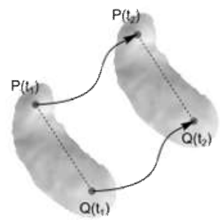
第二讲
力旋量与速度旋量

潘阳 博士
上海交通大学

刚体的运动



在物理学里，**理想刚体**（rigid body）是一种有限尺寸，可以忽略形变的固体。

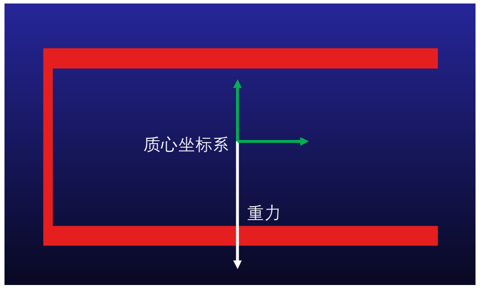
——wikipedia

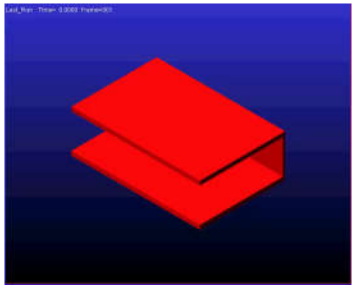
$$\|\boldsymbol{p}(t_1) - \boldsymbol{q}(t_1)\| = \|\boldsymbol{p}(t_1) - \boldsymbol{q}(t_1)\|$$

思考：

- 刚体的尺寸在影响什么？
- 可以在刚体外部施加力吗？
- 可以在刚体外部定义坐标系吗？

刚体的运动

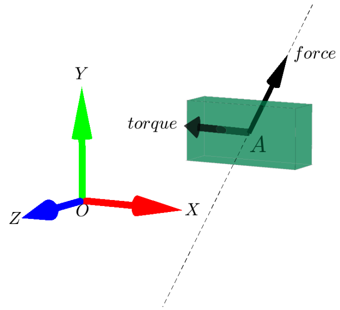




- 力也可以施加在刚体外部
- 可以用外部坐标系描述刚体运动
- 刚体的大小、形状并不影响力和运动

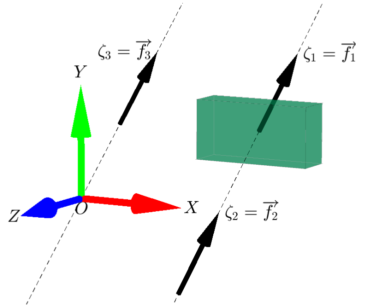
刚体可以看作没有形状、连续的、充满整个空间的物体

刚体的力与力矩

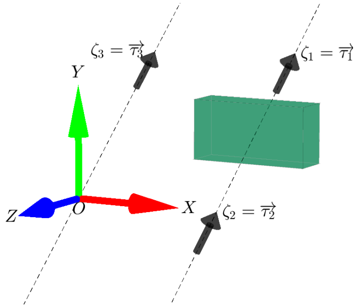


- 力是物体之间的相互作用
- 空间中对刚体在A点处的作用ζ，一定可以表示成：
  纯力 轴线过A点
  包含大小和方向$\vec{f}$
  力偶
  包含大小和方向$\vec{\tau}$
  $(\vec{f}, \vec{\tau})$同时作用在刚体上
- 所有的力、力矩等相互作用，都可以表达成这样的形式！

刚体的力与力矩

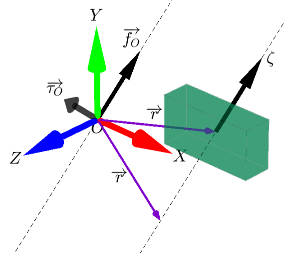


- $\zeta_1 = \zeta_2 \neq \zeta_3$
- 纯力是线矢
- 纯力有大小、方向、作用线

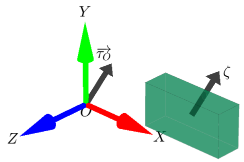


- $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3$
- 纯力偶是三维矢量
- 纯力偶只有大小、方向

刚体的力与力矩



- 为区分三维和六维向量，六维向量记作$\hat{f}$
- $\hat{f}_r = [\vec{f}, \vec{0}] \to \hat{f}_o = [\vec{f_O}, \vec{\tau_O}] = [\vec{f}, \vec{r} \times \vec{f}]$
- $\vec{r}$为 ζ 所在直线上的任意一点



- $\hat{f}_r = [\vec{0}, \vec{\tau}] \to \hat{f}_o = [\vec{0}, \vec{\tau_O}]$
- **任何力和力偶都可以表达在O点处！**
- 回想：刚体无穷大，力和力矩可以施加在任何位置

