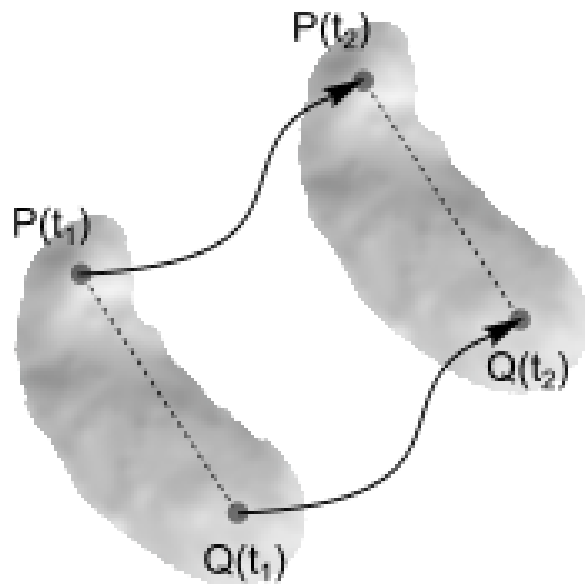


# 第一讲

# 力旋量与速度旋量

潘阳 博士  
上海交通大学

# 刚体的运动



思考：

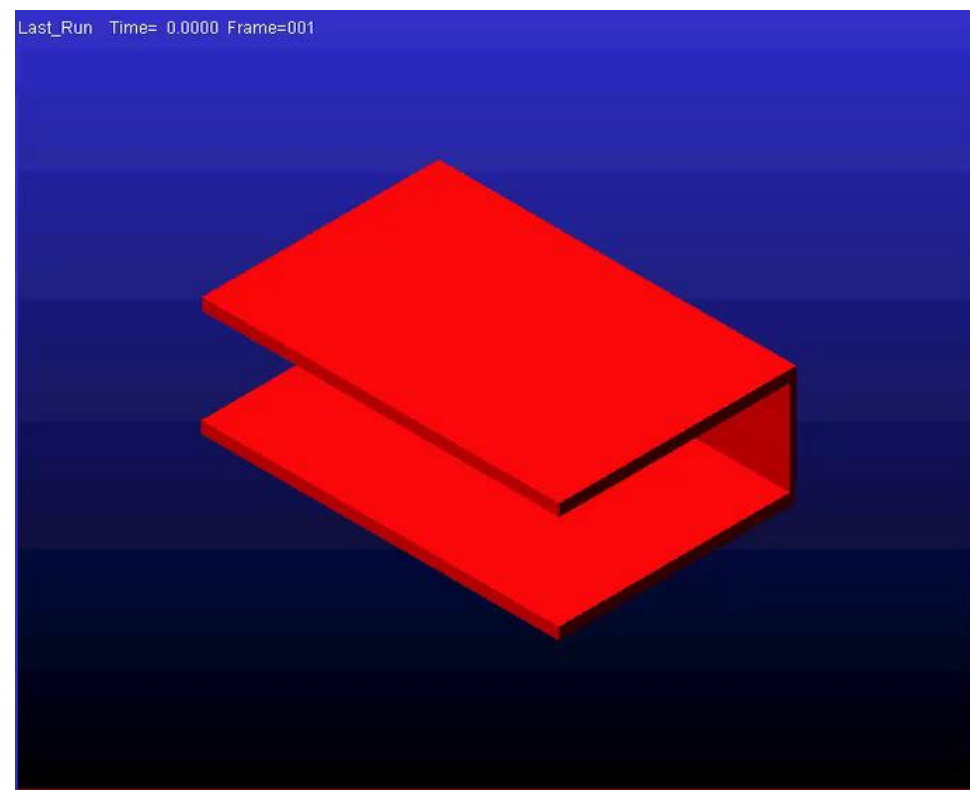
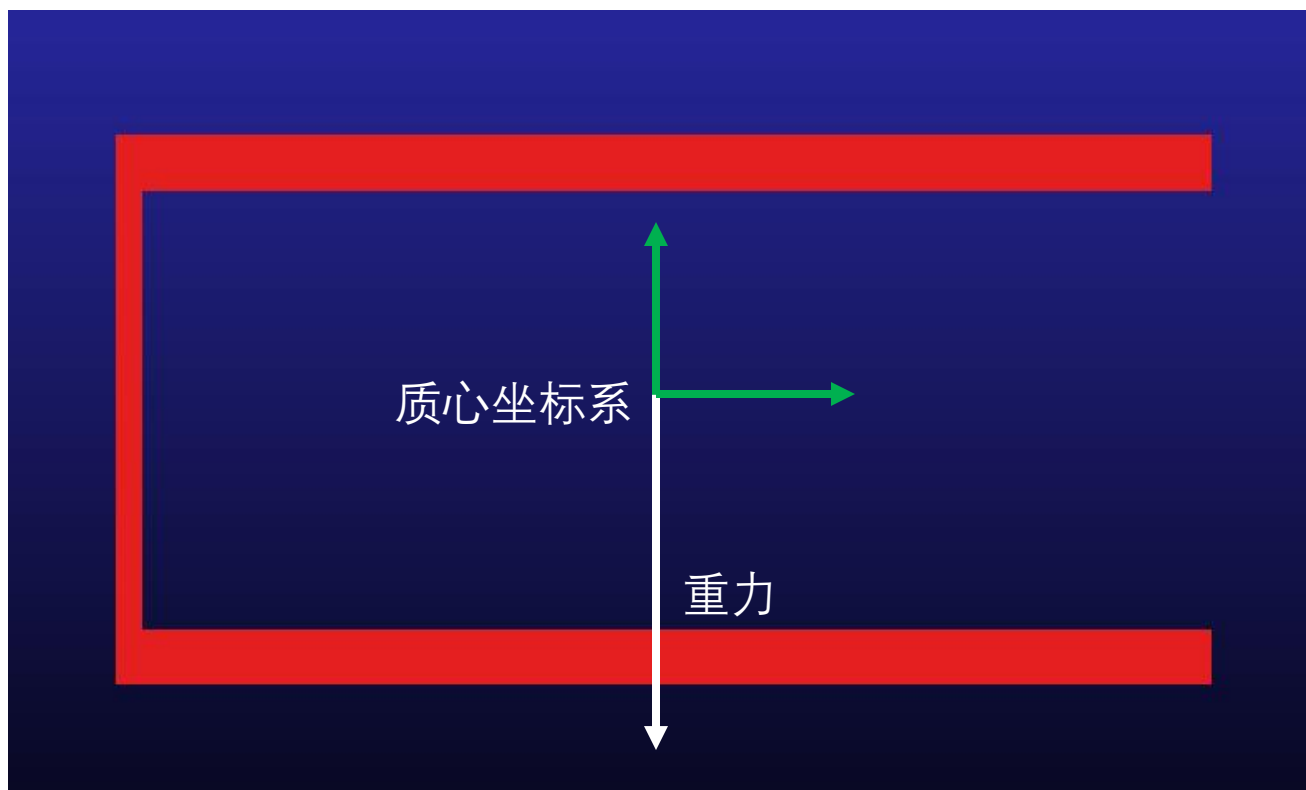
- 刚体的尺寸在影响什么？
- 可以在刚体外部施加力吗？
- 可以在刚体外部定义坐标系吗？

在物理学里，**理想刚体**（rigid body）是一种**有限尺寸**，可以**忽略形变**的固体。

——wikipedia

$$\|\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{q}(t_1)\| = \|\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{q}(t_2)\|$$

