第二讲 15 页

练习：

1. 已知单位速度螺旋螺距$h=1$，所在直线 l 经过(1,0,0)和(0,0,1)点，求该螺旋的六维向量表达。
2. 请求出上述刚体在(2,1,1)点处的线速度。
3. 请求出力矩螺旋$\hat{f}=(\vec{f},\vec{\tau})=(-1,1,0 \mid -2,0,2)$所在的直线 l 以及螺距 h

答案：

1.

直线的方向为

$$\vec{p}=[1 \quad 0 \quad 0]^T-[0 \quad 0 \quad 1]^T=[1 \quad 0 \quad -1]^T$$

角速度为它的单位向量：

$$\vec{\omega}=\frac{[1 \quad 0 \quad -1]^T}{\sqrt{2}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$$

线速度部分为：

$$\vec{v}=h\cdot\vec{\omega}+\vec{r}\times\vec{\omega}=1\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T+\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$$

写成螺旋：

$$\hat{v}=[\vec{v} \quad \vec{\omega}]^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

2.

点速度为：

$$\dot{\vec{r}}=\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T+\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=[\sqrt{2} \quad -\sqrt{2} \quad \quad]^T$$

3.

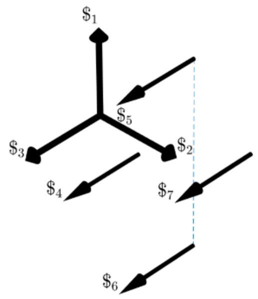
$$\vec{r_s}=\frac{\vec{f}\times\vec{\tau}}{\vec{f}\cdot\vec{f}}=[1 \quad 1 \quad 1]^T$$

直线过该点，且直线的方向就是$\vec{f}$的方向，因此直线上的点可以表示为：

$$\vec{l}=\mathrm{k}\vec{f}+\vec{r_s}$$

第二讲 31 页

练习：请找出下面 4-系统的一组基



答案：

可能的基：

3 个$\$_\infty$和 1 个$\$_0$：$[\$_1,\$_2,\$_3,\$_4]$，$[\$_1,\$_2,\$_3,\$_5]$，$[\$_1,\$_2,\$_3,\$_6]$，$[\$_1,\$_2,\$_3,\$_7]$

2 个$\$_\infty$和 2 个$\$_0$：$[\$_1,\$_3,\$_5,\$_6]$……

2 个$\$_\infty$里必须包含$\$_3$，两个$\$_0$组成的平面不能垂直于所选的$\$_\infty$

例如，$[\$_1,\$_2,\$_5,\$_6]$就不是一组基，因为$\$_5,\$_6$组成的平面垂直于$\$_2$

1 个$\$_\infty$和 3 个$\$_0$：

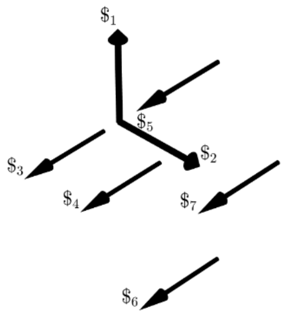
$[\$_3,\$_4,\$_5,\$_6]$，$[\$_3,\$_5,\$_6,\$_7]$，$[\$_3,\$_4,\$_5,\$_7]$，$[\$_3,\$_4,\$_6,\$_7]$

第二讲 32 页

练习：

- 请找出平面运动中的速度螺旋的一组基
- 请找出平面运动中的约束力的一组基

答案：



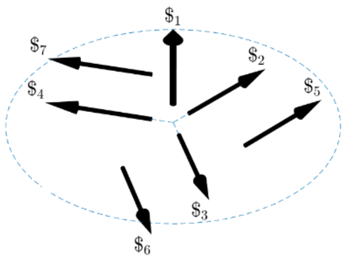
平面运动：2-$\$_\infty$-1-$\$_0$-system

平面运动螺旋系如上所示，以下为基的部分选择：

2 个$\$_\infty$和 1 个$\$_0$：[$\$_1$,$\$_2$,$\$_3$]

1 个$\$_\infty$和 2 个$\$_0$：[$\$_2$,$\$_3$,$\$_4$]

0 个$\$_\infty$和 3 个$\$_0$：[$\$_3$,$\$_4$,$\$_5$]



平面力：1-$\$_\infty$-2-$\$_0$-system

平面运动的约束螺旋系如上所示，以下为基的部分选择：

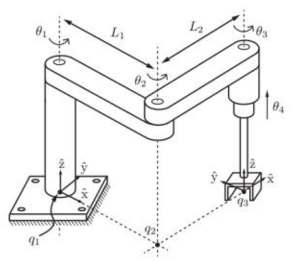
1 个$\$_\infty$和 2 个$\$_0$：[$\$_1$,$\$_2$,$\$_3$]