刚体的力与力矩

力旋量（wrench）

空间中任意形式的力、力偶或它们的混合都可以在O点下表达。
此时所有的力、力偶或它们的混合形成一个线性空间：

$$\mathbb{F}^6 = \mathbb{R}^6$$

力作用的叠加对应线性空间的加法：

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \hat{f}_{1o} + \hat{f}_{2o}$$

力作用的缩放对应线性空间的数乘：

$$n \cdot \zeta = n \cdot \hat{f}_{1o}$$

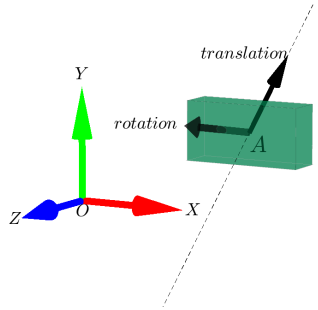
注意：O点的选取并不影响加法和数乘。
请读者自证所有的力都满足线性空间的运算条件

定义——向量空间（vector space）

给定**数域** $\mathbb{F}$ 与**集合** V 可以定义两种运算：
- **加法 +** ：$V \times V \to V$，$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$
- **数乘 ·** ：$\mathbb{F} \times V \to V$，$\forall r \in \mathbb{F}, u \in V \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} \in V$

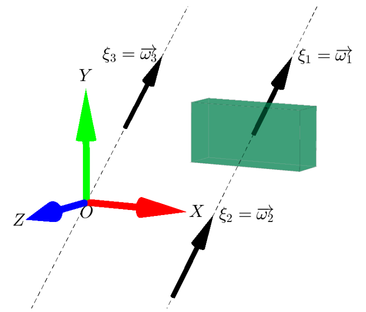
且这两种运算满足以下8条：
- 加法交换律 ：$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
- 加法结合律 ：$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
- 加法单位元 ：$\exists!\ \boldsymbol{0} \in V,\ \boldsymbol{s.t.}\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}, \forall \boldsymbol{u} \in V$
- 加法逆元素 ：$\forall \boldsymbol{u} \in V, \exists! -\boldsymbol{u} \in V,\ \boldsymbol{s.t.}\ \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
- 与数乘相容 ：$a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u}$
- 数乘单位元 ：$\exists! 1 \in \mathbb{F},\ \boldsymbol{s.t.}\ \ 1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}, \forall \boldsymbol{u} \in V$
- 与向量加法相容：$a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{u}$
- 与数域加法相容：$(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$

刚体的线速度与角速度

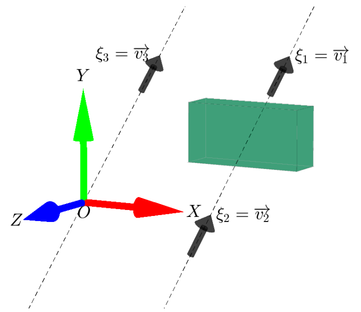


- 刚体的瞬时运动
- 空间中的刚体的瞬时运动ξ，一定可以表示成：
  纯转动 轴线过A点
  包含大小和方向$\vec{\omega}$
  纯平动
  包含大小和方向$\vec{v}$
  $(\vec{v}, \vec{\omega})$同时叠加在刚体上
- 所有的瞬时运动，都可以表达成这种形式！

刚体的线速度与角速度

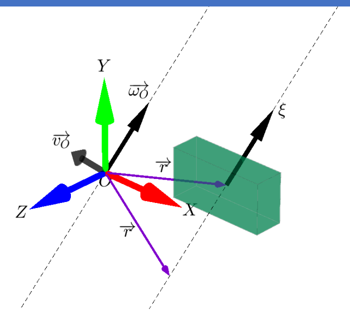


- $\xi_1 = \xi_2 \neq \xi_3$
- 角速度是线矢
- 角速度有大小、方向、作用线

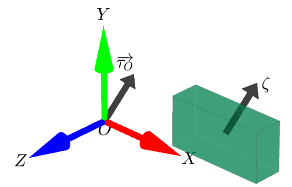


- $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$
- 线速度是三维矢量
- 线速度只有大小、方向

刚体的线速度与角速度



- $\hat{v}_r = [\vec{0}, \vec{\omega}] \to \hat{v}_o = [\vec{v}_O, \vec{\omega_O}] = [\vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{\omega}]$
- $\vec{r}$为 ξ 所在直线上的任意一点



- $\hat{v}_r = [\vec{0}, \vec{v}] \to \hat{v}_o = [\vec{0}, \vec{v_O}]$
- **任何角速度和线速度都可以表达在O点处！**
- 回想：可以用刚体外的坐标系描述刚体运动