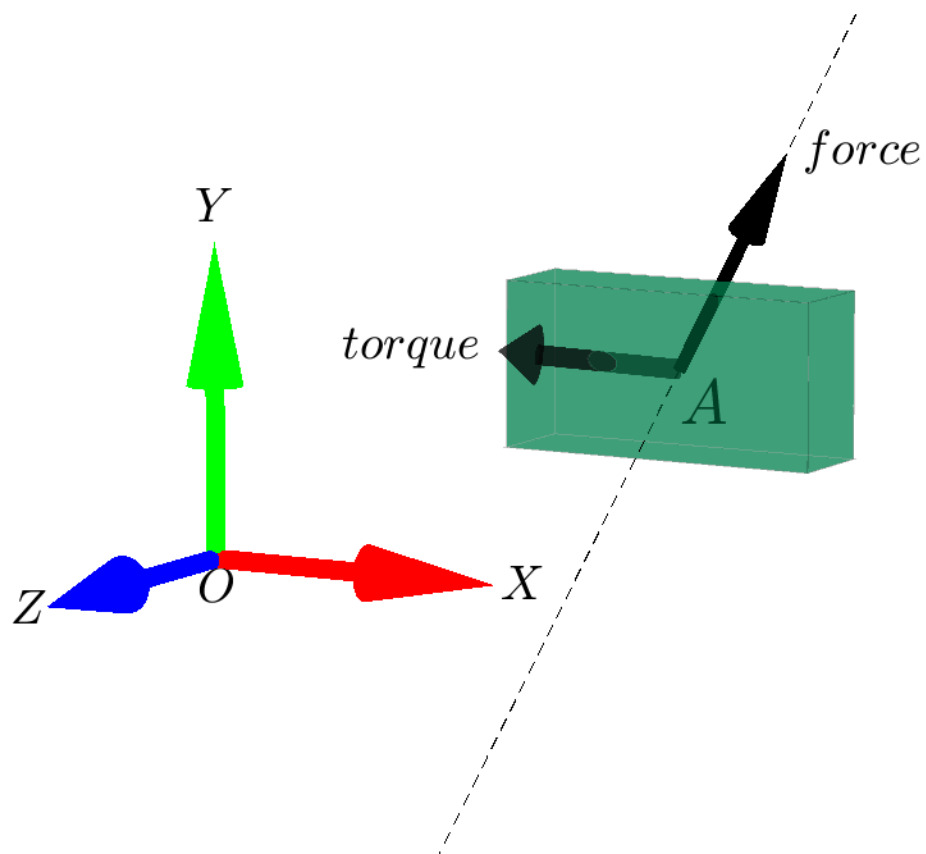
# 刚体的运动



- 力也可以施加在刚体外部
- 可以用外部坐标系描述刚体运动
- 刚体的大小、形状并不影响力和运动

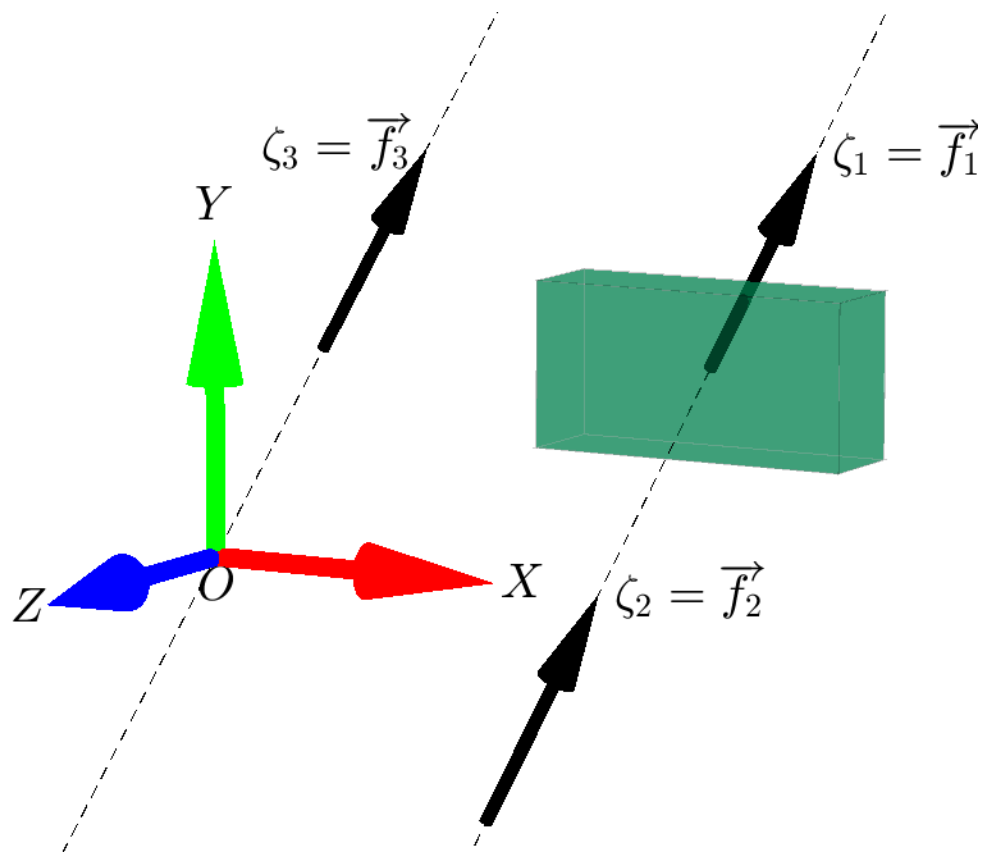
刚体可以看作没有形状、连续的、充满整个空间的物体

# 刚体的力与力矩

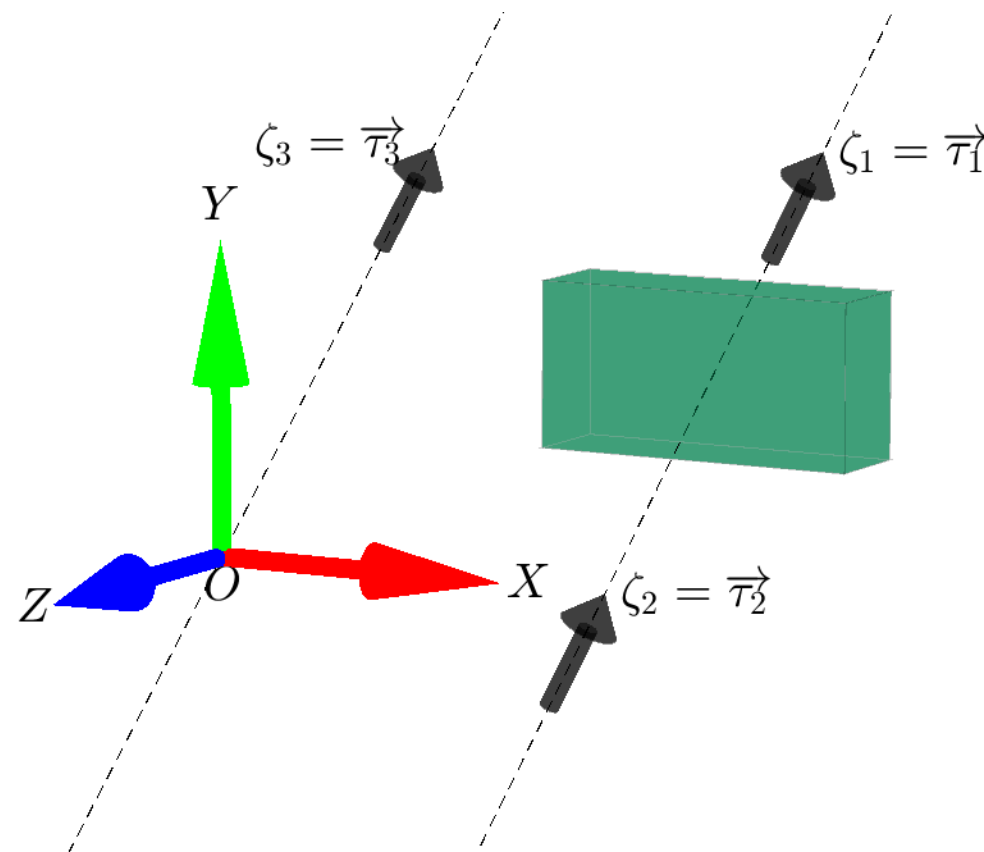


- 力是物体之间的相互作用
- 空间中对刚体在A点处的作用 $\zeta$ ，一定可以表示成：
  - 纯力 轴线过A点
    - 包含大小和方向 $\vec{f}$
  - 力偶
    - 包含大小和方向 $\vec{\tau}$
- $(\vec{f}, \vec{\tau})$ 同时作用在刚体上
- 所有的力、力矩等相互作用，都可以表达成这样的形式！

# 刚体的力与力矩

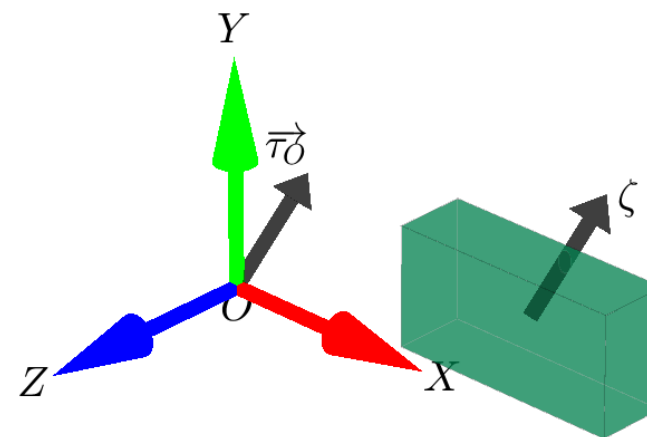
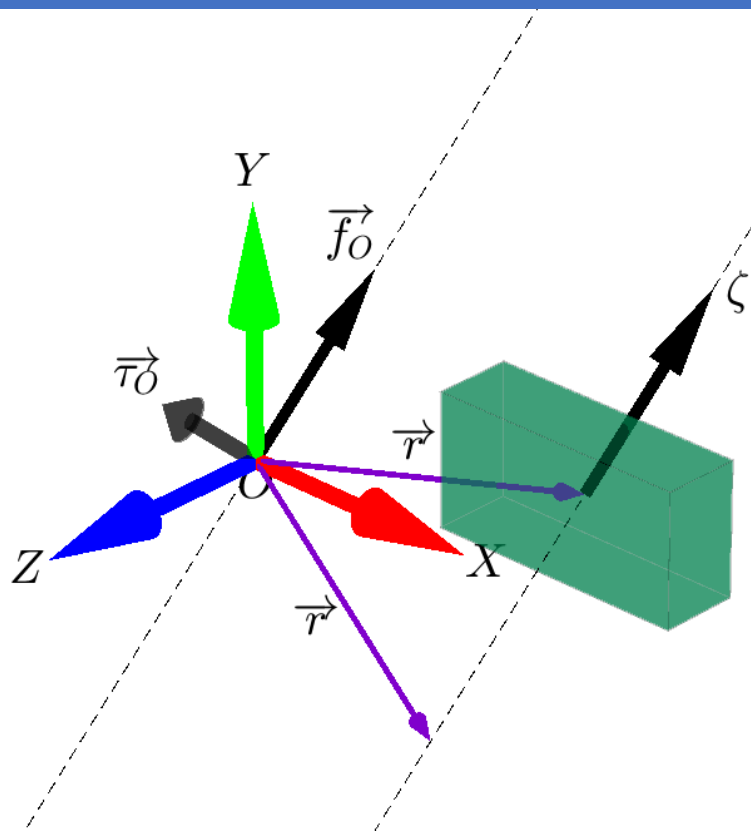


- $\zeta_1 = \zeta_2 \neq \zeta_3$
- 纯力是线矢
- 纯力有大小、方向、作用线



- $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3$
- 纯力偶是三维矢量
- 纯力偶只有大小、方向

# 刚体的力与力矩



- 为区分三维和六维向量，六维向量记作  $\hat{f}$
- $\hat{f}_r = [\vec{f}, \vec{0}] \rightarrow \hat{f}_o = [\vec{f}_o, \vec{\tau}_o] = [\vec{f}, \vec{r} \times \vec{f}]$
- $\vec{r}$  为  $\zeta$  所在直线上的任意一点

- $\hat{f}_r = [\vec{0}, \vec{r}] \rightarrow \hat{f}_o = [\vec{0}, \vec{\tau}_o]$
- **任何力和力偶都可以表达在O点处！**
- 回想：刚体无穷大，力和力矩可以施加在任何位置

# 刚体的力与力矩

力旋量 (wrench)

空间中任意形式的力、力偶或它们的混合都可以在O点下表达。

此时所有的力、力偶或它们的混合形成一个线性空间：

$$\mathbb{F}^6 = \mathbb{R}^6$$

力作用的叠加对应线性空间的加法：

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \hat{f}_{1o} + \hat{f}_{2o}$$

力作用的缩放对应线性空间的数乘：

$$n \cdot \zeta = n \cdot \hat{f}_{1o}$$

注意：O点的选取并不影响加法和数乘。  
请读者自证所有的力都满足线性空间的运算条件

## 定义——向量空间 (vector space)

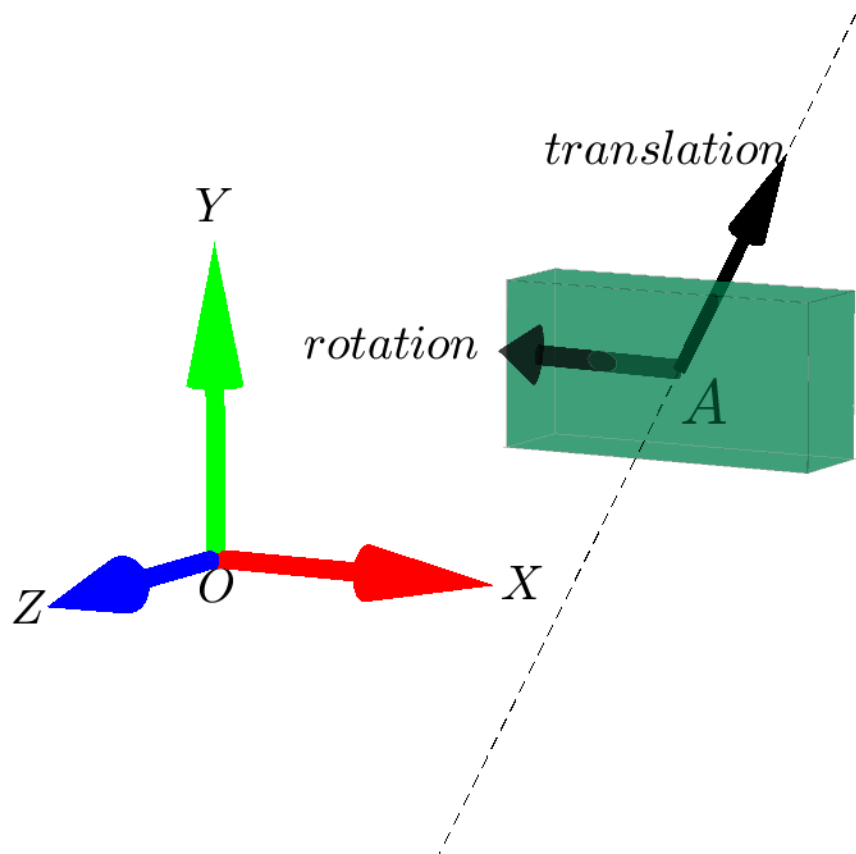
给定数域  $\mathbb{F}$  与集合  $V$  可以定义两种运算：

- 加法  $+$  :  $V \times V \rightarrow V, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
- 数乘  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times V \rightarrow V, \forall r \in \mathbb{F}, \mathbf{u} \in V \Rightarrow r \cdot \mathbf{u} \in V$

且这两种运算满足以下8条：

- 加法交换律 :  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- 加法结合律 :  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- 加法单位元 :  $\exists! \mathbf{0} \in V, \text{ s.t. } \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V$
- 加法逆元素 :  $\forall \mathbf{u} \in V, \exists! -\mathbf{u} \in V, \text{ s.t. } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- 与数乘相容 :  $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
- 数乘单位元 :  $\exists! 1 \in \mathbb{F}, \text{ s.t. } 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V$
- 与向量加法相容 :  $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- 与数域加法相容 :  $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

