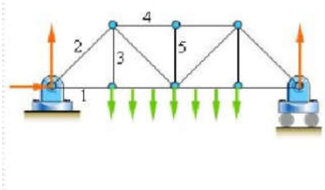
第五讲
动力学方程的建立

潘阳 博士
上海交通大学

数学模型的定义与分类

静态模型(static)

- 只关心平衡态或平稳态（static or steady）
- 与时间无关



静态桁架系统

动态模型(dynamic)

- 系统状态随时间改变
- 时间、状态、演化方程（time, state manifold, evolution function）
- 演化方程为微分方程：

$$\dot{x} = v(x)$$

动态双摆系统

机器人学科中的数学模型

3.机器人动力学

三问题：

正问题：力 -> 加速度 $\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta,\dot{\theta})$

逆问题：加速度 -> 力 $\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta)\left(\tau - h(\theta,\dot{\theta})\right)$

标定问题：力与加速度 -> 惯量

三要素：

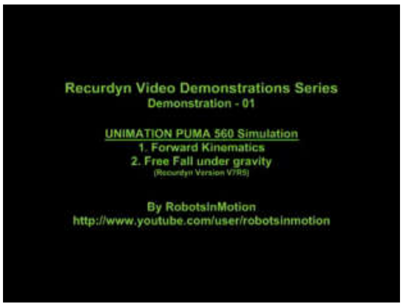
时间：t

状态：$\theta\ \dot{\theta}$

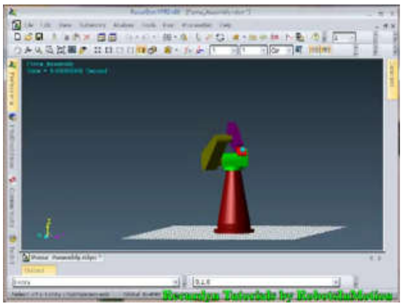
演化方程：$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta)\left(\tau - h(\theta,\dot{\theta})\right)$

动力学的特点

- 动态系统
- 线性系统（仿射变换）
- 微分方程



Puma机器人逆动力学

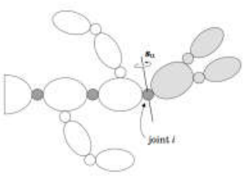


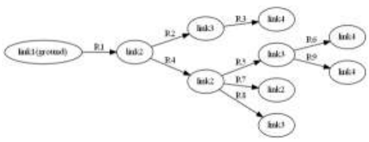
Puma机器人正动力学

机器人动力学的建模方法

机器人机构拓扑分类

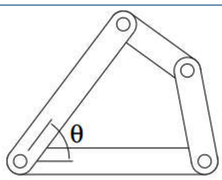
树形拓扑

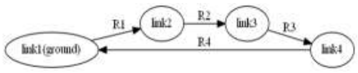


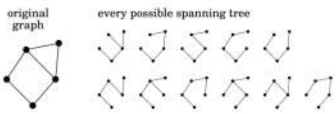


- 杆件与约束满足：$n_c = n_p - 1$
- 可以定义约束的极性（Polarity）

环形拓扑







- 杆件与约束满足：$n_c > n_p - 1$
- 包含树结构

机器人动力学的建模方法

机器人动力学建模方法

拉格朗日法（Lagrangian Formulation）

引入拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_n,\ t)$$

引入势能函数：

$$\mathcal{L} = T - V$$

产生N个二阶方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

牛顿欧拉法（Newton-Euler Formulation）

单个杆件平衡方程：

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta})$$

递归关系：

$$M_{i,i-1} = M_i^{-1} M_{i-1}$$

递归计算：

while forward recursion **do**
  $T_{\lambda(i),i} =$ function of q_i
  $V_i = \mathrm{Ad}_{T^{-1}_{\lambda(i),i}} V_{\lambda(i)} + S_i \dot{q}_i$
  $\dot{V}_i = \mathrm{Ad}_{T^{-1}_{\lambda(i),i}} \dot{V}_{\lambda(i)} + \mathrm{ad}_{V_i} S_i \dot{q}_i + \dot{S}_i \dot{q}_i + S_i \ddot{q}_i$
end while
while backward recursion **do**
  $F_i = \mathcal{I}_i \dot{V}_i - \mathrm{ad}^*_{V_i} \mathcal{I}_i V_i - F_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{k \in \mu(i)} \mathrm{Ad}^*_{T^{-1}_{i,k}} F_k$
  $\tau_i = S_i^{\mathrm{T}} F_i$
end while

