

第六章

线性方程组的迭代法

—— **Jacobi, G-S and SOR**

本讲内容

■ 几类基本迭代法

- Jacobi 迭代法
- Gauss-Seidel 迭代法
- SOR（超松弛）迭代法
- 迭代法收敛性分析

Jacobi, G-S, SOR

Jacobi 迭代

● Jacobi 迭代法

考虑线性方程组 $Ax = b$

其中 $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ 非奇异, 且对角线元素全不为 0

● 将 A 分裂成 $A = D - L - U$, 其中

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi 迭代法

取 $M = D$, $N = L + U$, 可得 雅可比 (Jacobi) 迭代方法

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

● 迭代矩阵记为: $\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$

● 分量形式:
$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

● 在计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，如果用 $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ 代替 $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ ，
则可能会得到更好的收敛效果。

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代

写成矩阵形式:

$$x^{(k+1)} = D^{-1} (b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)})$$

可得

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1} Ux^{(k)} + (D - L)^{-1} b$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

此迭代方法称为 **高斯-塞德尔 (Gauss-Seidel)** 迭代法

● 迭代矩阵记为:

$$G = (D - L)^{-1} U$$

SOR 迭代

G-S 迭代法的分量形式

$$\begin{aligned}x_i^{(k+1)} &= \left(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} \right) / a_{ii} \\&= x_i^{(k)} + \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}\end{aligned}$$

- 为了得到更好的收敛效果，可在修正项前乘以一个
松弛因子 ω ，于是可得迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

SOR 迭代

写成矩阵形式:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} (b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - Dx^{(k)})$$

可得

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U] x^{(k)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

—— **SOR (Successive Over-Relaxation)** 迭代方法

● 迭代矩阵记为: $L_{\omega} = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + U]$

- SOR 的优点: 通过选取合适的 ω , 可获得更快的收敛速度
- SOR 的缺点: 最优参数 ω 的选取比较困难

● Jacobi 迭代 $M = D, N = L + U$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

● G-S 迭代 $M = D - L, N = U$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - L)^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + (D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

● SOR 迭代 $M = \frac{1}{\omega}(D - \omega L), N = \frac{1}{\omega}[(1 - \omega)D + \omega U]$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]\mathbf{x}^{(k)} + \omega(D - \omega L)^{-1}\mathbf{b}$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

举例

例：分别用 Jacobi、G-S、SOR($\omega = 1.1$) 迭代解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x_* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

取初始向量 $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ ，迭代过程中小数点后保留 4 位。

解：

Jacobi 迭代：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/2 \\ x_2^{(k+1)} = (8 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)})/3 \\ x_3^{(k+1)} = (-5 + x_2^{(k)})/2 \end{cases}$$

计算可得：

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= [0.5000, 2.6667, -2.5000]^T \\ &\vdots \\ x^{(21)} &= [2.0000, 3.0000, -1.0000]^T \end{aligned}$$

举例

G-S 迭代:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1 + x_2^{(k)})/2 \\ x_2^{(k+1)} = (8 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)})/3 \\ x_3^{(k+1)} = (-5 + x_2^{(k+1)})/2 \end{cases}$$

迭代可得:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= [0.5000, 2.8333, -1.0833]^T \\ &\vdots \\ x^{(9)} &= [2.0000, 3.0000, -1.0000]^T \end{aligned}$$

举例

SOR 迭代:
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega(1 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)})/2 \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega(8 + x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/3 \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega(-5 + x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})/2 \end{cases}$$

取 $\omega = 1.1$, 迭代可得

$$x^{(1)} = [0.5500, 3.1350, -1.0257]^T$$

\vdots

$$x^{(7)} = [2.0000, 3.0000, -1.0000]^T$$

如何确定 SOR 的最优松弛因子是一件**非常困难**的事!

举例

例：(编程实践)

分别用 Jacobi、G-S、SOR($\omega = 1.5$) 迭代解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

取初始向量 $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ 。

[demo_6_3.m](#)

迭代方法的收敛性

- Jacobi 迭代收敛的充要条件 $\rho(J) < 1$
 - G-S 迭代收敛的充要条件 $\rho(G) < 1$
 - SOR 迭代收敛的充要条件 $\rho(L_\omega) < 1$
 - Jacobi 迭代收敛的充分条件 $\|J\| < 1$
 - G-S 迭代收敛的充分条件 $\|G\| < 1$
 - SOR 迭代收敛的充分条件 $\|L_\omega\| < 1$
-
- 对角占优、不可约矩阵
 - 对称正定矩阵

