第二章

插值方法

—— Hermite 插值

为什么 Hermite 插值

在许多实际应用中，不仅要求**函数值**相等，而且要求若干阶**导数**也相等，如机翼设计等。

$$p(x) \approx f(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &p(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \\ &p'(x_i) = f'(x_i) \end{aligned}}$$

$$p^{(2)}(x_i) = f^{(2)}(x_i)$$

$$\vdots$$

$$p^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i)$$

满足**函数值**相等且**导数**也相等的插值方法称为 **Hermite插值**

内容提要

- **Hermite 插值**
  - **两点三次 Hermite 插值**

我们这里只考虑对一阶导数有要求的情形。

Hermite 插值

一般来说，给定 $m+1$ 个插值条件，就可以构造出一个 m 次 Hermite 插值多项式

一个典型的 Hermite 插值

- 两点三次 Hermite 插值（切触插值）

插值节点：x_0，x_1

插值条件：$p(x_i)=f(x_i)$，$p'(x_i)=f'(x_i)$，$i=0, 1$

两点三次Hermite 插值

两点三次 Hermite 插值

插值节点：x_0，x_1

插值条件：$p(x_i) = f(x_i) = y_i$，$p'(x_i) = f'(x_i) = m_i$，$i = 0, 1$

仿照 Lagrange 多项式的思想，设

$$p(x) \triangleq H_3(x) = a_0\alpha_0(x) + a_1\alpha_1(x) + b_0\beta_0(x) + b_1\beta_1(x)$$

其中 $\alpha_0(x), \alpha_1, \beta_0(x), \beta_1(x)$ 均为 3 次多项式，且满足

$$\begin{aligned} &\alpha_j(x_i) = \delta_{ji}, \quad \alpha_j'(x_i) = 0, \\ &\beta_j(x_i) = 0, \quad \beta_j'(x_i) = \delta_{ji} \end{aligned} \qquad i, j = 0, 1$$

两点三次Hermite 插值

将插值条件代入立即可得

$$\boxed{H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + m_0\beta_0(x) + m_1\beta_1(x)}$$

如何确定 $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ 的表达式？

$\boxed{\alpha_0(x)}$

$$\alpha_0(x_0) = 1,\quad \alpha_0'(x_0) = 0,\quad \alpha_0(x_1) = 0,\quad \alpha_0'(x_1) = 0$$

$$\boxed{\alpha_0(x_1) = 0,\quad \alpha_0'(x_1) = 0} \Rightarrow \alpha_0(x) = (ax + b)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\boxed{\alpha_0(x_0) = 1,\quad \alpha_0'(x_0) = 0} \Rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{2}{x_1 - x_0},\quad b = \frac{x_1 - 3x_0}{x_1 - x_0} = 1 - \frac{2x_0}{x_1 - x_0}}$$

两点三次Hermite 插值

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

同理可得

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

相类似地，可以推出

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

两点三次Hermite 插值

demo_2_6.m

所以，满足插值条件

$$p(x_0)=f(x_0)=y_0\ ,\ p'(x_0)=f'(x_0)=m_0$$
$$p(x_1)=f(x_1)=y_1\ ,\ p'(x_1)=f'(x_1)=m_1$$

的三次 Hermite 插值多项式为

$$H_3(x)=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$
$$+\ m_0(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+m_1(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

余项 $$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4\,!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \qquad \xi_x\in(x_0,x_1)$$