其他方法

凯恩法：

R/W方法：

高斯原理法：

空间向量法：

机器人动力学的建模方法

机器人动力学建模方法

Robot Dynamics

The three main algorithms in robot dynamics are:

Recursive Newton−Euler Algorithm
- calculates inverse dynamics
- complexity $O(n)$

Articulated−Body Algorithm
- calculates forward dynamics
- complexity $O(n)$

Composite−Rigid−Body Algorithm
- calculates $\boldsymbol{H}$
- complexity $O(nd)$

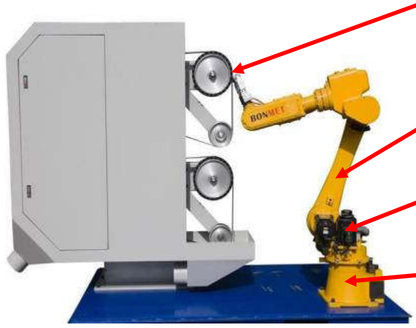
机器人动力学的建模方法

树形拓扑的动力学计算复杂度

	拉格朗日法（Lagrangian Formulation）	牛顿欧拉法（Newton-Euler Formulation）
树形正解	$O(N)$	$O(N)$
树形反解	$O(N)$	$O(N)$
环形正解	$O(N^3)$	$O(N^3)$
环形反解	$O(N^3)$	$O(N^3)$

机器人动力学的建模方法

机器人动力学的研究对象



外力（Force）　外力、重力、摩擦力、科氏力……

杆件（Part）　惯量、位置、速度、加速度……

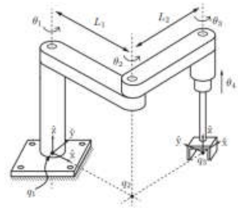
驱动（Motion）　约束力，位置、速度、加速度……

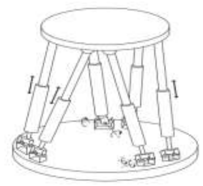
关节（Joint）　约束力，位置、速度、加速度……

机器人动力学的建模方法

机器人动力学中的已知量与未知量

	固有属性	运动学求解的变量	动力学的未知量
外力（Force）	重力		外力、摩擦力、科氏力……
杆件（Part）	惯量	位置、速度	加速度
驱动（Motion）		位置、速度	约束力、加速度
关节（Joint）		位置、速度	约束力、加速度


串联机构杆件位置好求


并联机构杆件位置多于驱动位置

通用动力学平衡方程

力平衡方程：

$$-I\cdot a+C\cdot\eta=f_p$$

虚约束不做功：

$$C^T\cdot a=c_a$$

写在一起：

$$\begin{bmatrix}-I & C\\ C^T & \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ \eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{f}_p\\ c_a\end{bmatrix}$$

