# 第七章

# 非线性方程(组)数值解法

——二分法

——不动点迭代及其加速

# 内容提要

- 非线性方程求解基本概念
- 二分法
- 不动点迭代法及其加速
- 牛顿法、弦截法、抛物线法

# 非线性方程基本概念

# 基本概念

$$f(x) = 0$$

$x \in R, \quad f(x) \in C[a,b]$

- 若 $f(x)$ 是一次多项式，则称为**线性方程**；
  否则称为**非线性方程**
- **代数方程：** $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$n$=1, 2, 3, 4 时有相应的求根公式，$n \geq 5$ 时不存在求根公式

- 非线性方程可能有(无穷)多个解，一般要强调 **求解区间**
- 非线性方程一般没有直接解法，通常**用迭代法求数值解**

# 基本概念

- 实根与复根

- 根的重数：若 $f(x) = (x - x_*)^m \cdot g(x)$ 且 $g(x_*) \neq 0$,
  则 $x_*$ 为 $f(x) = 0$ 的 $m$ 重根

- 有根区间：$[a, b]$ 上至少存在 $f(x) = 0$ 的一个实根

研究内容：在 有根 的前提下求出方程的 近似根

# 二分法（对分法）

- 基本思想、数学原理、计算过程
- 收敛性分析

# 二分法（对分法）

## 基本思想

将**有根区间**对分，并找出根所在的小区间，然后再对该小区间对分，依次类推，直到有根区间的长度足够小为止。

## 数学原理：**介值定理**

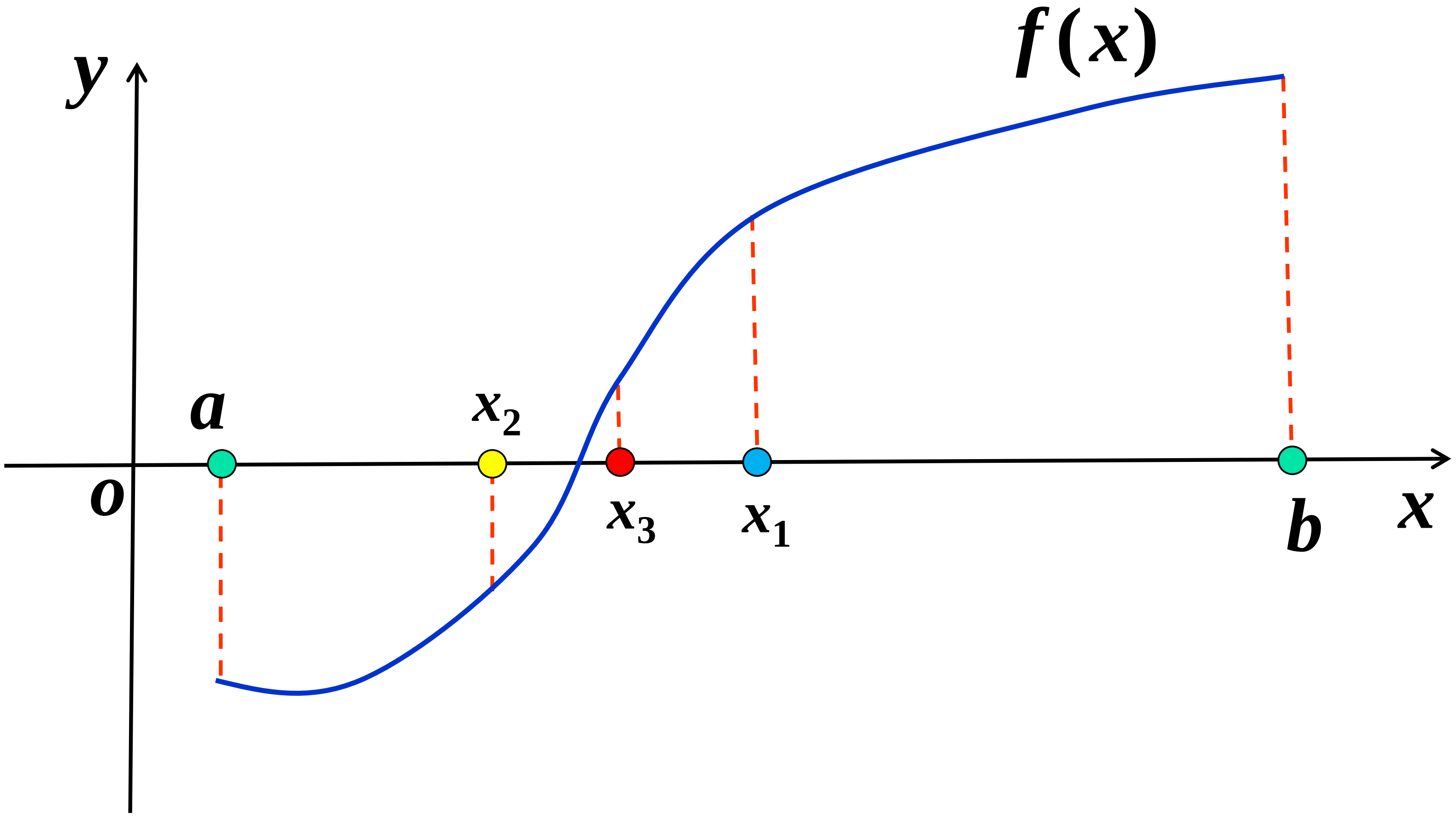
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\,f(b)<0$，则由介值定理可得，在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ 使得 $f(\xi)=0$