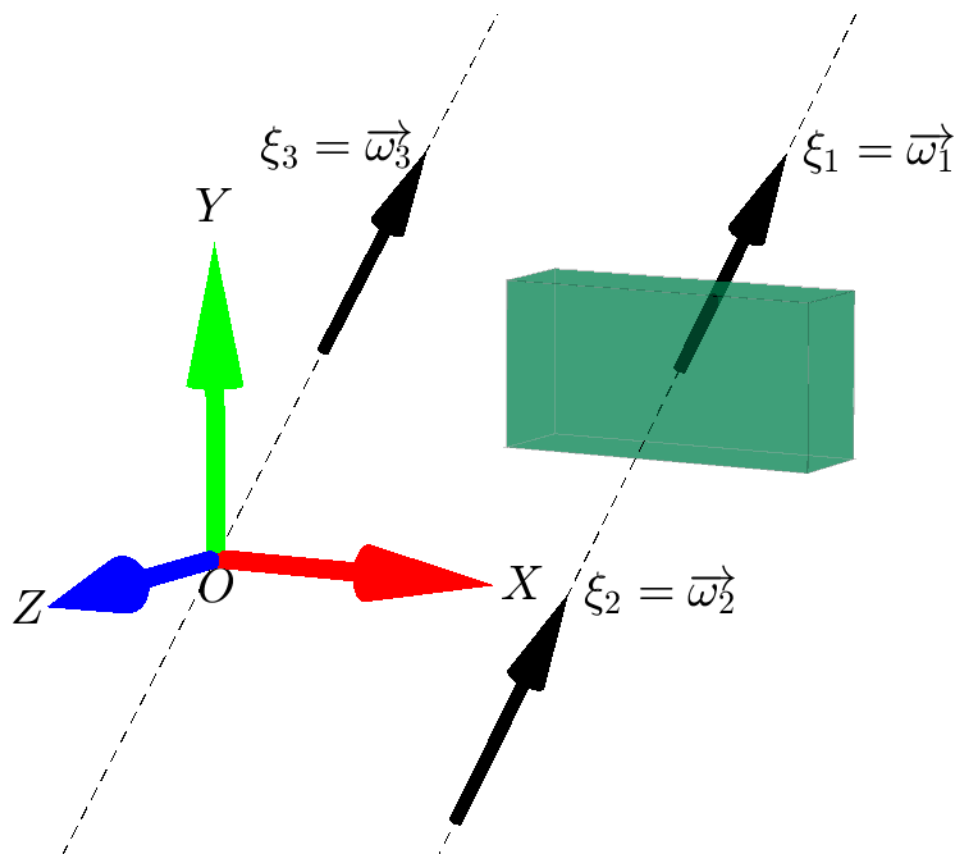
# 刚体的线速度与角速度



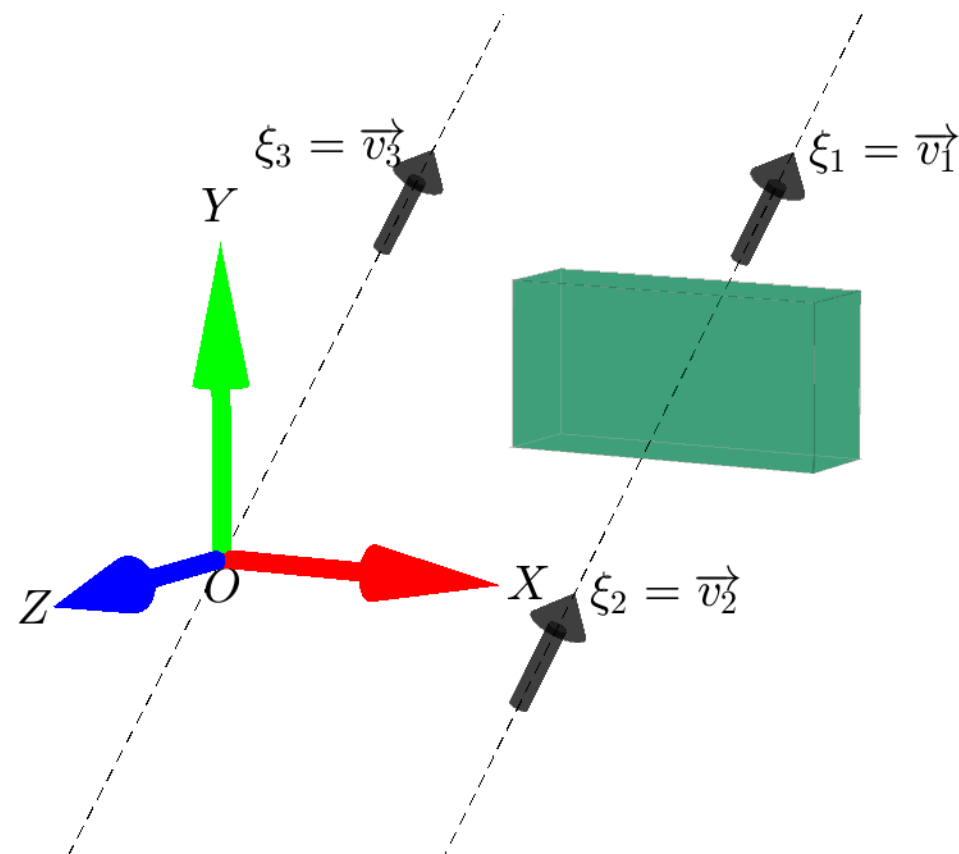
- 刚体的瞬时运动
- 空间中的刚体的瞬时运动 $\xi$ ，一定可以表示成：
  - 纯转动 轴线过A点  
包含大小和方向 $\vec{\omega}$
  - 纯平动  
包含大小和方向 $\vec{v}$ $(\vec{v}, \vec{\omega})$ 同时叠加在刚体上
- 所有的瞬时运动，都可以表达成这种形式！



# 刚体的线速度与角速度

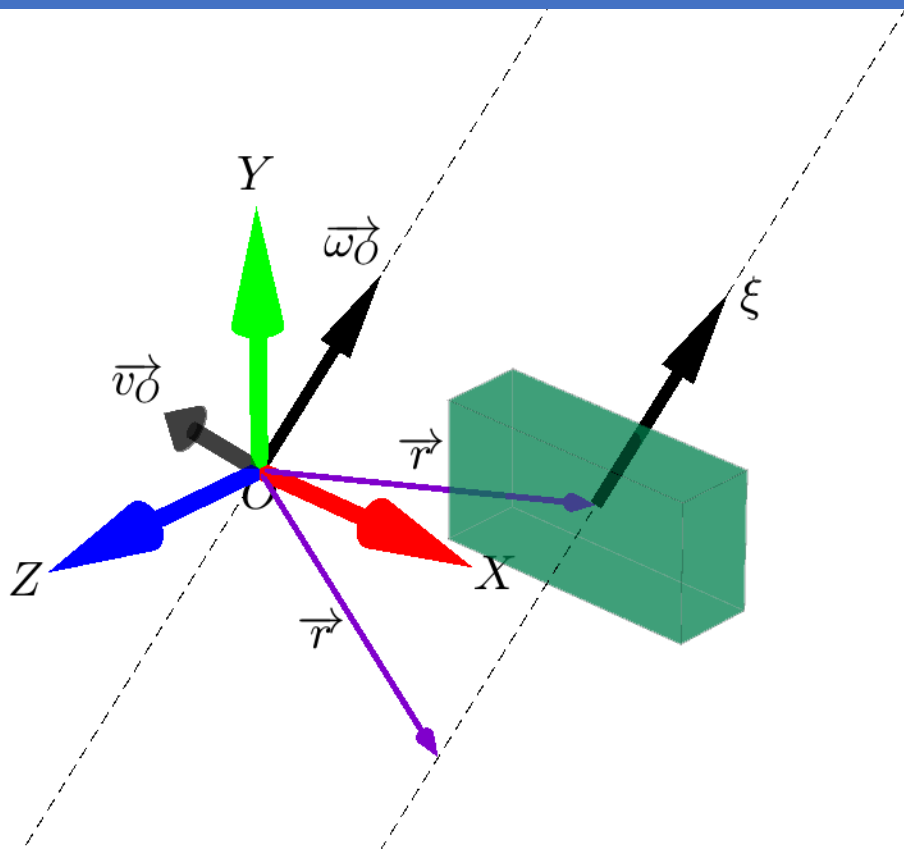


- $\xi_1 = \xi_2 \neq \xi_3$
- 角速度是线矢
- 角速度有大小、方向、作用线

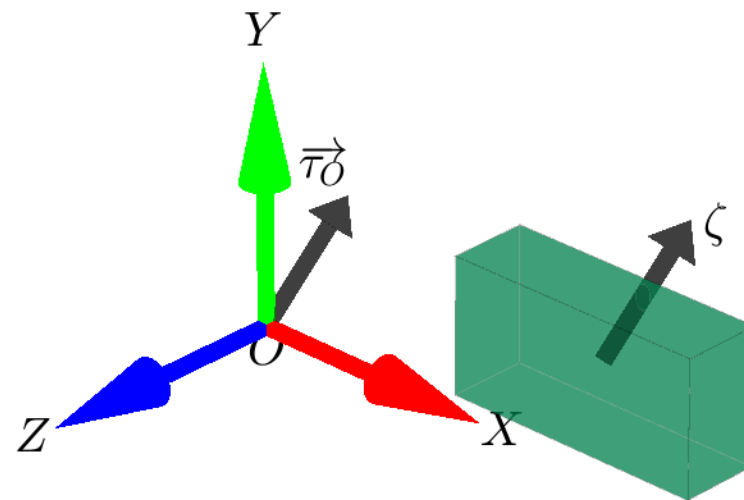


- $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$
- 线速度是三维矢量
- 线速度只有大小、方向

# 刚体的线速度与角速度



- $\hat{v}_r = [\vec{0}, \vec{\omega}] \rightarrow \hat{v}_o = [\vec{v}_o, \vec{\omega}_o] = [\vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{\omega}]$
- $\vec{r}$  为  $\xi$  所在直线上的任意一点



- $\hat{v}_r = [\vec{0}, \vec{v}] \rightarrow \hat{v}_o = [\vec{0}, \vec{v}_o]$
- **任何角速度和线速度都可以表达在O点处！**
- 回想：可以用刚体外的坐标系描述刚体运动

# 刚体的线速度与角速度

运动旋量 (twist)

空间中任意形式的线速度、角速度或它们的混合都可以在O点下表达

此时所有的线速度、角速度或它们的混合形成一个线性空间：

$$\mathbb{M}^6 = \mathbb{R}^6$$

瞬时速度的叠加对应线性空间的加法（没有先后顺序）：

$$\xi_1 + \xi_2 = \hat{v}_{1o} + \hat{v}_{2o}$$

瞬时速度的缩放对应线性空间的数乘：

$$n \cdot \xi = n \cdot \hat{v}_{1o}$$

注意：O点的选取并不影响加法和数乘。

## 定义——向量空间 (vector space)

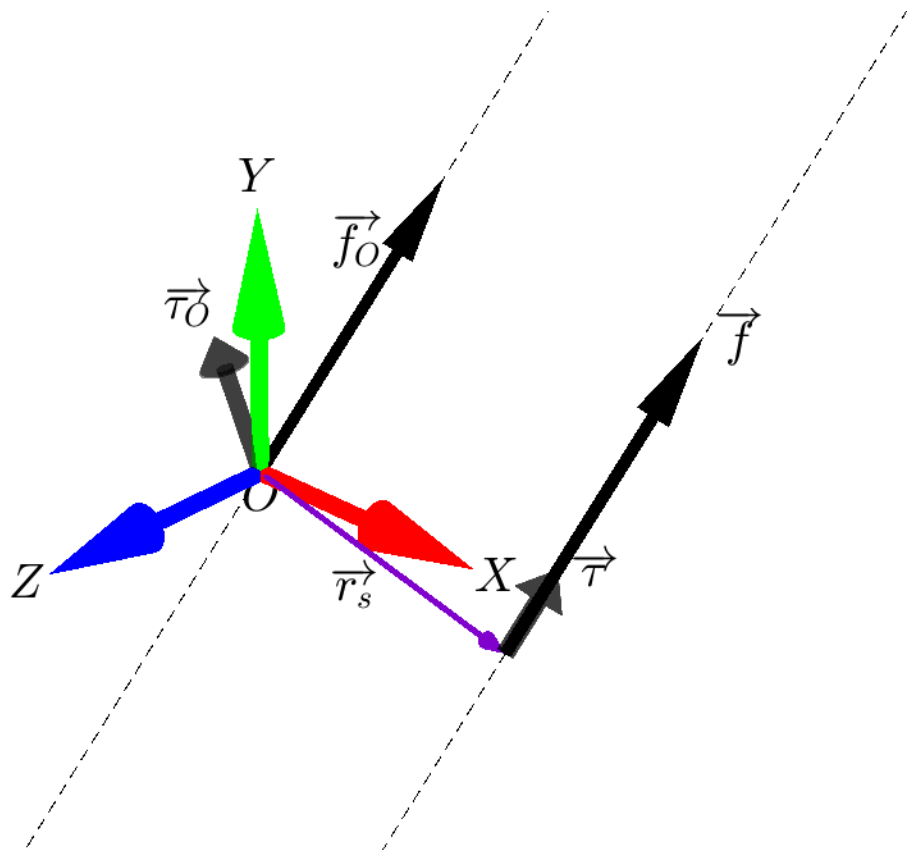
给定数域  $\mathbb{F}$  与集合  $V$  可以定义两种运算：

- 加法  $+$  :  $V \times V \rightarrow V, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$
- 数乘  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times V \rightarrow V, \forall r \in \mathbb{F}, \mathbf{u} \in V \Rightarrow r \cdot \mathbf{u} \in V$