普适的动力学方程！

该方程为线性方程，未知数包含：

- 所有杆件的加速度，6m个未知数
- 所有驱动的约束坐标，k个未知数

通用动力学平衡方程

Problem 7：动力学逆问题

已知：

- 当前各杆件的速度$\hat{v}_i$，初始惯量I_{io}，
- 当前的输入加速度$\ddot{\vec{\theta}}$
- 当前的约束矩阵C

Step 1：

- 求出各杆件在O坐标系下的惯量 $^{O}I_i$

Step 2：

- 求出f_p

Step 3：

- 求出c_a

Step 4：

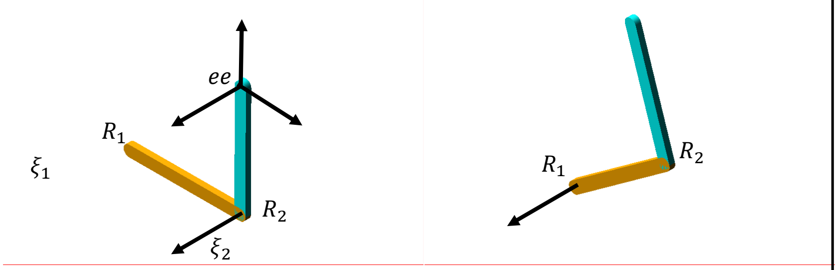
- 求出所有杆件加速度$\hat{a}_i$和所有约束力η

通用动力学平衡方程

Problem 7：动力学逆问题

Step 1：

- 求出各杆件在O坐标系下的惯量 $^{O}I_i$



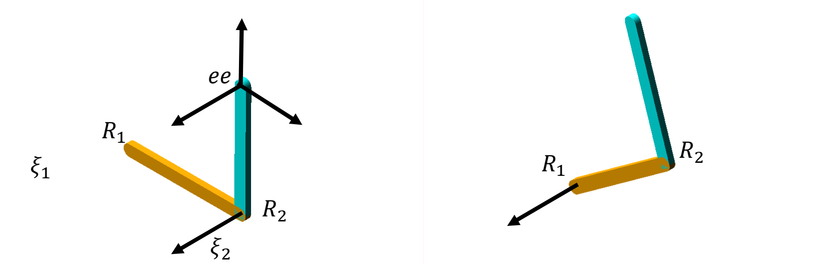
$$
\begin{aligned}
I_1 &= T_1^* \cdot I_{1o} \cdot (T_1^*)^T \\
I_2 &= T_2^* \cdot I_{2o} \cdot (T_2^*)^T
\end{aligned}
$$

通用动力学平衡方程

Problem 7：动力学逆问题

Step 2：

- 求出f_p



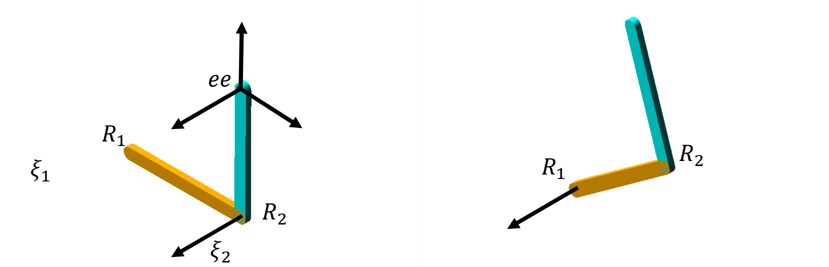
$$f_{p1} = -\hat{f}_{e1} - I_1\hat{g} + \hat{v}_1 \times^* I_1\hat{v}_1$$
$$f_{p2} = -\hat{f}_{e2} - I_2\hat{g} + \hat{v}_2 \times^* I_2\hat{v}_2$$

通用动力学平衡方程

Problem 7：动力学逆问题

Step 3：

- 求出c_a



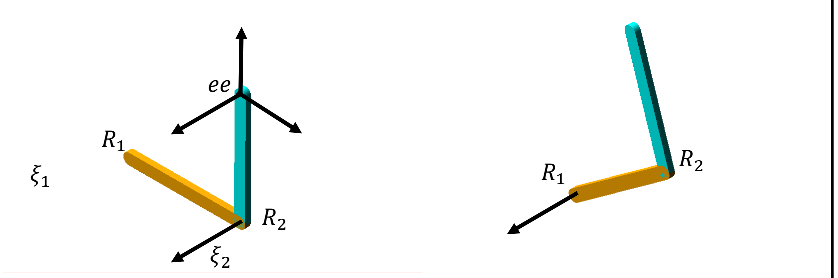
$$c_a = \dot{c}_v - \dot{C}^T \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \dot{C}^T \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

通用动力学平衡方程

Problem 7：动力学逆问题

Step 4：

- 求出所有杆件加速度$\hat{a}_i$和所有约束力η



$$\begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{f}_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

通用动力学平衡方程

Problem 8：动力学正问题

已知：

- 当前各杆件的速度$\hat{v}_i$，初始惯量I_{io}，
- 当前的输入力$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{m}}$，为电机的驱动力，不是力螺旋
- 当前的约束矩阵C

Step 1：

- 求出各杆件在0坐标系下的惯量${}^{O}I_i$

Step 2：

- 求出f_p

Step 3：

- 求出c_a

Step 4：

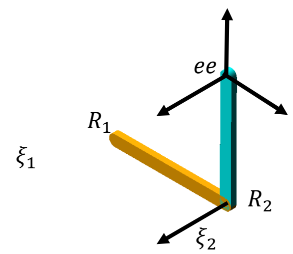
- 求出所有杆件加速度$\hat{a}_i$和所有约束力η

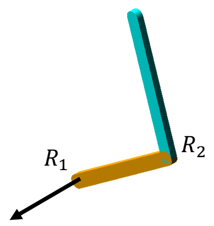
通用动力学平衡方程

Problem 8：动力学正问题

Step 1：

- 求出各杆件在0坐标系下的惯量 ${}^{O}I_i$





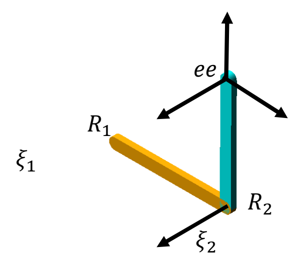
$$I_1 = T_1^* \cdot I_{1o} \cdot (T_1^*)^T$$
$$I_2 = T_2^* \cdot I_{2o} \cdot (T_2^*)^T$$

