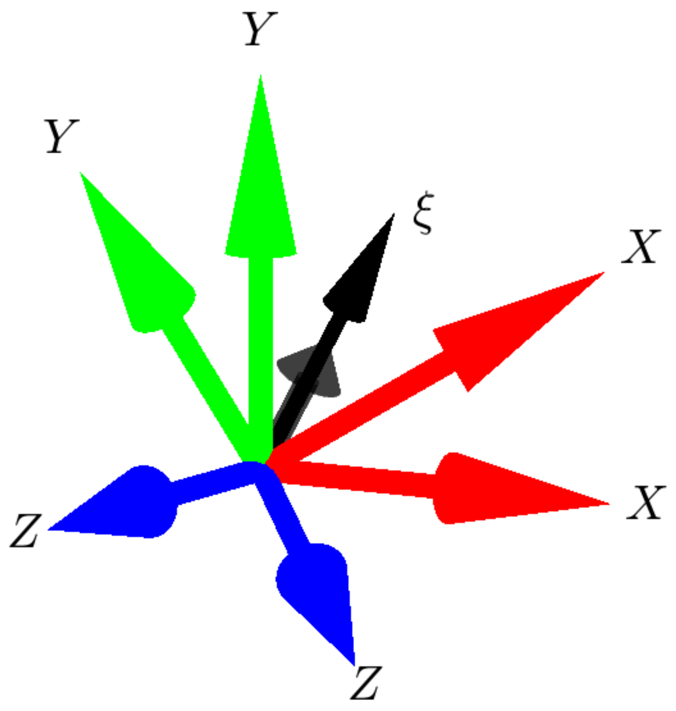
第三讲
速度螺旋与运动学

潘阳 博士

上海交通大学

螺旋的坐标系转换

纯转动坐标系之间的速度旋量的转换



坐标系A到O的位姿矩阵为：

$$^{O}P_A = \begin{bmatrix} R & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

此时，对于某个速度螺旋ξ，它在坐标系A下的表达为：

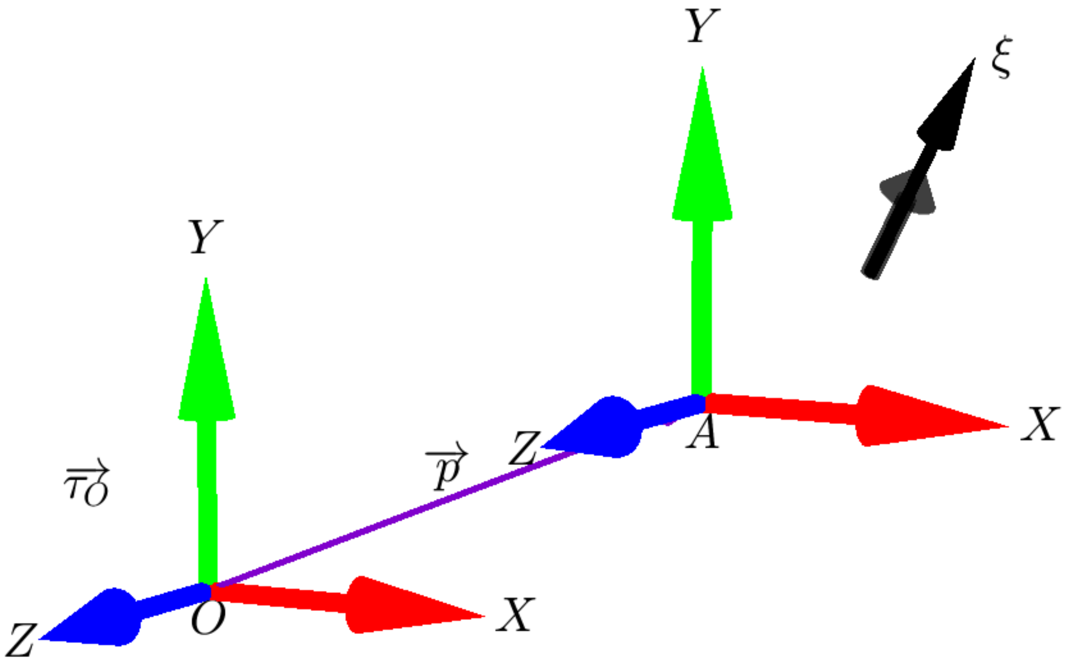
$$\hat{v}_A = [\vec{v}, \vec{\omega}]$$

因为A和O的原点重合，所以在O坐标系下，有：

$$\hat{v}_O = [R\vec{v}, R\vec{\omega}] = \begin{bmatrix} R & \\ & R \end{bmatrix} \hat{v}_A$$

螺旋的坐标系转换

纯平动坐标系之间的转换



坐标系A到O的位姿矩阵为：

$$^{O}P_A = \begin{bmatrix} E & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

此时，对于某个速度螺旋ξ，它在坐标系A下的表达为：

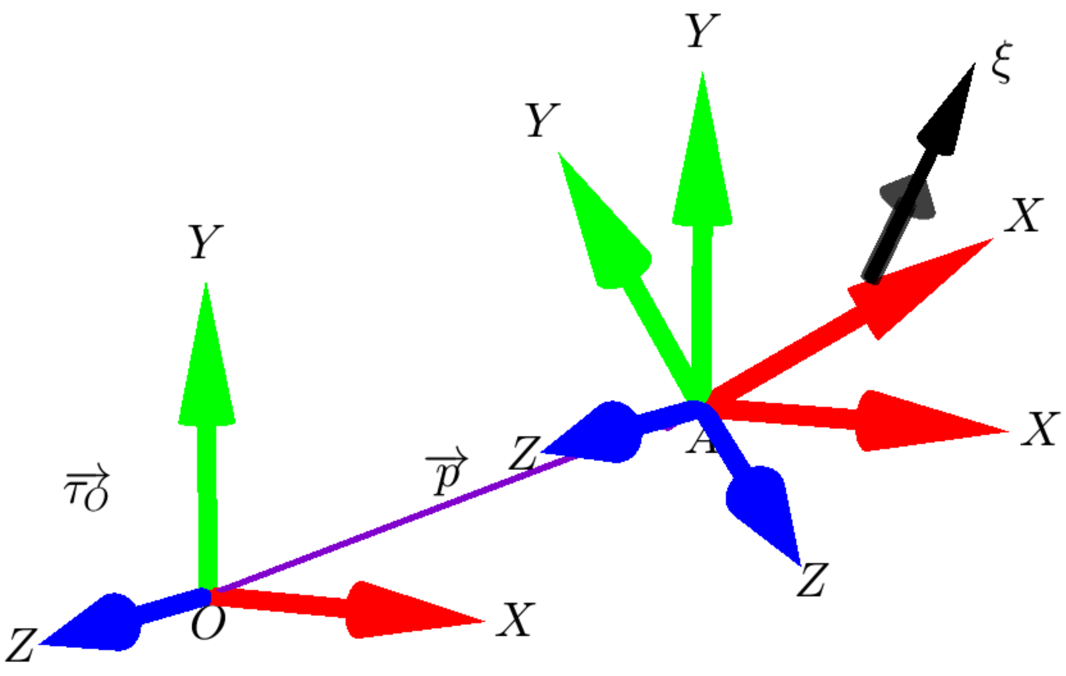
$$\hat{v}_A = [\vec{v}, \vec{\omega}]$$

此时根据螺旋转换的定理：

$$\hat{v}_O = [\vec{v} + \vec{p} \times \vec{\omega}, \vec{\omega}] = \begin{bmatrix} E & \vec{p} \times \\ & E \end{bmatrix} \hat{v}_A$$

螺旋的坐标系转换

任意运动的坐标系之间的转换



坐标系A到O的位姿矩阵为：

$$^{O}P_A = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

速度螺旋ξ 在坐标系A下的表达为：

$$\hat{v}_A = [\vec{v}, \vec{\omega}]$$

可以构造一个跟A原点重合，跟O方向一致的坐标系B

于是：

$$\hat{v}_B = \begin{bmatrix} R & \\ & R \end{bmatrix} \hat{v}_A$$

进一步的：

$$\hat{v}_O = \begin{bmatrix} E & \vec{p}\times \\ & E \end{bmatrix} \hat{v}_B = \begin{bmatrix} E & \vec{p}\times \\ & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \\ & R \end{bmatrix} \hat{v}_A = \begin{bmatrix} R & \vec{p}\times R \\ & R \end{bmatrix} \hat{v}_A$$

