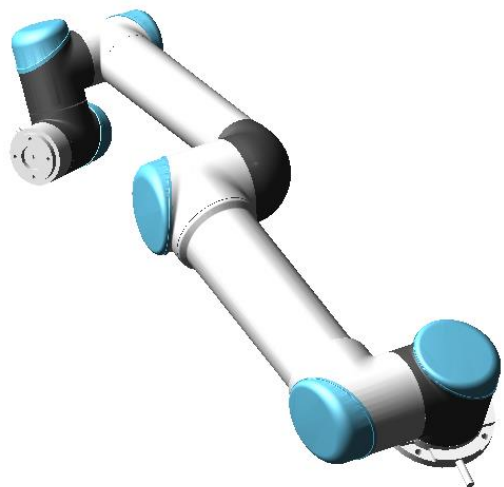
```
end
```



# UR5 动力学模型

Problem 3（计算所有杆件的速度）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



构建关节和驱动的约束矩阵：

```
j1_cm = j1_cmo;  
j2_cm = Tf(P1) * j2_cmo;  
.....  
j6_cm = Tf(P5) * j6_cmo;
```

```
m1_cm = m1_cmo;  
m2_cm = Tf(P1) * m2_cmo;  
.....  
m6_cm = Tf(P5) * m6_cmo;
```

构建C：

C=.....

构建cv：

```
cv = [zeros(36,1);dq];
```

求所有杆件的速度：

```
v = C'\cv;
```

```
v0 = v(1:6);
```

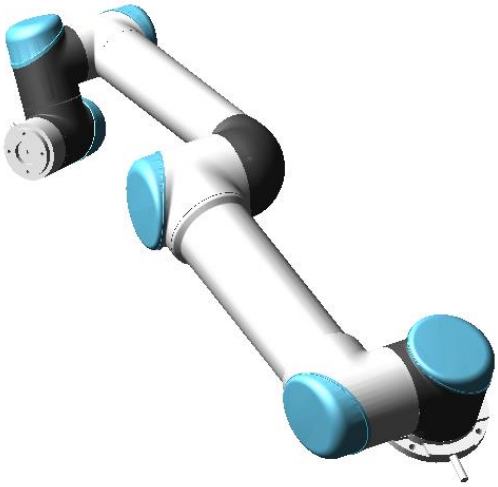
.....

```
v6 = v(37:42);
```

# UR5 动力学模型

Problem 4（根据C来计算雅可比）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01

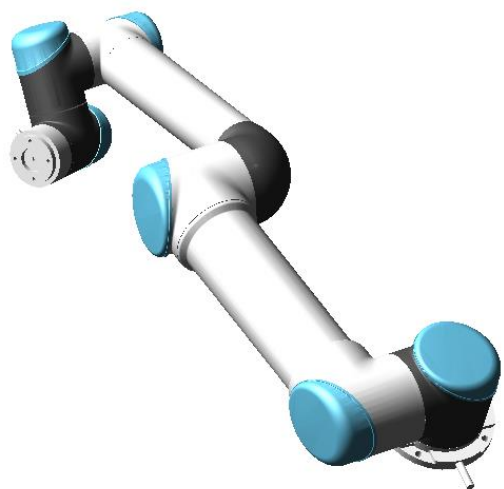


```
CT_inv = inv(C') ;  
J2 = CT_inv(end-5:end,end-5:end) ;
```

# UR5 动力学模型

Problem 5（加速度输入输出）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



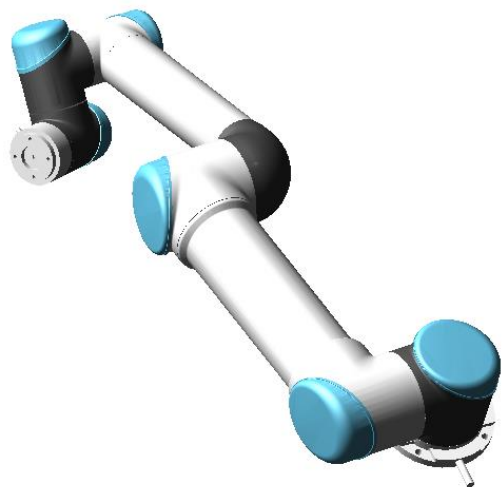
```
dJ = [Cv(v0)*Tv(P0)*j1_vso, Cv(v1)*Tv(P1)*j2_vso, Cv(v2)*Tv(P2)*j3_vso,  
Cv(v3)*Tv(P3)*j4_vso, Cv(v4)*Tv(P4)*j5_vso, Cv(v5)*Tv(P5)*j6_vso];
```

```
aee = J*ddq + dJ*dq;
```

# UR5 动力学模型

Problem 6（求所有杆件加速度）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



求C的导数

$dC=.....$

求ca

$ca = [\text{zeros}(36,1); \ddot{dq}] - dC' * v;$

求所有杆件加速度

$a = C' \backslash ca;$

$a0 = a(1:6);$

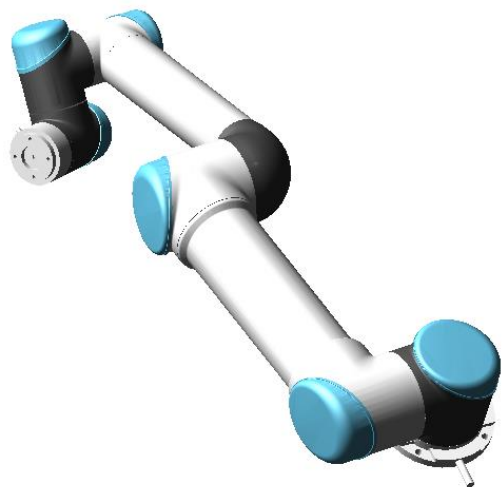
.....