刚体的线速度与角速度

运动旋量（twist）

空间中任意形式的线速度、角速度或它们的混合都可以在O点下表达
此时所有的线速度、角速度或它们的混合形成一个线性空间：

$$\mathbb{M}^6 = \mathbb{R}^6$$

瞬时速度的叠加对应线性空间的加法（没有先后顺序）：

$$\xi_1 + \xi_2 = \hat{v}_{1o} + \hat{v}_{2o}$$

瞬时速度的缩放对应线性空间的数乘：

$$\mathrm{n} \cdot \xi = \mathrm{n} \cdot \hat{v}_{1o}$$

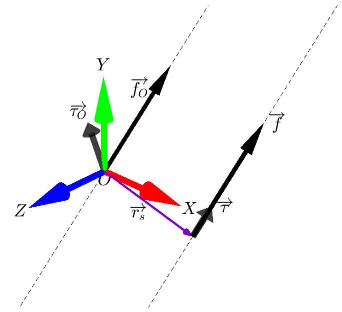
注意：O点的选取并不影响加法和数乘。

定义——向量空间（vector space）

给定**数域** $\mathbb{F}$ 与**集合** V 可以定义两种运算：
- **加法** $+$ **：** $V \times V \to V$，$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$
- **数乘** $\cdot$ **：** $\mathbb{F} \times V \to V$，$\forall r \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u} \in V \Rightarrow \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} \in V$

且这两种运算满足以下8条：
- 加法交换律 ：$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
- 加法结合律 ：$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
- 加法单位元 ：$\exists!\ \boldsymbol{0} \in V,\ s.t.\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}, \forall \boldsymbol{u} \in V$
- 加法逆元素 ：$\forall \boldsymbol{u} \in V, \exists! -\boldsymbol{u} \in V,\ s.t.\ \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
- 与数乘相容 ：$\mathrm{a}(\mathrm{b}\boldsymbol{u}) = (\mathrm{ab})\boldsymbol{u}$
- 数乘单位元 ：$\exists! 1 \in \mathbb{F},\ s.t.\ \ 1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}, \forall \boldsymbol{u} \in V$
- 与向量加法相容：$\mathrm{a}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathrm{a}\boldsymbol{u} + \mathrm{a}\boldsymbol{v}$
- 与数域加法相容：$(\mathrm{a} + \mathrm{b})\boldsymbol{u} = \mathrm{a}\boldsymbol{u} + \mathrm{b}\boldsymbol{u}$

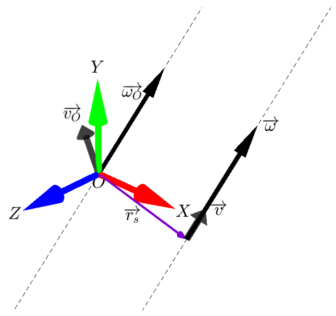
螺旋



当$\|\vec{f}_O\| \neq 0$时：
- 对于O点处的任意力和力偶$\hat{f}_o = [\vec{f}_O, \vec{\tau_O}]$，可以找到一个最短的$\vec{r_s}$,使得$\hat{f} = [\vec{f}_O, h\vec{f}_O]$
- $\vec{r_s} = \frac{\vec{f}_O \times \vec{\tau}_O}{\vec{f}_O \cdot \vec{f}_O}$
- $h = \frac{\vec{f}_O \cdot \vec{\tau}_O}{\vec{f}_O \cdot \vec{f}_O}$
- h称为**螺距（pitch）**

当$\|\vec{f}_O\| = 0$时：
- $h = \infty$

螺旋



当$\|\vec{\omega}_O\| \neq 0$时：

- 对于O点处的任意速度旋量$\hat{v}_o = [\vec{v}_O, \overrightarrow{\omega_O}]$，可以找到一个最短的$\vec{r}_s$,使得$\hat{v} = [h\vec{\omega}_O, \vec{\omega}_O]$
- $\vec{r}_s = \frac{\vec{\omega}_O \times \vec{v}_O}{\vec{\omega}_O \cdot \vec{\omega}_O}$
- $h = \frac{\vec{\omega}_O \cdot \vec{v}_O}{\vec{\omega}_O \cdot \vec{\omega}_O}$
- h称为**螺距（pitch）**

当$\|\vec{\omega}_O\| = 0$时：

- $h = \infty$

螺旋

- 在几何中，任何一条直线 l，以及螺距 h，可以组成一个**螺旋(screw)**
- 刚体的瞬时运动为**速度螺旋(twist)**，所受的外力为**力螺旋(wrench)**
- **单位速度螺旋（unit twist）**：$\|\vec{\omega}\| = 1$ 或$\|\vec{\omega}\| = 0, \|\vec{v}\| = 1$的速度螺旋 ξ
- **单位力矩螺旋（unit wrench）**：$\|\vec{f}\| = 1$或$\|\vec{f}\| = 0, \|\vec{\tau}\| = 1$力螺旋 ζ
- 纯力偶/线速度等无轴线的矢量是螺距无穷大的螺旋， $h = \infty$
- 当螺距$h = 0$，速度螺旋是**纯转动，**力螺旋是**纯力**
- 速度螺旋和力螺旋可以在给定点处，用六维的线性空间表示
- 几何意义上的螺旋，并非一个线性空间（反例：位置螺旋）