计：

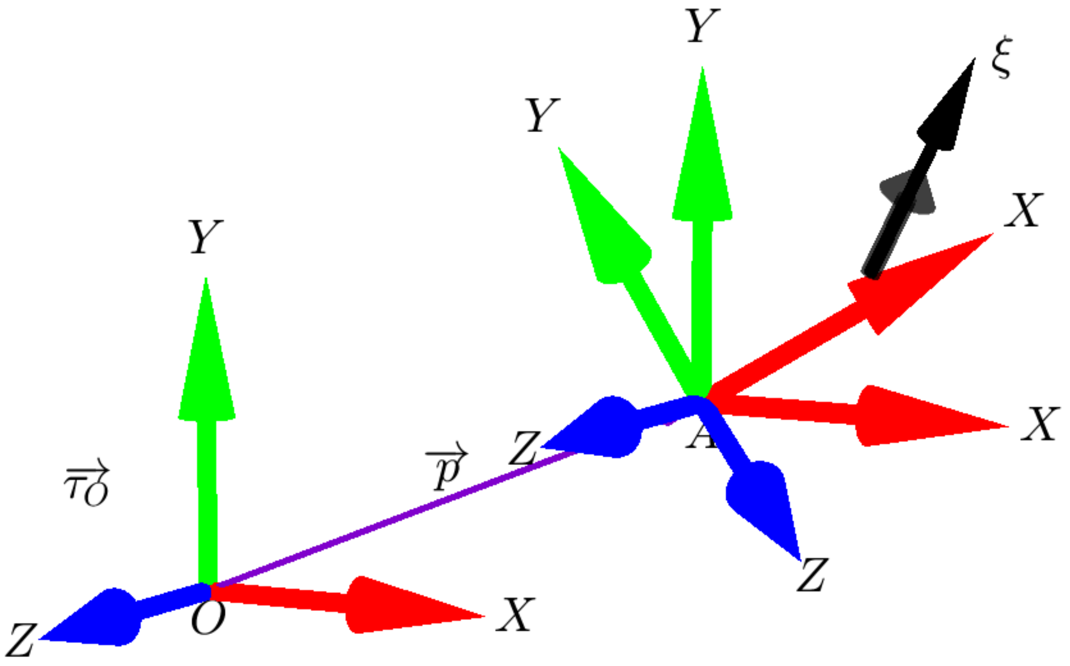
$$^{O}T_A = \begin{bmatrix} R & \vec{p}\times R \\ & R \end{bmatrix}$$

$^{O}T_A$称为**速度螺旋转换矩阵**，为6 ×6的矩阵

速度螺旋转换矩阵用来对螺旋速度进行坐标系转换，它与位姿矩阵同构！

螺旋的坐标系转换

任意力的坐标系之间的转换



坐标系A到O的位姿矩阵为：

$$^{O}P_A = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

力螺旋ζ在坐标系A下的表达为：

$$\hat{f}_A = [\vec{f}, \vec{\tau}]$$

可以构造一个跟A原点重合，跟O方向一致的坐标系B

于是：

$$\hat{f}_B = \begin{bmatrix} R & \\ & R \end{bmatrix} \hat{f}_A$$

进一步的：

$$\hat{f}_O = \begin{bmatrix} E & \\ \vec{p}\times & E \end{bmatrix} \hat{f}_B = \begin{bmatrix} E & \\ \vec{p}\times R & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \\ & R \end{bmatrix} \hat{f}_A = \begin{bmatrix} R & \\ \vec{p}\times R & R \end{bmatrix} \hat{f}_A$$

计：

$$^{O}T_A^* = \begin{bmatrix} R & \\ \vec{p}\times R & R \end{bmatrix}$$

$^{O}T_A^*$称为**力螺旋转换矩阵**，为6 ×6的矩阵

力螺旋转换矩阵用来对螺旋力进行坐标系转换，它与位姿矩阵同构！

螺旋的坐标系转换

${}^{O}T_A^*$和${}^{O}T_A$也称为位姿矩阵${}^{O}P_A$的伴随表达（adjoint representation），有时也记作：

$$\mathrm{adj}(P) \quad \mathrm{adj}^*(P)$$

易证以下关系：

$${}^{O}T_A^* = \left({}^{O}T_A\right)^{-T}$$

刚体速度的坐标系转换

刚体速度的坐标系转换：

已知：A相对于O的位姿 ${}^{O}P_{A}$和速度 ${}^{O}\hat{v}_{A}$，B相对于A的速度 ${}^{A}\hat{v}_{B}$

求：B相对于O坐标系的速度 ${}^{O}\hat{v}_{B}$

$${}^{O}\hat{v}_{B} = {}^{O}\hat{v}_{A} + {}^{O}T_{A} \cdot {}^{A}\hat{v}_{B}$$

速度螺旋的坐标系转换：

已知：A相对于O的位姿 ${}^{O}P_{A}$，A中的速度螺旋 ${}^{A}\hat{v}_{B}$

求：该速度螺旋相对于O坐标系的速度 ${}^{O}\hat{v}_{B}$

$${}^{O}\hat{v}_{B} = {}^{O}T_{A} \cdot {}^{A}\hat{v}_{B}$$

速度螺旋不考虑相对速度，但刚体的速度转换，必须考虑相对速度！

刚体速度的坐标系转换

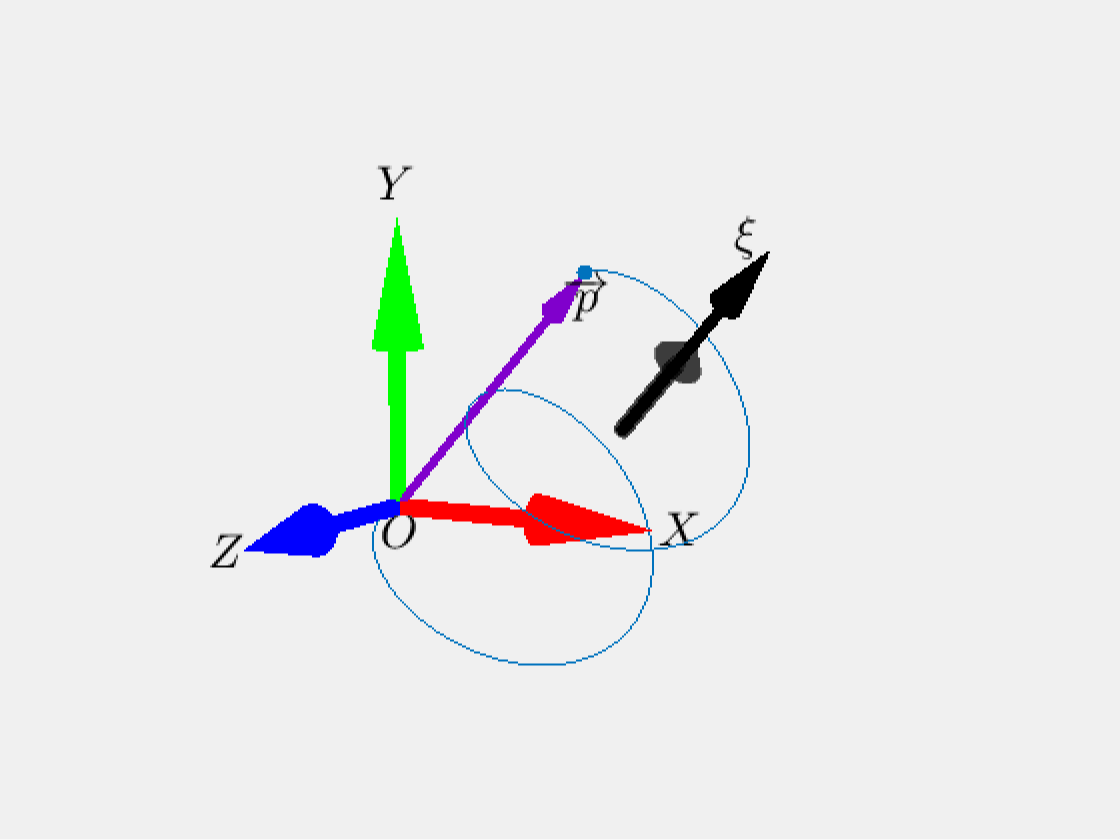
练习：

已知坐标系A相对坐标系O延 X 轴旋转了30度，同时A的原点相对O坐标系的坐标为(1,1,0)，某个R副使用A坐标系来定义，请求出：

1. R副产生的速度螺旋
2. R副的约束力空间

若该刚体A相对地面以 ${}^{O}\hat{v}_A = (-1,1,0 \mid -2,0,2)$的速度运动，该R副以1.5rad/s转动，请求出R副所连接的刚体B的速度螺旋。