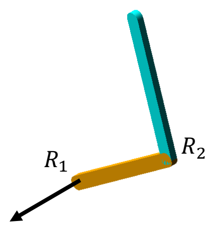
通用动力学平衡方程

Problem 8：动力学正问题

Step 2：

- 求出f_p





现在已知电机驱动力，因此在计算杆件受力时需要加上驱动力

$$f_{p1} = -\hat{f}_{e1} - I_1\hat{g} - \hat{v}_1 \times^* I_1\hat{v}_1 + C_{13}^T \cdot f_{m1} - C_{14}^T \cdot f_{m2}$$
$$f_{p2} = -\hat{f}_{e2} - I_2\hat{g} - \hat{v}_2 \times^* I_2\hat{v}_2 + C_{24}^T \cdot f_{m2}$$

此时，约束矩阵要去掉驱动的约束：

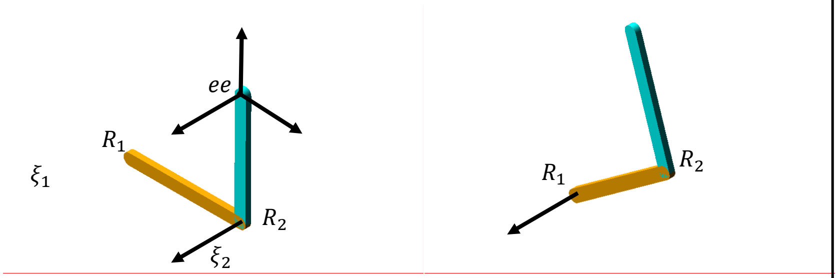
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{地面} & \text{L1} & \text{L2} \end{array} \\ C^T = & \begin{bmatrix} C_{00}^T & & \\ -C_{01}^T & C_{11}^T & \\ & -C_{12}^T & C_{22}^T \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{固定地面} \\ \text{R1} \\ \text{R2} \end{array} \end{array}$$

通用动力学平衡方程

Problem 8：动力学正问题

Step 3：

- 求出c_a



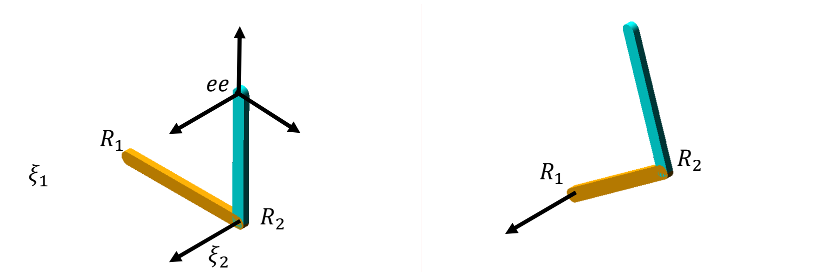
$$c_a = \dot{c}_v - \dot{C}^T \cdot v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{C}^T \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

通用动力学平衡方程

Problem 8：动力学正问题

Step 4：

- 求出所有杆件加速度$\hat{a}_i$和所有约束力η



$$\begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{f}_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

此时，杆件的相对加速度为：

$$\hat{a}_{ji}\ddot{\theta}_i = \hat{a}_i - \hat{a}_{i-1} - \hat{v}_{i-1} \times \hat{v}_i = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{\alpha} \end{bmatrix}$$

那么驱动加速度为：

$$\ddot{\theta}_i = \|\vec{\alpha}\|$$

通用动力学平衡方程

Problem 9：将方程化为通用形式

动力学方程的通用形式：

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta,\dot{\theta})$$

$$\begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{f}_p \\ c_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \\ \dot{c}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{f}_p \\ -\dot{C}^T \cdot c_v \end{bmatrix}$$

而：

$$\dot{c}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \vec{\tau}_j \\ \vec{\tau}_m \end{bmatrix}$$

其中$\vec{\tau}_j$是所有关节的约束力，$\vec{\tau}_m$是驱动的驱动力

去最上面方程的子方程：

$$\vec{\tau}_m = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta,\dot{\theta})$$

