第二章

插 值 方 法

—— 三次样条插值

什么是三次样条插值

给定插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ 及函数值

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

求一个定义在 $[a, b]$ 上的插值函数 $S(x)$，满足：

① $I_h(x) \in C^2[a,b]$ 即二阶连续可导

② 插值条件： $S(x_k) = f(x_k) = y_k$

③ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

内容提要

- 三次样条插值
  - 什么是三次样条函数
  - 边界条件的处理
  - 三次样条函数的计算
  - 具体计算过程

三次样条插值

定义： 设插值节点为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间 $[x_k\ , x_{k+1}]$ 上是三次多项式，则称其为**三次样条函数**

如果同时还满足

$$S(x_k) = f(x_k) = y_k\ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a\ , b]$ 上的**三次样条插值函数**

三次样条插值

怎样计算三次样条插值函数

$S(x)$ 满足：

① $S(x) \in C^2[a,b]$；

② 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 是三次多项式

③ $S(x_k) = y_k$， $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

其中 $s_k(x)$ 为 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的三次多项式，且满足

$$s_k(x_k) = y_k,\ s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$

边界条件

$$S(x)\in C^2[a,b] \Rightarrow S'(x_k^-)=S'(x_k^+),\ S''(x_k^-)=S''(x_k^+)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{k-1}'(x_k^-)=s_k'(x_k^+),\ s_{k-1}''(x_k^-)=s_k''(x_k^+)}$$

$(\, k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$

每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式，有 4 个待定系数，所以共有 $4n$ 个待定系数，故需 $4n$ 个方程。前面已经得到 $2n+2(n-1) = 4n-2$ 个方程，还缺 2 个方程！

- 实际问题通常对样条函数在两个端点处的状态有要求，即所谓的 **边界条件**

常用的边界条件

- **第一类边界条件：** 给定函数在端点处的**一阶导数**，即

$$\boxed{S'(x_0) = f_0' \ , \ S'(x_n) = f_n'}$$

- **第二类边界条件：** 给定函数在端点处的**二阶导数**，即

$$\boxed{S''(x_0) = f_0'' \ , \ S''(x_n) = f_n''}$$

当 $f_0'' = f_n'' = 0$ 时，称为**自然边界条件**，
此时的样条函数称为**自然样条函数**

- **第三类边界条件：** 若 $f(x)$ 是周期函数，且 $x_n - x_0$ 是一个周期，于是要求 $S(x)$ 也是周期函数, 即满足

$$\boxed{S(x_0) = S(x_n),\ S'(x_0^+) = S'(x_n^-),\ S''(x_0^+) = S''(x_n^-)}$$

三次样条函数的计算

$$\boxed{\text{设 } S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

下面计算 $S(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 的表达式 $s_k(x)$

由于 $s_k(x)$ 是三次多项式，故 $s_k''(x)$ 为线性函数，且

$$s_k''(x_k) = M_k, \qquad s_k''(x_{k+1}) = M_{k+1}$$

由线性插值公式可得

$$\boxed{s_k''(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h_k} M_k + \frac{x - x_k}{h_k} M_{k+1}}$$

$$h_k = x_{k+1} - x_k$$

求积分，可得

$$\boxed{s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + c_1 x + c_2}$$

三次样条函数的计算

将插值条件 $s_k(x_k)=y_k$，$s_k(x_{k+1})=y_{k+1}$ 代入，即可确定积分常数 c_1 和 c_2。整理后可得 $s_k(x)$ 的表达式为

$$s_k(x)=\frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k+\frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1}+\left(y_k-\frac{M_k h_k^2}{6}\right)\frac{x_{k+1}-x}{h_k}+\left(y_{k+1}-\frac{M_{k+1}h_k^2}{6}\right)\frac{x-x_k}{h_k}$$

$k=0, 1, \ldots, n\text{-}1$

只需确定 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的值，即可给出 $s_k(x)$的表达式，从而可以得到 $S(x)$ 的表达式。