速度螺旋与点速度的关系



螺旋速度不需要定义刚体上任何点

对于同一个速度螺旋，螺旋的表达不变

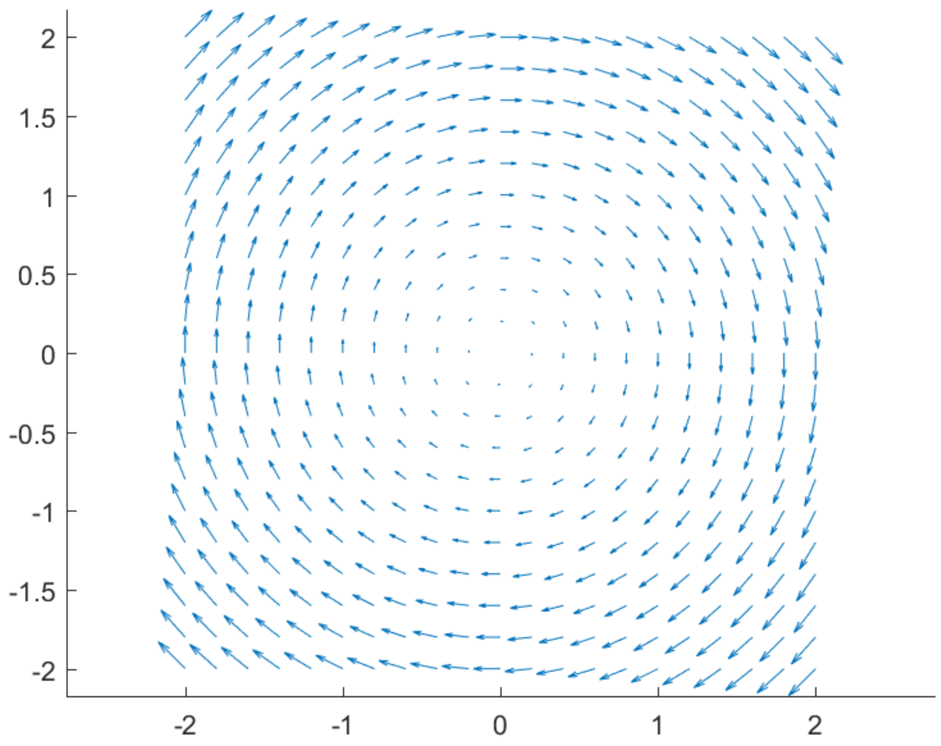
螺旋中的$\vec{v}$,代表了当前时刻下，与O重合的刚体上的点的速度。

注意：不同时刻下，$\vec{v}$所指的刚体上的点，不是同一个点

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v}$$

上式当且仅当$\vec{p} = [0,0,0]$时成立

速度螺旋与点速度的关系



空间中刚体的点速度是一个向量场！

（回想：刚体充满了整个空间）

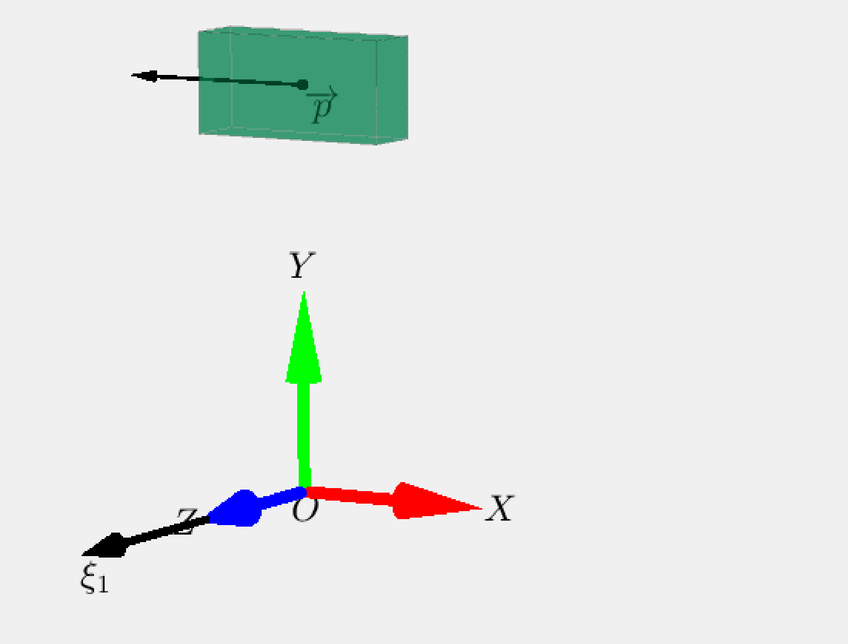
速度螺旋在描述空间内的速度场！

对任意向量$\vec{p}$，它的点速度为$\dot{\vec{p}}$：

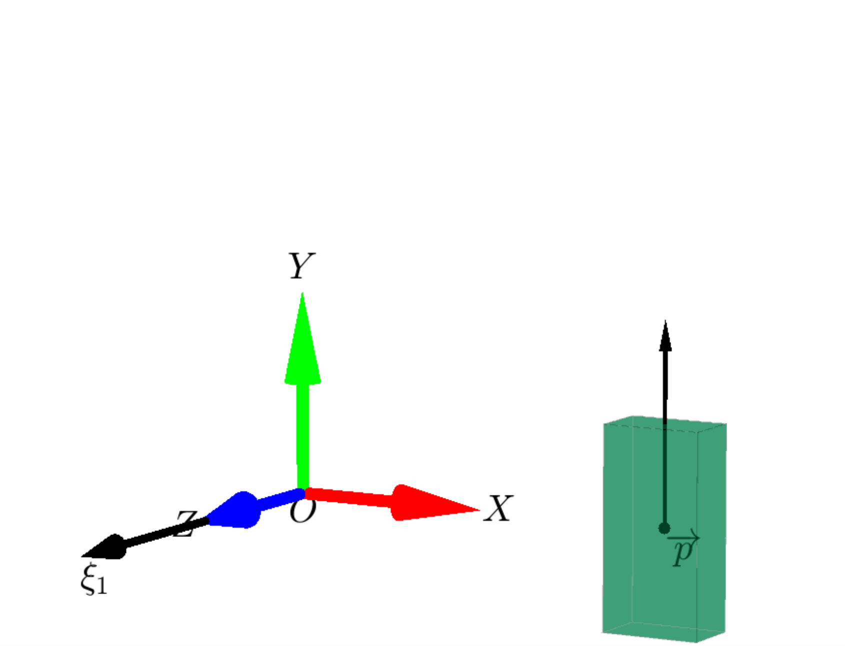
$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{p}} - \vec{\omega} \times \vec{p}$$

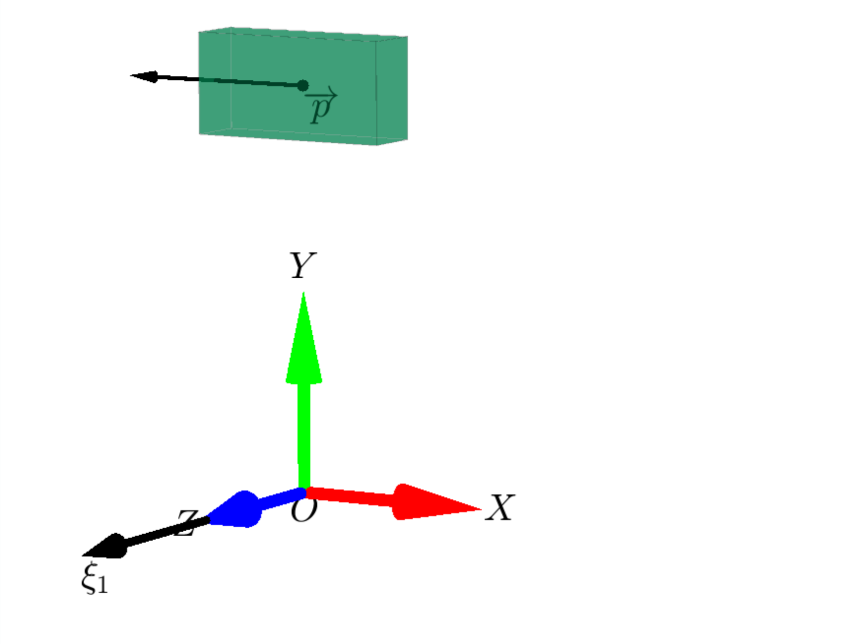
速度螺旋与点速度的关系



刚体绕着恒定螺旋运动



起始时p点速度



结束时p点速度

传统方法描述刚体运动，需要：

- 刚体上某点$\vec{p}$
- 该点的速度为$\dot{\vec{p}}$
- 角速度$\vec{\omega}$

用螺旋描述刚体运动，需要：

- 描述速度场的$\vec{v}$
- 角速度$\vec{\omega}$

螺旋速度的优势：

- 不需要刚体上的点或坐标系
- 只要点速度场不变，螺旋就不变

速度螺旋与旋转矩阵的关系

对于任意旋转矩阵R，应该有：

$$R \cdot R^T = E$$

两边求导：

$$\dot{R} \cdot R^T + R \cdot \dot{R}^T = 0$$

即：

$$\dot{R} \cdot R^T + \left(\dot{R} \cdot R^T\right)^T = 0$$

$\dot{R} \cdot R^T$为反对称矩阵，令其为$\omega \times$：

$$\dot{R} \cdot R^T = \omega \times$$

这也可以看作角速度的定义

于是：

$$\dot{R} = \omega \times R$$

速度螺旋与旋转矩阵的关系

Rodrigues’ formula：

$$R = E + \sin\theta\,\vec{\omega}\times + (1-\cos\theta)\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times$$

其中$\|\vec{\omega}\| = 1$

证明：

$$\dot{R} = \vec{\omega}\times R$$

$$e^{\omega\times\theta} = I + \theta\vec{\omega}\times + \frac{(\theta\vec{\omega}\times)^2}{2!} + \frac{(\theta\vec{\omega}\times)^3}{3!} + \cdots$$

其中：

$$\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times = \vec{\omega}\cdot\vec{\omega}^T - E$$

$$(\vec{\omega}\times)^3 = -\vec{\omega}\times$$

于是

$$e^{\omega\times\theta} = E + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)\vec{\omega}\times + \left(\frac{\theta^3}{2!} - \frac{\theta^5}{4!} - \cdots\right)\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times$$

$$= E + \sin\theta\,\vec{\omega}\times + (1-\cos\theta)\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times$$