对角占优矩阵

定义：设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，若

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

且至少有一个不等式严格成立，则称 A 为弱对角占优；

若所有不等式都严格成立，则称 A 为严格对角占优。

可约矩阵与不可约矩阵

定义： 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，若存在置换矩阵 P 使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)} \\ 1 \leq r \leq n-1$$

则称 A 为 **可约矩阵**；否则称为 **不可约矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

● 如果 A 是可约矩阵，则方程组 $Ax = b$ 等价于

$$(P^T A P) \underbrace{(P^T x)}_y = \underbrace{P^T b}_f \iff \begin{cases} A_{11}y_1 + A_{12}y_2 = f_1 \\ A_{22}y_2 = f_2 \end{cases}$$

即可以把原方程组化成两个**低阶**的方程组来处理。

可约矩阵的几个简单判别方法

性质： 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，若 A 的所有元素都非零，则 A 不可约。

性质： 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，且 $n \geq 2$ 。若 A 可约，则 A 的零元素个数大于等于 $n-1$ 。

性质： 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是三对角矩阵，且三条对角线元素均非零，则 A 不可约。

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_n \end{bmatrix}$$

Jacobi、G-S 收敛性

■ 对角占优情形

定理： 若 A 严格对角占优或不可约弱对角占优，则 A 非奇异

定理： 若 A 严格对角占优或不可约弱对角占优，则 Jacobi 迭代和 G-S 迭代均收敛

Jacobi、G-S 收敛性

■ 对称正定情形

eig函数

定理： 设 A 对称且 D 正定，则 Jacobi 迭代收敛的充要条件是 A 和 $2D-A$ 都正定。

定理： 设 A 对称且 D 正定，则 G-S 迭代收敛的充要条件是 A 正定。

SOR 收敛性

- SOR 收敛的必要条件

定理： 若 SOR 迭代收敛，则 $0 < \omega < 2$ 。

- SOR 收敛的充分条件

定理： 若 A 对称正定，且 $0 < \omega < 2$ ，则 SOR 迭代收敛。

定理： 若 A 严格对角占优或不可约弱对角占优，且 $0 < \omega \leq 1$ ，则 SOR 迭代收敛。

收敛性小结

A 对称且对角线元素为正, 则

(1) Jacobi 迭代收敛 $\longleftrightarrow A$ 正定且 $2D-A$ 正定

(2) G-S 迭代收敛 $\longleftrightarrow A$ 正定

A 对称正定, 则 SOR 迭代收敛 $\longleftrightarrow 0 < \omega < 2$

A 严格对角占优或不可约弱对角占优

\longrightarrow Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代收敛

A 严格对角占优或不可约弱对角占优且 $0 < \omega \leq 1$

\longrightarrow SOR 迭代收敛

举例

例： 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ ，给出 Jacobi 和 G-S 收敛的充要条件

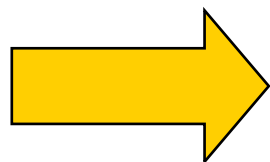
解： A 对称，且对角线元素均大于 0，故

(1) Jacobi 收敛的充要条件是 A 和 $2D-A$ 均正定

(2) G-S 收敛的充要条件是 A 正定

$$\begin{aligned} A \text{ 正定} &\iff D_1 = 1 > 0, D_2 = 1 - a^2 > 0, D_3 = (1 - a)^2(1 + 2a) > 0 \\ &\iff -0.5 < a < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2D-A \text{ 正定} &\iff D_1 = 1 > 0, D_2 = 1 - a^2 > 0, D_3 = (1 + a)^2(1 - 2a) > 0 \\ &\iff -0.5 < a < 0.5 \end{aligned}$$



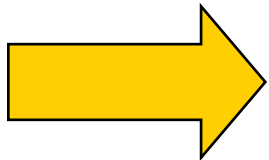
Jacobi 收敛的充要条件是： $-0.5 < a < 0.5$
G-S 收敛的充要条件是： $-0.5 < a < 1$

举例

解法二： Jacobi 的迭代矩阵为 $J = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$

设 λ 是 J 的特征值，则由 $\det(\lambda I - J) = 0$ 可得

$$(\lambda - a)^2 (\lambda + 2a) = 0$$



Jacobi 收敛的充要条件是 $\rho(J) < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$,
即 $-0.5 < a < 0.5$

补：算法的实施

停机准则： $\frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b - Ax^{(0)}\|} < \text{tol}$

算法： Jacobi

(G-S 和 SOR 的实施类似)

(1) 给定初值 $x^{(0)}$ 和精度要求 tol

(2) 计算 $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

(3) 对 $k = 0, 1, 2, \dots$, 计算

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

若 $\frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|r^{(0)}\|} < \text{tol}$, 则输出 $x_* \approx x^{(k+1)}$, 停止计算。