第七章

线性方程组的迭代法

—— Jacobi, G-S and SOR

本讲内容

- **几类基本迭代法**
  - **Jacobi 迭代法**
  - **Gauss-Seidel 迭代法**
  - **SOR（超松弛）迭代法**
  - **迭代法收敛性分析**

Jacobi, G-S, SOR

Jacobi 迭代

- **Jacobi 迭代法**

考虑线性方程组 $Ax = b$

其中 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 非奇异，且对角线元素全不为 0

- 将 A 分裂成 $A = D - L - U$， 其中

$$D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi 迭代法

取 $M = D$，$N = L + U$，可得 **雅可比 (Jacobi)** 迭代方法

$$\boxed{x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- 迭代矩阵记为：$\boxed{J = D^{-1}(L+U)}$
- 分量形式：$\boxed{x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}}$

$i = 1, 2, \ldots, n$，$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)/a_{22} \\
\qquad\vdots \\
x_n^{(k+1)} = \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)/a_{nn}
\end{cases}
$$

- 在计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，如果用 $x_1^{(k+1)},\cdots,x_{i-1}^{(k+1)}$ 代替 $x_1^{(k)},\cdots,x_{i-1}^{(k)}$ ，则可能会得到更好的收敛效果。

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - \boxed{a_{21}x_1^{(k+1)}} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)/a_{22} \\
\qquad\vdots \\
x_n^{(k+1)} = \left(b_n - \boxed{a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}}\right)/a_{nn}
\end{cases}
$$

Gauss-Seidel 迭代

写成矩阵形式:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}\right)$$

可得

$$\boxed{x^{(k+1)} = \left(D-L\right)^{-1} Ux^{(k)} + \left(D-L\right)^{-1} b}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

此迭代方法称为 高斯-塞德尔 (Gauss-Seidel) 迭代法

- 迭代矩阵记为: $\boxed{G = \left(D-L\right)^{-1} U}$

SOR 迭代

G-S 迭代法的分量形式

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{i,n}x_n^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$$

$$= x_i^{(k)} + \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$$

- 为了得到更好的收敛效果，可在修正项前乘以一个

  松弛因子ω，于是可得迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$$

SOR 迭代

写成矩阵形式:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}\left(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)}\right)$$

可得

$$\boxed{x^{(k+1)} = \left(D - \omega L\right)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right]x^{(k)} + \omega\left(D - \omega L\right)^{-1} b}$$

—— SOR (Successive Over-Relaxation) 迭代方法

- 迭代矩阵记为: $\boxed{L_\omega = \left(D - \omega L\right)^{-1}\left[(1-\omega)D + U\right]}$

- SOR 的优点: 通过选取合适的 ω，可获得更快的收敛速度
- SOR 的缺点: 最优参数 ω 的选取比较困难

- **Jacobi 迭代** $M = D,\ \ N = L + U$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}$$

- **G-S 迭代** $M = D - L,\ \ N = U$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1} U x^{(k)} + (D-L)^{-1} b$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}$$

- **SOR 迭代** $M = \dfrac{1}{\omega}(D - \omega L),\ \ N = \dfrac{1}{\omega}\left[(1-\omega)D + \omega U\right]$

$$x^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right] x^{(k)} + \omega (D-\omega L)^{-1} b$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}$$

举例

例： 分别用 Jacobi、G-S、SOR($\omega = 1.1$) 迭代解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

取初始向量 $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$，迭代过程中小数点后保留 4 位。

解：

Jacobi 迭代：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(1 + x_2^{(k)}\right)/2 \\ x_2^{(k+1)} = \left(8 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/3 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-5 + x_2^{(k)}\right)/2 \end{cases}$$

计算可得：

$$x^{(1)} = [\ 0.5000,\ 2.6667,\ -2.5000\ ]^T$$

$$\vdots$$

$$x^{(21)} = [\ 2.0000,\ 3.0000,\ -1.0000\ ]^T$$

举例

G-S 迭代：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(1 + x_2^{(k)}\right)/2 \\ x_2^{(k+1)} = \left(8 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right)/3 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-5 + x_2^{(k+1)}\right)/2 \end{cases}$$

迭代可得：

$$x^{(1)} = [\ 0.5000,\ 2.8333,\ -1.0833\ ]^T$$

$$\vdots$$

$$x^{(9)} = [\ 2.0000,\ 3.0000,\ -1.0000\ ]^T$$

举例

SOR 迭代：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega\left(1 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right)/2 \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega\left(8 + x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/3 \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega\left(-5 + x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}\right)/2 \end{cases}$$

取 $\omega = 1.1$，迭代可得

$$x^{(1)} = [\ 0.5500,\ 3.1350,\ -1.0257\ ]^T$$

$$\vdots$$

$$x^{(7)} = [\ 2.0000,\ 3.0000,\ -1.0000\ ]^T$$

如何确定 SOR 的最优松弛因子是一件非常困难的事！

举例

例：(编程实践)

分别用 Jacobi、G-S、SOR($\omega = 1.5$) 迭代解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