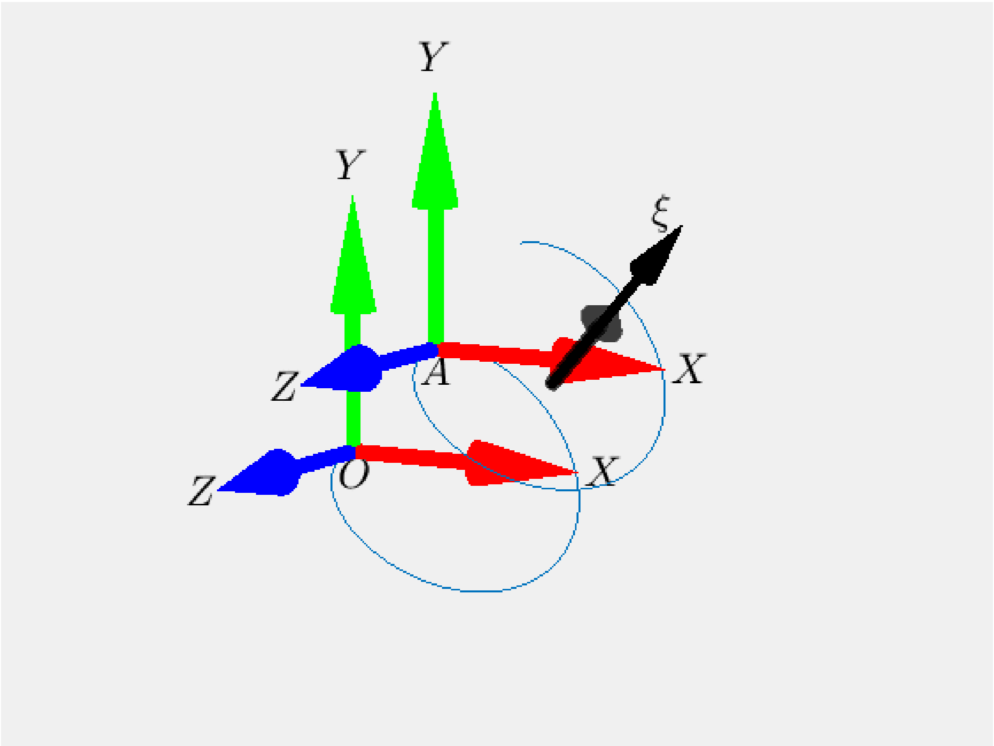
速度螺旋与点速度的关系

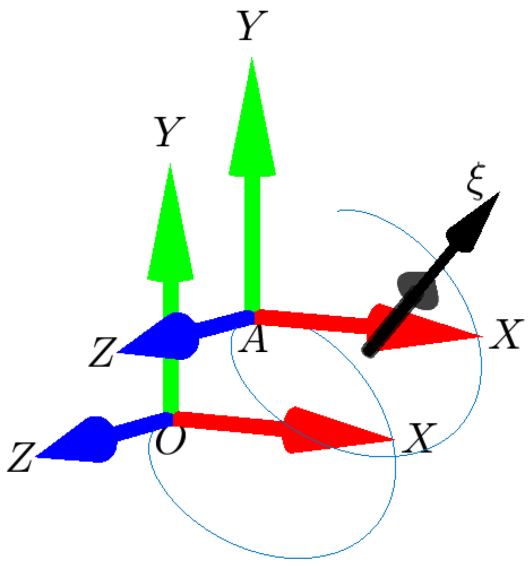
练习：

1. 请给出在指定速度螺旋$\hat{\mathcal{V}} = (\vec{v}, \vec{\omega})$下，刚体上某位姿矩阵$P = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$的导数。
2. 若$\hat{\mathcal{V}} = (\vec{v}, \vec{\omega}) = (-1,1,0 \mid -2,0,2)$，请求出上述刚体在$(2,1,1)$点处的线速度。

速度螺旋产生的运动

坐标系A起始与O重合





A沿着单位速度螺旋ξ运动θ后的位姿矩阵：

$$P(\hat{v}\theta) = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

其中：

$$R = E + \sin\theta\,\vec{\omega}\times + (1-\cos\theta)\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times$$
$$\vec{p} = (E-R)\vec{\omega}\times\vec{v} + \theta(\vec{\omega}\cdot\vec{v})\vec{\omega}$$

ξ是$\mathfrak{se}(3)$中的元素，而P是$SE(3)$中的元素

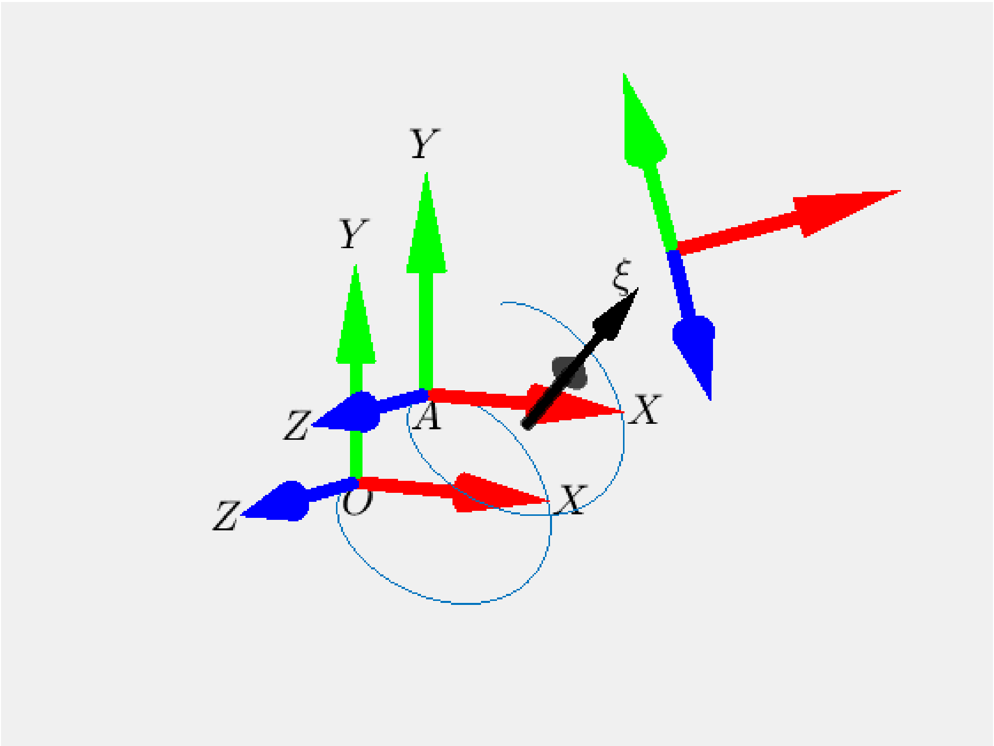
$$P(\hat{v}\theta)$$

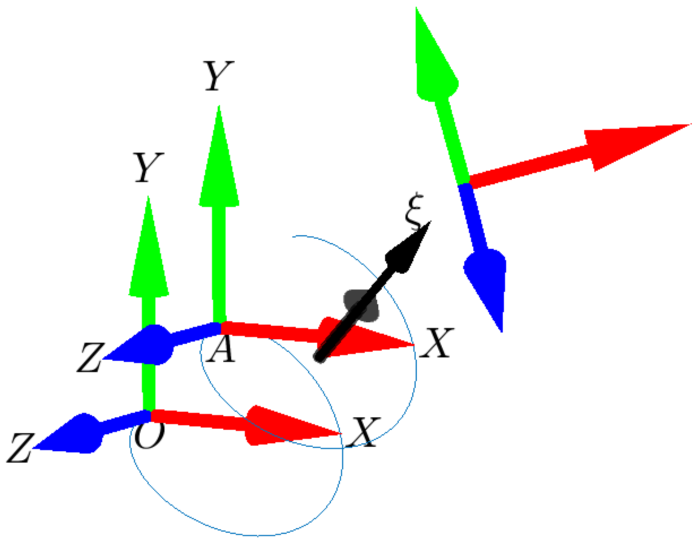
$P(\hat{v}\theta)$是$\mathfrak{se}(3)$到$SE(3)$的**指数映射**，有时也记作：

$$e^{\xi\theta}$$

速度螺旋产生的运动

坐标系A起始与O不重合





A起始位姿矩阵为：

$$P_0$$

那么它沿着单位速度螺旋ξ运动θ后的位姿矩阵：

$$P_t = P(\hat{v}\theta)P_0$$

速度螺旋产生的位姿矩阵与A坐标系的选择无关！

速度螺旋不需要在刚体上定义有坐标系！

速度螺旋产生的运动

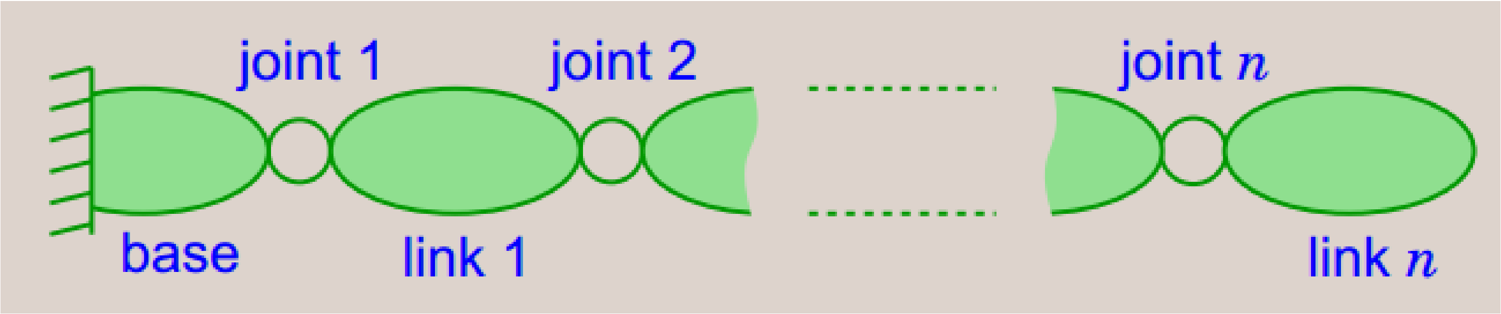
练习：

1. 若某位姿矩阵 $P=\begin{bmatrix} R & \vec{p} \\ & 1 \end{bmatrix}$，以速度 $\hat{v}=(\vec{v},\vec{\omega})$ 恒速运动，