## 适用范围

**求有根区间内的** 单重实根 **或** 奇重实根，即 $f(a)\,f(b)<0$

**用二分法求根，通常先给出 $f(x)$ 草图以确定有根区间**

# 二分法（对分法）



# 二分法

demo_7_1.m

**算法：(二分法)**

(1) 计算 $f(a)$，$f(b)$，若 $f(a)\,f(b)>0$，则算法失效，停止计算

(2) 令 $x=\dfrac{a+b}{2}$，计算 $f(x)$

(3) 若 $|f(x)|<\varepsilon$ 或 $|b-a|<\varepsilon$，停止计算，输出近似解 $x$

(4) 若 $f(a)\cdot f(x)<0$，则令 $b=x$；否则令 $a=x$

(5) 返回第 2 步

- **优点：简单易用，总是收敛**
- **缺点：收敛慢，不能求复根和偶数重根，一次只能求一个根**
- **总结：一般用来计算解的一个粗糙估计**

# 误差分析

记 $a_1 = a, b_1 = b$, 第 $k$ 步的有根区间为 $[a_k, b_k]$

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$

$$|x_k - x_*| \le \frac{b - a}{2^{k+1}} \to 0 \ (k \to \infty)$$

**结论：二分法总是收敛的！** (条件：函数满足介值定理)

# 不动点迭代

- 基本思想
- 迭代格式
- 收敛性分析（全局收敛与局部收敛）

# 不动点迭代基本思想

- **构造 $f(x)=0$ 的一个等价方程：**

$$x=\varphi(x)$$

$$f(x)=0 \xLeftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)$ **的零点** $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x)$ **的不动点**