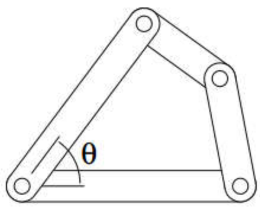
动力学系统的分类

常见动力学模型的分类

C为约束矩阵，为mxn维，m是6的倍数

过约束

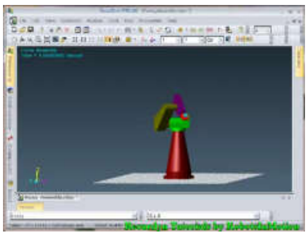
$\mathrm{rank}(C) = m < n$



四杆机构是个过约束机构

欠约束

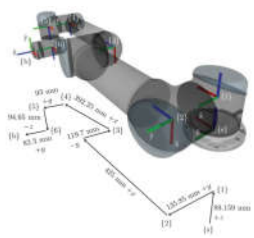
$\mathrm{rank}(C) < \mathrm{m}$



正动力学问题属于欠约束问题

完全约束

$\mathrm{rank}(C) = \mathrm{m} = \mathrm{n}$



六轴的逆动力学问题是完全约束问题

动力学系统的分类

常见动力学模型的分类

有质点的系统

有地系统

Stewart是有地系统

无地系统

$\mathrm{rank}(C) \leq \mathrm{m} - 6$

腿式机器人是无地系统

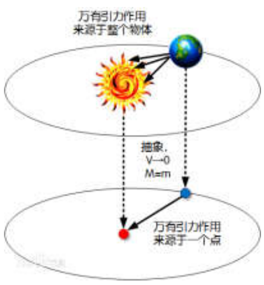
动力学系统的分类

常见动力学模型的分类

I为惯量矩阵，为m x m维，m是6的倍数

有质点或零惯量的系统

$\mathrm{rank}(I) < m$



行星被抽象成了质点

所有杆件惯量都可逆的系统

$\mathrm{rank}(I) = m$

所有刚体都有有效惯量

动力学方程无解的条件

动力学模型的失效，意味这动力学方程无解！

$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{f}_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

失效条件1：

$$\mathrm{rank}(C^T) < \mathrm{rank}([C^T \quad c_a])$$

过约束失效（stuck），俗称“憋劲”

四杆机构在奇异点会导致动力学模型无解

动力学方程无解的条件

动力学模型的失效，意味这动力学方程无解！

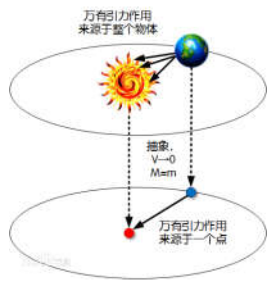
$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{f}_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

失效条件2：

$$\mathrm{rank}(C^T) = \mathrm{rank}([C^T \quad c_a])$$

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix}\right) < \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} -I & C & \mathrm{f}_p \\ C^T & & c_a \end{bmatrix}\right)$$

对没有质量的刚体施加力，或对没有惯量的质点施加力矩



如果万有引力是个力矩，那么质点收到力矩，会产生多大的角加速度？

动力学方程的优化

提高以下方程的求解速度：

$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p \\ c_a \end{bmatrix}$$

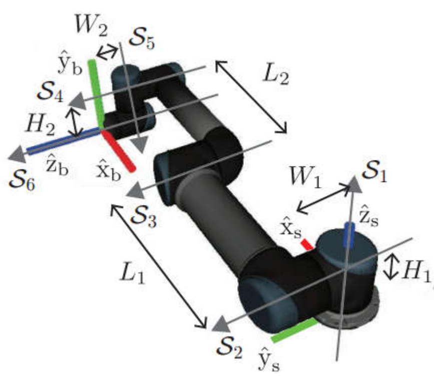
对于串联机构：

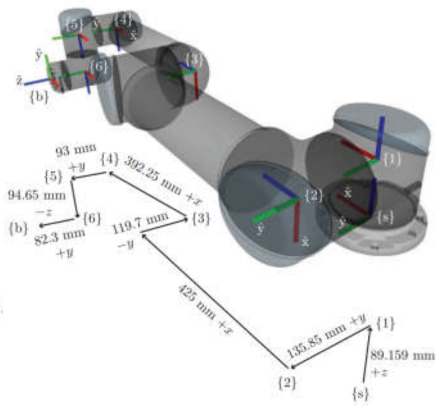
$$C = \begin{bmatrix} C_0 & -C_1 & & & \\ & C_1 & -C_2 & & \\ & & C_2 & \ddots & \\ & & & \ddots & -C_m \\ & & & & C_m \end{bmatrix}$$

