第四章

数 值 积 分

—— 复合求积公式

—— Romberg 算法

本讲内容

- 复合求积公式
  - 复合梯形公式
  - 复合 Simpson 公式
- Romberg（龙贝格）算法
  - 梯形法的递推化计算
  - Romberg 算法基本思想: 外推技巧
  - Romberg 算法: 计算过程

复合求积公式

什么是复合求积公式

- 提高积分计算精度的常用两种方法
  - 用复合公式
  - 用非等距节点

- 复合求积公式
  - 将积分区间分割成多个小区间
  - 在每个小区间上使用低次 Newton-Cotes 求积公式

复合求积公式 (Composite Numerical Integration) 也称为复化求积公式

复合梯形公式

- 将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$，其中

$$\boxed{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b}$$

通常是 n 等分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$\boxed{h_i = x_{i+1} - x_i}$$

取等距节点

$h = (b-a)/n$

$$\boxed{T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]}$$

余项公式

$$\boxed{R[f] = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i^3}{12} f''(\eta_i)} \qquad \boxed{h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \eta_i \in (x_i, x_{i+1})}$$

- 当 x_i 其中为等距节点时，即 $\boxed{x_i = a + ih, \quad h = \dfrac{b-a}{n}}$

$$\Rightarrow R[f] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i)$$

$$= -\frac{b-a}{12}h^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i)\right) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

$$\boxed{\eta \in (a,b)}$$

复合 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

取等距节点

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right]$$

注：复合 Simpson 公式实际使用了 $2n+1$ 个节点

余项公式

$$R[f] = -\frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_i) \qquad \boxed{\eta_i \in (x_i, x_{i+1})}$$

$$= -\frac{(b-a)h^4}{2880}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\eta_i)\right)$$

$$= -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\eta) \qquad \boxed{\eta \in (a,b)}$$

性质： 复合梯形公式和复合 Simpson 公式都是收敛的，也都是稳定的。

举例

例： 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，利用下表中的数据分别用复合梯形公式和复合simpson公式计算定积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

x_i	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1.0
$f(x_i)$	1	0.997	0.990	0.977	0.954	0.936	0.909	0.877	0.841

解：

$$T_8=\frac{h_T}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{7}f(x_i)+f(x_8)\right]=0.9456909$$

$$S_4=\frac{h_S}{6}\Big[f(x_0)+4\big(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)\big)$$
$$+2\big(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)\big)+f(x_8)\Big]=0.9460832$$

demo_4_2.m

举例

例： 计算定积分

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$$

用复合梯形公式和复合simpson公式时，n 分别取多大时才能使得误差不超过 0.5×10^{-5}

解： $f(x) = e^x \Rightarrow \max\limits_{0\le x\le 1} \left|f^{(k)}(x)\right| = \max\limits_{0\le x\le 1} \left|e^x\right| = e$

复合梯形公式

$$\left|R_T[f]\right| = \left|-\frac{b-a}{12} h_T^2 f''(\eta)\right| \le \frac{e}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

要使误差不超过 0.5×10^{-5}，需要

$$\frac{e}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \le \frac{1}{2} \times 10^{-5} \Rightarrow n \ge 212.85 \quad \text{取 } n=213$$

$\boxed{213 \text{ 等分}}$

举例

复合 simpson 公式

$$\left|R_S[f]\right| = \left|-\frac{b-a}{2880}h_S^4 f^{(4)}(\eta)\right| \le \frac{e}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4$$

要使误差不超过 0.5×10^{-5}，需要

$$\frac{e}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4 \le \frac{1}{2}\times 10^{-5} \Rightarrow n \ge 3.71 \qquad \text{故取 } n=4$$

$\boxed{\text{8 等分}}$

本讲内容

- 复合求积公式
  - 复合梯形公式
  - 复合 Simpson 公式
- **Romberg（龙贝格）算法**
  - **梯形法的递推化计算**
  - **Romberg 算法基本思想: 外推技巧**
  - **Romberg 算法: 计算过程**

Romberg 算法

利用复合梯形公式、复合simpson公式、复合Cotes公式等计算定积分时，如何选取步长 h ？

太 大 → 计算精度难以保证

太 小 → 增加额外的计算量

解决办法：采用 变步长算法

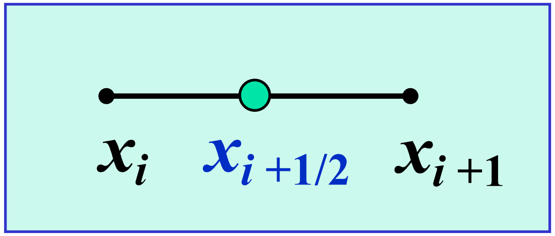
通常采取将区间不断对分的方法，即取 $n=2^k$，反复使用复合求积公式，直到所得到的计算结果满足指定的精度为止。

梯形法递推公式

- 将 $[a, b]$ 分成 n 等分 $[x_i, x_{i+1}]$，$x_i = a + i \cdot h, \quad h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow \quad T_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

- 步长折半：$[x_i, x_{i+1/2}]$，$[x_{i+1/2}, x_{i+1}]$



$$\Rightarrow \quad T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[\left(f(x_i) + f(x_{i+1/2})\right) + \left(f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{4}\left[f(x_i) + 2f(x_{i+1/2}) + f(x_{i+1})\right]$$

$$= \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2})$$

梯形法递推公式

$$\boxed{T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1/2}) = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih + 0.5h)}$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

$$T_1 = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h_0}{2}\sum_{i=0}^{0} f(a + ih_0 + 0.5h_0) \qquad \boxed{h_0 = b - a}$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{h_1}{2}\sum_{i=0}^{1} f(a + ih_1 + 0.5h_1) \qquad \boxed{h_1 = \frac{b-a}{2}}$$