$a6 = a(37:42);$

# UR5 动力学模型

Problem 7 (动力学反解) :

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



求所有杆件惯量 :

```
I0=Tf(P0) * I0o * Tf(P0)';
```

.....

```
I6=Tf(P6) * I6o * Tf(P6)';
```

```
I=blkdiag(I0,I1,I2,I3,I4,I5,I6);
```

求外力 :

```
g=[0,0,-9.8,0,0,0]';
```

```
f0=-I0*g + Cf(v0)*I0*v0;
```

.....

```
f6=-I6*g + Cf(v6)*I6*v6;
```

```
fp=[f0;f1;f2;f3;f4;f5;f6];
```

求ca :

```
ca = [zeros(36,1);ddq] - dC'*v;
```

求解方程 :

```
A = [-I, C;C', zeros(42,42)];
```

```
b = [fp;ca];
```

```
x = A\b;
```

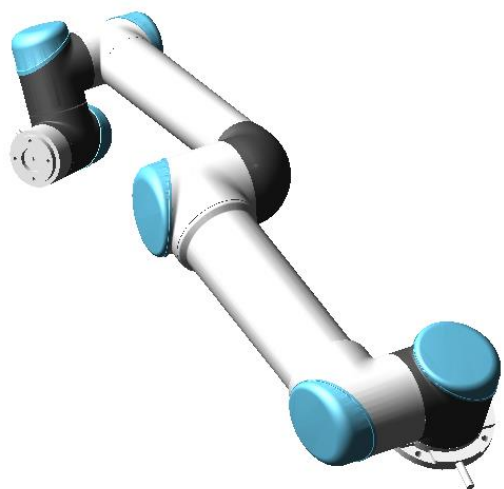
列出驱动力 :

```
actuation_force = x(end-5:end); 求C的导数
```

# UR5 动力学模型

Problem 8（动力学正解）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



重新构建c和dc：

$C2=.....$

$dC2=.....$

重复反解过程：

.....

求解得到：

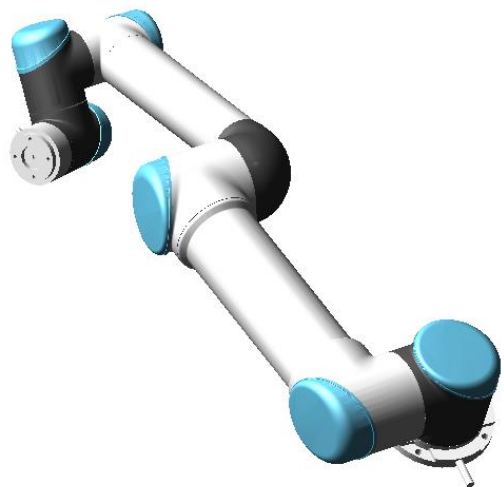
$x=A\backslash b;$

```
aj1 = x(7:12)-x(1:6) - Cv(v0)*v1;  
aj2 = x(13:18)-x(7:12) - Cv(v1)*v2;  
aj3 = x(19:24)-x(13:18) - Cv(v2)*v3;  
aj4 = x(25:30)-x(19:24) - Cv(v3)*v4;  
aj5 = x(31:36)-x(25:30) - Cv(v4)*v5;  
aj6 = x(37:42)-x(31:36) - Cv(v5)*v6;
```

# UR5 动力学模型

Problem 9（动力学通用形式）：

Last\_Run Time= 0.0000 Frame=01



```
A = [  
    -I, C  
    C', zeros(42,42)    ];  
  
B = inv(A);  
  
M = B(end-5:end,end-5:end);  
h = B(end-5:end,:) * [fp; - dC' * v];  
  
actuation_force2 = M*ddq+h;
```

# 小结

- 刚体无穷大，力可以施加到任何位置，运动可表达在任何位置
- 速度螺旋和力螺旋是空间中的六维旋量
- 旋量是客观存在的实体，包括轴线、螺距等，但是可以在不同坐标系之间迁移
- 速度螺旋和力螺旋各自是6维的不含内积的线性空间，且彼此为对偶空间
- 任何运动副，可以用一组运动螺旋表示运动，力螺旋表示约束力，且它们互为零化子空间
- 可以通过选择坐标系，用Plücker基较为简化的表示运动副，这坐标系位于关节所连接的杆件



# 小结

- 四个伴随矩阵：

$$T = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \times R \\ & R \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} R & \\ \vec{p} \times R & R \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} \times = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} \times^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix}$$

# 小结

- 位姿矩阵的微分：

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\vec{p}} \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times R & \vec{\omega} \times \vec{p} + \vec{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$$

$$\dot{T} = \hat{v} \times T = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T$$

$$\dot{T}^* = \hat{v} \times^* T^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T^*$$

- 速度螺旋到位姿矩阵的指数映射：

$$P(\hat{v}\theta) = \begin{bmatrix} E + \sin \theta \vec{\omega} \times + (1 - \cos \theta) \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times & (E - R) \vec{\omega} \times \vec{v} + \theta (\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{\omega} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

# 小结

- 空间加速度是速度旋量的导数：

$$\hat{a} = \dot{\hat{v}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- 约束矩阵与惯量矩阵的坐标系转换：

$$C = T^* C$$

$$I = T^* I (T^*)^T$$

- 微分：

$$\dot{C} = \hat{v} \times^* C$$

$$\dot{I} = \hat{v} \times^* I + I \hat{v} \times$$

# 小结

- 动力学方程的通用形式：

$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$