

# 第四章

---

## 数值积分与数值微分

- 多重积分
- 数值微分

# 本讲内容

---

## ■ 二重积分

- 基本思想
- 计算方法

## ■ 数值微分

- 问题描述
- 计算方法

# 二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, ds$$

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

- **基本思想：** 先化累次积分，然后数值积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, ds = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, ds = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy dx$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, ds = \int_a^b \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx dy$$

# 举例

**例：** 用两点Gauss求积公式计算二重积分

$$\iint_{\Omega} (x^2 + 2y^2) ds \quad \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

**解：**  $\iint_{\Omega} (x^2 + 2y^2) ds = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2) dy dx$

**令**  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ，**可得**

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2) dy \approx f\left(x, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(x, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2x^2 + \frac{4}{3}$$

**令**  $g(x) = 2x^2 + \frac{4}{3}$ ，**可得**

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + 2y^2) dy dx \approx \int_{-1}^1 g(x) dx \approx g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 4$$

# 复合公式

---

- 复合公式

- 为了提高计算精度，在计算累次积分时，也可以使用复合求积公式

# 数值微分

**基本思想：**用函数值的线性组合来近似函数的导数值

已知  $f(x)$  在节点  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$  上的函数值，  
对于  $[a, b]$  中的任意一点，如何计算函数在这点的导数？

- 插值型求导公式
  - 构造出  $f(x)$  的插值多项式  $p_n(x)$
  - 用  $p_n(x)$  的导数来近似  $f(x)$  的导数
- 外推算法

# 插值型求导公式

$$f'(x) \approx P'_n(x)$$

- 插值型求导公式的余项

$$f'(x) - P'_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \left( \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right)' + \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \left( f^{(n+1)}(\xi_x) \right)'$$

- 在节点  $x_i$  处的余项

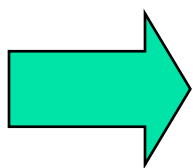
$$f'(x_i) - P'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

我们只考察节点处的导数值！

# 两点公式

● 节点  $x_0, x_1$  , 步长  $h = x_1 - x_0$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ &= \frac{-(x - x_1)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{h} \end{aligned}$$



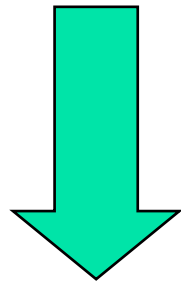
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0)) - \frac{h}{2} f''(\xi_0) \\ f'(x_1) &= \frac{1}{h} (f(x_1) - f(x_0)) + \frac{h}{2} f''(\xi_1) \end{aligned}$$



# 三点等距公式

- 步长  $h$  , 节点  $x_i = x_0 + ih$  ,  $i = 0, 1, 2$

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$



变量代换:  $x = x_0 + th$

$$P_2(x(t)) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0) - t(t-2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$

# 三点等距公式

$$\longrightarrow \frac{dP_2}{dt} = \frac{1}{2}[(2t-3)f(x_0) - (4t-4)f(x_1) + (2t-1)f(x_2)]$$

$$\begin{aligned}\longrightarrow \frac{dP_2}{dx} &= \frac{dP_2}{dt} \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{2h}[(2t-3)f(x_0) - (4t-4)f(x_1) + (2t-1)f(x_2)]\end{aligned}$$

分别令  $t = 0, 1, 2$ , 可得

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

# 高阶导数的近似

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)$$

$$k = 2, 3, 4, \dots$$

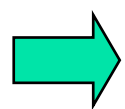
## ● 二阶导数的近似

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} [f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)]$$

# 用差商近似导数

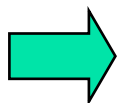
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \frac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \dots$$



$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

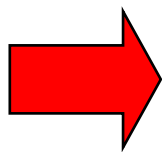
向前差商

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) - \frac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \dots$$



$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$


向后差商



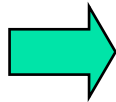
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

中心差商

# 外推算法


$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \frac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) + \dots \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) - \frac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) - \dots \end{cases}$$

$$G_0(h) \triangleq \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] = f'(x) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \dots$$


$$G_1(h) \triangleq \frac{4G_0(h/2) - G_0(h)}{3} = f'(x) + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \beta_3 h^8 + \dots$$

⋮

# 外推算法

$$G_m^{(k)} = \frac{4^m G_{m-1}^{(k+1)} - G_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}$$

