第五章

线性方程组直接解法

—— 向量与矩阵范数

—— 矩阵条件数

本讲内容

- 向量范数
  - 定义、常见向量范数、性质
- 矩阵范数
  - 定义、常见矩阵范数、性质
- 矩阵条件数

向量范数

- 向量内积，向量范数
- 常见向量范数：1、2、p、∞
- 范数的性质（连续性、等价性）
- Cauchy-Schwarz 不等式
- 向量序列的收敛性

向量范数

- 向量内积（数量积）
  - 定义与性质、Cauchy-Schwarz不等式
  - 导出范数（欧氏范数）

- 向量范数

定义： 设函数 $f: R^n \to R$，若 f 满足

(1) $f(x) \geq 0$，$\forall\, x \in R^n$，等号当且仅当 $x = 0$ 时成立 （正定性）

(2) $f(\alpha x) = |\alpha| \cdot f(x)$， $\forall\, x \in R^n, \forall\, \alpha \in R$ （齐次性）

(3) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ （三角不等式）

则称 f 为 R^n 上的（向量）范数，通常记为 $\|\cdot\|$

常见向量范数

- R^n 空间上常见的向量范数

- **1-范数：** $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

- **2-范数：** $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

- **p-范数：** $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

- **∞-范数（有时也称最大范数）：** $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

范数性质

- **范数的性质**

(1) 连续性

定理： 设 f 是 R^n 上的任一向量范数，则 f 关于 x 的每个分量连续。

(2) 等价性

定理： 设 $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_t$ 是 R^n 上的任意两个范数，则存在常数 c_1 和 c_2，使得对任意的 $x \in R^n$ 有

$$c_1\|x\|_s \le \|x\|_t \le c_2\|x\|_s$$

范数性质

(3) Cauchy-Schwarz 不等式

定理： $$|(x, y)| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

(4) 向量序列的收敛性（略，见第六章）

矩阵范数

- 矩阵范数
- 常见矩阵范数：F、1、2、∞
- 范数的性质（连续性、等价性）
- 矩阵范数的相容性
- 算子范数的计算、算子范数与谱半径

矩阵范数

- **矩阵范数**

定义： 设函数 $f: R^{n\times n} \to R$，若 f 满足

(1) $f(A) \geq 0$，$\forall A \in R^{n\times n}$，且 $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ （正定性）

(2) $f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A)$， $\forall A \in R^{n}, \forall \alpha \in R$ （齐次性）

(3) $f(A+B) \leq f(A) + f(B)$ （三角不等式）

(4) $f(AB) \leq f(A)f(B)$ （相容性）

则称 f 为 $R^{n\times n}$ 上的（矩阵）范数，通常记为 $\|\cdot\|$

常见矩阵范数

● 常见的矩阵范数

(1) **F-范数 (Frobenious 范数)**：

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2) **算子范数 (从属范数、诱导范数)**

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in R^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 R^n 上的任意一个向量范数

算子范数

- **常见的算子范数**

① 1-范数（列范数） ⟺ $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

② 2-范数（谱范数） ⟺ $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

③ ∞-范数（行范数） ⟺ $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

算子范数举例

例： 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ 计算 $\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty,\|A\|_F$

解：板书

矩阵范数性质

(1) 连续性： 设 f 是 $R^{n\times n}$ 上的任一矩阵范数，则 f 关于 A 的每个分量是连续的。

(2) 等价性： 设 $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_t$ 是 $R^{n\times n}$ 上的任意两个矩阵范数，则存在常数 c_1 和 c_2，使得对任意的 $A\in R^{n\times n}$ 有

