

# 第二章

---

## 插值方法

### —— Newton 插值

# 为什么 Newton 插值

**Lagrange** 插值简单易用，但若要增加一个节点时，全部基函数  $l_k(x)$  都需重新计算，很不方便！

**解决办法**  **更换基函数**

设计一个可以逐次生成插值多项式的算法，即

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + u_{n+1}(x)$$

其中  $p_{n+1}(x)$  和  $p_n(x)$  分别为  $n+1$  次和  $n$  次插值多项式



**可行方案：Newton 插值**

# 新的基函数

设插值节点： $x_0, \dots, x_n$ ，Newton 插值采用的基函数为：

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = x - x_0$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

.....

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

- **优点：** 当增加一个节点  $x_{n+1}$  时，只需加上基函数

$$\omega_{n+1} = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

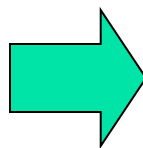
# Newton 插值

- 此时  $f(x)$  的  $n$  次插值多项式为

$$p_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

## 需要解决的问题

- ① 怎样确定系数  $a_0, \dots, a_n$  ?
- ② 如何从  $p_n(x)$  得到  $p_{n+1}(x)$  ?



工具：差商(均差)

# 内容提要

## ■ 差商与 Newton 插值

- 差商（均差）及其计算方法
- Newton 插值公式
- 差分与等距 Newton 插值

# 什么是差商

设函数  $f(x)$ , 节点  $x_0, \dots, x_n$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \rightarrow f(x) \text{ 关于点 } x_i, x_j \text{ 的 一阶差商}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

$\rightarrow f(x)$  关于点  $x_i, x_j, x_k$  的 二阶差商

## 差商的一般定义

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \rightarrow k \text{ 阶差商}$$

# 差商的性质

- 差商可以表示为函数值的线性组合：用归纳法可以证明

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_k)} \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega_{k+1}'(x_j)} \end{aligned}$$

差商与节点的排序无关，即差商具有**对称性**

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$$

其中  $i_0, i_1, \dots, i_k$  是  $0, 1, \dots, k$  的一个任意排列

- 差商的等价定义：(某些教材上的所采用的定义)

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

# 差商的性质

- $k$  阶差商与  $k$  阶导数之间的关系：若  $f(x)$  在  $[a,b]$  上具有  $k$  阶导数，则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ ，使得

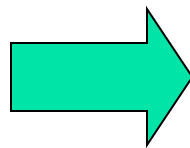
$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

该性质后面有证明



# 差商表

如何巧妙地计算差商



差商表

## 差商表

$x_i$	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	...	$n$ 阶差商
$x_0$	$f(x_0)$					
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
$x_3$	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	
$x_n$	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

# 差商举例

**例：** 已知  $y = f(x)$  的函数值表，试计算其各阶差商

$i$	0	1	2	3
$x_i$	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	5	3	17	21

d\_d.m

demo\_2\_2.m

**解：** 差商表如下

$x_i$	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	5			
-1	3	-2		
1	17	7	3	
2	21	4	-1	-1

# Newton 插值公式

由差商的定义可得

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x, x_0] \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1)f[x, x_0, x_1] \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

... ..

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, \dots, x_n] + (x - x_n)f[x, x_0, \dots, x_n] \dots \textcircled{n-1}$$

$$\textcircled{1} + (x - x_0) \times \textcircled{2} + \dots \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \times \textcircled{n-1}$$

➡  $f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$   
 $+ f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$

$N_n(x)$

$$+ f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

$R_n(x)$

# Newton 插值公式

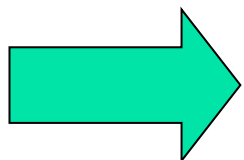
$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

$$N_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n]\omega_{n+1}(x)$$

其中  $a_0 = f(x_0)$ ,  $a_i = f[x_0, \dots, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

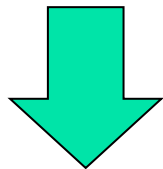
重要性质:  $N_n(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$