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{h_2}{2}\sum_{i=0}^{3} f(a + ih_2 + 0.5h_2) \qquad \boxed{h_2 = \frac{b-a}{4}}$$

梯形法递推公式

$$T_{2^k}=\frac{1}{2}T_{2^{k-1}}+\frac{h_{k-1}}{2}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}f(a+ih_{k-1}+0.5h_{k-1})$$

$$\boxed{h_{k-1}=\frac{b-a}{2^{k-1}}}$$

记 $\boxed{T^{(k)}\equiv T_{2^k}}$

$$\boxed{T^{(k)}=\frac{1}{2}T^{(k-1)}+\frac{h_{k-1}}{2}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}f(a+ih_{k-1}+0.5h_{k-1})}$$

$$\boxed{h_{k-1}=\frac{b-a}{2^{k-1}}}$$

举例

$I[f]=0.946083070367\cdots$

例： 用梯形法的递推公式计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$，要求计算精度满足 $|T_{2n}-T_n|<\varepsilon=10^{-7}$

解：

$$T^{(0)}=\frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)=0.920735492$$

$$T^{(1)}=\frac{1}{2}T^{(0)}+\frac{h_0}{2}\sum_{i=0}^{0}f(a+ih_0+0.5h_0)=0.939793285$$

$$T^{(2)}=\frac{1}{2}T^{(1)}+\frac{h_1}{2}\sum_{i=0}^{1}f(a+ih_1+0.5h_1)=0.944513522$$

$$T^{(3)}=\frac{1}{2}T^{(2)}+\frac{h_2}{2}\sum_{i=0}^{1}f(a+ih_2+0.5h_2)=0.945690864$$

$$\vdots$$

k	$T^{(k)}$
0	0.920735492
1	0.939793285
2	0.944513522
3	0.945690864
4	0.945985030
5	0.946058561
6	0.946076943
7	0.946081539
8	0.946082687
9	0.946082975
10	0.946083046

demo_4_3.m

梯形法的加速

- 梯形法递推公式算法简单，编程方便

  但收敛速度较 慢

⇨ 梯形法的加速——龙贝格 (Romberg) 算法

定理： 设 $f(x) \in C^\infty[a, b]$, 记 $T_n = T(h)$, 则有

$$T(h) = I[f] + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_i h^{2i} + \cdots$$

证明：略（利用 Taylor 展开即可）

$$h = \frac{b-a}{n}$$

梯形法的加速

$$\begin{cases} T(h) = I[f] + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_i h^{2i} + \cdots = I[f] + O(h^2) \\ T\left(\dfrac{h}{2}\right) = I[f] + \alpha_1 \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\dfrac{h}{2}\right)^4 + \cdots + \alpha_i \left(\dfrac{h}{2}\right)^{2i} + \cdots \end{cases}$$

$$4T(h/2) - T(h) = 3I[f] + (-3/4)\alpha_2 h^4 + (-15/16)\alpha_3 h^6 + \cdots$$

$$S(h) \equiv \frac{1}{3}\left(4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)\right) = I[f] + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots = I[f] + O(h^4)$$

$$C(h) \equiv \frac{1}{15}\left(16S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h)\right) = I[f] + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots = I[f] + O(h^6)$$

$$R(h) \equiv \frac{1}{63}\left(64C\left(\frac{h}{2}\right) - C(h)\right) = I[f] + O(h^8)$$

$$\vdots$$

Richardson 外推算法

举例

$I[f]=0.946083070367\cdots$

例： 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$T_1 = 0.920735492$

$T_2 = 0.939793285$

$T_4 = 0.944513522$

$$S_1 = \frac{1}{3}(4T_2 - T_1) = 0.946145882$$

$$S_2 = \frac{1}{3}(4T_4 - T_2) = 0.946086934$$

$$C_1 = \frac{1}{15}(16S_2 - S_1) = 0.946083004$$

k	$T_0^{(k)}$
0	0.920735492
1	0.939793285
2	0.944513522
3	0.945690864
4	0.945985030
5	0.946058561
6	0.946076943
7	0.946081539
8	0.946082687
9	0.946082975
10	0.946083046

demo_4_4.m

Romberg 算法

记： $T_0^{(k)} = T_{2^k}, \quad T_1^{(k)} = S_{2^k}, \quad T_2^{(k)} = C_{2^k}, \quad T_3^{(k)} = R_{2^k}$

$T_0^{(k)}$ ：k 次等分后梯形公式计算所得的近似值

$T_m^{(k)}$ ：m 次加速后所得的近似值

$$\boxed{T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}}$$

Romberg 算法是收敛的

① $T_1 = T_0^{(0)}$

② $T_2 = T_0^{(1)}$ ③ $S_1 = T_1^{(0)}$

④ $T_4 = T_0^{(2)}$ ⑤ $S_2 = T_1^{(1)}$ ⑥ $C_1 = T_2^{(0)}$

⑦ $T_8 = T_0^{(3)}$ ⑧ $S_4 = T_1^{(2)}$ ⑨ $C_2 = T_2^{(1)}$ ⑩ $R_1 = T_3^{(0)}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$

举例

$I[f]=0.4$

例： 用 Romberg 算法计算定积分 $\int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx$，要求计算精度满足 $|T_m^{(k)} - T_{m-1}^{(k)}| < \varepsilon = 10^{-7}$

demo_4_5.m

解： 逐步计算可得

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	0.50000000					
1	0.42677670	0.40236893				
2	0.40701811	0.40043192	0.40030278			
3	0.40181246	0.40007725	0.40005361	0.40004965		
4	0.40046340	0.40001371	0.40000948	0.40000878	0.40000862	
5	0.40011767	0.40000243	0.40000168	0.40000155	0.40000152	0.40000152