第七章

线性方程组的迭代解法

—— 迭代法基本概念

本章内容提要

- **迭代算法基本概念**
- **Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法**
- **SOR（超松弛）迭代法**

本讲内容

- 迭代法的基本概念
  - 向量序列与矩阵序列的极限
  - 迭代法的构造
  - 迭代法的收敛性判断

demo61.m

向量序列的收敛

矩阵序列的收敛

向量序列的极限

定义： 设向量序列 $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$，$x^{(k)}=\left[x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right]^T$，

若存在向量 $x=\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]^T$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

则称向量序列 $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 x，记作 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x$

- 每个分量组成的序列都收敛
- 称 x 是向量序列 $x^{(k)}$ 的**极限**

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=x \iff \lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x\right\|=0$$

矩阵序列的极限

定义： 设矩阵序列 $A_k=\left[a_{ij}^{(k)}\right]_{n\times n}$，若存在矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称矩阵序列 $\{A_k\}$ 收敛到 A，记作 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$

例： 设 $0<|a|<1$，考察下面矩阵序列的极限

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, A^2=\begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}, \dots, A^k=\begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}, \dots$$

矩阵极限判断

定理： $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \iff \lim\limits_{k\to\infty}\|A_k - A\| = 0$

(其中 $\|\cdot\|$ 为任一矩阵范数)

证明：只需证明无穷范数情形

矩阵极限判断

定理： $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0 \iff \rho(B) < 1$

定理： $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0 \iff$ 存在某算子范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$，使得

$$\|B\|_\varepsilon < 1$$

线性方程组迭代法

线性方程组迭代法

- **直接法的缺点**
  - 运算量大，不适合大规模的线性方程组求解
  - 无法充分利用系数矩阵的稀疏性

- **迭代法**

从一个初始向量出发，按照一定的迭代格式，构造出一个趋向于真解的向量序列。

  - 只需存储系数矩阵中的非零元素
  - 运算量不超过 $O(kn^2)$，其中 k 为迭代步数

迭代法是目前求解大规模线性方程组的主要方法

迭代法的构造

- **矩阵分裂迭代法基本思想**

A 的一个矩阵分裂

$A = M - N$

$$Ax = b \iff Mx = Nx + b$$

M 非奇异

$$\Updownarrow$$

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

给定一个初始向量 $x^{(0)}$，可得 迭代格式

$$\boxed{x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

其中 $B = M^{-1}N$ 称为迭代矩阵

矩阵分裂迭代法

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

定义：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$存在，则称该迭代法**收敛**，否则称为**发散**

性质：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x_*$，则 x_* 为原方程组 $Ax = b$ 的解

$$Ax_* = b \iff x_* = Bx_* + f$$

注：这里用 x_* 表示真解，教材上用 x^*

迭代法的收敛性

$$\boxed{x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f}$$

定理：对任意初始向量 $x^{(0)}$，上述迭代格式收敛的充要条件是

$$\rho(B) < 1$$

定理：若存在算子范数使得 $\|B\| < 1$，则上述迭代格式收敛。

例：考虑迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的收敛性，其中

$$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

demo62.m

迭代法的收敛性

$$\boxed{x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f}$$

$B = M^{-1}N$

定理： 若存在算子范数 $\|\cdot\|$，使得 $\|B\| = q < 1$，则

(1) 迭代法收敛

(2) $\left\| x^{(k)} - x_* \right\| \le q^k \left\| x^{(0)} - x_* \right\|$

(3) $\left\| x^{(k)} - x_* \right\| \le \dfrac{q}{1-q} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$

(4) $\left\| x^{(k)} - x_* \right\| \le \dfrac{q^k}{1-q} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$

收敛速度

- **迭代法的收敛速度**

第 k 步的误差： $\varepsilon^{(k)} \triangleq x^{(k)} - x_* = B^k \varepsilon^{(0)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|}{\left\|\varepsilon^{(0)}\right\|} \le \left\|B^k\right\|$$

平均每次迭代后的误差压缩率约为： $\boxed{\left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}}}$

- 若要求 k 步迭代后上述误差比值不超过 σ，则

$$\left\|B^k\right\| \le \sigma \Rightarrow \left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}} \le \sigma^{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \ln\left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}} \le \frac{1}{k}\ln\sigma \Rightarrow \boxed{k \ge \frac{-\ln\sigma}{-\ln\left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}}}}$$

收敛速度

● 迭代法的收敛速度

定义： 迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的平均收敛速度定义为

$$R_k(B) = -\ln\left(\left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)$$

渐进收敛速度为

$$R(B) = \lim_{x\to\infty} R_k(B) = -\ln\rho(B) = \ln\frac{1}{\rho(B)}$$

$\rho(B)$ 越小，迭代收敛越快