   请求出该坐标系在2s后的位姿矩阵。

串联机器人正解

Problem 1 串联机器人正解过程：



已知：

- 初始关节单位速度螺旋$\hat{v}_{jo}$
- 初始末端位姿P_{eeo}

Step 1：

- 根据输入关节角度θ_i，得到关节产生的位姿矩阵：$P(\hat{v}_{jio} \cdot \theta_i)$

Step 2：

- 求得更新后的末端位姿：$P_{ee} = P\left(\theta_1 \hat{v}_{j1o}\right) \dots P\left(\theta_n \hat{v}_{jno}\right) P_{eeo}$

Step 3（extra for dynamic）：

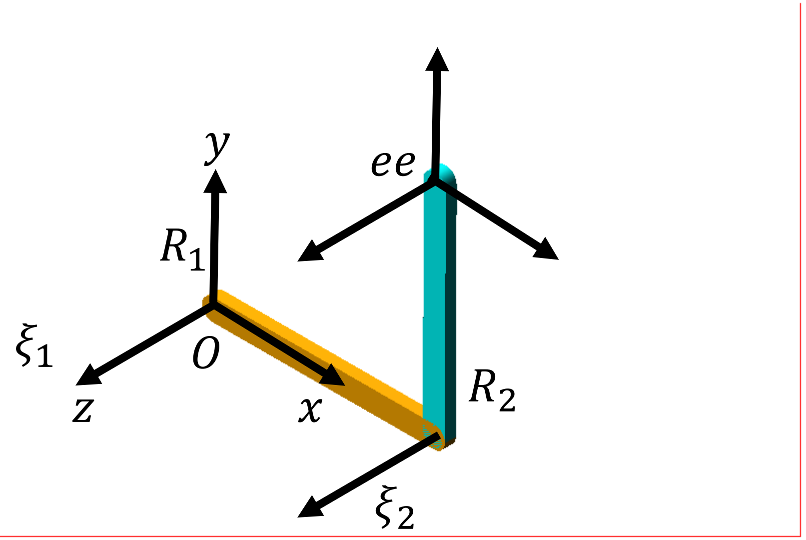
- 求得更新后的各个杆件的变化：$P_i = P\left(\theta_1 \hat{v}_{j1o}\right) \dots P\left(\theta_i \hat{v}_{jio}\right)$

串联机器人正解

示例：RR机构的正解（已知）

已知：

- 初始关节单位速度螺旋$\hat{v}_{jo}$
- 初始位姿P_{eeo}



起始状态

在O坐标系，起始的关节螺旋：

$$\hat{v}_{j1o} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{v}_{j2o} = \begin{bmatrix} \\ -1 \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

起始末端位姿：

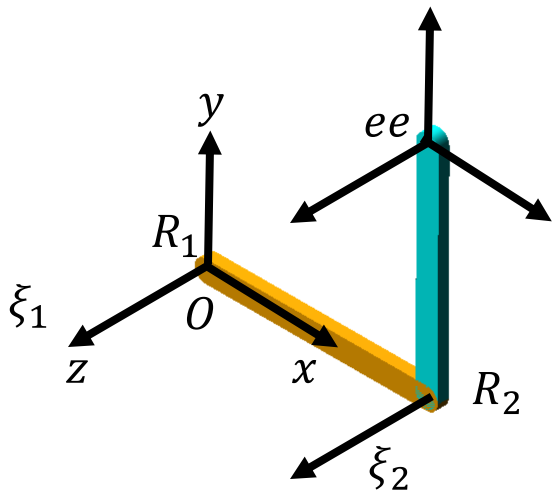
$$P_{eeo} = \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

串联机器人正解

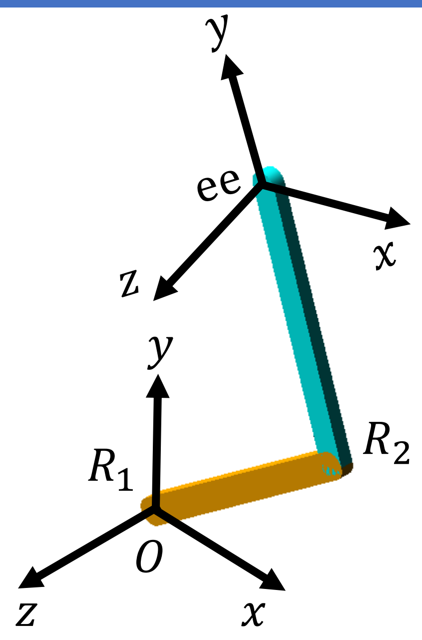
示例：RR机构的正解（Step 1）

Step 1：

- 根据输入关节角度θ_i，得到关节产生的位姿矩阵：$P_i(\hat{v}_{jio}\cdot\theta_i)$



起始状态



转动之后

R1

$$P_{\mathrm{j}1}=P\left(0.6\cdot\hat{v}_{j1o}\right)=\begin{bmatrix}0.8253 & -0.5646 & & \\ 0.5646 & 0.8253 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

R2：

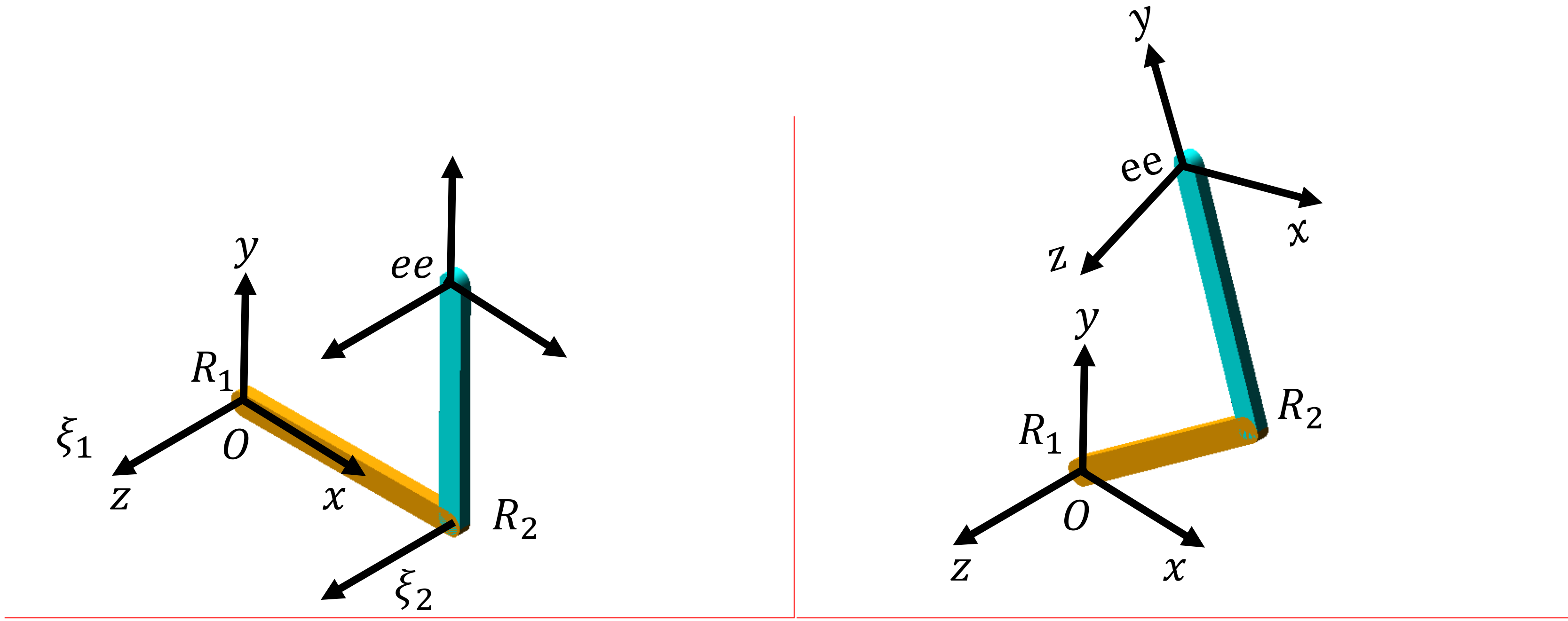
$$P_{j2}=P\left(-0.3\cdot\hat{v}_{j2o}\right)=\begin{bmatrix}0.9553 & 0.2955 & & 0.0447\\ -0.2955 & 0.9553 & & 0.2955\\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

串联机器人正解

示例：RR机构的正解（Step 2）

Step 2：

- $P_{ee} = P\left(\theta_1 \hat{v}_{j1o}\right) \ldots P\left(\theta_n \hat{v}_{jno}\right) P_{eeo}$



起始状态 转动之后

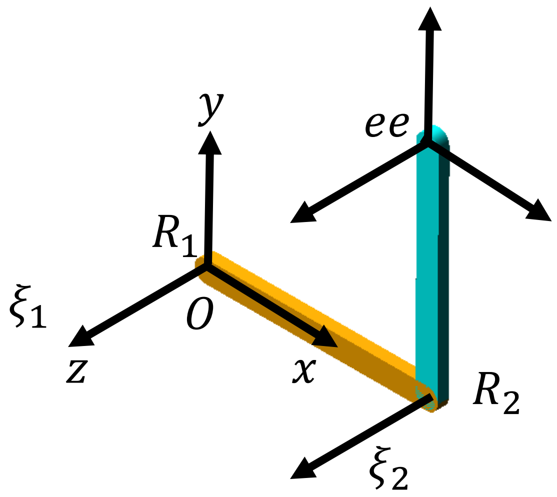
$$P_{ee} = P\left(\theta_1 \hat{v}_{j1o}\right) P\left(\theta_2 \hat{v}_{j2o}\right) P_{eeo} = \begin{bmatrix} 0.9553 & -0.2955 & & 0.5298 \\ 0.2955 & 0.9553 & & 1.5200 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