取初始向量 $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$。

demo63.m

迭代方法的收敛性

- Jacobi 迭代收敛的充要条件 $\rho(J)<1$
- G-S 迭代收敛的充要条件 $\rho(G)<1$
- SOR 迭代收敛的充要条件 $\rho(L_\omega)<1$
- Jacobi 迭代收敛的充分条件 $\|J\| <1$
- G-S 迭代收敛的充分条件 $\|G\| < 1$
- SOR 迭代收敛的充分条件 $\|L_\omega\| < 1$

- 对角占优、不可约矩阵
- 对称正定矩阵

对角占优矩阵

定义：设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，若

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

且至少有一个不等式严格成立，则称 A 为 **弱对角占优**；

若所有不等式都严格成立，则称 A 为 **严格对角占优**。

可约矩阵与不可约矩阵

定义： 设 $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$，若存在置换矩阵 P 使得

$$P^T AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

$A_{11}\in R^{r\times r}$，$A_{22}\in R^{(n-r)\times(n-r)}$

$1\le r\le n-1$

则称 A 为 **可约矩阵**；否则称为 **不可约矩阵**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^T AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 如果 A 是可约矩阵，则方程组 $Ax=b$ 等价于

$$\left(P^T AP\right)\underbrace{\boxed{\left(P^T x\right)}}_{y}=\underbrace{\boxed{P^T b}}_{f} \iff \begin{cases} A_{11}y_1 + A_{12}y_2 = f_1 \\ A_{22}y_2 = f_2 \end{cases}$$

即可以把原方程组化成两个低阶的方程组来处理。

可约矩阵的几个简单判别方法

性质： 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，若 A 的所有元素都非零，则 A 不可约。

性质： 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，且 $n\geq 2$。若 A 可约，则 A 的零元素个数大于等于 n-1。

性质： 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是三对角矩阵，且三条对角线元素均非零，则 A 不可约。

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

Jacobi、G-S 收敛性

■ 对角占优情形

定理： 若 A 严格对角占优或不可约弱对角占优，则 A 非奇异

定理： 若 A 严格对角占优或不可约弱对角占优，则 Jacobi 迭代和 G-S 迭代均收敛

Jacobi、G-S 收敛性

■ 对称正定情形

eig函数

定理： 设 A 对称且 D 正定，则 Jacobi 迭代收敛的充要条件是 A 和 $2D-A$ 都正定。

定理： 设 A 对称且 D 正定，则 G-S 迭代收敛的充要条件是 A 正定。

SOR 收敛性

- **SOR 收敛的必要条件**

定理： 若 SOR 迭代收敛，则 $0 < \omega < 2$。

- **SOR 收敛的充分条件**

定理： 若 A 对称正定，且 $0 < \omega < 2$，则 SOR 迭代收敛。

定理： 若 A 严格对角占优或不可约弱对角占优，且 $0 < \omega \leq 1$，则 SOR 迭代收敛。

收敛性小结

A 对称且对角线元素为正，则

(1) Jacobi 迭代收敛 $\Longleftrightarrow$ *A* 正定且 $2D-A$ 正定

(2) G-S 迭代收敛 $\Longleftrightarrow$ *A* 正定

A 对称正定，则 SOR 迭代收敛 $\Longleftrightarrow$ $0 < \omega < 2$

A 严格对角占优或不可约弱对角占优

$\Longrightarrow$ Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代收敛

A 严格对角占优或不可约弱对角占优且 $0 < \omega \le 1$

$\Longrightarrow$ SOR 迭代收敛

举例

例： 设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$，给出 Jacobi 和 G-S 收敛的充要条件

解： A 对称，且对角线元素均大于 0，故

(1) Jacobi 收敛的充要条件是 A 和 2D-A 均正定

(2) G-S 收敛的充要条件是 A 正定

$$A\text{ 正定} \Leftrightarrow D_1=1>0, D_2=1-a^2>0, D_3=(1-a)^2(1+2a)>0$$

$$\Leftrightarrow -0.5<a<1$$

$$2D\text{-}A\text{ 正定} \Leftrightarrow D_1=1>0, D_2=1-a^2>0, D_3=(1+a)^2(1-2a)>0$$

$$\Leftrightarrow -0.5<a<0.5$$

$\Rightarrow$

Jacobi 收敛的充要条件是：$-0.5<a<0.5$

G-S 收敛的充要条件是：$-0.5<a<1$

举例

解法二： Jacobi 的迭代矩阵为 $J=\begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$

设 λ 是 J 的特征值，则由 $\det(\lambda I - J) = 0$ 可得

$$(\lambda - a)^2(\lambda + 2a) = 0$$

Jacobi 收敛的充要条件是 $\rho(J)<1 \Leftrightarrow |\lambda|<1$，

即 $-0.5<a<0.5$

补：算法的实施

停机准则： $\dfrac{\|b-Ax^{(k)}\|}{\|b-Ax^{(0)}\|}<\mathrm{tol}$

算法： Jacobi （G-S 和 SOR 的实施类似）

(1) 给定初值 $x^{(0)}$ 和精度要求 tol

(2) 计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$

(3) 对 $k=0,1,2,\ldots,$ 计算

$$x_i^{(k+1)}=\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/a_{ii}\quad,\quad i=1,2,\ldots,n$$

若 $\dfrac{\|b-Ax^{(k)}\|}{\|r^{(0)}\|}<\mathrm{tol}$，则输出 $x_*\approx x^{(k+1)}$，停止计算。