螺旋

练习：

1. 已知单位速度螺旋螺距$h = 1$，所在直线 l 经过(1,0,0)和(0,0,1)点，求该螺旋的六维向量表达。
2. 请求出上述刚体在(2,1,1)点处的线速度。
3. 请求出力矩螺旋$\hat{f} = (\vec{f}, \vec{\tau}) = (-1,1,0 \mid -2,0,2)$所在的直线 l 以及螺距 h

螺旋与线性空间

线性组合（Linear combination）是线性代数中具有如下形式的表达式。其中$\vec{v}_i$ 为任意类型的项，a_i为标量:

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

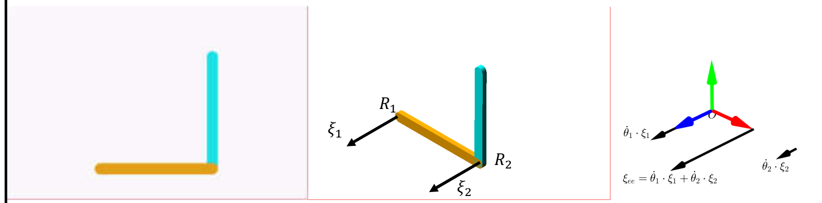
线性生成空间（Linear span）
$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的子集合。
所有 S 的有限线性组合构成的集合，称为 S 所生成的空间，记作 span(S)。

线性相关（Linear dependence）
如果存在不全为零的$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$，使得$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = 0$，那么就称$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$是线性相关的

性质：
n 个向量生成空间的维数不大于 n，等于 n 当且仅当这些向量线性无关。

螺旋与线性空间

速度螺旋示例——RR机构



ξ_1为R1 的单位速度螺旋
ξ_2为R2 的单位速度螺旋
在O坐标系下，螺旋表达如下：

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\dot{\theta}_1 = 1.0$ 为R1 的转动速度（标量）
$\dot{\theta}_2 = 0.2$ 为R2 的转动速度
末端的速度螺旋是前两者的线性组合：

$$\hat{v}_{\mathrm{ee}} = \dot{\theta}_1 \hat{v}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ \\ \\ \\ \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

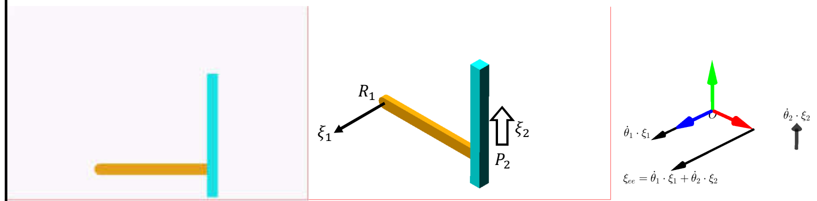
写成雅可比形式：

$$\hat{v}_{\mathrm{ee}} = [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2]_{6\times 2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J_{6\times 2}\, \dot{\vec{\theta}}$$

注意：以上仅仅分析了0时刻的瞬时运动

螺旋与线性空间

速度螺旋示例——RP机构



ξ_1为R1 的单位速度螺旋
ξ_2为P2 的单位速度螺旋
在O坐标系下，螺旋表达如下：

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$\dot{\theta}_1 = 1.2$ 为R1 的转动速度（标量）
$\dot{\theta}_2 = -0.2$ 为P2 的移动速度
末端的速度螺旋是前两者的线性表达：

$$\hat{v}_{\mathrm{ee}} = \dot{\theta}_1 \hat{v}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ \\ \\ \\ \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

RR机构和RP机构可以实现同样的运动。

这个"同样"**仅仅只存在于0时刻**

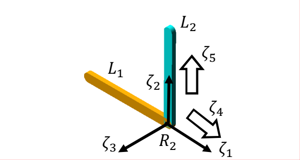
在其他时刻，R1的运动会改变后面关节的单位速度螺旋

速度螺旋仅仅代表**瞬时运动**

螺旋与线性空间

力螺旋示例——运动副的约束力

R2处的坐标为（1，0，0）



R副的约束力为5维子空间，在O坐标系下的表达：

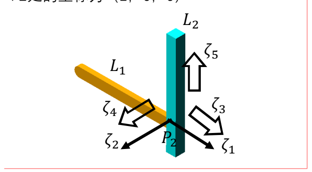
$$[\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & -1 & & 1 \\ & 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}_R \in \mathrm{span}(\{\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5\})$$

可以取广义的五维约束力坐标 η 使得：

$$\hat{f}_R = [\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] \cdot \eta$$

P2处的坐标为（1，0，0）



P副的约束力为5维，在O坐标系下的表达：

$$[\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & -1 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}_P \in \mathrm{span}(\{\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5\})$$