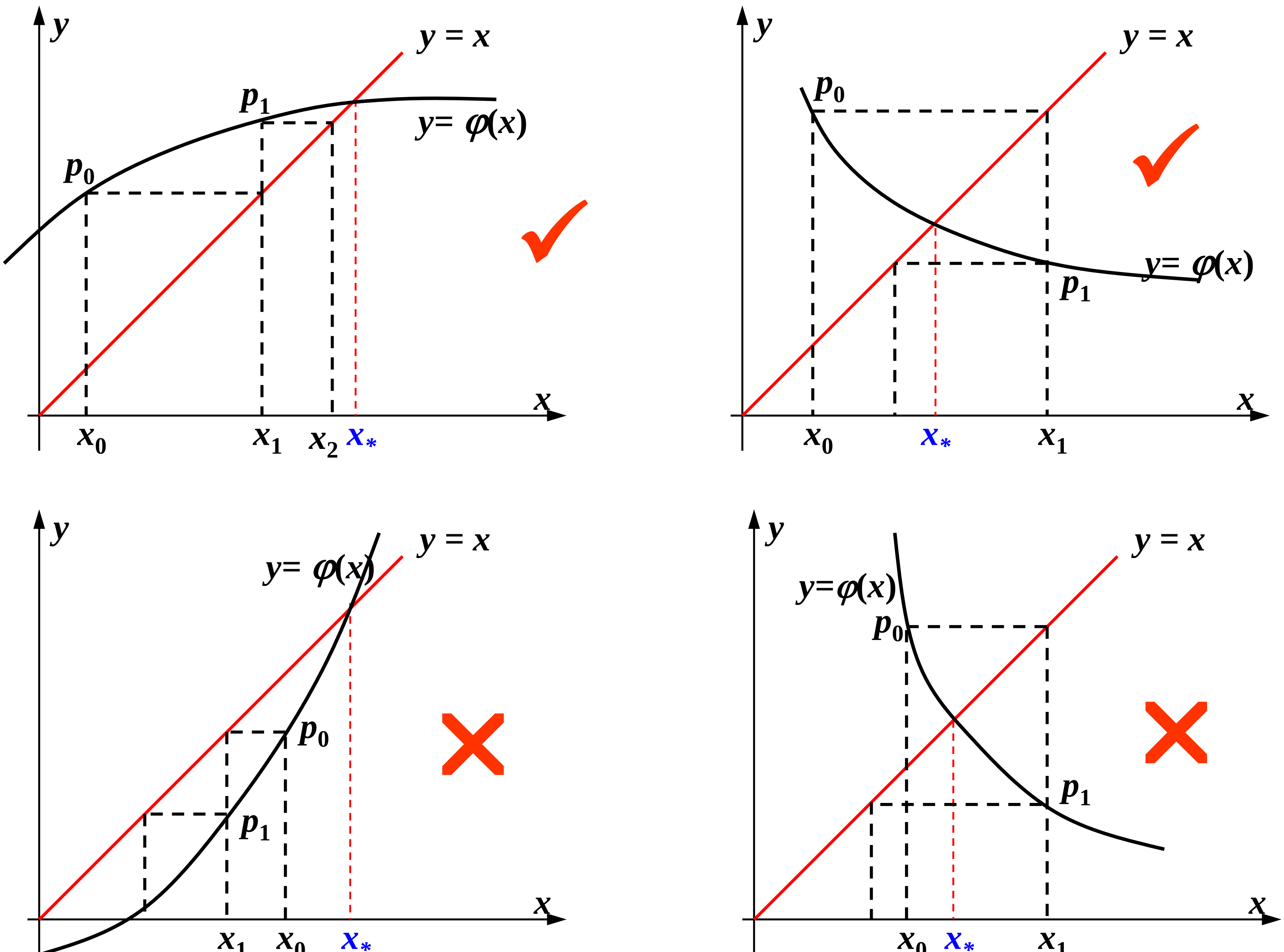
# 不动点迭代格式

- 任取一个迭代初始值 $x_0$，计算

$$\boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \ldots$$

得到一个迭代序列： $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

**几何含义：求曲线 $y = \varphi(x)$ 与直线 $y = x$ 的交点。**



y
y = x
y= φ(x)
p0
p1
x
x0
x1
x2
x*

# 收敛性分析

设 $\varphi(x)$ 连续，若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$，则

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)$$

$\Rightarrow$ $x_* = \varphi(x_*)$ 即 $\boxed{f(x_*) = 0}$

**性质**：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$，则不动点迭代**收敛**，且 $x_*$ 就是 $f(x)=0$ 的解；否则迭代法**发散**。

# 解的存在唯一性

**定理：** 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意的 $x \in [a,b]$ 有 $\varphi(x) \in [a,b]$

(2) 存在常数 $0<L<1$，使得任意的 $x, y \in [a,b]$ 有

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \le L\left|x-y\right|$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在**唯一的不动点** $x_*$

# 不动点迭代的收敛性判断

**定理：** 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi(x)\in[a,b]$

(2) 存在常数 $0<L<1$，使得任意的 $x, y\in[a,b]$ 有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le L|x-y|$$

则对任意初始值 $x_0\in[a,b]$，不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛，且

$$|x_k - x_*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

注：**一般来说，$L$ 越小，收敛越快！**

# 不动点迭代的收敛性判断

**推论：** 若 $\varphi(x) \in C^1[a,b]$，对任意 $x \in [a,b]$ 有 $\varphi(x) \in [a,b]$ 且对任意 $x \in [a,b]$ 有

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

则上述定理中的结论成立。

以上两个结论中的 **收敛性与初始值的选取无关！**

→ **全局收敛**

# 举例

**例：求 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在区间 $[1, 2]$ 中的根**

(1) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow 1 \le \varphi(x) \le 2 \quad (x \in [1,2])$

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \Rightarrow |\varphi'(x)| \le \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{0.25} < 1$

全局收敛

(2) $\varphi(x) = x^3 - 1 \Rightarrow 0 \le \varphi(x) \le 7 \quad (x \in [1,2])$

$\varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow |\varphi'(x)| > 1$

demo_7_2.m

# 不动点迭代的局部收敛

**定义**：设 $x_*$ 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若存在 $x_*$ 的某个 $\delta$-**邻域** $U_\delta(x_*)=[x_*-\delta, x_*+\delta]$，对任意 $x_0\in U_\delta(x_*)$，不动点迭代

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

产生的点列都收敛到 $x_*$，则称该迭代**局部收敛**。

**定理**：设 $x_*$ 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi'(x)$ 在 $x_*$ 的某个邻域内连续，且

$$|\varphi'(x_*)|<1$$

则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛

# 收敛速度

**定义：** 设迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 $x_*$，记 $e_k = x_k - x_*$，若

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

其中常数 $C > 0$，则称该迭代为 $p$ 阶收敛。

(1) 当 $p = 1$ 且 $0 < C < 1$ 时称为**线性收敛**

(2) 当 $p = 2$ 时称为**二次收敛**，或**平方收敛**

(3) 当 $p > 1$ 或 $p=1$ 且 $C=0$ 时称为**超线性收敛**

- 若 $0<|\varphi'(x_*)|<1$，则不动点迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ **局部线性收敛**