可以对其行变换，把C化成对角阵，求解复杂度为O（n）：

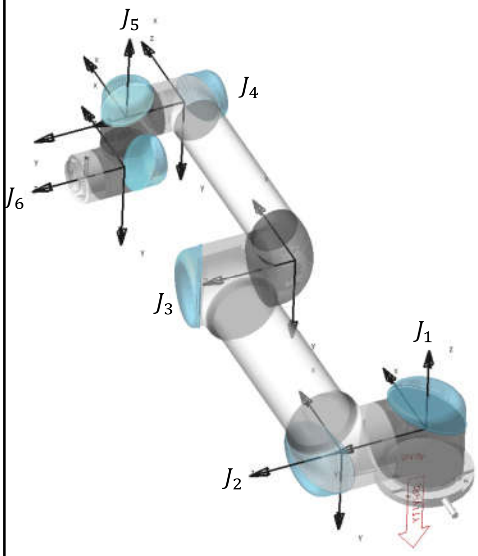
$$PC = \begin{bmatrix} C_0 & & & & \\ & C_1 & & & \\ & & C_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_m \end{bmatrix}$$

UR5 动力学模型





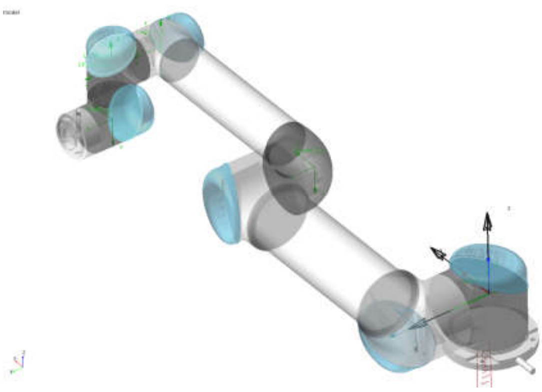
UR5 动力学模型



各个关节的坐标系（相对于地面）：

```
j1_rpy = [0.0 0.0 0.0];
j1_xyz = [0.0 0.0 0.089159];

j2_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];
j2_xyz = [0.0, 0.13585, 0.089159];

j3_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];
j3_xyz = [0.425, 0.13585 - 0.1197, 0.089159];

j4_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];
j4_xyz = [0.425 + 0.39225, 0.13585 - 0.1197, 0.089159];

j5_rpy = [0.0 0.0 0.0];
j5_xyz = [0.425 + 0.39225, 0.13585 - 0.1197 + 0.093, 0.089159];

j6_rpy = [0.0 0.0 -pi/2];
j6_xyz = [0.425 + 0.39225, 0.13585 - 0.1197 + 0.093, 0.089159 -
0.09465];
```

UR5 动力学模型

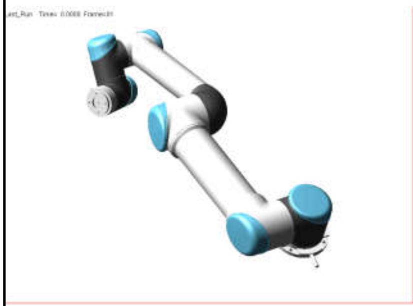


关节的初始速度螺旋与约束螺旋（相对于地面）：

```
cm=[
1,0,0,0,0
0,1,0,0,0
0,0,1,0,0
0,0,0,1,0
0,0,0,0,1
0,0,0,0,0];


pm_j1o = [eul2rotm(j1_rpy,'ZYX'), j1_xyz'
     0,0,0,1];
j1_vso = Tv(pm_j1o)*[0;0;0;0;0;1];
j1_cmo = Tf(pm_j1o)*cm;
m1_cmo = Tf(pm_j1o)*[0;0;0;0;0;1];

......
```

UR5 动力学模型

Problem 1（计算运动学正解）：



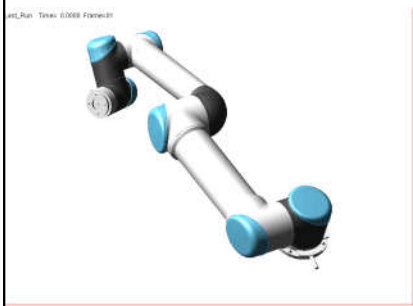
```
P0 = eye(4);
P1 = P(j1_vso*q(1));
P2 = P1*P(j2_vso*q(2));
P3 = P2*P(j3_vso*q(3));
P4 = P3*P(j4_vso*q(4));
P5 = P4*P(j5_vso*q(5));
P6 = P5*P(j6_vso*q(6));

ee = P6*pm_eeo;

......
```

其中函数P为指数映射的函数：

```
R = eye(3) + sin(theta)*C3(w) + (1-cos(theta))*C3(w)*C3(w);
p = (eye(3)-R)*C3(w)*v + theta * w' * v * w;
```

