

第二章

插 值 方 法

—— 多项式插值

—— Lagrange 插值

为什么插值

- 大多数实际问题都可用函数来表示某种内在规律的数量关系
- 但函数通常无法给出，只有通过实验或观测得到的数据表
- 如何根据这些数据推测或估计其它点的函数值？

例： 已测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度 (M)	466	741	950	1422	1634
水温 (°C)	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如 500、600、800米...）处的水温。

数学工具：数值插值技术

什么是插值

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且已经测得在点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0)$, ... , $y_n = f(x_n)$

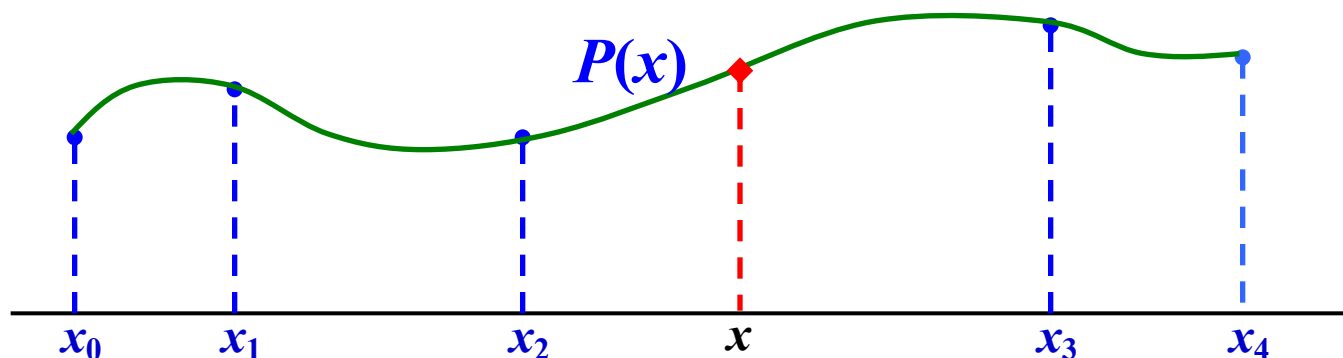
如果存在一个简单易算的函数 $p(x)$ ，使得

$$p(x_i) = f(x_i) , i = 0, 1, \dots, n$$

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数

- $[a, b]$ 为插值区间， x_i 为插值节点， $p(x_i) = f(x_i)$ 为插值条件
- 插值节点无需递增排列，但必须确保互不相同！
- 求插值函数 $p(x)$ 的方法就称为插值法

常用插值方法



● 常用插值法

- 多项式插值： $p(x)$ 为多项式，多项式最常用的插值函数
- 分段多项式插值： $p(x)$ 为分段多项式

- 三角插值： $p(x)$ 为三角函数
- 有理插值： $p(x)$ 为有理函数
-

内容提要

- 多项式插值
- Lagrange 插值
- 差商与 Newton 插值
- Hermite 插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

多项式插值

● 多项式插值

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n + 1$ 个点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0)$, \dots , $y_n = f(x_n)$

求次数 **不超过 n** 的多项式

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n,$$

使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

注意： $p(x)$ 的次数有可能小于 n

多项式插值

定理（多项式插值的存在唯一性）

满足上述条件的多项式 $P(x)$ 存在且唯一。

证明：板书（*Vandermonde* 行列式）

注：该定理的证明过程事实上也给出了一种求 $p(x)$ 的方法，但较复杂，一般不用！后面将给出较简单的求法

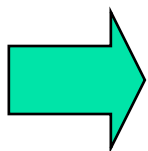
线性插值

例（板书）：线性插值，即求一次多项式 $p(x)$ ，满足

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1$$

$$p(x_0) = y_0$$

$$p(x_1) = y_1$$



$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

点斜式

$$p(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

重新整理

● 我们注意到， $p(x)$ 是两个一次多项式的线性组合

$$\text{令 } l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\text{则 } p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

为什么能写成这个形式？

$$\text{进一步观察可知：} \quad l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0 \quad l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1$$

抛物线插值

例： 抛物线插值，即求二次多项式 $p(x)$ ，满足

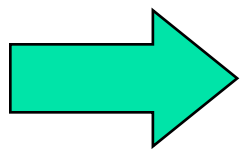
$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2$$

想法： 如果能构造三个二次多项式 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ ，满足

$$l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0$$

$$l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0$$

$$l_2(x_0) = 0, l_2(x_1) = 0, l_2(x_2) = 1$$



$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

问题： 如何构造 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$?

待定系数法

内容提要

- 多项式插值
- Lagrange 插值
 - 基函数法
 - Lagrange 基函数
 - Lagrange 插值余项与误差估计
- 差商与 Newton 插值
- Hermite 插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

基函数插值法

● 基函数插值法

记 $Z_n(x) = \{ \text{次数不超过 } n \text{ 的多项式的全体} \} \longrightarrow \boxed{n+1 \text{ 维}}$

设 $z_0(x), z_1(x), \dots, z_n(x)$ 构成 $Z_n(x)$ 的一组基, 则插值多项式可表示为

$$p(x) = a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x) + \cdots + a_n z_n(x)$$

- ① 寻找合适的基函数
- ② 确定插值多项式在这组基下的线性表示系数

通过基函数来构造插值多项式的方法就称为
基函数插值法

Lagrange 插值

● Lagrange 基函数

定义：设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上满足

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

则称 $l_k(x)$ 为节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的 n 次 Lagrange 插值基函数

