第七章

非线性方程(组)数值解法

—— **Newton 迭代法**

—— **弦截法、抛物线法**

本讲内容

- Newton 法及其收敛性
- 简化的 Newton 法
- Newton 下山法
- 弦截法与抛物线法

Newton 迭代法

- 基本思想、几何意义
- 二阶局部收敛性
- 简化 Newton 法
- Newton 下山法
- 重根情形

Newton 迭代法

- **基本思想**

将非线性方程线性化

- 设 x_k 是 $f(x)=0$ 的近似根，将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开

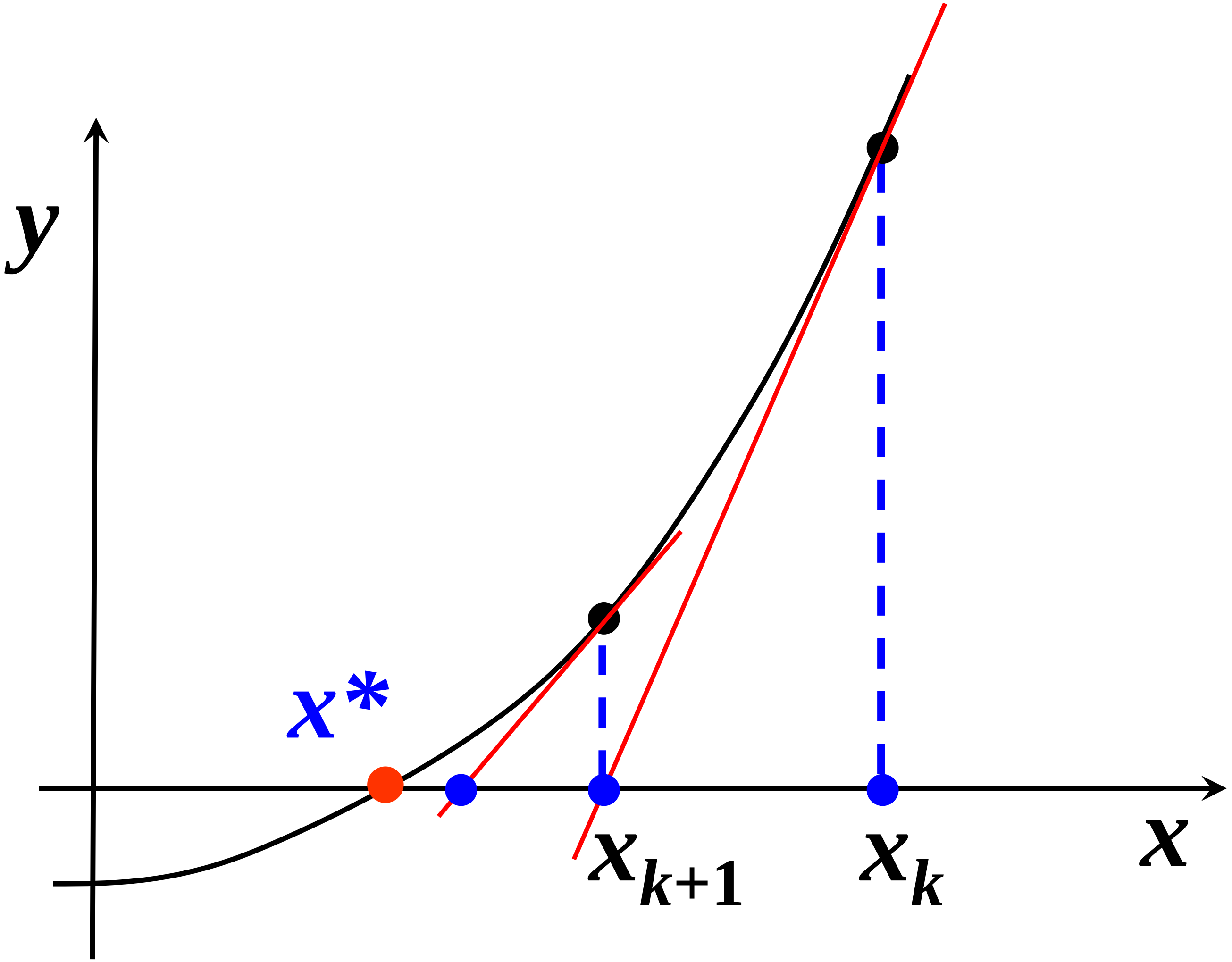
$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)^2$$

$$\approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \triangleq P(x)$$

令： $P(x) = 0$ $\Rightarrow$ $$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