串联机器人正解

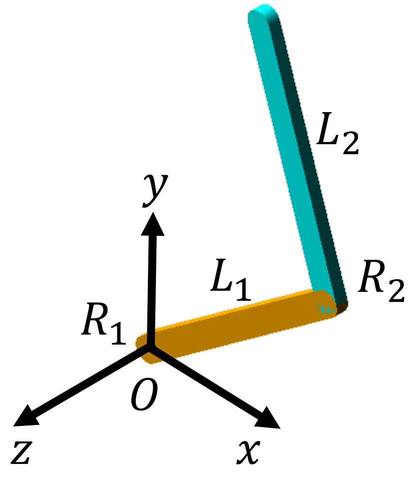
示例：RR机构的正解（Step 3）

Step 3：

- 求得更新后的各个杆件的变化



起始状态

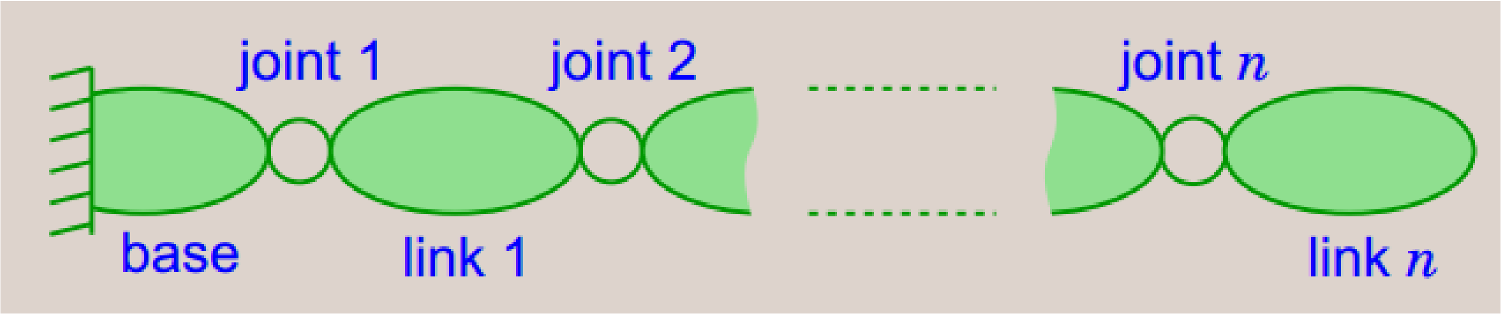


转动之后

$$P_0 = E \quad P_1 = P(\theta_1 \hat{v}_{j1o}) = \begin{bmatrix} 0.8253 & -0.5646 & & \\ 0.5646 & 0.8253 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = P(\theta_1 \hat{v}_{j1o}) P(\theta_2 \hat{v}_{j2o}) = \begin{bmatrix} 0.9553 & -0.2955 & & -0.1300 \\ 0.2955 & 0.9553 & & 0.2691 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

串联机器人速度雅可比

Problem 2串联机器人的雅可比：



已知：

- 初始关节单位速度螺旋$\hat{v}_{jo}$
- 当前各杆件位姿P_i

Step 1：

- 根据各杆件位姿，求得当前各关节单位速度螺旋：$\hat{v}_j$

Step 2：

- 将各个单位速度螺旋组合，得到雅可比矩阵

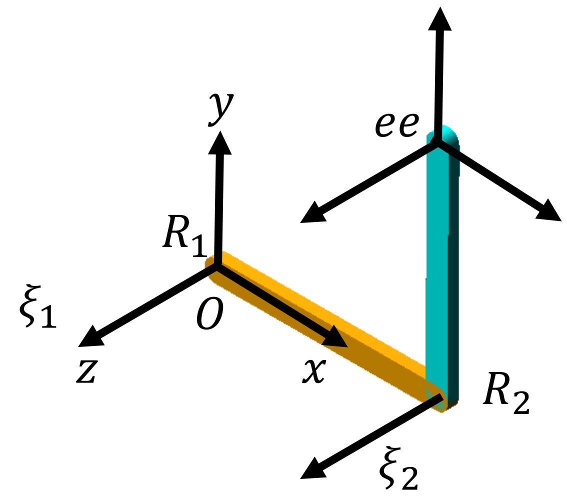
串联机器人速度雅可比

示例：RR机构的速度雅可比

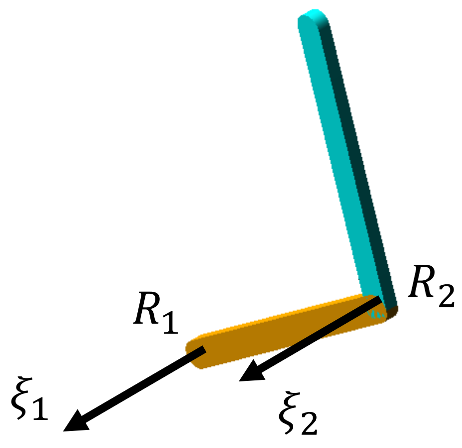
Step 1：

- 根据各杆件位姿，求得当前各关节单位速度螺旋：$\hat{v}_j$

Hint: 定义关节的坐标系可以看作固定在它连接的某个杆件上！



起始状态



转动之后

R1可以看作固定地面上（也可以看作固定在L1上）：

$$\hat{v}_{j1} = T(P_0) \cdot \hat{v}_{j1o} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

R2可以看作固定L1上（也可以看作固定在L2上）：

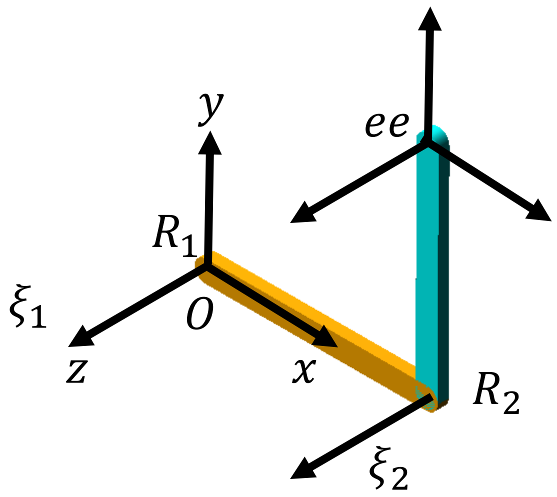
$$\hat{v}_{j2} = T(P_1) \cdot \hat{v}_{j2o} = \begin{bmatrix} 0.5646 \\ -0.8253 \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

串联机器人速度雅可比

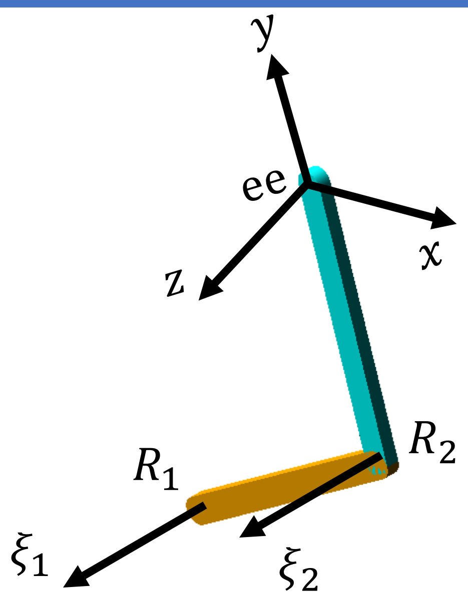
示例：RR机构的速度雅可比

Step 2：

- 将各个单位速度螺旋组合，得到雅可比矩阵



起始状态



转动之后

雅可比：

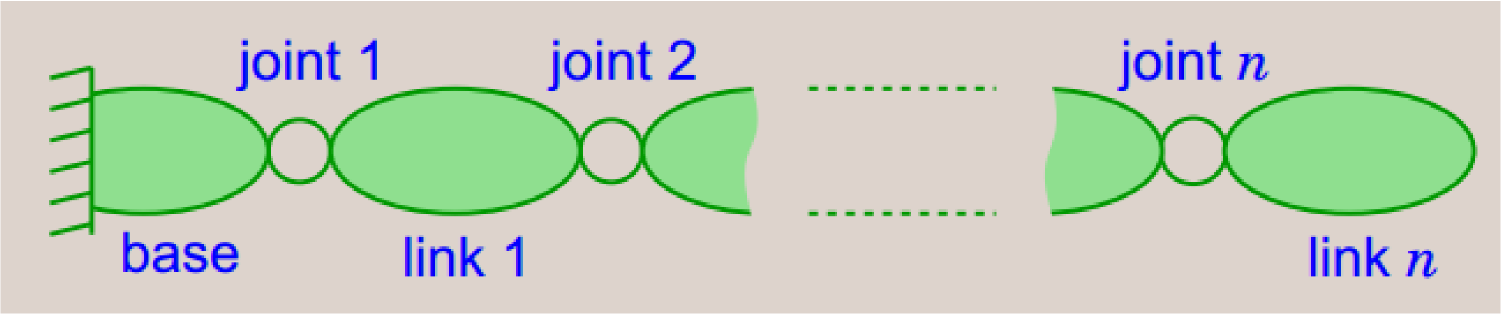
$$J_{6\times2}=[\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2]_{6\times2}=\begin{bmatrix} & 0.5646 \\ & -0.8253 \\ & \\ & \\ & \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