通过构造法，可求得

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \end{aligned}$$

Lagrange 插值

- 两点说明

- $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 构成 $Z_n(x)$ 的一组基
- $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 与插值节点有关, 但与 $f(x)$ 无关

Lagrange插值

- 如何用 Lagrange 基函数求 $P(x)$

设 $p(x) = a_0l_0(x) + a_1l_1(x) + \cdots + a_nl_n(x)$

将 $p(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ 代入, 可得

$$a_i = y_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

➡ $p(x) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) + \cdots + y_nl_n(x) \triangleq L_n(x)$

$L_n(x)$ 就称为 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

线性与抛物线插值

● 两种特殊情形

● 线性插值多项式（一次插值多项式）： $n = 1$

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

● 抛物线插值多项式（二次插值多项式）： $n = 2$

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

注： n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是 n 次的，但有时也会低于 n 次。如：二次插值中，如果三点共线，则 $L_n(x)$ 为直线

插值举例

例：已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下

demo_2_1.m

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用线性插值和抛物线插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解：为了减小截断误差，通常选取插值点 x 邻接的插值节点

线性插值：取 $x_0=0.5$, $x_1=0.6$ 得

$$L_1 = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = 1.823x - 1.6046$$

将 $x=0.54$ 代入可得： $\ln 0.54 \approx L_1(0.54) = -0.6202$

插值举例

抛物线插值：取 $x_0=0.4$, $x_1=0.5$, $x_2=0.6$, 可得

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) = -0.6153$$

在实际计算中，一般不需要给出插值多项式的具体表达式



$\ln 0.54$ 的精确值为：-0.616186...

可见，抛物线插值的精度比线性插值要高

Lagrange 插值简单方便，只要取定节点就可写出基函数，进而得到插值多项式，易于计算机实现。

误差估计

- 估计误差

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \longrightarrow \text{插值余项}$$

定理：设 $f(x) \in C^n[a, b]$ (n 阶连续可微)，且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在，则对 $\forall x \in [a, b]$ ，存在 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

证明：板书

- 注：余项中的 ξ_x 与 x 是相关的

插值余项

由插值条件可知: $R_n(x_i)=0, i=0, 1, \dots, n$

→ $R_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点

→ $R_n(x)$ 可写成 $R_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x)$

对任意给定的 $x \in [a,b]$ ($x \neq x_i, i=0, 1, \dots, n$), 构造辅助函数

$$\varphi(t) = R_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t)$$

则 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 中有 $n+2$ 个互不相同的零点: x, x_0, \dots, x_n

罗尔定理

设 $f(x) \in C[a, b]$, 且在 (a, b) 内可微; 若 $f(a) = f(b) = 0$, 则必存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

插值余项

条件: $f(x) \in C^n[a, b]$, 且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在

由 Rolle 定理可知 $\varphi'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点;

同理可知 $\varphi''(t)$ 在 (a, b) 内至少有 n 个零点;

以此类推, 可知 $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点, 设为 ξ_x , 即 $\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$, $\xi_x \in (a, b)$ 。

$$\begin{aligned}\text{又 } \varphi^{(n+1)}(t) &= R_n^{(n+1)}(t) - K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(t) \\ &= f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)! \\ &= f^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)!\end{aligned}$$

$$\Rightarrow K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

插值余项

- 两个特例

- 线性插值（两点插值，即 $n=1$ ）

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)$$

- 抛物线插值（三点插值，即 $n=2$ ）

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

插值余项

● 几点说明

- 余项公式只有当 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能使用
- ξ_x 与 x 有关, 通常无法确定, 实际使用中通常是估计其上界

若 $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$, 则 $|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|$

- 计算点 x 上的近似值时, 应尽量选取与 x 相近插值节点

Lagrange基函数性质

● Lagrange 基函数的两个重要性质

- 当 $f(x)$ 为一个次数 $\leq n$ 的多项式时, 有 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$
故

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \equiv 0$$

即 n 次插值多项式对于次数 $\leq n$ 的多项式是**精确**的

- 若 $f(x) = x^k$, $k \leq n$, 则有

$$R_n(x) = x^k - \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) = 0$$

特别地, 当 $k = 0$ 时有 $\sum_{j=0}^n l_j(x) = 1$

插值误差举例

例：已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试估计线性插值和抛物线插值计算 $\ln 0.54$ 的误差

解：

线性插值 $R_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - x_0)(x - x_1)$

$x_0=0.5, x_1=0.6, \xi \in (0.5, 0.6) \longrightarrow |f^{(2)}(\xi)| \leq |-\xi^{-2}| \leq 4$

$\longrightarrow |R_1(0.54)| \leq |2(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)| = 0.048$

插值误差举例

抛物线插值: $R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6, \xi \in (0.4, 0.6) \Rightarrow |f^{(3)}(\xi)| \leq |2\xi^{-3}| \leq 31.25$

$\Rightarrow |R_2(0.54)| \leq \frac{31.25}{3!} |(0.54 - 0.4)(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)|$
 $= 0.00175$

$|R_1(0.54)| \leq 0.048$

抛物线插值通常
优于线性插值。



但绝对不是次
数越高就越好，
嘿嘿 ...

插值误差举例

例：函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，插值区间 $[-5, 5]$ ，取等距节点，
试画出插值多项式 L 的图像

`example_2_6.m`

例：设 $l_i(x)$ 是关于点 x_0, x_1, \dots, x_5 的 Lagrange 插值基函数。

证明：

$$\sum_{i=0}^5 (x_i - x)^2 l_i(x) = 0$$

证明：板书