请注意：约束力的基的选择不是唯一的！

螺旋与线性空间

子空间（sub-space）：如果W是V的一个子空间，那么必然有：

（1） $W \subseteq V$

（2） W依然满足V中定义的加法和数乘

如果不考虑关节的转速限制，串联机器人的末端速度螺旋，在各个关节速度螺旋张成的子空间中。

线性空间的基（basis of vector space）：$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ 是线性空间 V 的一组基，那么：

（1） $\forall\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

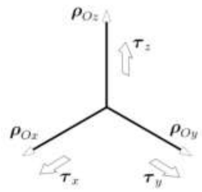
（2） $\forall \vec{v} \in V, \exists!\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{v}$

螺旋与线性空间

Plücker基（Plücker bases）：

- 三个绕着坐标轴的单位旋转（ $h=0$ ）
- 三个沿着坐标轴方向的单位移动（$h=\infty$）

$$\{\boldsymbol{\rho}_{Ox},\boldsymbol{\rho}_{Oy},\boldsymbol{\rho}_{Oz},\boldsymbol{\tau}_x,\boldsymbol{\tau}_y,\boldsymbol{\tau}_z\}$$
$$\boldsymbol{\xi}=(\vec{\boldsymbol{\omega}},\vec{\boldsymbol{v}}_O)=(\omega_x\vec{\boldsymbol{i}}+\omega_y\vec{\boldsymbol{j}}+\omega_z\vec{\boldsymbol{k}},v_{Ox}\vec{\boldsymbol{i}}+v_{Oy}\vec{\boldsymbol{j}}+v_{Oz}\vec{\boldsymbol{k}})$$
$$=\omega_x\boldsymbol{\rho}_{Ox}+\omega_y\boldsymbol{\rho}_{Oy}+\omega_z\boldsymbol{\rho}_{Oz}+v_{Ox}\boldsymbol{\tau}_x+v_{Oy}\boldsymbol{\tau}_y+v_{Oz}\boldsymbol{\tau}_z\}$$



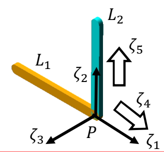
- 三个沿着坐标轴的单位力（ $h=0$ ）
- 三个沿着坐标轴方向的单位力偶（$h=\infty$）

$$\{\boldsymbol{\varphi}_{Ox},\boldsymbol{\varphi}_{Oy},\boldsymbol{\varphi}_{Oz},\boldsymbol{\mu}_x,\boldsymbol{\mu}_y,\boldsymbol{\mu}_z\}$$
$$\boldsymbol{\zeta}=(\vec{\boldsymbol{f}},\vec{\boldsymbol{m}}_O)=(f_x\vec{\boldsymbol{i}}+f_y\vec{\boldsymbol{j}}+f_z\vec{\boldsymbol{k}},m_{Ox}\vec{\boldsymbol{i}}+m_{Oy}\vec{\boldsymbol{j}}+m_{Oz}\vec{\boldsymbol{k}})$$
$$=f_x\boldsymbol{\varphi}_{Ox}+f_y\boldsymbol{\varphi}_{Oy}+f_z\boldsymbol{\varphi}_{Oz}+m_x\boldsymbol{\mu}_x+m_y\boldsymbol{\mu}_y+m_z\boldsymbol{\mu}_z\}$$

螺旋与线性空间

换一个坐标系来表达转动关节

P坐标系相对L1固定

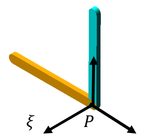


定义固定在L_1上的坐标系P，让R副的转轴为它的z轴
此时约束力空间的基

$$[\hat{f}_1\ \ \dots\ \ \hat{f}_5]=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\\&&&&\end{bmatrix}$$

是Plücker基的一个子集。

P坐标系相对L1固定



此时速度螺旋空间的基：

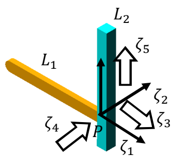
$$\hat{v}_1=\begin{bmatrix}\\\\\\\\\\1\end{bmatrix}$$

也是Plücker基的一个子集。
注意：不是所有的运动副都是1维的，例如S副的速度螺旋空间为3维，约束力空间是3维

螺旋与线性空间

换一个坐标系来表达移动关节

P坐标系相对L1固定

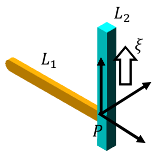


定义固定在L_1上的坐标系P，让P副的方向为它的z轴
此时约束力空间的基

$$[\hat{f}_1\ \ \dots\ \ \hat{f}_5]=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{bmatrix}$$

