第二章

插 值 方 法

—— Newton 插值

为什么 Newton 插值

Lagrange 插值简单易用，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_k(x)$ 都需重新计算，很不方便！

解决办法 → **更换基函数**

设计一个可以逐次生成插值多项式的算法，即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

其中 $p_{n+1}(x)$ 和 $p_n(x)$ 分别为 $n+1$ 次和 n 次插值多项式

⇒ **可行方案：Newton 插值**

新的基函数

设插值节点：$x_0, \ldots, x_n$，Newton 插值采用的基函数为：

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = x - x_0$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- **优点**：当增加一个节点 x_{n+1} 时，只需加上基函数

$$\omega_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Newton 插值

- 此时 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为

$$p_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

需要解决的问题

① 怎样确定系数 $a_0, \ldots, a_n$？

② 如何从 $p_n(x)$ 得到 $p_{n+1}(x)$？

⇨ 工具：差商(均差)

内容提要

- **差商与 Newton 插值**
  - **差商（均差）及其计算方法**
  - **Newton 插值公式**
  - **差分与等距 Newton 插值**

什么是差商

设函数 $f(x)$，节点 $x_0, \ldots, x_n$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$

→ $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 的 **一阶差商**

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

→ $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的 **二阶差商**

差商的一般定义

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

→ **k 阶差商**

差商的性质

- **差商可以表示为函数值的线性组合：** 用归纳法可以证明

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_{k+1}'(x_j)}$$

差商与节点的排序无关，即差商具有**对称性**

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]$$

其中 $i_0, i_1, \dots, i_k$ 是 $0, 1, \dots, k$ 的一个任意排列

- **差商的等价定义：** (某些教材上的所采用的定义)

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_0,\dots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

差商的性质

- **k 阶差商与 k 阶导数之间的关系：** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 k 阶导数，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

该性质后面有证明

差商表

如何巧妙地计算差商 → **差商表**

差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	…	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

差商举例

例： 已知 $y=f(x)$ 的函数值表，试计算其各阶差商

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

d_d.m

demo_2_2.m

解： 差商表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

Newton 插值公式

由差商的定义可得

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] \quad \cdots\cdots \quad ①$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \quad \cdots\cdots \quad ②$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,\ldots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\ldots,x_n] \quad \cdots\cdots \quad (n-1)$$

$$① + (x-x_0)\times ② + \ldots\ \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})\times (n-1)$$

$$f(x)=\boxed{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}$$

$$\boxed{+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}$$

$N_n(x)$ $R_n(x)$

Newton 插值公式

$$\boxed{f(x) = N_n(x) + R_n(x)}$$

$$N_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega_{n+1}(x)$$

其中 $a_0 = f(x_0),\ a_i = f[x_0, \cdots, x_i],\ i = 1, 2, \cdots, n$

重要性质：$N_n(x_i) = f(x_i)$，$i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$N_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式

Newton VS Lagrange

$f(x)$ 在 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上的 n 次插值多项式是唯一的！

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$

且余项相同

$$\Leftrightarrow \quad f[x, x_0, \ldots, x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$\Rightarrow \quad f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$\boxed{f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$$

插值举例

例： 已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 Newton 线性和抛物线插值计算 ln 0.54 的近似值

解： 取节点 0.5, 0.6, 0.4 作差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

$$N_1(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5)$$

$$\boxed{N_1(0.54) = -0.6202}$$

$$N_2(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5) - 2.0450(x-0.5)(x-0.6)$$

$$\boxed{N_2(0.54) = -0.6153}$$

demo_2_3.m

注：只需使用差商表对角线上的值

Newton 插值

可以看出，当增加一个节点时，牛顿插值公式只需在原来的基础上增加一项，前面的计算结果仍然可以使用。与拉格朗日插值相比，牛顿插值具有**灵活增加节点**的优点！

注： 增加插值节点时，须 **排** 在已有插值节点的**后面**！

向前差分

- 在实际应用中，通常采用**等距**节点：

$$x_i = x_0 + i\,h\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$h>0$，称为步长

此时，可以使用**差分**来简化 Newton插值公式

- 向前差分（教材上简称为**差分**）

$$\boxed{\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i)}$$

→ 定义为 $f(x)$ 在 x_i 处步长为 h 的 **一阶差分**

高阶差分

- **高阶差分**

$$\Delta^1 f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

二阶差分

$$\vdots$$

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$

***n* 阶差分**

规定 $\Delta^0 f_i = f(x_i)$

差分与差商之间的关系

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta f_0}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f[x_k,x_{k+1}]=\frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 f_0}{h^2}$$

$$\Rightarrow \quad f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]=\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 f_k}{h^2}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=\frac{1}{3!}\frac{\Delta^3 f_0}{h^3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{m!}\frac{\Delta^m f_0}{h^m}} \qquad m=1,2,3,\ldots$$

差分表

差分表

x_i	$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	…	n 阶差分
x_0	$f(x_0)$	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	…	$\Delta^n f_0$
x_1	$f(x_1)$	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	
x_{n-3}	$f(x_{n-3})$	Δf_{n-3}	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^3 f_{n-3}$		
x_{n-2}	$f(x_{n-2})$	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-2}$			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	Δf_{n-1}				
x_n	$f(x_n)$					

Newton 插值只需使用差分表第一行

等距牛顿插值

$$N_n(x)=a_0\omega_0(x)+a_1\omega_1(x)+a_2\omega_2(x)+\cdots+a_n\omega_n(x)$$

$$a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$$

牛顿向前插值公式

用**向前差分**表示的**等距**牛顿插值公式

设 $x=x_0+th$ 则

$$\boxed{\begin{aligned}N_n(x)&=N_n(x_0+th)\\&=f_0+\frac{t}{1!}\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0\end{aligned}}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}t(t-1)\ldots(t-n)h^{n+1}\ ,\quad \xi_x\in(x_0,x_n)$$

插值举例

例： 已知 $f(x) = \cos x$ 在等距节点 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 处的函数值，试用 4 次 Newton 前插公式计算 $f(0.048)$ 的近似值，并估计误差。

解： 取节点 x=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4， 做差分表

x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.0	1.00000	-0.00500	-0.00993	-0.00013	-0.00012
0.1	0.99500	-0.01493	-0.00980	-0.00025	
0.2	0.98007	-0.02473	-0.00955		
0.3	0.95534	-0.03428			
0.4	0.92106				

插值举例

插值点 $x = 0.048$ ⇨ $t = (x - x_0)/h = 0.48$

$$N_4(0.048) = 1.00000 + 0.48*(-0.00500) + \cdots = 0.99884$$

$$|R_4(0.048)| \le t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)h^5 M_5 / 5!$$

$$\le 1.09212 \times 10^{-7}$$

demo_2_4.m