UR5 动力学模型

Problem 2（速度雅可比）：



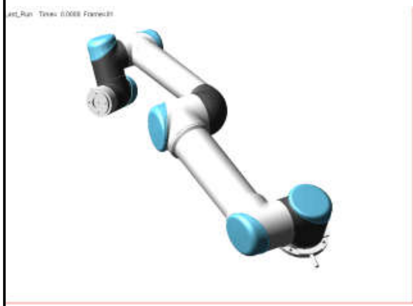
```
J = [Tv(P0)*j1_vso, Tv(P1)*j2_vso, Tv(P2)*j3_vso, Tv(P3)*j4_vso,
Tv(P4)*j5_vso, Tv(P5)*j6_vso];
```

其中函数Tv为速度螺旋转换矩阵：

```
function Tv = Tv(pm)

R = pm(1:3,1:3);
p = pm(1:3,4);

Tv = [
    R           C3(p)*R
    zeros(3,3)  R           ];
end
```

UR5 动力学模型

Problem 3（计算所有杆件的速度）：



构建关节和驱动的约束矩阵：

```
j1_cm = j1_cmo;
j2_cm = Tf(P1) * j2_cmo;
......
j6_cm = Tf(P5) * j6_cmo;

m1_cm = m1_cmo;
m2_cm = Tf(P1) * m2_cmo;
......
m6_cm = Tf(P5) * m6_cmo;
```

构建C：

```
C=......
```

构建cv:

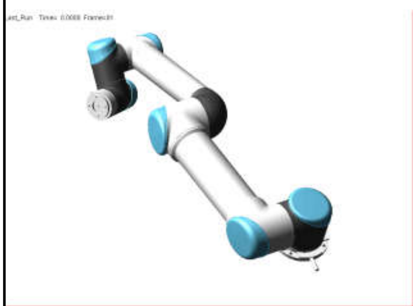
```
cv = [zeros(36,1);dq];
```

求所有杆件的速度：

```
v = C'\cv;

v0 = v(1:6);
......
v6 = v(37:42);
```

UR5 动力学模型

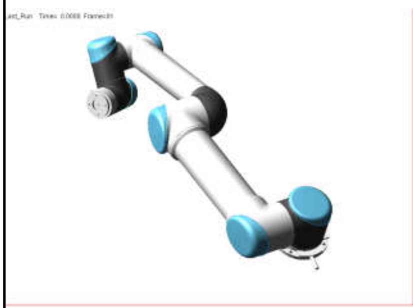
Problem 4（根据C来计算雅可比）：



```
CT_inv = inv(C');
J2 = CT_inv(end-5:end,end-5:end);
```

UR5 动力学模型

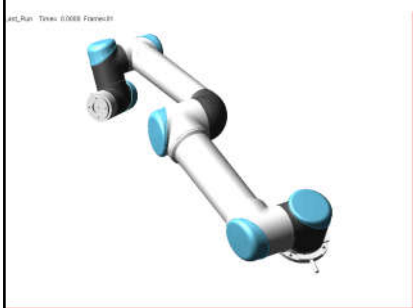
Problem 5（加速度输入输出）：



```
dJ = [Cv(v0)*Tv(P0)*j1_vso, Cv(v1)*Tv(P1)*j2_vso, Cv(v2)*Tv(P2)*j3_vso,
Cv(v3)*Tv(P3)*j4_vso, Cv(v4)*Tv(P4)*j5_vso, Cv(v5)*Tv(P5)*j6_vso];

aee = J*ddq + dJ*dq;
```

UR5 动力学模型

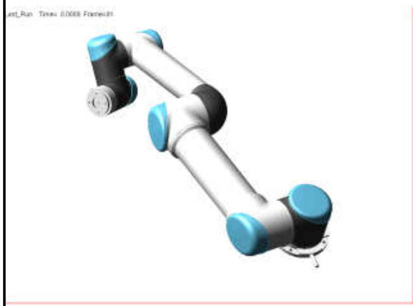
Problem 6（求所有杆件加速度）：



```
求C的导数
dC=......

求ca
ca = [zeros(36,1);ddq] - dC'*v;

求所有杆件加速度
a = C'\ca;

a0 = a(1:6);
......
a6 = a(37:42);
```

UR5 动力学模型

Problem 7（动力学反解）：



求所有杆件惯量：
```
I0=Tf(P0) * I0o * Tf(P0)';
……
I6=Tf(P6) * I6o * Tf(P6)';

I=blkdiag(I0,I1,I2,I3,I4,I5,I6);
```