M_k 的计算

条件：$s_{k-1}'(x_k^-) = s_k'(x_k^+)$

易知

$$s_k'(x) = -\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1} + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}(M_{k+1}-M_k)$$

$$\Rightarrow \frac{h_{k-1}}{6}M_{k-1} + \frac{h_{k-1}+h_k}{3}M_k + \frac{h_k}{6}M_{k+1} = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}}}_{\mu_k}M_{k-1} + 2M_k + \underbrace{\boxed{\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}}}_{\lambda_k}M_{k+1} = \underbrace{6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]}_{d_k}$$

M_k 的计算

或

$$\boxed{\begin{aligned} h_{k-1}M_{k-1} + 2(h_{k-1}+h_k)M_k + h_kM_{k+1} \\ = 6\left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) \end{aligned}}$$

$k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

M_k 的计算

整理后得关于 M_{k-1}, M_k 和 M_{k+1} 的方程：

$$\boxed{\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k}$$

其中

$$\mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k},\quad \lambda_k = \frac{h_k}{h_{k-1}+h_k},\quad d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

$$\boxed{\mu_k + \lambda_k = 1}$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$

共 n-1 个方程，附加边界条件，补充两个方程后，即可确定 n+1 个未知量 $M_0, M_1, \cdots, M_n$

第一类边界条件

- **第一类边界条件：** $S'(x_0) = f_0'$ ，$S'(x_n) = f_n'$

  直接代入 $s_k(x)$ 的一阶导数表达式即得

$$2M_0 + M_1 = 6\big((y_1 - y_0)/h_0 - f_0'\big)\big/h_0 \equiv d_0$$
$$M_{n-1} + 2M_n = 6\big(f_n' - (y_n - y_{n-1})/h_{n-1}\big)\big/h_{n-1} \equiv d_n$$

  与前面的 n-1 个方程联立可得 n+1 阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

第二类边界条件

- **第二类边界条件：** $S''(x_0) = f_0''$ ，$S''(x_n) = f_n''$

直接可得 $\boxed{M_0 = f_0'' \text{ , } M_n = f_n''}$

故前面方程中只含 n-1 个未知量，即可得 n-1 阶线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

第三类边界条件

- **第三类边界条件：** $S'(x_0)=S'(x_n),\ S''(x_0)=S''(x_n)$

可得 $\boxed{M_0=M_n,\ \ \lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n}$

其中 $\lambda_n=h_0/(h_0+h_{n-1}),\qquad \mu_n=h_{n-1}/(h_0+h_{n-1}),$

$$d_n=6\big(f[x_0,x_1]-f[x_{n-1},x_n]\big)/(h_0+h_{n-1})$$

与前面的 n-1 个方程联立可得 n 阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

具体计算过程

- 上述三个方程都存在**唯一解**。

- 具体计算过程

(1) 根据**插值条件**和**边界条件**给出 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的方程组

(2) 解方程

(3) 将 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入 $s_k(x)$ 的表达式，

写出三次样条函数 $S(x)$ 在整个插值区间上的分段表达式

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{三弯矩方程}}$

具体计算过程

注：需将 $s_k(x)$ 写成如下形式

$$s_k(x) = a_3(x - x_k)^3 + a_2(x - x_k)^2 + a_1(x - x_k) + a_0$$

$$s_k(x) = \frac{M_{k+1} - M_k}{6h_k}(x - x_k)^3 + \frac{M_k}{2}(x - x_k)^2 + \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k(M_{k+1} + 2M_k)}{6}\right)(x - x_k) + y_k$$

Matlab 中三次样条插值函数 spline 输出的多项式是按上面的格式输出的！

误差估计

- **误差估计（了解）**

定理： 设 $f(x) \in C^4[a, b]$，$S(x)$ 为满足第一或第二类边界条件的三次样条函数，则

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - S(x)| \le \frac{5}{384} \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| h^4$$

$$\max_{a \le x \le b} |f'(x) - S'(x)| \le \frac{1}{24} \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| h^3$$

$$\max_{a \le x \le b} |f''(x) - S''(x)| \le \frac{3}{8} \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| h^2$$

其中 $h = \max\limits_{0 \le k \le n-1} h_k = \max\limits_{0 \le k \le n-1} |x_{k+1} - x_k|$

证明：不要求