条件： $f'(x) \neq 0$

Newton 法



Newton 法

算法：(Newton 法)

(1) 任取迭代初始值 x_0

(2) 计算 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(3) 判断收敛性：如果 $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ 或者 $|f(x_1)| < \varepsilon$ ，
则算法收敛，停止计算，输出近似解 x_1

(4) 令 $x_0 \leftarrow x_1$，返回第二步

收敛性

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- **迭代函数** $\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x_*) = 0, \quad \varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}$$

$\Rightarrow$ **牛顿法至少二阶局部收敛**

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_*}{(x_k - x_*)^2} = \frac{\varphi''(x_*)}{2!} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}$$

举例

例： 用 Newton 法求 $f(x) = x\mathrm{e}^x - 1 = 0$ 的解

`demo_7_6.m`

应用举例：计算平方根

demo_7_7.m

例：用 Newton 法求 $f(x) = x^2 - C=0$ 的正根

解：
$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{C}{x_k}\right) \Rightarrow \begin{aligned} x_{k+1} - \sqrt{C} &= \frac{1}{2x_k}\left(x_k - \sqrt{C}\right)^2 \\ x_{k+1} + \sqrt{C} &= \frac{1}{2x_k}\left(x_k + \sqrt{C}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{k+1} - \sqrt{C}}{x_{k+1} + \sqrt{C}} = \left(\frac{x_k - \sqrt{C}}{x_k + \sqrt{C}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x_k - \sqrt{C}}{x_k + \sqrt{C}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{C}}{x_0 + \sqrt{C}}\right)^{2^k} \triangleq q^{2^k}$$

$$\Rightarrow x_k - \sqrt{C} = 2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}$$

对任意 $x_0>0$，总有 $|q|<1$，即牛顿法收敛

牛顿法

- 牛顿的优点

  至少二阶局部收敛，收敛速度较快，特别是当迭代点充分靠近精确解时。

  牛顿法是目前求解非线性方程 (组) 的主要方法

- 牛顿的缺点

  - 对重根收敛速度较慢（线性收敛）
  - 对初值的选取很敏感，要求初值相当接近真解

    先用其它算法获取一个近似解，然后使用牛顿法

  - 每一次迭代都需要计算导数！

简化的Newton法

- **基本思想：** 用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \longrightarrow \boxed{\text{线性收敛}}$$

- **好处：** 只需要计算一次导数，即 $f'(x_0)$
- **缺点：** 只有线性收敛速度（假定方法是收敛的）

Newton下山法

demo_7_8.m

- 基本思想：要求每一步迭代满足下降条件

$$\left|f\left(x_{k+1}\right)\right|<\left|f\left(x_{k}\right)\right|$$

保证全局收敛

- 具体做法：加下山因子 λ

$$\boxed{x_{k+1}=x_{k}-\lambda\frac{f(x_{k})}{f'(x_{k})}}$$

- 下山因子的取法：

从 λ=1 开始，逐次减半，直到满足下降条件为止

弦截法与抛物线法

目的：**避免计算 Newton 法中的导数，并且尽可能地保持较高的收敛性（超线性收敛）**

- **弦截法（割线法）**：**用差商代替微商**
- **抛物线法**：**用二次多项式近似 $f(x)$**

弦截法

demo_7_9.m

$$f'(x_k) \approx f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- 弦截法迭代格式：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$