$$c_1\|A\|_s \le \|A\|_t \le c_2\|A\|_s$$

(3) 若 A 是对称矩阵，则 $\|A\|_2 = \rho(A)$

算子范数性质

定理： 设 $\|\cdot\|$ 是 R^n 上的任一向量范数，其对应的算子范数也记为 $\|\cdot\|$，则有

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

证明：直接由算子范数定义可得。

该性质就是矩阵范数与向量范数的**相容性**

定理： 设 $\|\cdot\|$ 是任一算子范数，则 $\rho(A) \le \|A\|$

证明：板书

事实上，该性质对任意矩阵范数都成立

范数函数norm

向量范数和矩阵范数的Matlab函数

(1) norm(A,1) 计算A的1—范数。

(2) norm(A)或norm(A,2) 计算A的2—范数。

(3) norm(A, p) 计算A的p—范数。

(4) norm(A, inf) 计算A的 ∞—范数。

(5) norm(A, ‘fro’) 计算矩阵A的Frobenious范数

矩阵条件数

- 病态矩阵
- 矩阵条件数
- 条件数的计算
- 条件数的性质

病态矩阵

- **什么是病态矩阵**

定义： 考虑线性方程组 $Ax=b$，如果 A 或 b 的**微小**变化会导致解的**巨大**变化，则称此线性方程组是**病态**的，并称矩阵 A 是**病态**的，反之则是**良态**的。

demo_5_5.m

例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵条件数

- 如何判别矩阵是否病态 —— **矩阵的条件数**

定义： 设 A 非奇异，则称

$$\mathrm{Cond}(A)_v = \left\| A^{-1} \right\|_v \left\| A \right\|_v$$

为 A 的**条件数**，其中 v 是 1，2 或 ∞ 。

定理： 考虑线性方程组 $Ax=b$，设 A 是精确的，b 有微小的扰动 δb，新方程组的解为 $x+\delta x$，即 $A(x+\delta x)=b+\delta b$，则

$$\frac{\left\|\delta x\right\|}{\left\|x\right\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \left\|A\right\| \frac{\left\|\delta b\right\|}{\left\|b\right\|}$$

矩阵条件数

定理： 考虑线性方程组 $Ax=b$，设 b 是精确的，A 有微小的扰动 δA，此时的解为 $x+\delta x$。假定 $\|A^{-1}\|\|\delta A\|<1$，则

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

- 当 δA 充分小时，不等式右端约为 $\|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$
- 通常，当 A 的条件数较大时，就称 A 就是病态的
- 一般来说，条件数越大，病态越严重，此时就越难用一般方法求得线性方程组的比较精确的解。

矩阵条件数

- **条件数与范数有关，常用的有无穷范数和2-范数**

$$\mathrm{Cond}(A)_\infty = \left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|A\right\|_\infty$$

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \left\|A^{-1}\right\|_2 \left\|A\right\|_2$$

注：$\mathrm{Cond}(A)_2$ 称为谱条件数，当 A 对称时有

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \frac{\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|}{\min\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$$

条件数性质

条件数的基本性质

(1) $\mathrm{Cond}(A) \geq 1$

(2) $\mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A)$，其中 α 为任意非零实数

举例

例： $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}$ 计算 $\mathrm{Cond}(A)_\infty$ 和 $\mathrm{Cond}(A)_2$

解： $A^{-1}=\begin{bmatrix}10001 & -10000\\ -10000 & 10000\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty \approx 4\times 10^4$

A 对称，且 $\lambda(A)=\dfrac{2.0001\pm\sqrt{2.0001^2-0.0004}}{2}>0$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Cond}(A)_2=\lambda_{max} / \lambda_{min} \approx 4\times 10^4$

举例

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

例： **计算 $\mathrm{Cond}(H_k)_\infty$ 其中 H_k 为 k 阶 Hilbert 矩阵**

解： $k=1$ **时，** $\mathrm{Cond}(H_1)_\infty=1$

$k=2$ **时，** $H_2=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$, $H_2^{-1}=\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Cond}(H_2)_\infty=27$

$k=3$ **时，** $H_3=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$, $H_2^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Cond}(H_3)_\infty=748$

$\boxed{\mathrm{Cond}(H_4)_\infty=28375,\ \mathrm{Cond}(H_{10})_\infty=3.5\times 10^{13}}$

条件数函数

条件数的Matlab函数

(1) cond(A,1) 计算A的1—范数下的条件数。

(2) cond(A)或cond(A,2) 计算A的2—范数数下的条件数。

(3) cond(A,inf) 计算A的 ∞—范数下的条件数。