输入输出关系：

$$\hat{v}_{ee}=J_{6\times2}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

求出所有的杆件速度

Problem 3求出所有杆件的速度：



已知：

- 初始关节的约束螺旋系
- 当前各杆件位姿P_i

Step 1：

- 根据各杆件位姿，求得当前各关节以及各驱动的约束螺旋系：C_{ij}

Step 2：

- 将约束螺旋系组合成约束矩阵C，将单位关节约束力所做的功组合成约束功率c_v

Step 3：

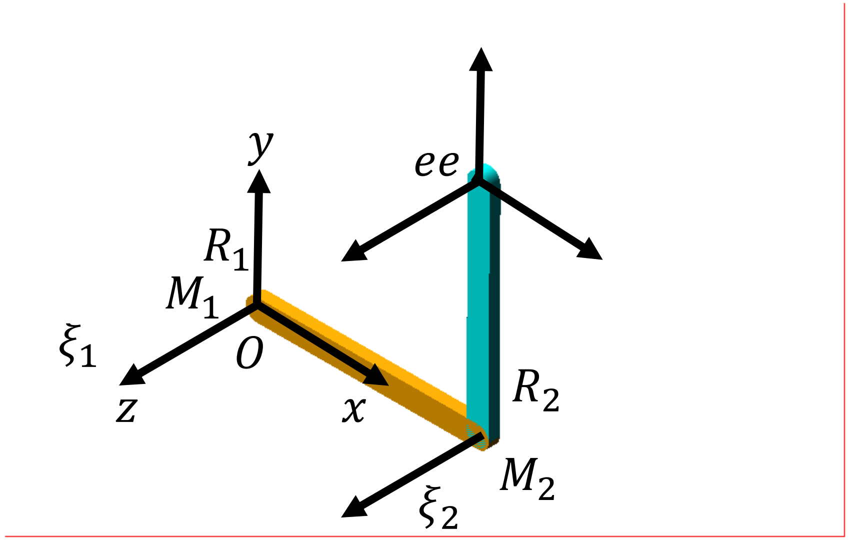
- 根据C 和c_v，求得各个杆件的速度螺旋

求出所有的杆件速度

示例：求出所有杆件的速度（已知）

已知：

- 初始各约束的约束螺旋系
- 当前各杆件位姿P_i



起始状态

系统中包含5个约束：

- 固定地面的约束
- 关节R1
- 关节R2
- 驱动M1
- 驱动M2

固定地面的约束:$C_{000} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

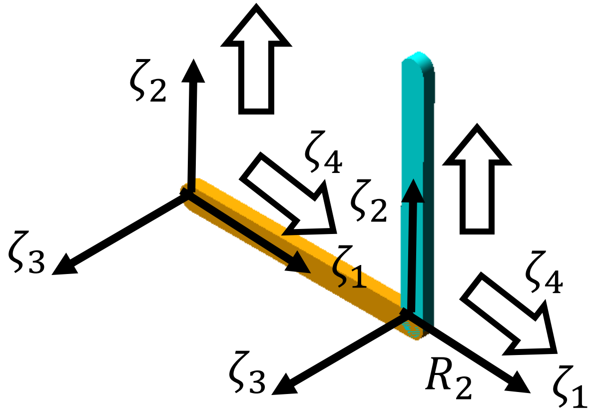
- 固定地面的约束将地面死死的拉住不动！
- 这个约束只作用在地面上！
- 这个约束只约束一个杆件，其他都约束两个！

求出所有的杆件速度

示例：求出所有杆件的速度（已知）

已知：

- 初始各约束的约束螺旋系
- 当前各杆件位姿P_i



起始状态

定义C_{ij}为约束j对杆件i产生的单位约束力

R1约束L1和地面，定义其对L1的约束为正：

$$C_{11o} = [\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}, C_{01o} = -C_{11}$$

R2约束L2和L1，定义其对L2的约束为正：

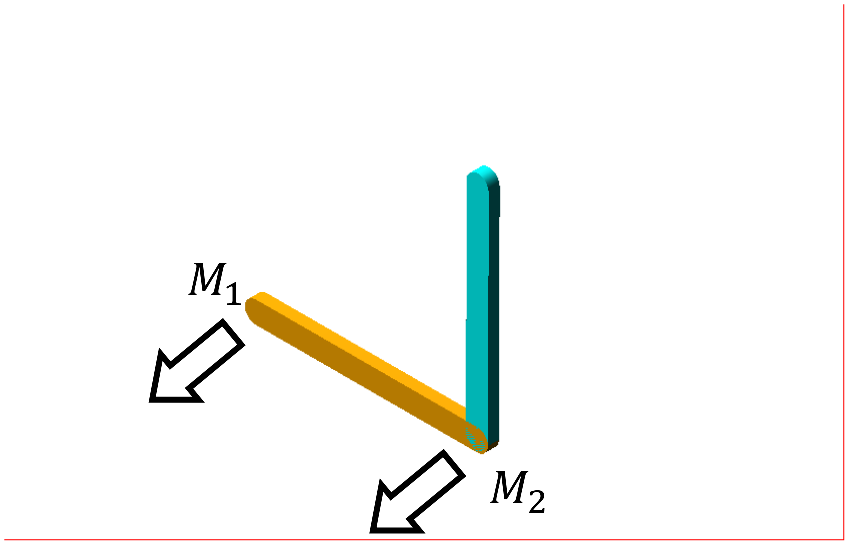
$$C_{22o} = [\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & -1 & & 1 \\ & 1 & & & \end{bmatrix}, C_{12o} = -C_{22}$$

求出所有的杆件速度

示例：求出所有杆件的速度（已知）

已知：

- 初始各约束的约束螺旋系
- 当前各杆件位姿P_i



起始状态

定义C_{ij}为约束j对杆件i产生的单位约束力

M1约束L1和地面，定义其对L1的约束为正：

$$C_{13o} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}, C_{03o} = -C_{13o}$$

M2约束L2和L1，定义其对L2的约束为正：

$$C_{24o} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}, C_{14o} = -C_{14o}$$

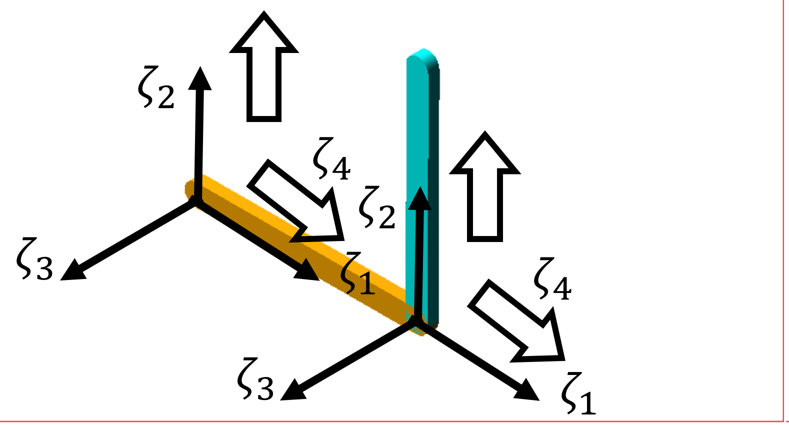
求出所有的杆件速度

示例：求出所有杆件的速度

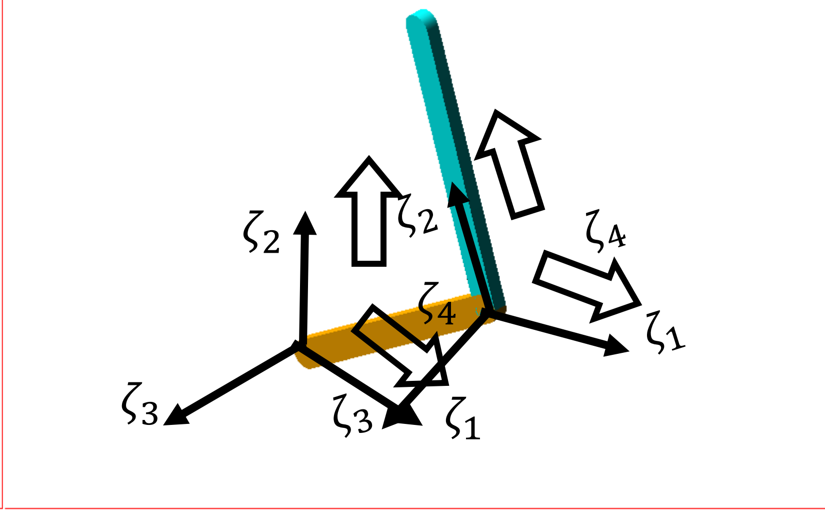
Step 1：

- 根据各杆件位姿，求得当前各关节以及各驱动的约束螺旋系：C_{ij}

Hint: 定义关节的坐标系可以看作固定在它连接的某个杆件上！



起始状态



转动之后

R1可以看作固定地面上（也可以看作固定在L1上）：

$$C_{11}=T^*(P_0)C_{11o}=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&1\end{bmatrix}$$