0 个$\$_\infty$和 3 个$\$_0$：[$\$_2$,$\$_3$,$\$_5$]

第二讲 33 页

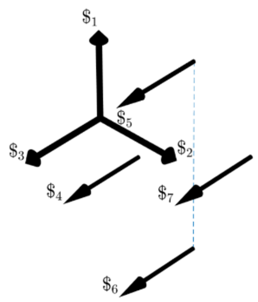
练习：

1. 请找出下图中 scala 机器人的运动螺旋系。
2. 请分析，该机构什么时候处于奇异点。



答案：

scala 机器人的运动螺旋系为：



它是 4 系统，可以用上题中的基来表达

当它 3 根转动轴共面时，机构奇异

第二讲 43 页

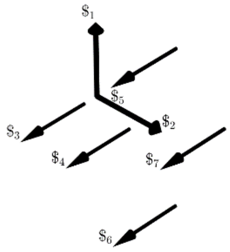
练习：

1. 请求出平面运动的零化子空间。
2. 请求出右侧运动螺旋的零化子空间。

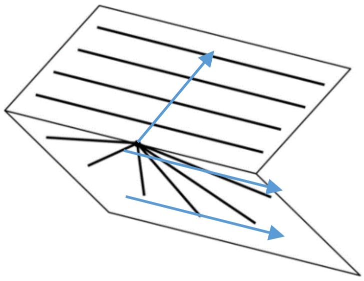
答案：

1.

平面运动的零化子空间为以下系统，这些力螺旋对平面运动不做功



2.



图中所示的 3 个纯力即为该运动的零化子空间，注意，可以用其他基来表示该空间。

第三讲 8 页
练习：
已知坐标系 A 相对坐标系 O 延 X 轴旋转了 30 度，同时 A 的原点相对 O 坐标系的坐标为 (1,1,0)，某个 R 副使用 A 坐标系来定义，请求出：

1. R 副产生的速度螺旋
2. R 副的约束力空间

若该刚体 A 相对地面以 ${}^{O}\hat{v}_A = (-1,1,0 \mid -2,0,2)$的速度运动，该 R 副以 1.5rad/s 转动，请求出 R 副所连接的刚体 B 的速度螺旋。

答案：
A 坐标系的位姿矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & c & -s & 1 \\ & s & c & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

速度和力螺旋转换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \times R \\ & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & s & c \\ & c & -s & & -s & -c \\ & s & c & -1 & c & -s \\ & & & 1 & & \\ & & & & c & -s \\ & & & & s & c \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} R & \\ \vec{p} \times R & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & c & -s & & & \\ & s & c & & & \\ & s & c & 1 & & \\ & -s & -c & & c & -s \\ -1 & c & -s & & s & c \end{bmatrix}$$

R 副的速度螺旋为：

$$\hat{v} = T[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T = [c \quad -c \quad -s \quad 0 \quad -s \quad c]^T$$

R 副的约束螺旋为：

$$[\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = T^* \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & c & -s & & \\ & s & c & & \\ & s & c & 1 & \\ & -s & -c & & c \\ -1 & c & -s & & s \end{bmatrix}$$

$${}^{O}\hat{v}_B = {}^{O}\hat{v}_A + 1.5 \cdot \hat{v} = [-1 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 2]^T + 1.5[c \quad -c \quad -s \quad 0 \quad -s \quad c]^T$$

以上，$c = \cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$s = \sin(30) = \frac{1}{2}$

第三讲 14 页

练习：

1. 请给出在指定速度螺旋$\hat{v} = (\vec{v}, \vec{\omega})$下，刚体上某位姿矩阵$P = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$的导数。
2. 若$\hat{v} = (\vec{v}, \vec{\omega}) = (-1,1,0 \mid -2,0,2)$，请求出上述刚体在$(2,1,1)$点处的线速度。

答案：

1.