求外力：
```
g=[0,0,-9.8,0,0,0]';

f0=-I0*g + Cf(v0)*I0*v0;
……
f6=-I6*g + Cf(v6)*I6*v6;

fp=[f0;f1;f2;f3;f4;f5;f6];
```

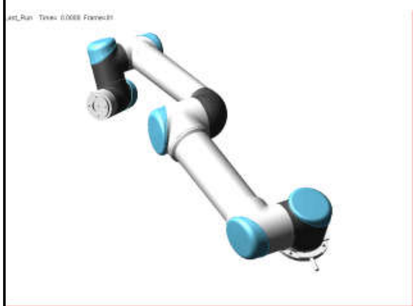
求ca：
```
ca = [zeros(36,1);ddq] - dC'*v;
```

求解方程：
```
A = [-I, C;C', zeros(42,42)];
b = [fp;ca];
x = A\b;
```

列出驱动力：
```
actuation_force = x(end-5:end);求C的导数
```

UR5 动力学模型

Problem 8（动力学正解）：



重新构建C和dC：
C2=……
dC2=……

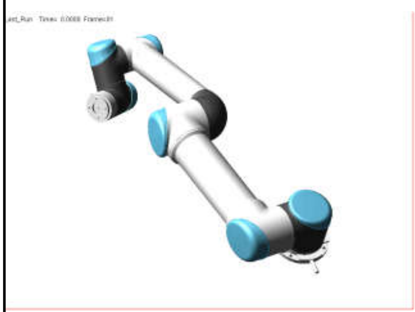
重复反解过程：

……

求解得到：
```
x=A\b;

aj1 = x(7:12)-x(1:6) - Cv(v0)*v1;
aj2 = x(13:18)-x(7:12) - Cv(v1)*v2;
aj3 = x(19:24)-x(13:18) - Cv(v2)*v3;
aj4 = x(25:30)-x(19:24) - Cv(v3)*v4;
aj5 = x(31:36)-x(25:30) - Cv(v4)*v5;
aj6 = x(37:42)-x(31:36) - Cv(v5)*v6;
```

UR5 动力学模型

Problem 9（动力学通用形式）：



```
A = [
-I, C
 C', zeros(42,42)    ];

B = inv(A);

M = B(end-5:end,end-5:end);
h = B(end-5:end,:)*[fp;- dC'*v];

actuation_force2 = M*ddq+h;
```

小结

- 刚体无穷大，力可以施加到任何位置，运动可表达在任何位置
- 速度螺旋和力螺旋是空间中的六维旋量
- 旋量是客观存在的实体，包括轴线、螺距等，但是可以在不同坐标系之间迁移
- 速度螺旋和力螺旋各自是6维的不含内积的线性空间，且彼此为对偶空间
- 任何运动副，可以用一组运动螺旋表示运动，力螺旋表示约束力，且它们互为零化子空间
- 可以通过选择坐标系，用Plücker基较为简化的表示运动副，这坐标系位于关节所连接的杆件

小结

- 四个伴随矩阵：

$$T = \begin{bmatrix} R & \vec{p} \times R \\ & R \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} R & \\ \vec{p} \times R & R \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} \times = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} \times^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix}$$

小结

- 位姿矩阵的微分：

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\vec{p}} \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times R & \vec{\omega} \times \vec{p} + \vec{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T$$

$$\dot{T} = \hat{v} \times T = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \vec{v} \times \\ & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T$$

$$\dot{T}^* = \hat{v} \times^* T^* = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times & \\ \vec{v} \times & \vec{\omega} \times \end{bmatrix} T^*$$

- 速度螺旋到位姿矩阵的指数映射：

$$P(\hat{v}\theta) = \begin{bmatrix} E + \sin\theta\, \vec{\omega} \times + (1 - \cos\theta) \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times & (E - R) \vec{\omega} \times \vec{v} + \theta (\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{\omega} \\ & 1 \end{bmatrix}$$

小结

- 空间加速度是速度旋量的导数：

$$\hat{a} = \dot{\hat{v}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- 约束矩阵与惯量矩阵的坐标系转换：

$$C = T^* C$$

$$I = T^* I (T^*)^T$$

- 微分：

$$\dot{C} = \hat{v} \times^* C$$

$$\dot{I} = \hat{v} \times^* I + I \hat{v} \times$$

小结

- 动力学方程的通用形式：

$$\begin{bmatrix} -I & C \\ C^T & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{f}_p \\ c_a \end{bmatrix}$$