R2可以看作固定L1上（也可以看作固定在L2上）：

$$C_{22}=T^*(P_1)C_{22o}=\begin{bmatrix}0.8253&-0.5646&&&\\0.5646&0.8253&&&\\&&1&&\\&&0.5646&0.8253&-0.5646\\&&-0.8253&0.5646&0.8253\\&1&&&\end{bmatrix}$$

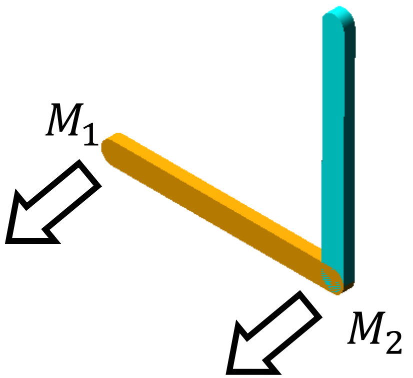
求出所有的杆件速度

示例：求出所有杆件的速度

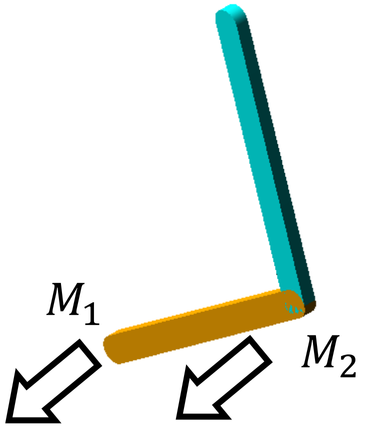
Step 1：

- 根据各杆件位姿，求得当前各关节以及各驱动的约束螺旋系：C_{ij}

Hint: 定义关节的坐标系可以看作固定在它连接的某个杆件上！



起始状态



转动之后

M1可以看作固定地面上（也可以看作固定在L1上）：

$$C_{13} = T^*(P_0)C_{13o} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

M2可以看作固定L1上（也可以看作固定在L2上）：

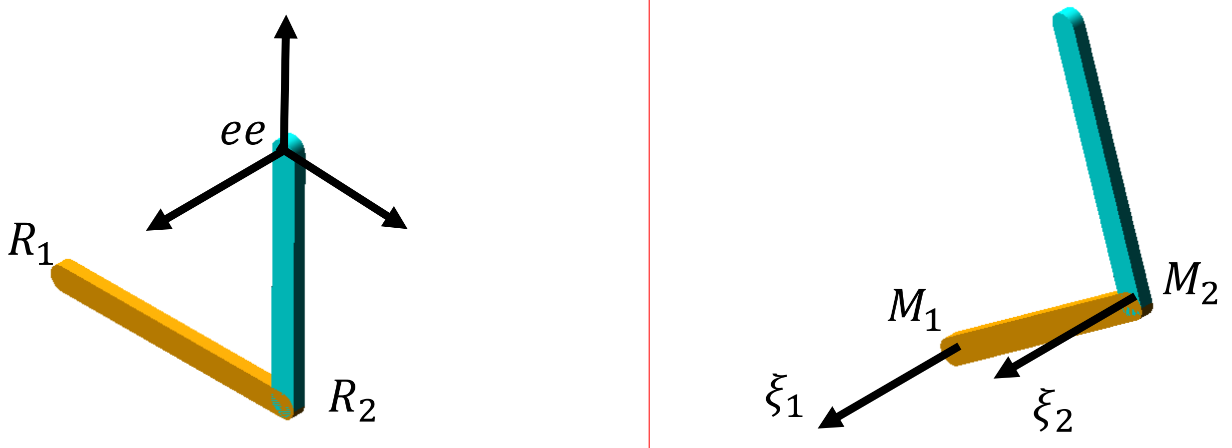
$$C_{24} = T^*(P_1)C_{24o} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

求出所有的杆件速度

示例：求出所有杆件的速度

Step 2：

- 将约束螺旋系组合成约束矩阵 C ，将单位关节约束力所做的功组合成约束功率c_v



起始状态　　　　转动之后

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{地面} & \text{L1} & \text{L2} \end{array} \\ C^T = & \begin{bmatrix} C_{00}^T & & \\ -C_{01}^T & C_{11}^T & \\ & -C_{12}^T & C_{22}^T \\ -C_{03}^T & C_{13}^T & \\ & -C_{14}^T & C_{24}^T \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{固定地面} \\ \text{R1} \\ \text{R2} \\ \text{M1} \\ \text{M2} \end{array}$$

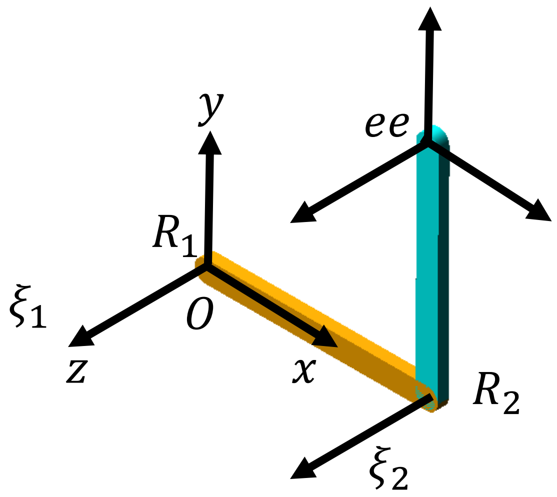
$$c_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{固定地面，不做功} \\ \text{R1不做功} \\ \text{R2不做功} \\ \text{M1做功功率为}\dot{\theta}_1 \\ \text{M2做功功率为}\dot{\theta}_2 \end{array}$$

求出所有的杆件速度

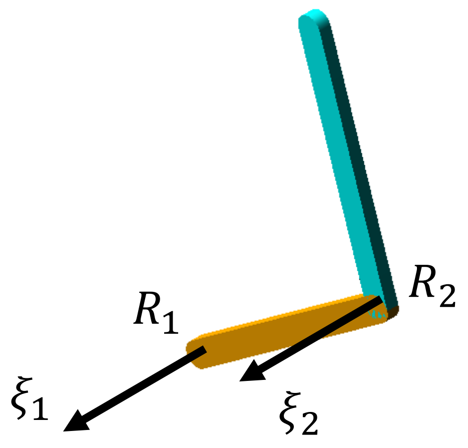
示例：求出所有杆件的速度

Step 3：

- 根据C 和c_v，求得各个杆件的速度螺旋



起始状态



转动之后

$$\begin{bmatrix} C_{00}^T & & \\ -C_{01}^T & C_{11}^T & \\ & -C_{12}^T & C_{22}^T \\ -C_{03}^T & C_{13}^T & \\ & -C_{14}^T & C_{24}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

即：$C^T \cdot v = c_v$

可以求出任意机构所有杆件的速度！

约束矩阵C

约定：约束k连接杆件i和j，其中i<j，那么认为k的坐标系固定在i上，且对j施加的为正力，即：

$$C_{\mathrm{ik}} = -T_i^* C_{iko}$$
$$C_{\mathrm{jk}} = -C_{\mathrm{ik}}$$

于是：

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{i,1} & \cdots & C_{i,k} & \cdots & C_{i,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{j,1} & \cdots & C_{j,k} & \cdots & C_{j,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,k} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix}$$

其中运动副 k 约束杆件 i, j，那么：

$$C_{ik} = -T_i^* C_{iko} = -C_{jk} \neq 0$$
$$C_{lk} = 0, l \neq i, j$$

约束矩阵C

对任何机构（串联、并联、混连），在已知各个杆件位姿的情况下，矩阵C一定可以被构造出来。

约束矩阵为稀疏矩阵，任何一列，只有两块非零，且它们相反。

约束矩阵的块数m x n个，其中m为杆件个数，n为约束个数

对于子块C_{ik}，它是$6 \times x$的矩阵，其中x为约束k的约束维数。

约束矩阵C

Problem 4 求速度雅可比的通用方法：

基于约束矩阵C，可以求出任意机构的雅可比：

$$C^T \cdot v = c_v$$

将v分成末端和其他杆件，末端所在的杆件在最后i块，驱动对应集中在j块：

$$v = \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \vdots \\ \hat{v}_{\text{ee}} \\ \vdots \\ \hat{v}_m \end{bmatrix}, c_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dot{\vec{\theta}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

若C^T可逆，那么：

$$v = C^{-T} \cdot c_v$$

取出其中的子块：

$$\hat{v}_{\text{ee}} = (C^{-T})_{ij}\dot{\vec{\theta}}$$

于是：

$$J = (C^{-T})_{ij}$$

小结

- 速度旋量与力旋量的坐标系转换矩阵T和T^*
- 速度螺旋和点速度的关系：

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{p}} - \vec{\omega} \times \vec{p}$$

- 速度螺旋和旋转矩阵的关系：

$$\dot{R} = \vec{\omega} \times R$$

$$R = E + \sin\theta\, \vec{\omega} \times + (1 - \cos\theta)\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times$$

$$\vec{p} = (E - R)\vec{\omega} \times \vec{v} + \theta(\vec{\omega} \cdot \vec{v})\vec{\omega}$$

- 可以指数映射计算运动学，这样无需对刚体定义坐标系

小结

- 可以用指数映射计算运动学，这样无需对刚体定义坐标系
- 可以用速度螺旋构建雅可比
- 稀疏的约束矩阵C

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,k} & \cdots & C_{m,n} \end{bmatrix}$$

- 基于C可以计算任意机构的雅可比
- 基于C可以计算系统中所有刚体的速度螺旋