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\vec{p}} \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times R & \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{p} \\ & \end{bmatrix}$$

2.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} = [-3,7,-2]^{\mathrm{T}}$$

第三讲 17 页

练习：

1. 若某位姿矩阵$P = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$，以速度$\hat{v} = (\vec{v}, \vec{\omega})$恒速运动，请求出该坐标系在 2s 后的位姿矩阵。

答案：

旋转的角度为：$2|\vec{\omega}|$

单位螺旋为：$\frac{\hat{v}}{|\vec{\omega}|}$

于是，根据指数映射，该螺旋产生的位姿矩阵为：

$$P_e = \begin{bmatrix} E + \sin(2|\vec{\omega}|) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \times + (1 - \cos(2|\vec{\omega}|)) \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \times \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \times & (E - R) \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \times \frac{\vec{v}}{|\vec{\omega}|} \times + 2|\vec{\omega}| (\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{\omega}|}) \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

于是两秒后的位姿矩阵为：

$$P_t = P_e \cdot P$$

第四讲 8 页

练习：

已知在地面坐标系 O 中，A 坐标系的位姿矩阵 ${}^{O}P_{A}$，螺旋速度 ${}^{O}\hat{v}_{A}$，螺旋加速度 ${}^{O}\hat{a}_{A}$，现在已知 B 在 A 坐标系下的螺旋速度为 ${}^{A}\hat{v}_{B}$，请求出：

1. B 在 O 坐标系下的速度
2. 若 B 在 A 中的螺旋速度不变，请求出 B 在 O 中的螺旋加速度
3. 若 B 在 A 中的螺旋加速度为 ${}^{A}\hat{a}_{B}$，请求出 B 在 O 中的螺旋加速度

答案：

1.

$$ {}^{O}\hat{v}_{B} = {}^{O}\hat{v}_{A} + {}^{O}T_{A} \cdot {}^{O}\hat{v}_{A} $$

2.

$$ {}^{O}\hat{a}_{B} = {}^{O}\hat{a}_{A} + {}^{O}\hat{v}_{A} \times {}^{O}T_{A} \cdot {}^{O}\hat{v}_{A} $$

3.

$$ {}^{O}\hat{a}_{B} = {}^{O}\hat{a}_{A} + {}^{O}\hat{v}_{A} \times {}^{O}T_{A} \cdot {}^{O}\hat{v}_{A} + {}^{O}T_{A} \cdot {}^{O}\hat{a}_{A} $$

第四讲 14 页

练习：

已知在地面坐标系 O 中，A 坐标系的位姿矩阵位于原点，且以速度$(-1,1,0\,|\,-2,0,2)$运动，请求出：

1. A 所定义的转动副的约束力的导数
2. A 所定义的移动副的约束力的导数

答案：

1.A 所定义的转动副的约束矩阵为：

$$C=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

叉乘矩阵为：

$$\hat{v}\times^{*}=\begin{bmatrix} \vec{\omega}\times & \vec{v}\times \\ & \vec{\omega}\times \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & -2 & & & & \\ 2 & & 2 & & & \\ & -2 & & & & \\ & & 1 & & -2 & \\ & & 1 & 2 & & 2 \\ -1 & -1 & & & -2 & \end{bmatrix}$$

于是约束矩阵导数为：

$$\dot{C}=\begin{bmatrix} & -2 & & & \\ 2 & & 2 & & \\ & -2 & & & \\ & & 1 & & -2 \\ & & 1 & 2 & \\ -1 & -1 & & & -2 \end{bmatrix}$$

2. 约束矩阵导数为：

$$\dot{C}=\begin{bmatrix} & -2 & & & \\ 2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & & -2 & \\ & & 2 & & 2 \\ -1 & -1 & & -2 & \end{bmatrix}$$

第四讲 23 页
练习：
已知某刚体的质心位于$(1,0,0)$处，质量为 4kg，在质心坐标系下惯量矩阵为单位阵，且质心坐标系方向与 O 坐标系重合，请求出：

1. 该刚体在 O 点的惯量矩阵
2. 若刚体以速度$(-1,1,0 \mid -2,0,2)$运动，请求出该惯量矩阵的微分形式。

答案：
1.
质心坐标系的位姿矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1&&&1\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

因此力螺旋转换矩阵为：

$$T^*=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&-1&&1&\\&1&&&&1\end{bmatrix}$$

质心坐标系下的惯量矩阵为：

$$I_c=\begin{bmatrix}4&&&&&\\&4&&&&\\&&4&&&\\&&&1&&\\&&&&1&\\&&&&&1\end{bmatrix}$$

因此惯量为：

$$I_O=T^*I_c(T^*)^T=\begin{bmatrix}4&&&&&\\&4&&&&4\\&&4&&-4&\\&&&1&&\\&&-4&&5&\\&4&&&&5\end{bmatrix}$$

2.

$$\dot{I}_O=\hat{v}\times^* I_O-I_O\hat{v}\times=\begin{bmatrix}&&&&&-12\\&&&&&-4\\&&&12&4&-16\\&&12&&-12&\\&&4&-12&-8&\\-12&-4&&&&-8\end{bmatrix}$$