且这两种运算满足以下8条：

- 加法交换律 :  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- 加法结合律 :  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- 加法单位元 :  $\exists! \mathbf{0} \in V, \text{ s.t. } \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V$
- 加法逆元素 :  $\forall \mathbf{u} \in V, \exists! -\mathbf{u} \in V, \text{ s.t. } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- 与数乘相容 :  $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
- 数乘单位元 :  $\exists! 1 \in \mathbb{F}, \text{ s.t. } 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V$
- 与向量加法相容 :  $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- 与数域加法相容 :  $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

# 螺旋



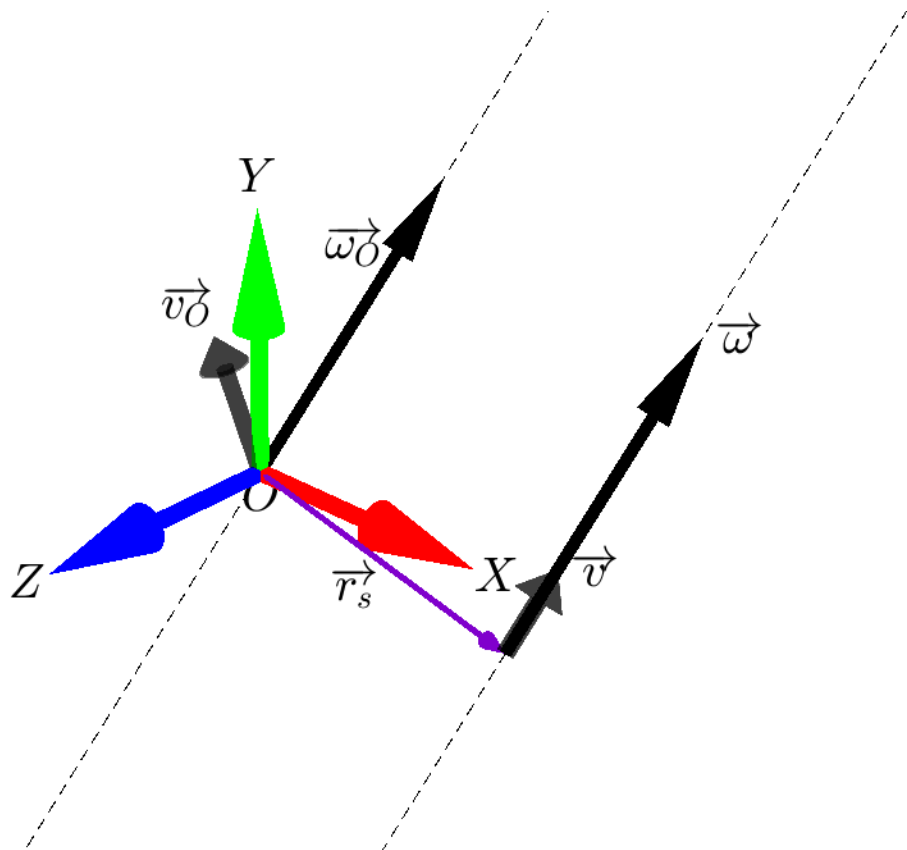
当 $\|\vec{f}_O\| \neq 0$ 时：

- 对于O点处的任意力和力偶 $\hat{f}_O = [\vec{f}_O, \vec{\tau}_O]$ , 可以找到一个最短的 $\vec{r}_s$ ,使得 $\hat{f} = [\vec{f}_O, h\vec{f}_O]$
- $\vec{r}_s = \frac{\vec{f}_O \times \vec{\tau}_O}{\vec{f}_O \cdot \vec{f}_O}$
- $h = \frac{\vec{f}_O \cdot \vec{\tau}_O}{\vec{f}_O \cdot \vec{f}_O}$
- $h$ 称为**螺距 (pitch)**

当 $\|\vec{f}_O\| = 0$ 时：

- $h = \infty$

# 螺旋



当 $\|\vec{\omega}_0\| \neq 0$ 时：

- 对于0点处的任意速度旋量  $\hat{v}_0 = [\vec{v}_0, \vec{\omega}_0]$ , 可以找到一个最短的  $\vec{r}_s$ , 使得  $\hat{v} = [h\vec{\omega}_0, \vec{\omega}_0]$
- $\vec{r}_s = \frac{\vec{\omega}_0 \times \vec{v}_0}{\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_0}$
- $h = \frac{\vec{\omega}_0 \cdot \vec{v}_0}{\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_0}$
- $h$  称为 **螺距 (pitch)**

当 $\|\vec{\omega}_o\| = 0$ 时：

- $h = \infty$

# 螺旋

- 在几何中，任何一条直线  $l$ ，以及螺距  $h$ ，可以组成一个**螺旋(screw)**
- 刚体的瞬时运动为**速度螺旋(twist)**，所受的外力为**力螺旋(wrench)**
- **单位速度螺旋 (unit twist)** :  $\|\vec{\omega}\| = 1$  或  $\|\vec{\omega}\| = 0, \|\vec{v}\| = 1$  的速度螺旋  $\xi$
- **单位力矩螺旋 (unit wrench)** :  $\|\vec{f}\| = 1$  或  $\|\vec{f}\| = 0, \|\vec{\tau}\| = 1$  力螺旋  $\zeta$
- 纯力偶/线速度等无轴线的矢量是螺距无穷大的螺旋，  $h = \infty$
- 当螺距  $h = 0$ ，速度螺旋是**纯转动**，力螺旋是**纯力**
- 速度螺旋和力螺旋可以在给定点处，用六维的线性空间表示
- 几何意义上的螺旋，并非一个线性空间（反例：位置螺旋）

# 螺旋

练习：

1. 已知单位速度螺旋螺距 $h = 1$ ，所在直线 $l$ 经过 $(1,0,0)$ 和 $(0,0,1)$ 点，求该螺旋的六维向量表达。
2. 请求出上述刚体在 $(2,1,1)$ 点处的线速度。
3. 请求出力矩螺旋 $\hat{f} = (\vec{f}, \vec{\tau}) = (-1, 1, 0 \mid -2, 0, 2)$ 所在的直线 $l$ 以及螺距 $h$

# 螺旋与线性空间

**线性组合** (Linear combination) 是线性代数中具有如下形式的表达式。其中  $\vec{v}_i$  为任意类型的项,  $a_i$  为标量:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \cdots + a_n \vec{v}_n$$

**线性生成空间** (Linear span)

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  为域  $\mathbb{F}$  上向量空间  $V$  的子集合。

所有  $S$  的有限线性组合构成的集合, 称为  $S$  所生成的空间, 记作  $\text{span}(S)$ 。

**线性相关** (Linear dependence)

如果存在不全为零的  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , 使得  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = 0$ , 那么就称  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  是线性相关的

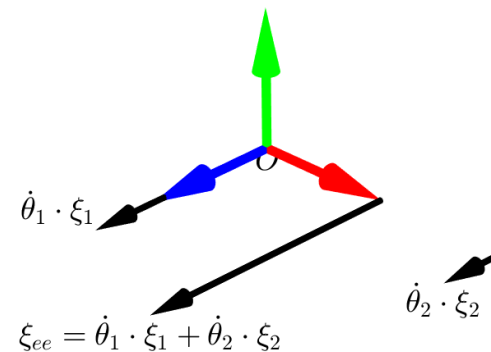
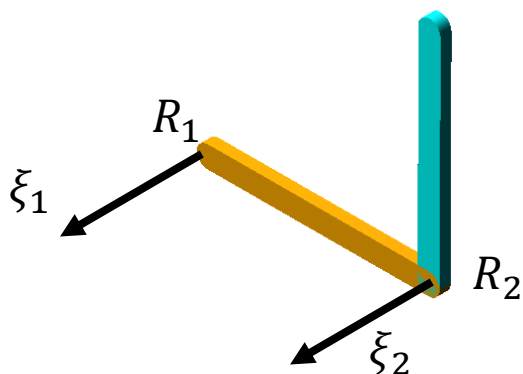
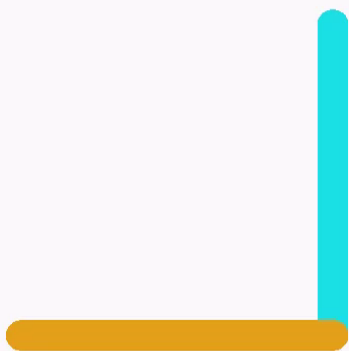
**性质 :**

$n$  个向量生成空间的维数不大于  $n$ , 等于  $n$  当且仅当这些向量线性无关。



# 螺旋与线性空间

## 速度螺旋示例——RR机构



$\xi_1$  为 R1 的单位速度螺旋  
 $\xi_2$  为 R2 的单位速度螺旋  
在 O 坐标系下，螺旋表达如下：

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\dot{\theta}_1 = 1.0$  为 R1 的转动速度（标量）  
 $\dot{\theta}_2 = 0.2$  为 R2 的转动速度  
末端的速度螺旋是前两者的线性组合：

$$\hat{v}_{ee} = \dot{\theta}_1 \hat{v}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

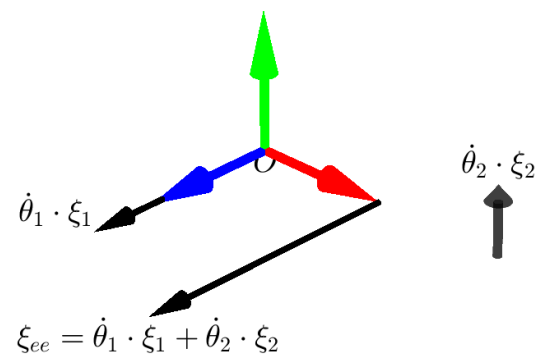
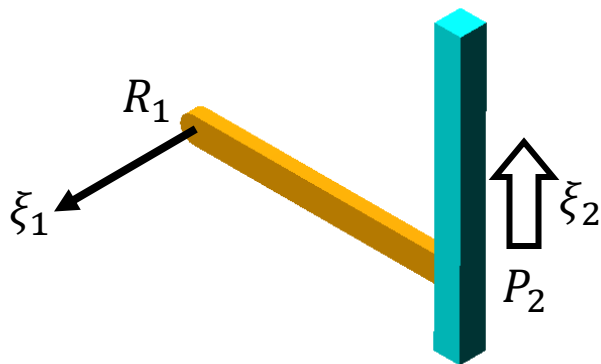
写成雅可比形式：

$$\hat{v}_{ee} = [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2]_{6 \times 2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J_{6 \times 2} \dot{\theta}$$

**注意：**以上仅仅分析了 0 时刻的瞬时运动

# 螺旋与线性空间

## 速度螺旋示例——RP机构



$\xi_1$  为 R1 的单位速度螺旋  
 $\xi_2$  为 P2 的单位速度螺旋  
在 O 坐标系下，螺旋表达如下：

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\dot{\theta}_1 = 1.2$  为 R1 的转动速度（标量）  
 $\dot{\theta}_2 = -0.2$  为 P2 的移动速度  
末端的速度螺旋是前两者的线性表达：

$$\hat{v}_{ee} = \dot{\theta}_1 \hat{v}_1 + \dot{\theta}_2 \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