是Plücker基的一个子集。

P坐标系相对L1固定



此时速度螺旋空间的基：

$$\hat{v}_1=\begin{bmatrix}\\\\1\\\\\\\end{bmatrix}$$

也是Plücker基的一个子集。

螺旋系

螺旋系（Screw systems）

Gibson-Hunt 分类方法（The Gibson-Hunt Classification）

螺旋系统可以按照以下方式分类

- 2 or 3，维度（dimension）
- I or II，是否包含超过一个有限螺距的螺旋
- A…D，包含0…3个无穷螺距的螺旋
- Angle，pitch 等其他螺旋的参数

螺旋系

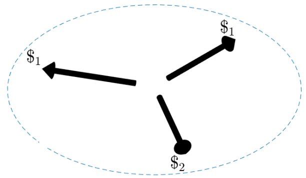
1-systems

1-$\$_0$-system

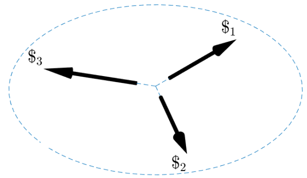
1-$\$_\infty$-system

螺旋系

2-systems



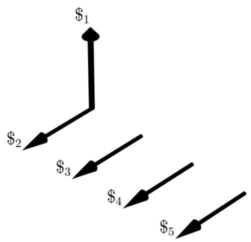
2-$\$_\infty$-system



2-$\$_0$-system

螺旋系

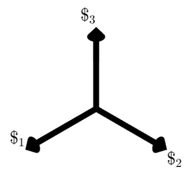
2-systems



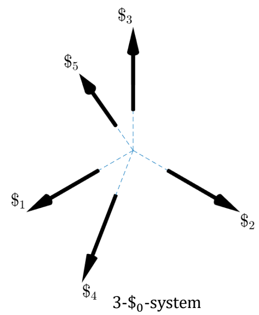
1-$\$_\infty$-1-$\$_0$-system

螺旋系

3-systems



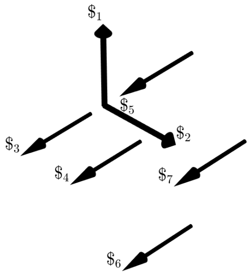
3-$\$_\infty$-system



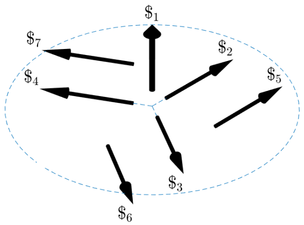
3-$\$_0$-system

螺旋系

3-systems



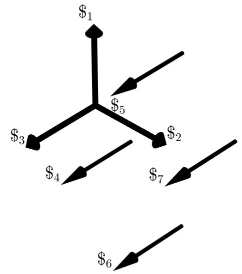
2-$\$_\infty$-1-$\$_0$-system



1-$\$_\infty$-2-$\$_0$-system

螺旋系

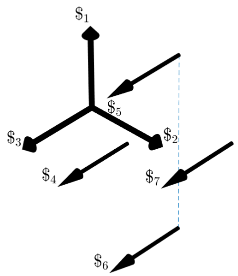
4-systems



3-$\$_\infty$-1-$\$_0$-system

螺旋系

练习：请找出下面4-系统的一组基



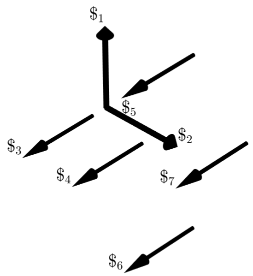
可能的基：

- $\$_1$、$\$_2$、$\$_3$、$\$_4$（3个$\$_\infty$和1个$\$_0$）
- $\$_1$、$\$_3$、$\$_5$、$\$_6$（2个$\$_\infty$和2个$\$_0$）
- $\$_3$、$\$_4$、$\$_5$、$\$_7$（1个$\$_\infty$和3个$\$_0$）
- ……

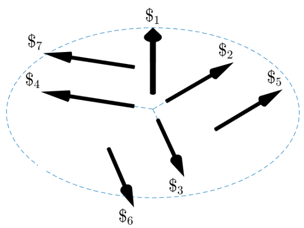
螺旋系

练习：

- 请找出平面运动中的速度螺旋的一组基
- 请找出平面运动中的约束力的一组基



平面运动：2-$\$_\infty$-1-$\$_0$-system

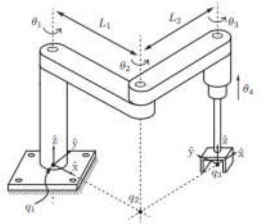


平面力：1-$\$_\infty$-2-$\$_0$-system

螺旋

练习：

1. 请找出下图中scala机器人的运动螺旋系。
2. 请分析，该机构什么时候处于奇异点。



内积空间与对偶空间

定义——内积空间（Inner product space）

给定**数域** $\mathbb{F}$ 上的向量空间 V 可以定义以下运算：

- **内积** $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{F}$

且运算满足以下性质：

- $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$
- $\langle a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = a\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle$
- $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$
- $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