- 注：弦截法需要提供两个迭代初始值

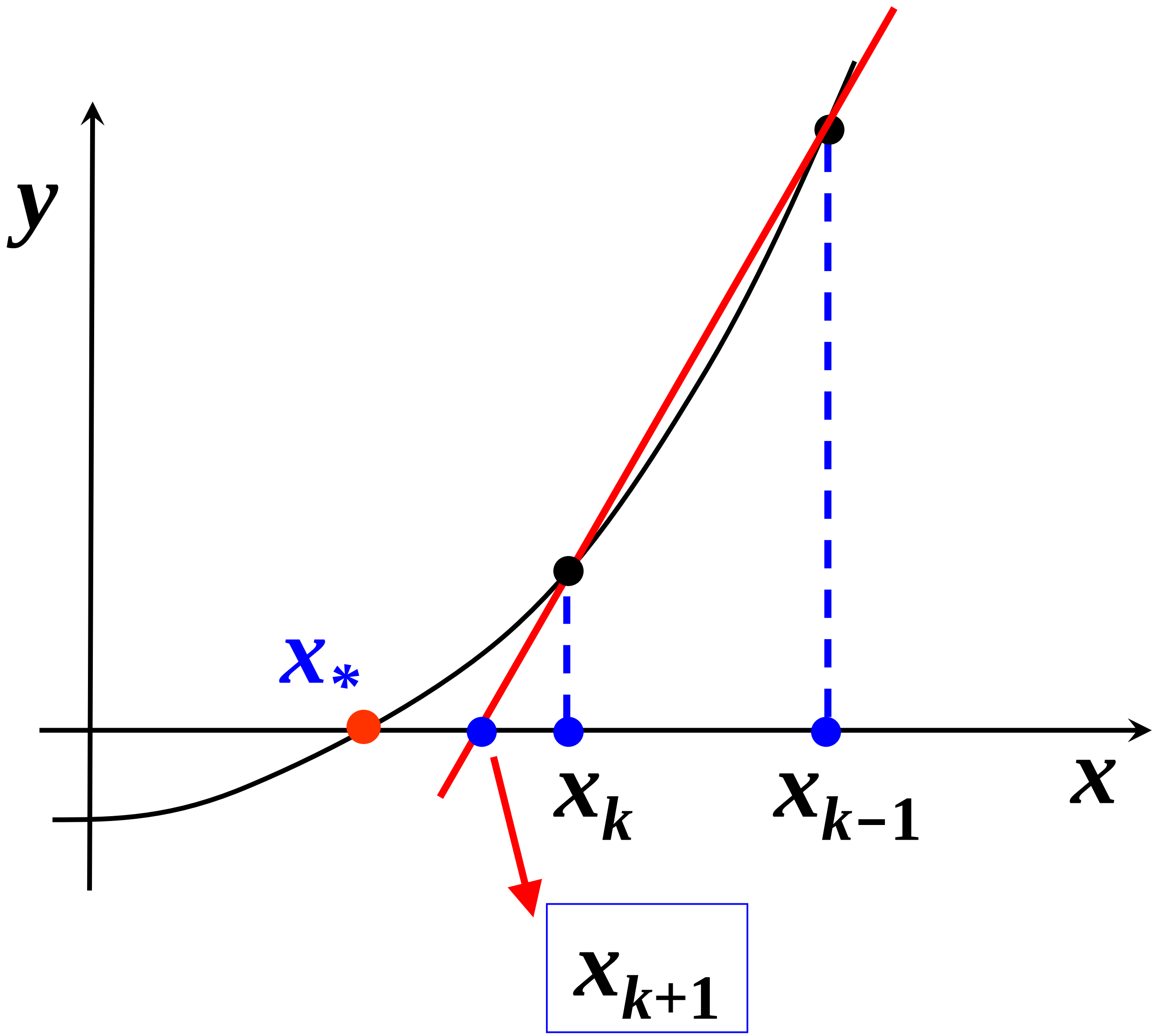
收敛性

定理： 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点， $f(x)$ 在 x_* 的某邻域 $U(x_*,\delta)$ 内有二阶连续导数，且 $f'(x)\neq 0$，若初值 x_0，$x_1 \in U(x_*,\delta)$，则当 δ 充分小时，弦截法具有 p 阶收敛性，其中