RR机构和RP机构可以实现同样的运动。

这个“同样”**仅仅只存在于0时刻**

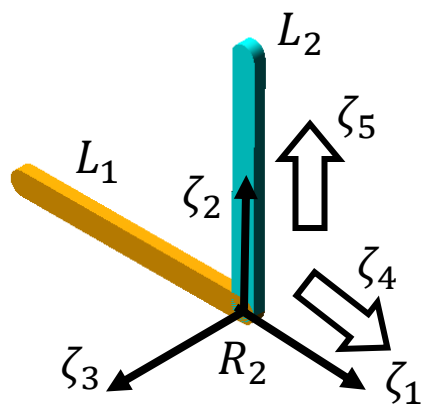
在其他时刻，R1的运动改变后面关节的单位速度螺旋

速度螺旋仅代表**瞬时运动**

# 螺旋与线性空间

## 力螺旋示例——运动副的约束力

R2处的坐标为 (1, 0, 0)



R副的约束力为5维子空间，在O坐标系下的表达：

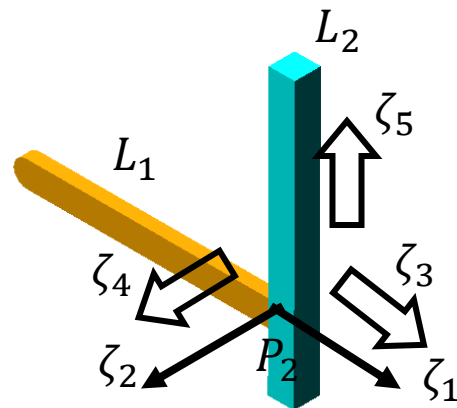
$$[\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}_R \in \text{span}(\{\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5\})$$

可以取广义的五维约束力坐标  $\eta$  使得：

$$\hat{f}_R = [\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] \cdot \eta$$

P2处的坐标为 (1, 0, 0)



P副的约束力为5维，在O坐标系下的表达：

$$[\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}_P \in \text{span}(\{\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5\})$$

请注意：约束力的基的选择不是唯一的！

# 螺旋与线性空间

**子空间** (sub-space) : 如果 $W$ 是 $V$ 的一个子空间, 那么必然有:

- (1)  $W \subseteq V$
- (2)  $W$ 依然满足 $V$ 中定义的加法和数乘

如果不考虑关节的转速限制, 串联机器人的末端速度螺旋, 在各个关节速度螺旋张成的子空间中。

**线性空间的基** (basis of vector space) :  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  是线性空间  $V$  的一组基, 那么:

- (1)  $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
- (2)  $\forall \vec{v} \in V, \exists! \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{v}$

# 螺旋与线性空间

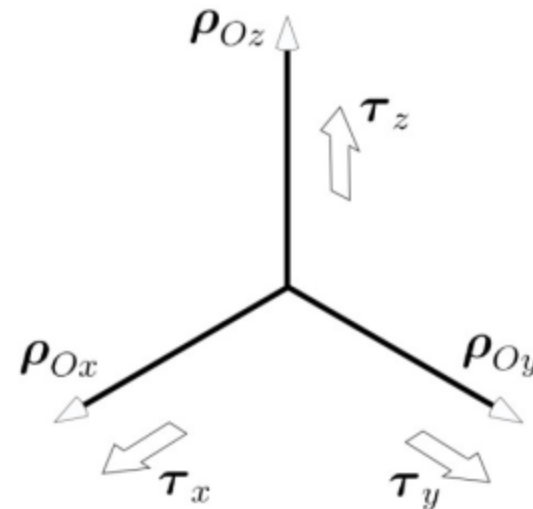
**Plücker基** (Plücker bases) :

- 三个绕着坐标轴的单位旋转 ( $h = 0$ )
- 三个沿着坐标轴方向的单位移动 ( $h = \infty$ )

$$\begin{aligned} & \{\rho_{Ox}, \rho_{Oy}, \rho_{Oz}, \tau_x, \tau_y, \tau_z\} \\ \xi &= (\vec{\omega}, \vec{v}_O) = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, v_{Ox} \vec{i} + v_{Oy} \vec{j} + v_{Oz} \vec{k}) \\ &= \omega_x \rho_{Ox} + \omega_y \rho_{Oy} + \omega_z \rho_{Oz} + v_{Ox} \tau_x + v_{Oy} \tau_y + v_{Oz} \tau_z \end{aligned}$$

- 三个沿着坐标轴的单位力 ( $h = 0$ )
- 三个沿着坐标轴方向的单位力偶 ( $h = \infty$ )

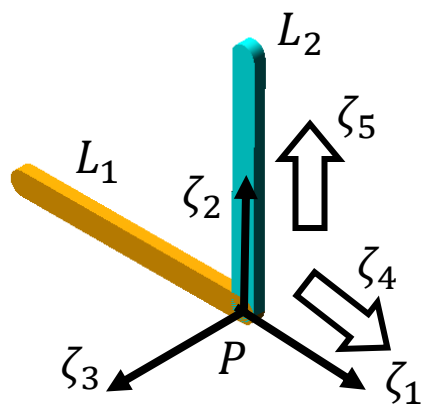
$$\begin{aligned} & \{\varphi_{Ox}, \varphi_{Oy}, \varphi_{Oz}, \mu_x, \mu_y, \mu_z\} \\ \zeta &= (\vec{f}, \vec{m}_O) = (f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}, m_{Ox} \vec{i} + m_{Oy} \vec{j} + m_{Oz} \vec{k}) \\ &= f_x \varphi_{Ox} + f_y \varphi_{Oy} + f_z \varphi_{Oz} + m_x \mu_x + m_y \mu_y + m_z \mu_z \end{aligned}$$



# 螺旋与线性空间

换一个坐标系来表达转动关节

P坐标系相对L1固定



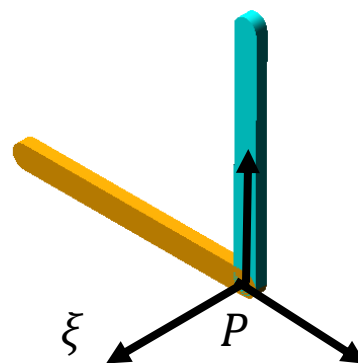
定义固定在 $L_1$ 上的坐标系 $P$ ，让 $R$ 副的转轴为它的 $z$ 轴

此时约束力空间的基

$$[\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

是Plücker基的一个子集。

P坐标系相对L1固定



此时速度螺旋空间的基：

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

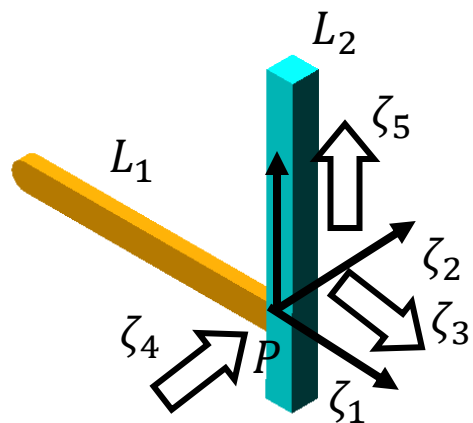
也是Plücker基的一个子集。

注意：不是所有的运动副都是1维的，例如S副的速度螺旋空间为3维，约束力空间是3维

# 螺旋与线性空间

换一个坐标系来表达移动关节

P坐标系相对L1固定



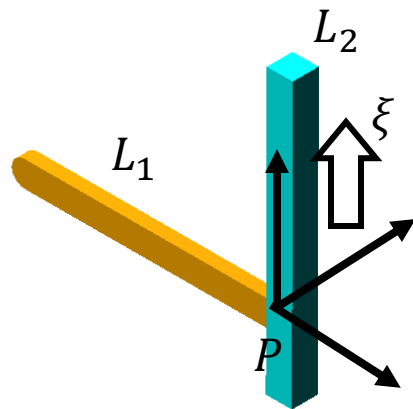
定义固定在 $L_1$ 上的坐标系 $P$ ，让 $P$ 副的方向为它的 $z$ 轴

此时约束力空间的基

$$[\hat{f}_1 \quad \dots \quad \hat{f}_5] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

是Plücker基的一个子集。

P坐标系相对L1固定



此时速度螺旋空间的基：

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

也是Plücker基的一个子集。

# 螺旋系

螺旋系 (Screw systems)

Gibson-Hunt 分类方法 (The Gibson-Hunt Classification)

螺旋系统可以按照以下方式分类

- 2 or 3, 维度 (dimension)
- I or II, 是否包含超过一个有限螺距的螺旋
- A...D, 包含0...3个无穷螺距的螺旋
- Angle, pitch 等其他螺旋的参数