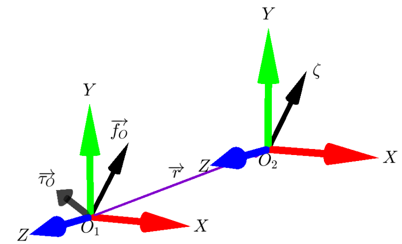
一般来说，内积定义为所有元素依次相乘后的和

内积空间自带范数$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}$

内积一个重要意义就是衡量大小和角度

那么，速度与力螺旋空间是内积空间吗？

不是！因为力乘力，或速度乘速度，没有意义！



$\vec{r} = (2,0.8,0.5)$

$\hat{f}_{O2} = (0.1,0.6,-0.5,0,0,0)$

$\hat{f}_{O1} = (0.1,0.6,-0.5,-0.7,1.05,1.12)$

$1.8620 = \|\hat{f}_{O1}\| \neq \|\hat{f}_{O2}\| = 0.7874$

同一个元素，在不同坐标系下，内积不相等！

内积空间与对偶空间

定义——双对偶空间（double dual space）

给定**数域** $\mathbb{F}$ 上的n维向量空间 V，可以定义n维空间V^*，以及他们之间的运算：

- **对偶积** $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle: V^* \times V \to \mathbb{F}$，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle: V \times V^* \to \mathbb{F}$，两者一样

且运算满足以下性质：

- $\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}\rangle$
- $\langle a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$

乘积是非退化的：

- $\forall\, \boldsymbol{u} \in V,\ \exists \boldsymbol{v} \in V^*\ \ s.t.\ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \neq 0$

性质：

对于V中的一组基$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$，在V^*中存在唯一的另一组基$\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$，使得：$e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij}$

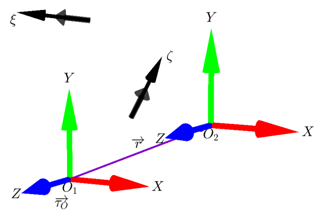
其中δ_{ij}为定义好的n维矩阵中的元素

力螺旋空间$\mathbb{F}^6$和速度螺旋$\mathbb{M}^6$空间，构成双对偶空间，其中：

$$\langle \zeta, \xi\rangle = \hat{f}_O \cdot \hat{v}_O = \vec{f}_O \cdot \vec{v}_O + \vec{\tau}_O \cdot \vec{\omega}_O$$

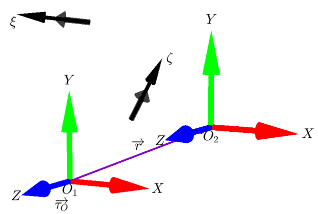
这个乘积代表了力螺旋对刚体做功的**功率**

注意，这个乘积和坐标系的选择无关！



内积空间与对偶空间

证明：对偶积不随坐标系的选择而变化



$$\vec{r} = [r_1, r_2, r_3]^T$$

$$\vec{r}\times = \begin{bmatrix} & -r_3 & r_2 \\ r_3 & & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & \end{bmatrix}$$

$\vec{r}\times$是反对称矩阵

已知O_2到O_1的距离为$\vec{r}$

ξ 和ζ 在O_2坐标系下的表达为：

$$\hat{f}_{O2} = [\vec{f}, \vec{\tau}]$$

$$\hat{v}_{O2} = [\vec{v}, \vec{\omega}]$$

ξ 和ζ 在O_1坐标系下的表达为：

$$\hat{f}_{O1} = [\vec{f}, \vec{\tau} + \vec{r} \times \vec{f}]$$

$$\hat{v}_{O1} = [\vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{\omega}]$$

于是

$$\hat{f}_{O1} \cdot \hat{v}_{O1} = \vec{f}^T\vec{v} + \vec{f}^T(\vec{r} \times \vec{\omega}) + \vec{\tau}^T\vec{\omega} + \left(\vec{r} \times \vec{f}\right)^T\vec{\omega}$$

$$= \hat{f}_{O2} \cdot \hat{v}_{O2} + \vec{f}^T\vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{f}^T(\vec{r}\,\times)^T\vec{\omega}$$

$$= \hat{f}_{O2} \cdot \hat{v}_{O2} + \vec{f}^T\vec{r} \times \vec{\omega} - \vec{f}^T\vec{r} \times \vec{\omega}$$

$$= \hat{f}_{O2} \cdot \hat{v}_{O2}$$

对偶积不随坐标系的选择而变化！

内积空间与对偶空间

定义：若对偶空间中的两个非零向量的对偶积为0，那么说这两个向量是**垂直**的（orthogonal or reciprocal）

定义：零化子空间（orthogonal annihilator）

V和V^*互为对偶空间U是V的一个子空间，那么：

$$U^{\perp} = \{v \in V^* | u \cdot v = 0, \forall u \in U\}$$

是U的零化子空间。

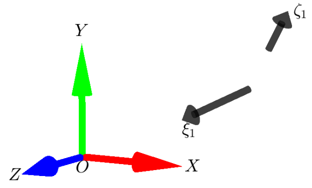
$U^{\perp}$是子空间！（why？）

若twist的子空间$U \subseteq M^6$，那么$U^{\perp} \subseteq F^6$，且$\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = 6$

