第二章

插 值 方 法

—— 分段低次插值

为什么分段低次插值

- 高次多项式插值的病态性质：

$n \to \infty$ 时 $L_n(x)$ 不一定收敛于 $f(x)$

插值多项式的次数并非越高越好！

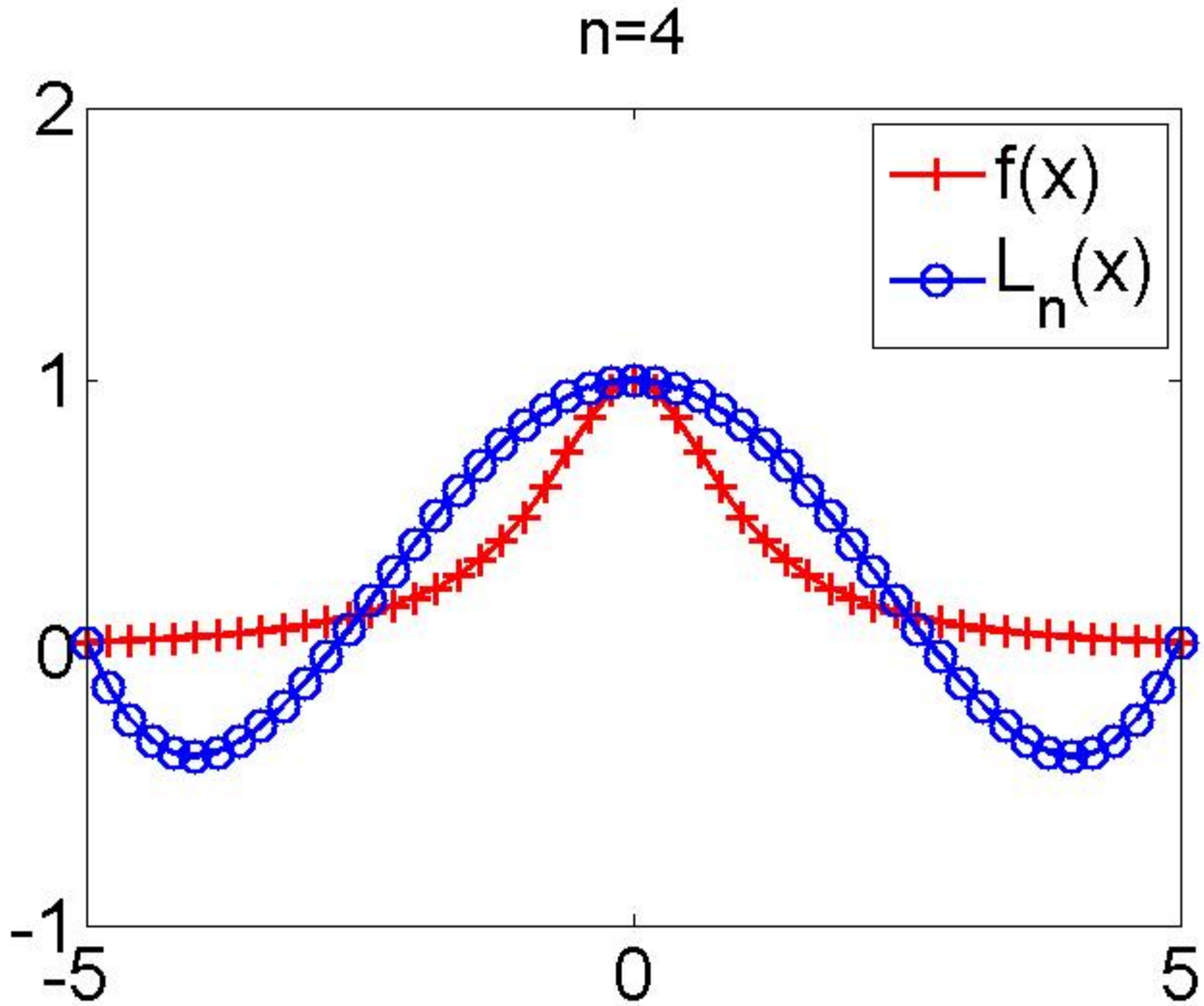
例： Runge 函数的等距节点插值多项式

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5,5]$$

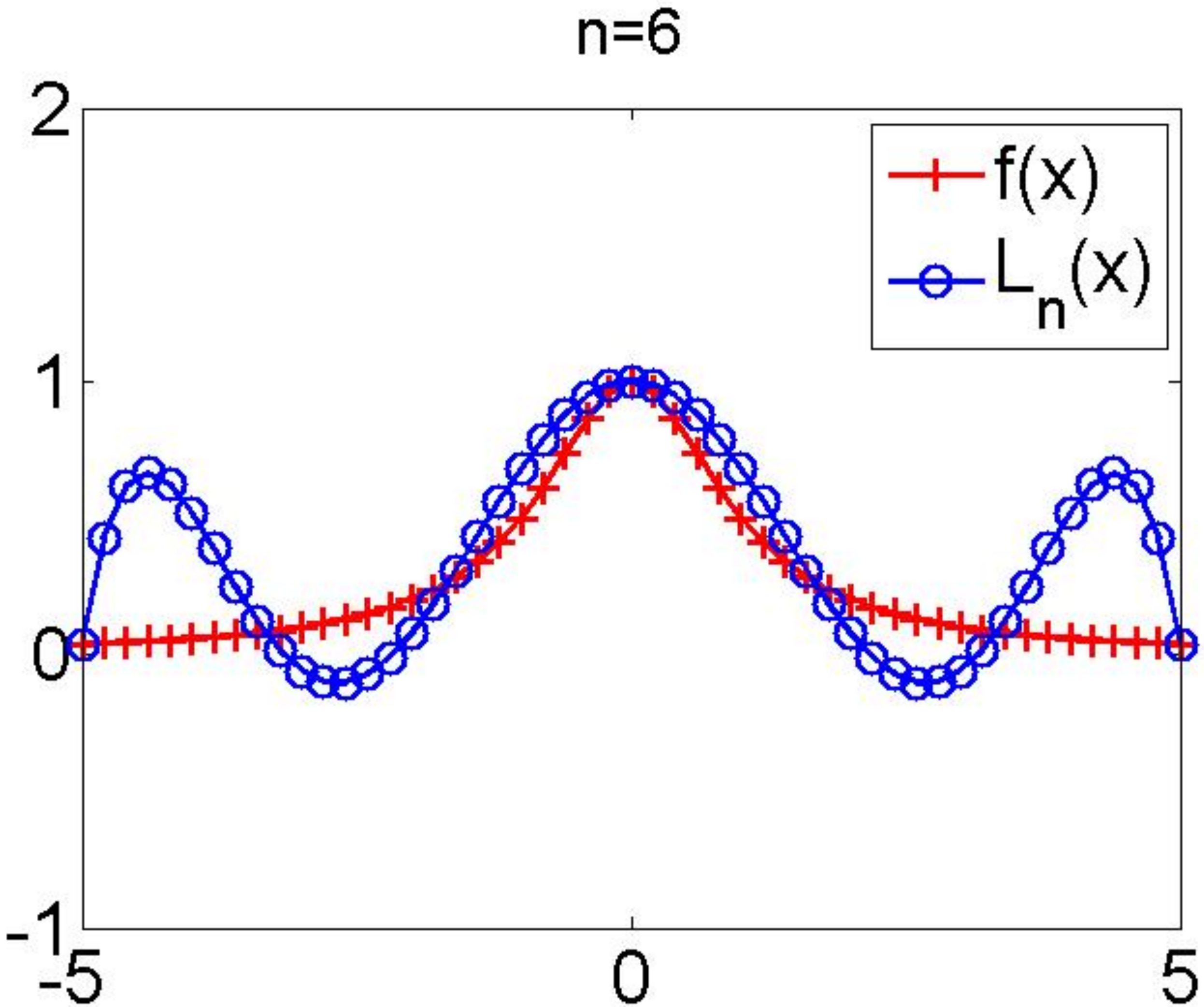
$$x_k = -5 + \frac{10k}{n}$$

demo_2_5.m

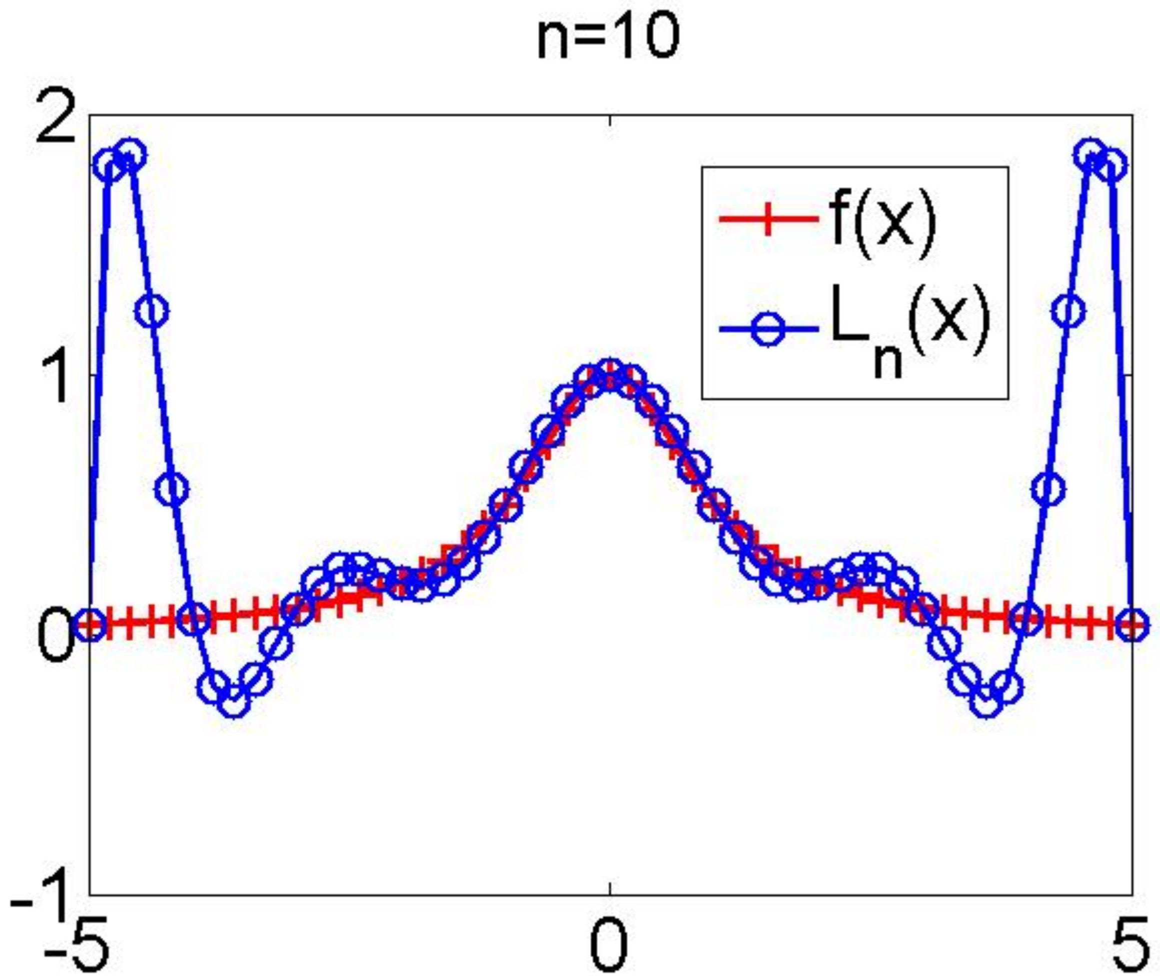
Runge 现象



Runge 现象



Runge 现象



分段低次插值

用分段低次多项式函数来逼近原函数 $f(x)$

- 常见的分段低次插值
  - 分段线性插值

    — 每个小区间上用线性多项式来逼近 $f(x)$
  - 分段三次 Hermite 插值

    — 每个小区间上用三次 Hermite多项式来逼近 $f(x)$
  - 三次样条插值

    — 要求插值函数在整个插值区间上都二阶连续可导

内容提要

- **分段低次插值**
  - **分段线性插值**
  - **分段三次 Hermite 插值（两点三次Hermite）**
  - **三次样条插值（见下一节）**

分段线性插值

分段线性插值

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点

$f(x)$ 在这些节点上的函数值为 $y_0, y_1, \dots, y_n$

记 $h_k = x_{k+1} - x_k$ ，$h = \max\limits_k h_k$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足

① $I_h(x) \in C[a,b]$

② $I_h(x_k) = y_k$， $k = 0, 1, \dots, n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是线性函数

分段线性插值

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$\boxed{I_h(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}}$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$， $k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$