# 螺旋系

1-systems



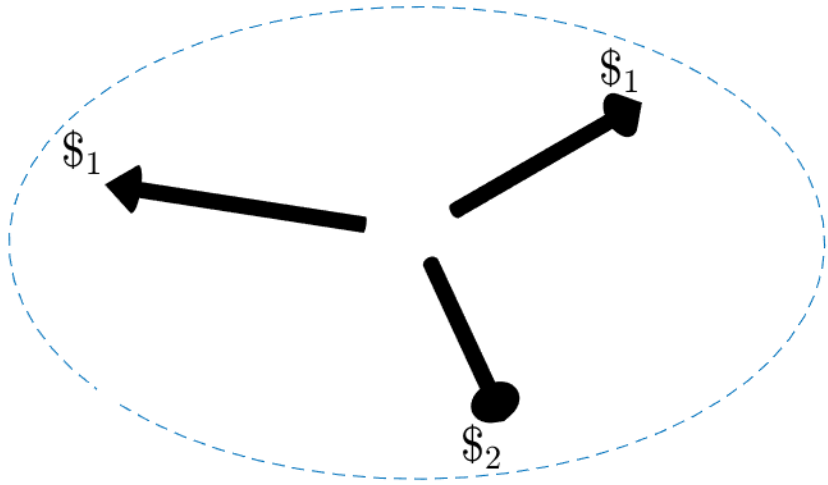
1- $\$0$ -system



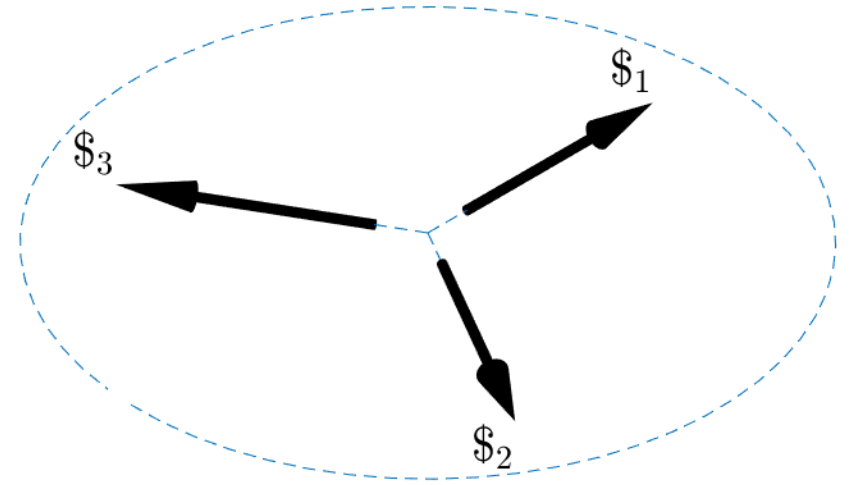
1- $\$_\infty$ -system

# 螺旋系

2-systems



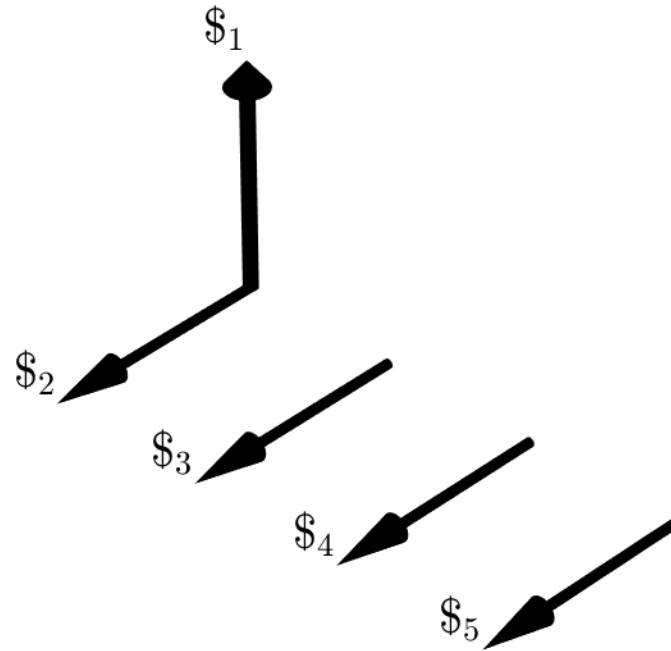
2- $\infty$ -system



2- $0$ -system

# 螺旋系

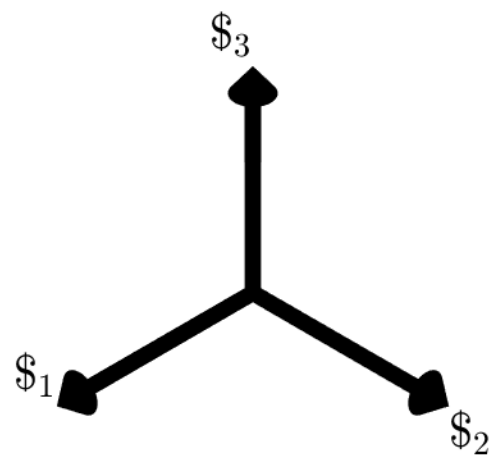
2-systems



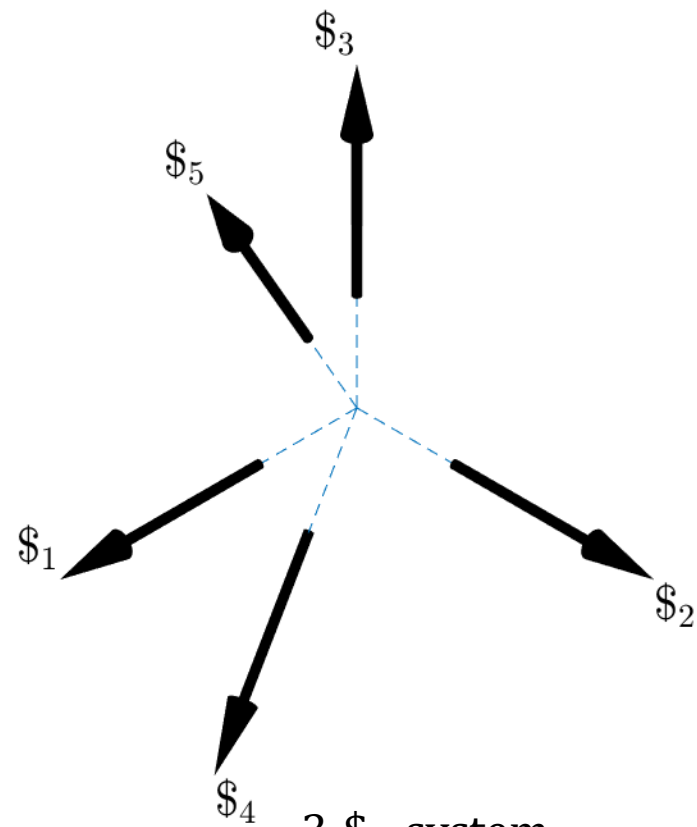
1- $\$_{\infty}$ -1- $\$_0$ -system

# 螺旋系

3-systems



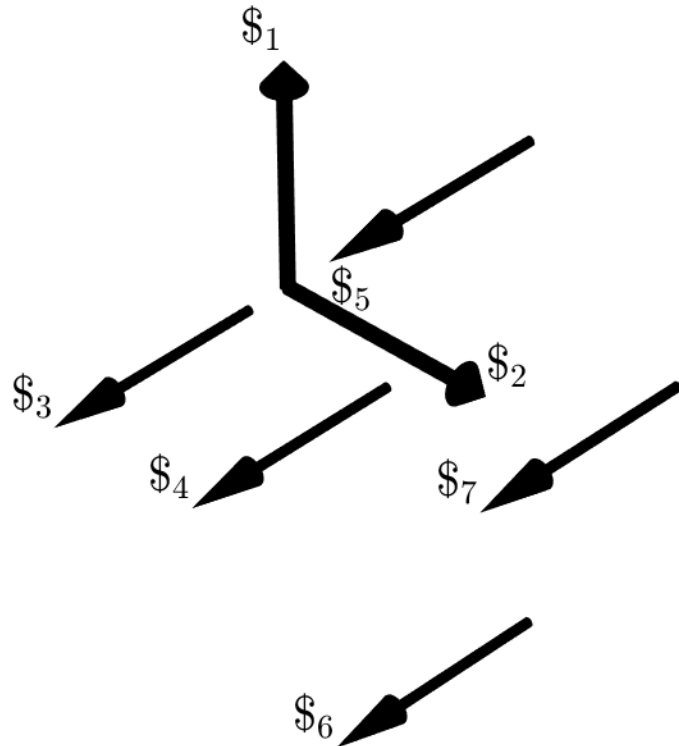
3- $\infty$ -system



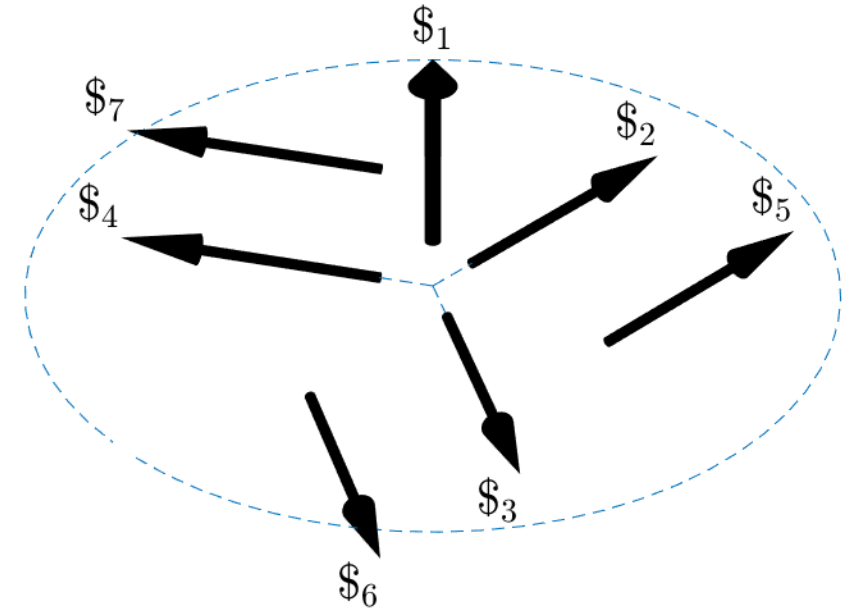
3- $0$ -system

# 螺旋系

3-systems



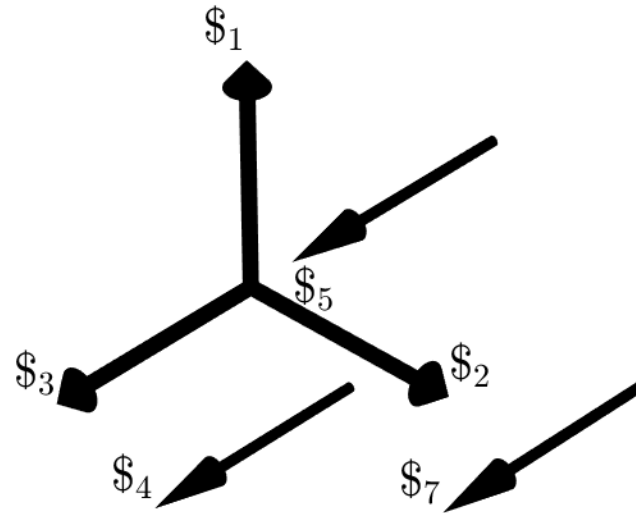
2- $\infty$ -1- $0$ -system



1- $\infty$ -2- $0$ -system

# 螺旋系

4-systems

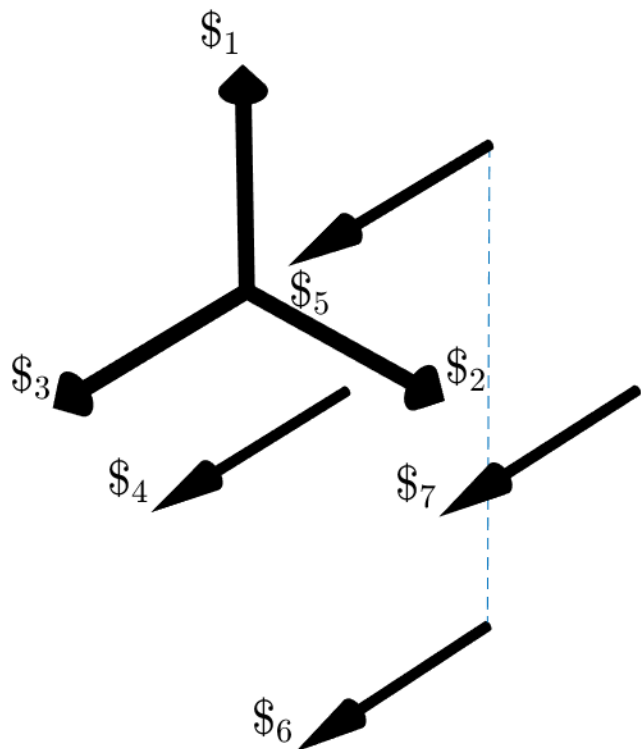


$\$6$

3- $\$_\infty$ -1- $\$0$ -system

# 螺旋系

练习：请找出下面4-系统的一组基



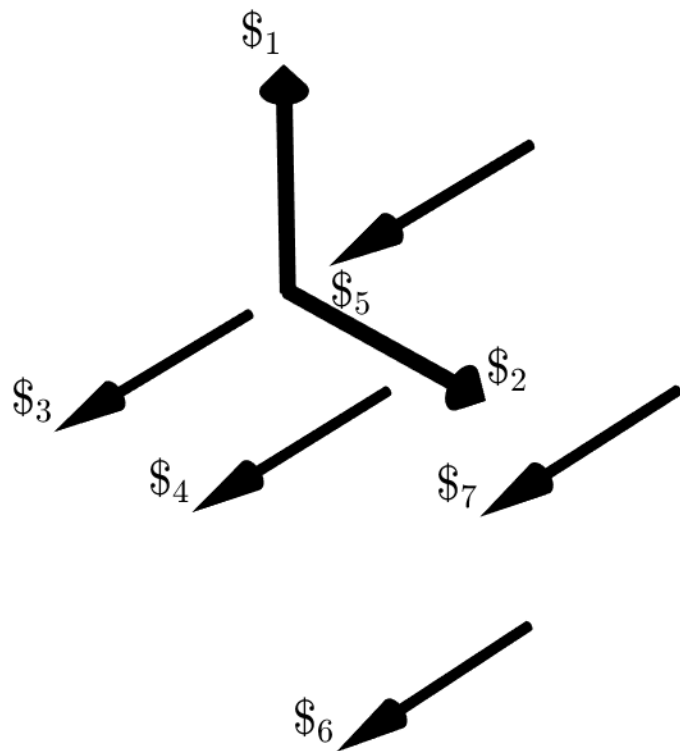
可能的基：

- $\$1$ 、 $\$2$ 、 $\$3$ 、 $\$4$  (3个 $\$_\infty$ 和1个 $\$0$ )
- $\$1$ 、 $\$3$ 、 $\$5$ 、 $\$6$  (2个 $\$_\infty$ 和2个 $\$0$ )
- $\$3$ 、 $\$4$ 、 $\$5$ 、 $\$7$  (1个 $\$_\infty$ 和3个 $\$0$ )
- .....