此时$U^{\perp}$表示对U不做功的力的空间。

内积空间与对偶空间

纯力偶和纯平动的垂直条件



$$\hat{f} = \begin{bmatrix}\vec{0}\\ \vec{\tau}\end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix}\vec{v}\\ \vec{0}\end{bmatrix}$$

$$\hat{f} \cdot \hat{v} \equiv 0$$

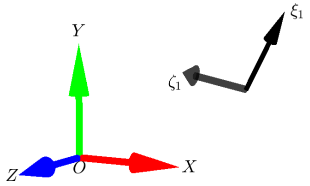
$$\hat{f}_O \cdot \hat{v}_O$$

纯力偶和纯平动永远垂直

示例:
移动副的约束力可以为任意力偶

内积空间与对偶空间

纯力偶和纯转动的垂直条件



$$\hat{f} = \begin{bmatrix}\vec{0}\\ \vec{\tau}\end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix}\vec{r} \times \vec{\omega}\\ \vec{\omega}\end{bmatrix}$$

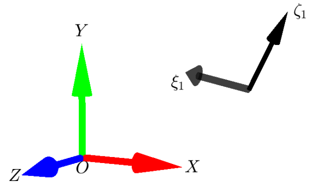
$$\hat{f} \cdot \hat{v} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

若纯力偶和纯转动的方向垂直，那么这两个向量垂直

示例:
转动副的约束力偶垂直与转动方向

内积空间与对偶空间

纯力和纯平动的垂直条件



$$\hat{f} = \begin{bmatrix}\vec{f}\\ \vec{\tau}\end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix}\vec{v}\\ \vec{0}\end{bmatrix}$$

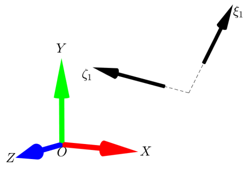
$$\hat{f} \cdot \hat{v} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

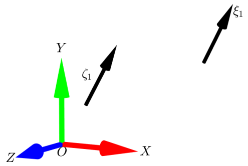
若纯力和纯平动的方向垂直，那么这两个向量垂直

示例:
移动副的约束力（纯力）垂直于移动方向

内积空间与对偶空间

纯力和纯转动的垂直条件





$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{f}} \\ \vec{r}_1 \times \vec{f} \end{bmatrix}$$

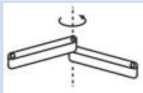
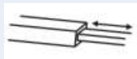
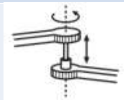
$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \times \vec{\omega} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{f} \cdot \hat{v} &= \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{f}) \\ &= \vec{f}^T \vec{r}_2 \times \vec{\omega} - \vec{f}^T \vec{r}_1 \times \vec{\omega} \\ &= -\vec{f}^T \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{f}^T \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \\ &= -\vec{f}^T \vec{\omega} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

纯力和纯转动的垂直条件:
1，轴线有交点
或
2，方向相同

示例:
转动副的约束力（纯力）过转轴或跟转轴平行

内积空间与对偶空间

运动副	约束力（wrenches）	运动(twists)
转动副 	$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$
移动副 	$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$
球副 	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$
圆柱副 	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} & \\ & \\ 1 & \\ & \\ & \\ & 1 \end{bmatrix}$

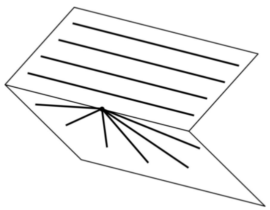
内积空间与对偶空间

运动和力垂直的条件

运动	力	不做功条件
纯平动	纯力偶	永不做功
纯平动	纯力	方向垂直
纯转动	纯力偶	方向垂直
纯转动	纯力	1.轴线有交点 2.轴线平行

练习：

1. 请求出平面运动的零化子空间。
2. 请求出右侧运动螺旋的零化子空间。



小结

- 刚体无穷大，力可以施加到任何位置，运动可表达在任何位置
- 速度螺旋和力螺旋是空间中的六维旋量
- 旋量是客观存在的实体，包括轴线、螺距等，但是可以在不同坐标系之间迁移
- 速度螺旋和力螺旋各自是6维的不含内积的线性空间，且彼此为对偶空间
- 任何运动副，可以用一组运动螺旋表示运动，力螺旋表示约束力，且它们互为零化子空间
- 可以通过选择坐标系，用Plücker基较为简化的表示运动副
- 螺旋系统是分析和设计机构有力的工具