误差估计

- **误差估计**

在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上有

$$\left|f(x)-I_h(x)\right| = \left|\frac{f''(\xi_x^{(k)})}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right| \le \frac{M_2}{2}\frac{h_k^2}{4}$$

$$\boxed{M_2 = \max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|}$$

$$\left|R(x)\right| = \left|f(x)-I_h(x)\right| \le \max_k \left|\frac{f''(\xi_x^{(k)})}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1})\right| \le \frac{M_2}{8}h^2$$

当 $h \to 0$ 时， $R(x) = f(x) - I_h(x) \to 0$

$I_h(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$

分段线性插值的缺点： $I_h(x)$ 在节点不可导

分段三次Hermite插值

分段三次 Hermite 插值

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点

$y_k = f(x_k)$, $m_k = f'(x_k)$ ， $k = 0, 1, \ldots , n$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足

① $I_h(x) \in C^1[a,b]$

② $I_h(x_k) = y_k$, $I_h'(x_k) = m_k$, $k = 0, 1, \ldots , n$

③ $I_h(x)$ 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式

分段三次Hermite插值

由以上条件直接可得 $I_h(x)$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的表达式

$$I_h(x) = y_k\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + y_{k+1}\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$$+\ m_k(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + m_{k+1}(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$， $k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$

- 误差估计（教材第32页定理 6）

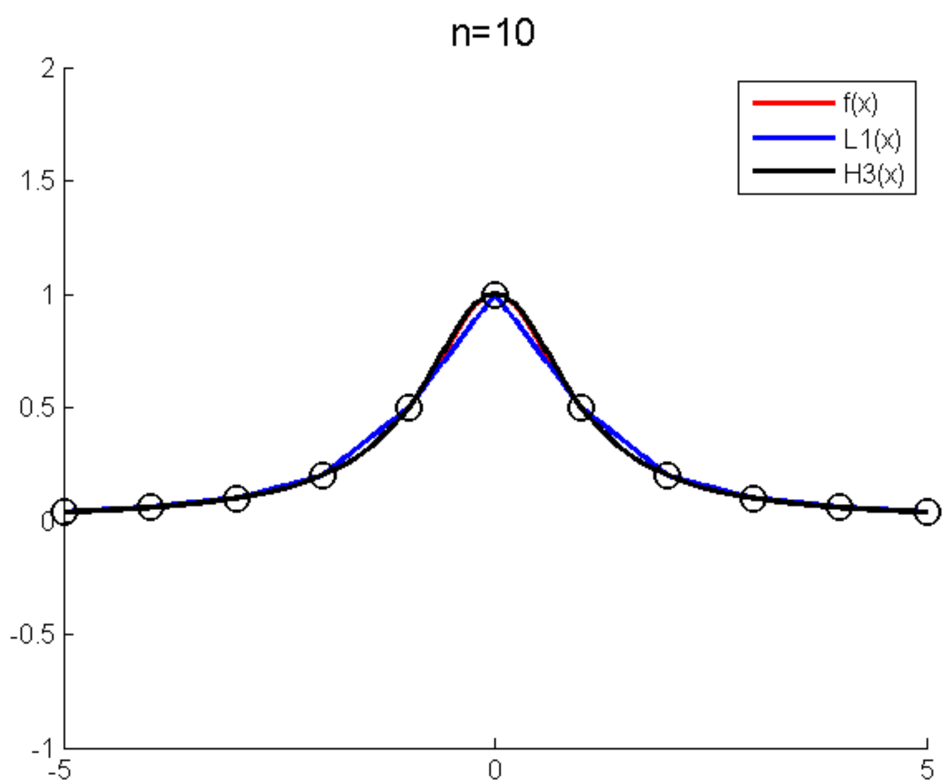
$$|R(x)| = |f(x) - I_h(x)| \le \frac{M_4}{384} h^4$$

$$\boxed{M_4 = \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|, \quad h = \max_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)}$$

插值举例

例： 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 **[-5, 5]**，取等距节点（将插值区间10等分），试分别用分段线性插值和分段三次Hermite插值画出 $f(x)$ 的近似图像。

demo_2_7.m



分段插值注记

基本思想： 用分段低次多项式来代替单个多项式

具体作法：

(1) 把整个插值区间分割成多个小区间

(2) 在每个小区间上作低次插值多项式

(3) 将所有插值多项式拼接成一个多项式

优点： 公式简单、 运算量小、稳定性好、收敛性 …

- 分段三次 Hermite 插值比分段线性插值效果更好
- 但公式较复杂，且需要额外信息（导数）