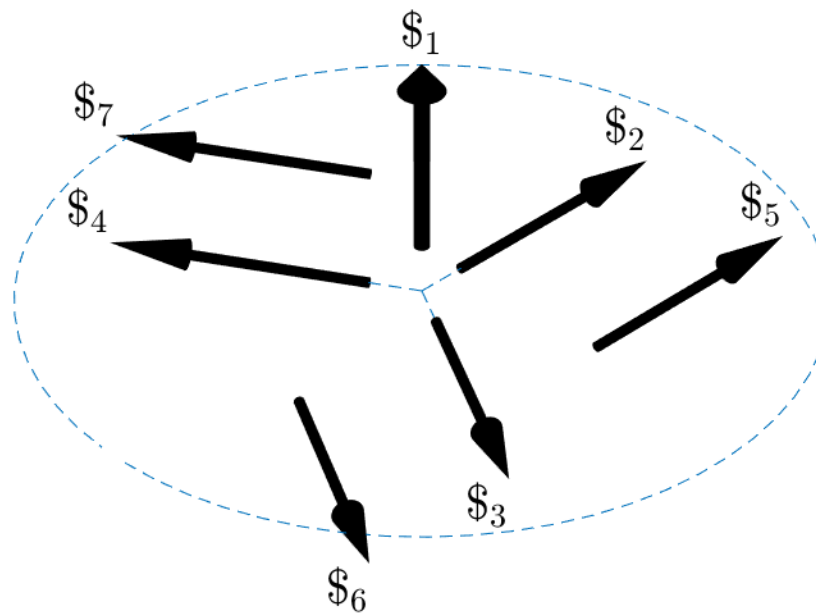
# 螺旋系

练习：

- 请找出平面运动中的速度螺旋的一组基
- 请找出平面运动中的约束力的一组基



平面运动：2- $\infty$ -1- $\$0$ -system



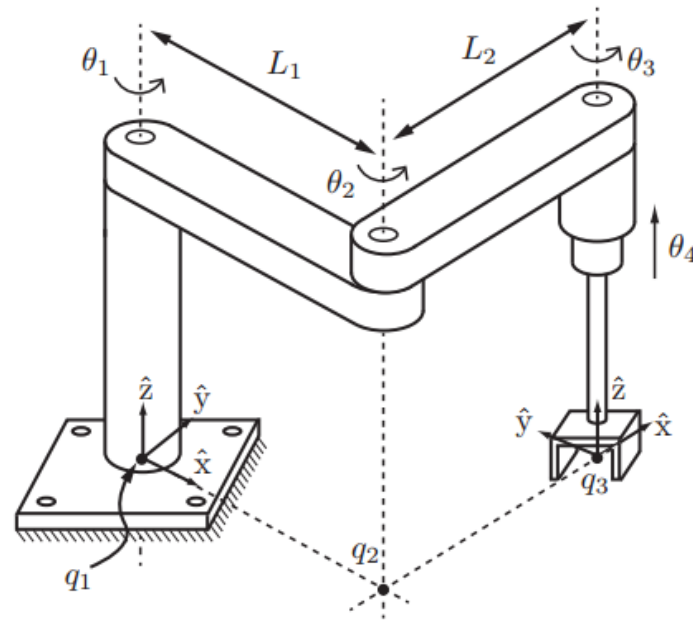
平面力：1- $\infty$ -2- $\$0$ -system



# 螺旋

练习：

1. 请找出下图中scala机器人的运动螺旋系。
2. 请分析，该机构什么时候处于奇异点。



# 内积空间与对偶空间

## 定义——内积空间 (Inner product space)

给定数域  $\mathbb{F}$  上的向量空间  $V$  可以定义以下运算：

- 内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$

且运算满足以下性质：

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
- $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

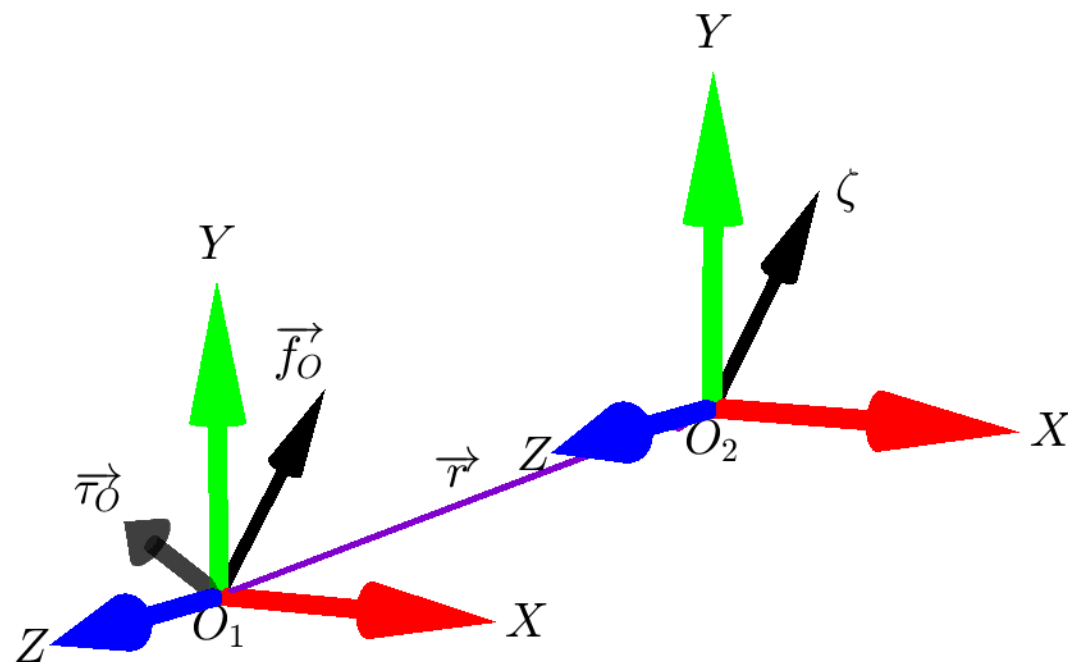
一般来说，内积定义为所有元素依次相乘后的和

内积空间自带范数  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$

内积一个重要意义就是衡量大小和角度

那么，速度与力螺旋空间是内积空间吗？

**不是！因为力乘力，或速度乘速度，没有意义！**



$$\vec{r} = (2, 0.8, 0.5)$$

$$\hat{f}_{O2} = (0.1, 0.6, -0.5, 0, 0, 0)$$

$$\hat{f}_{O1} = (0.1, 0.6, -0.5, -0.7, 1.05, 1.12)$$

$$1.8620 = \|\hat{f}_{O1}\| \neq \|\hat{f}_{O2}\| = 0.7874$$

同一个元素，在不同坐标系下，内积不相等！

# 内积空间与对偶空间

## 定义——双对偶空间 (double dual space)

给定数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  维向量空间  $V$ ，可以定义  $n$  维空间  $V^*$ ，以及他们之间的运算：

- 对偶积  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle: V \times V^* \rightarrow \mathbb{F}$ , 两者一样

且运算满足以下性质：

- $\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$
- $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

乘积是非退化的：

- $\forall \mathbf{u} \in V, \exists \mathbf{v} \in V^* \text{ s.t. } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$

性质：

对于  $V$  中的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，在  $V^*$  中存在唯一的另一组基  $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ ，使得： $e_i^* \cdot e_j = \delta_{ij}$

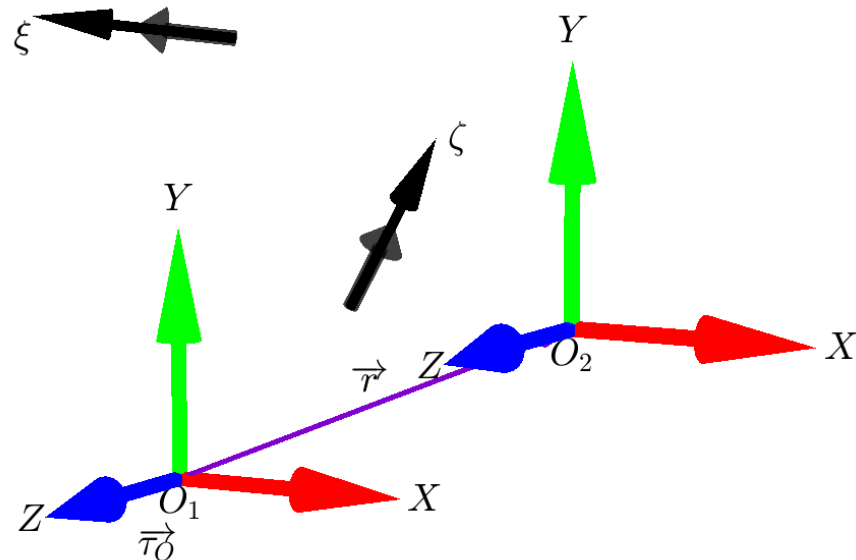
其中  $\delta_{ij}$  为定义好的  $n$  维矩阵中的元素

力螺旋空间  $\mathbb{F}^6$  和速度螺旋  $\mathbb{M}^6$  空间，构成双对偶空间，其中：

$$\langle \zeta, \xi \rangle = \hat{f}_o \cdot \hat{v}_o = \vec{f}_o \cdot \vec{v}_o + \vec{\tau}_o \cdot \vec{\omega}_o$$

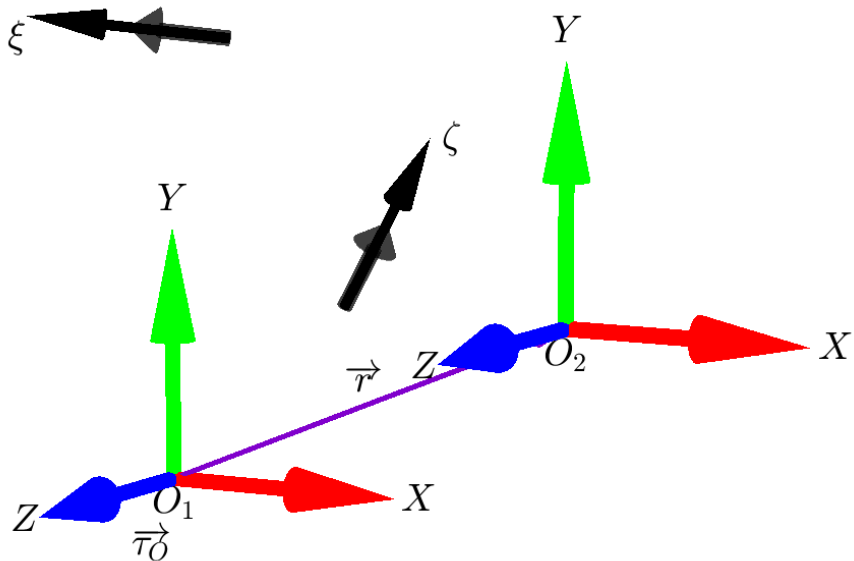
这个乘积代表了力螺旋对刚体做功的**功率**

注意，这个乘积和坐标系的选择无关！



# 内积空间与对偶空间

证明：对偶积不随坐标系的选择而变化



$$\vec{r} = [r_1, r_2, r_3]^T$$
$$\vec{r} \times = \begin{bmatrix} & -r_3 & r_2 \\ r_3 & & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & \end{bmatrix}$$

$\vec{r} \times$  是反对称矩阵

已知  $O_2$  到  $O_1$  的距离为  $\vec{r}$

$\xi$  和  $\zeta$  在  $O_2$  坐标系下的表达为：

$$\hat{f}_{O2} = [\vec{f}, \vec{\tau}]$$

$$\hat{v}_{O2} = [\vec{v}, \vec{\omega}]$$

$\xi$  和  $\zeta$  在  $O_1$  坐标系下的表达为：

$$\hat{f}_{O1} = [\vec{f}, \vec{\tau} + \vec{r} \times \vec{f}]$$

$$\hat{v}_{O1} = [\vec{v} + \vec{r} \times \vec{\omega}, \vec{\omega}]$$

于是

$$\begin{aligned} \hat{f}_{O1} \cdot \hat{v}_{O1} &= \vec{f}^T \vec{v} + \vec{f}^T (\vec{r} \times \vec{\omega}) + \vec{\tau}^T \vec{\omega} + (\vec{r} \times \vec{f})^T \vec{\omega} \\ &= \hat{f}_{O2} \cdot \hat{v}_{O2} + \vec{f}^T \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{f}^T (\vec{r} \times)^T \vec{\omega} \\ &= \hat{f}_{O2} \cdot \hat{v}_{O2} + \vec{f}^T \vec{r} \times \vec{\omega} - \vec{f}^T \vec{r} \times \vec{\omega} \\ &= \hat{f}_{O2} \cdot \hat{v}_{O2} \end{aligned}$$