# 基本收敛定理

**定理：** 设 $x_*$ 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 $x_*$ 的某邻域内连续，且

$$\varphi'(x_*)=\varphi''(x_*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x_*)=0,$$

$$\varphi^{(p)}(x_*)\neq 0$$

则迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 $p$ 阶**局部收敛**的。且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x_*}{(x_k-x_*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x_*)}{p!}$$

# 举例

**例：求 $f(x) = x^2 - 3=0$ 的正根** $x_* = \sqrt{3}$

demo_7_3.m

(1) $\varphi(x) = x^2 - 3 + x$ ⇒ $\varphi'(x_*) = 2\sqrt{3} + 1 > 1$

(2) $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2 - 3}{4}$ ⇒ $\varphi'(x_*) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134 < 1$

(3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ ⇒ $\varphi'(x_*) = 0$

$$\varphi''(x_*) = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$$

- **一般来说，$|\varphi'(x_*)|$ 越小，收敛越快！**

# 不动点迭代的加速

- **Aitken 加速技巧**
- **Steffensen 迭代方法**

# Aitken 加速

$$x_1 = \varphi(x_0) \Rightarrow x_1 - x_* = \varphi(x_0) - \varphi(x_*) = \varphi'(\xi_1)(x_0 - x_*)$$

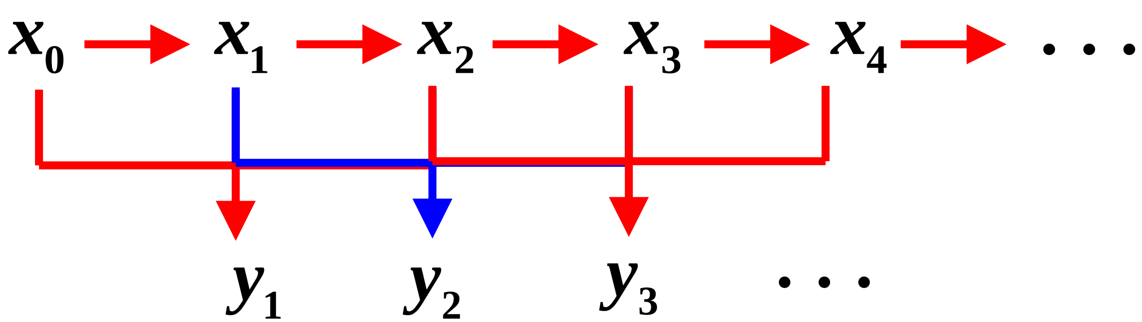
$$x_2 = \varphi(x_1) \Rightarrow x_2 - x_* = \varphi(x_1) - \varphi(x_*) = \varphi'(\xi_2)(x_1 - x_*)$$

若 $\varphi'(x)$ 变化不大，则可假定： $\boxed{\varphi'(\xi_1) \approx \varphi'(\xi_2)}$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_*}{x_2 - x_*} \approx \frac{x_0 - x_*}{x_1 - x_*}$$

$$\Rightarrow x_* \approx x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} == y_1$$

# Aitken 加速




$$\boxed{y_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}}$$

**收敛性：** $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{y_{k+1} - x_*}{x_k - x_*} = 0$ ⇒ $y_k$ **收敛较快**

# Steffensen 迭代

**基本思想：将 Aitken 加速技巧与不动点迭代相结合**

$$y_k = \varphi(x_k),\quad z_k = \varphi(y_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

**Steffensen 迭代函数：**

$$x_{k+1} = \psi(x_k),\quad \psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi\big(\varphi(x)\big) - 2\varphi(x) + x}$$

# Steffensen 迭代

**定理：** 若 $x_*$是 $\psi(x)$ 的不动点，则 $x_*$是 $\varphi(x)$ 的不动点。反之，若 $x_*$ 是 $\varphi(x)$ 的不动点，且 $\varphi''(x)$ 存在，$\varphi'(x_*) \neq 1$，则 $x_*$ 是 $\psi(x)$ 的不动点。

另外，若原不动点迭代是线性收敛的，则 Steffensen 迭代是二阶收敛的。

- 若原迭代是 $p$ 阶收敛的，则 Steffensen 迭代 $p+1$ 阶收敛
- 原来不收敛的迭代，Steffensen 加速可能收敛

# 举例

**例：** 用 Steffensen 迭代法求 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在区间 $[1,2]$ 中的根（取 $\varphi(x) = x^3 - 1$）

demo_7_4.m

**例：** 用 Steffensen 迭代法求 $f(x) = 3x^2 - e^x = 0$ 在区间 $[3,4]$中的根（取 $\varphi(x) = 2\ln(x) + \ln 3$）

demo_7_5.m