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

$$(p^2-p-1=0)$$

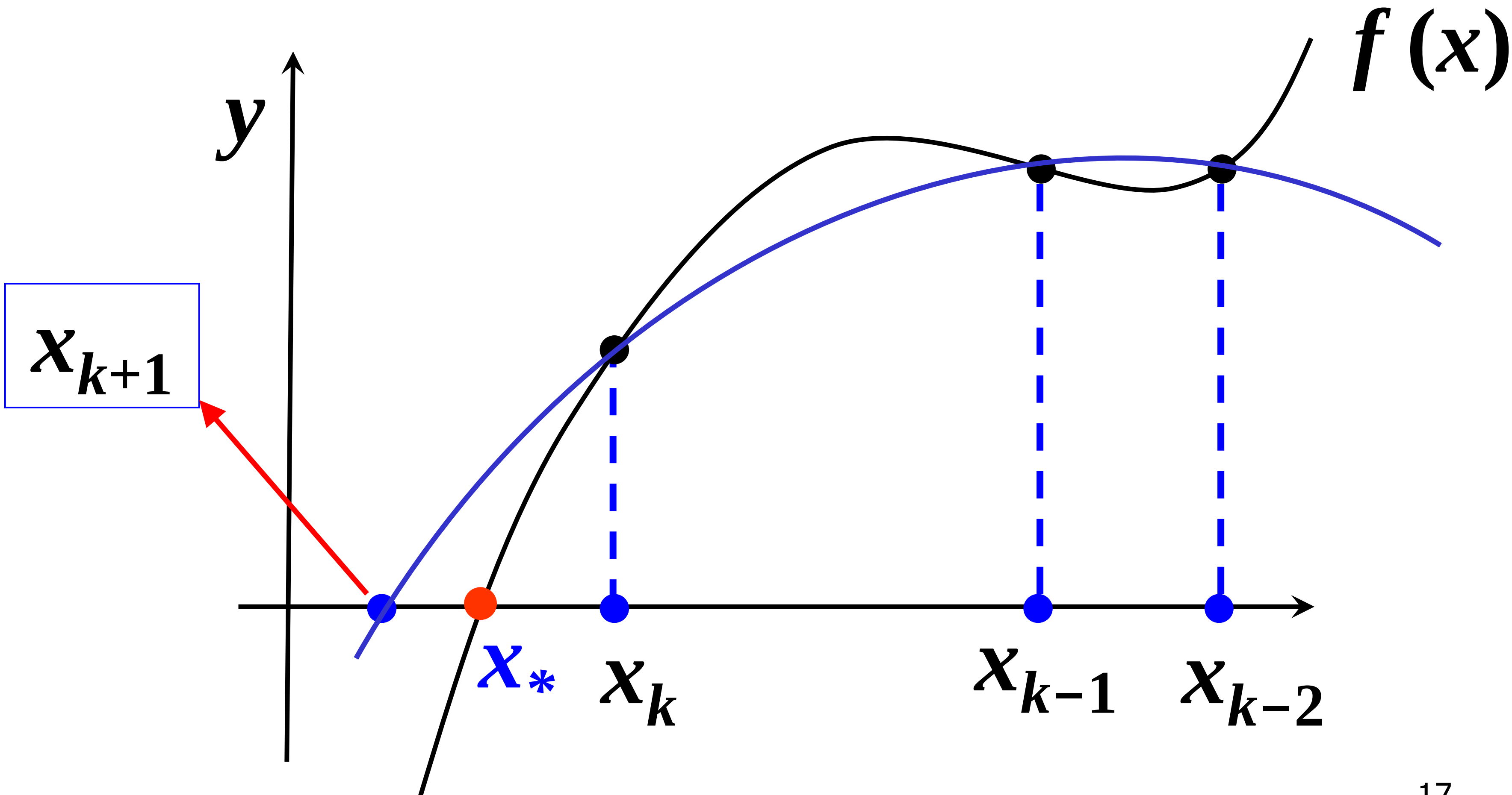
弦截法几何含义



抛物线法

- **基本思想：**

用二次曲线与 x 轴的交点作为 x_* 的近似值



抛物线法

- **计算过程**

二次曲线方程 (三点 Newton 插值多项式)

$$p_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

- **问题：** $p_2(x)$ 与 x 轴有**两个交点**，取哪个点？

解决方法： 取靠近 x_k 的那个点！

抛物线法

$$p_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}}$$

$$\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$$

取靠近 x_k 的那个点

- 抛物线法可能涉及复数运算，有时可以用来求复根

收敛性

在一定条件下可以证明：抛物线法的收敛阶为

$$\boxed{p \approx 1.840} \qquad (p^3 - p^2 - p - 1 = 0)$$

- 与弦截法相比，抛物线法具有更高的收敛阶
- 抛物线法需提供三个初始值
- 抛物线法也称为 Muller 法