$N_n(x)$  是  $f(x)$  的  $n$  次插值多项式

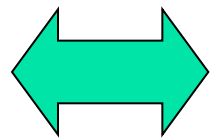
# Newton VS Lagrange

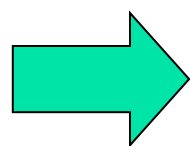
$f(x)$  在  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上的  $n$  次插值多项式是唯一的！



$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$

且余项相同


$$f[x, x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$



$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

# 插值举例

例：已知函数  $y = \ln x$  的函数值如下

$x$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 **Newton** 线性和抛物线插值计算  $\ln 0.54$  的近似值

解：取节点 0.5, 0.6, 0.4 作差商表

$x_i$	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

$$N_1(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5)$$

$$N_1(0.54) = -0.6202$$

$$N_2(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5) - 2.0450(x-0.5)(x-0.6)$$

$$N_2(0.54) = -0.6153$$

[demo\\_2\\_3.m](#)

注：只需使用差商表对角线上的值

# Newton 插值

---

可以看出，当增加一个节点时，牛顿插值公式只需在原来的基础上增加一项，前面的计算结果仍然可以使用。与拉格朗日插值相比，牛顿插值具有**灵活增加节点**的优点！

**注：**增加插值节点时，须 **排** 在已有插值节点的**后面**！

# 向前差分

- 在实际应用中，通常采用等距节点：

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$h > 0$ ，称为步长

此时，可以使用差分来简化 Newton 插值公式

- 向前差分（教材上简称为差分）

$$\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i)$$

→ 定义为  $f(x)$  在  $x_i$  处步长为  $h$  的一阶差分



# 高阶差分

- 高阶差分

$$\Delta^1 f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

⋮

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$

二阶差分

$n$  阶差分

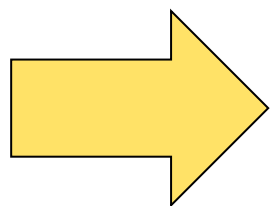
规定  $\Delta^0 f_i = f(x_i)$

# 差分与差商之间的关系

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h} \quad \longrightarrow \quad f[x_k, x_{k+1}] = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} \quad \longrightarrow \quad f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 f_k}{h^2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{1}{3!} \frac{\Delta^3 f_0}{h^3}$$



$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{1}{m!} \frac{\Delta^m f_0}{h^m}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

# 差分表

## 差分表

$x_i$	$f(x_i)$	一阶 差分	二阶 差分	三阶 差分	...	$n$ 阶 差分
$x_0$	$f(x_0)$	$\Delta f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	...	$\Delta^n f_0$
$x_1$	$f(x_1)$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	
$x_{n-3}$	$f(x_{n-3})$	$\Delta f_{n-3}$	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^3 f_{n-3}$		
$x_{n-2}$	$f(x_{n-2})$	$\Delta f_{n-2}$	$\Delta^2 f_{n-2}$			
$x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$	$\Delta f_{n-1}$				
$x_n$	$f(x_n)$					

Newton 插值只需使用差分表第一行

# 等距牛顿插值

$$N_n(x) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}$$

## 牛顿向前插值公式

用向前差分表示的等距牛顿插值公式

设  $x = x_0 + th$  则

$$\begin{aligned} N_n(x) &= N_n(x_0 + th) \\ &= f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 \end{aligned}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}, \quad \xi_x \in (x_0, x_n)$$

# 插值举例

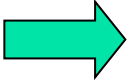
**例：** 已知  $f(x) = \cos x$  在等距节点 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 处的函数值，试用 4 次 Newton 前插公式计算  $f(0.048)$  的近似值，并估计误差。

**解：** 取节点  $x=0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ，做差分表

$x_i$	$f(x_i)$	$\Delta f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.0	1.00000	-0.00500	-0.00993	-0.00013	-0.00012
0.1	0.99500	-0.01493	-0.00980	-0.00025	
0.2	0.98007	-0.02473	-0.00955		
0.3	0.95534	-0.03428			
0.4	0.92106				

# 插值举例

---

插值点  $x = 0.048$    $t = (x - x_0) / h = 0.48$

$$N_4(0.048) = 1.00000 + 0.48 * (-0.00500) + \dots = 0.99884$$

$$|R_4(0.048)| \leq t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)h^5 M_5 / 5! \\ \leq 1.09212 \times 10^{-7}$$

demo\_2\_4.m