**对偶积不随坐标系的选择而变化！**

# 内积空间与对偶空间

定义：若对偶空间中的两个非零向量的对偶积为0，那么说这两个向量是垂直的  
(orthogonal or reciprocal)

定义：零化子空间 (orthogonal annihilator)

$V$ 和 $V^*$ 互为对偶空间 $U$ 是 $V$ 的一个子空间，那么：

$$U^\perp = \{v \in V^* | u \cdot v = 0, \forall u \in U\}$$

是 $U$ 的零化子空间。

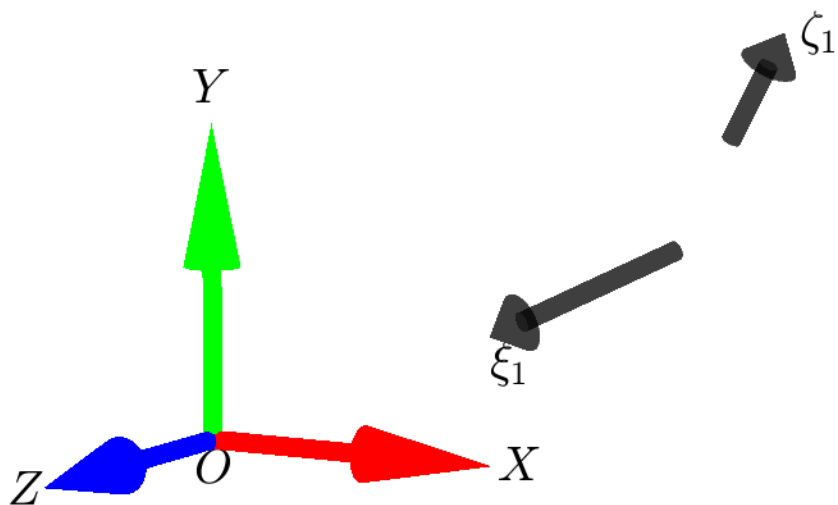
$U^\perp$ 是子空间！ (why?)

若twist的子空间 $U \subseteq M^6$ ，那么 $U^\perp \subseteq F^6$ ，且 $\dim(U) + \dim(U^\perp) = 6$

此时 $U^\perp$ 表示对 $U$ 不做功的力的空间。

# 内积空间与对偶空间

纯力偶和纯平动的垂直条件



$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$\hat{f} \cdot \hat{v} \equiv 0$$

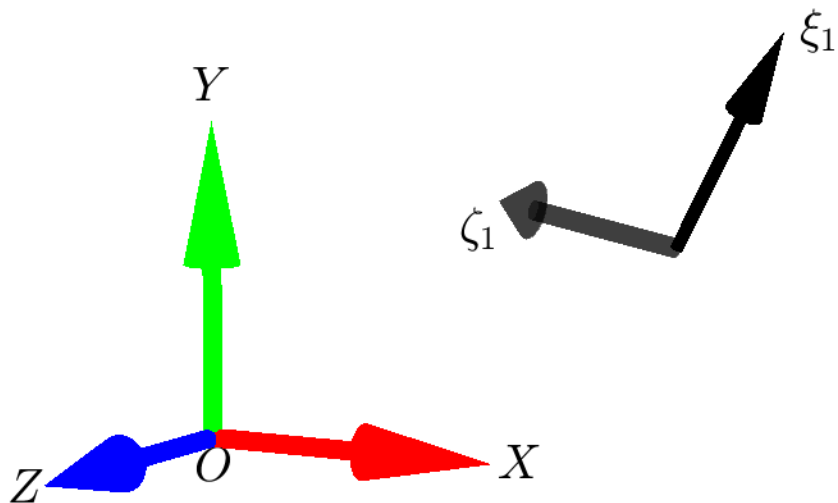
$$\hat{f}_O \cdot \hat{v}_O$$

**纯力偶和纯平动永远垂直**

示例:  
移动副的约束力可以为任意  
力偶

# 内积空间与对偶空间

纯力偶和纯转动的垂直条件



$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \vec{r} \times \vec{\omega} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

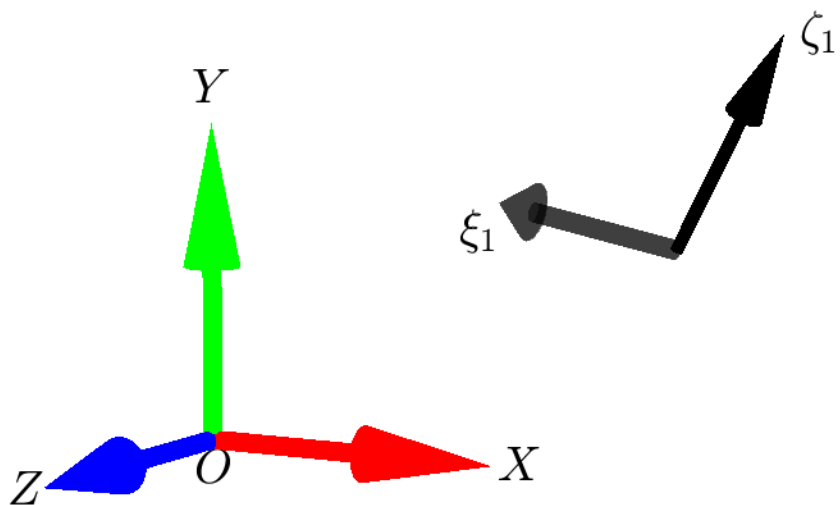
$$\hat{f} \cdot \hat{v} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

若纯力偶和纯转动的方向垂直，  
那么这两个向量垂直

示例：  
转动副的约束力偶垂直与转动方向

# 内积空间与对偶空间

纯力和纯平动的垂直条件



$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{r} \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$\hat{f} \cdot \hat{v} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

若纯力和纯平动的方向垂直，  
那么这两个向量垂直

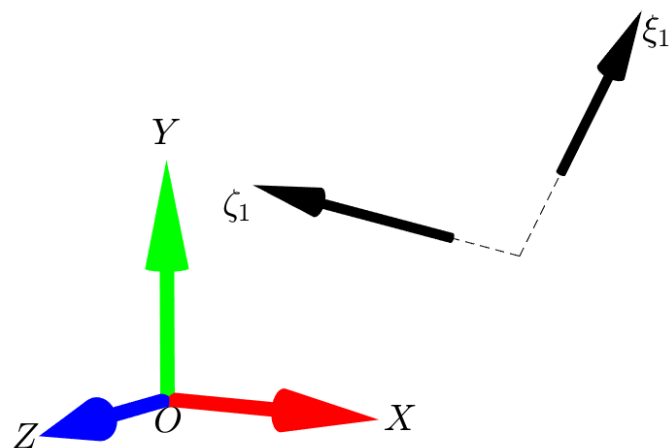
示例：

移动副的约束力（纯力）垂  
直于移动方向



# 内积空间与对偶空间

纯力和纯转动的垂直条件

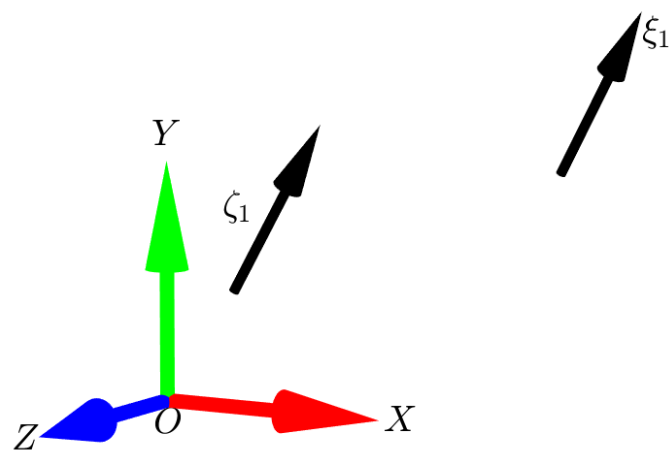


$$\hat{f} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{r}_1 \times \vec{f} \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \times \vec{\omega} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

示例：  
转动副的约束力（纯力）过  
转轴或跟转轴平行

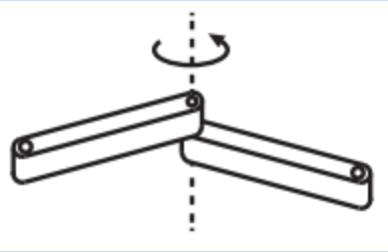
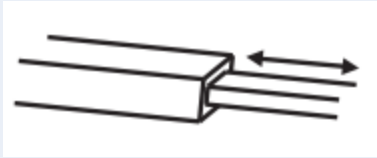
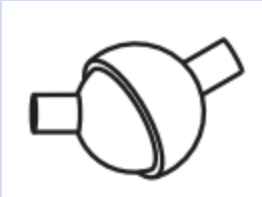
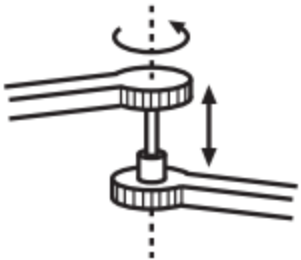
$$\begin{aligned} \hat{f} \cdot \hat{v} &= \vec{f} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{f}) \\ &= \vec{f}^T \vec{r}_2 \times \vec{\omega} - \vec{f}^T \vec{r}_1 \times \vec{\omega} \\ &= -\vec{f}^T \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \vec{f}^T \vec{\omega} \times \vec{r}_1 \\ &= -\vec{f}^T \vec{\omega} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$



纯力和纯转动的垂直条件：

- 1，轴线有交点
- 或
- 2，方向相同

# 内积空间与对偶空间

运动副	约束力 (wrenches)	运动(twists)
转动副 	$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ 1 \end{bmatrix}$
移动副 	$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \\ 1 \\ \\ \end{bmatrix}$
球副 	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ 1 \\ \\ 1 \\ \end{bmatrix}$
圆柱副 	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$

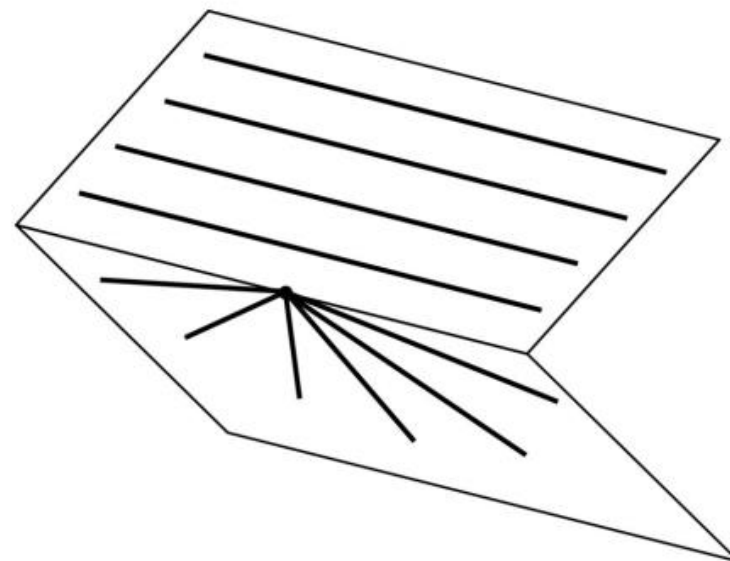
# 内积空间与对偶空间

运动和力垂直的条件

运动	力	不做功条件
纯平动	纯力偶	永不做功
纯平动	纯力	方向垂直
纯转动	纯力偶	方向垂直
纯转动	纯力	1.轴线有交点 2.轴线平行

练习：

1. 请求出平面运动的零化子空间。
2. 请求出右侧运动螺旋的零化子空间。



# 小结

- 刚体无穷大，力可以施加到任何位置，运动可表达在任何位置
- 速度螺旋和力螺旋是空间中的六维旋量
- 旋量是客观存在的实体，包括轴线、螺距等，但是可以在不同坐标系之间迁移
- 速度螺旋和力螺旋各自是6维的不含内积的线性空间，且彼此为对偶空间
- 任何运动副，可以用一组运动螺旋表示运动，力螺旋表示约束力，且它们互为零化子空间
- 可以通过选择坐标系，用Plücker基较为简化的表示运动副
- 螺旋系统是分析和设计机构有力的工具