

# 第四章


---

## 数值积分与数值微分

### —— 自适应积分方法

# 自适应积分方法

在求积区间中被积函数变化很大，有的部分函数值变化剧烈，另一部分变化平缓，**如何选取步长  $h$  ?**

太 **大**  计算精度难以保证

太 **小**  增加额外的计算量

解决办法：采用 **根据剧烈程度确定步长**

通常在满足精度前提下积分计算工作量尽可能小，在不同区间上**预测被积函数变化**的剧烈程度确定相应步长，直到所得到的计算结果满足指定的精度为止。

# 举例

$$I[f]=4$$

例：用复合辛普森法和自适应积分法计算定积

分  $\int_{0.2}^1 \frac{1}{x^2} dx$  , 要求计算精度满足  $|S_n - S_{n-1}| < \varepsilon = 0.02$

demo\_4\_8.m

$n$	$h_n$	$S_n$	$ S_n - S_{n-1} $
1	0.8	4.948148	
2	0.4	4.187037	0.76111
3	0.2	4.024218	0.162819
4	0.1	4.002164	0.022054
5	0.05	4.000154	0.002010

注：复合 Simpson 公式计算了 33 个节点的函数值，自适应积分法计算了 17 个节点的函数值

# 第四章

---

## 数值积分与数值微分

### —— Gauss 求积公式

# 怎样构造更高精度的求积方法

考虑求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

● 含  $2n+2$  个参数 (节点与系数), 为了使该公式具有尽可能高的代数精度, 可将  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$  代入公式, 使其精确成立, 则可构造出代数精度至少为  $2n+1$  的求积公式!

自由选取求积节点! 等分点不一定最佳!

# 举例

**例：**试确定节点  $x_i$  和系数  $A_i$ ，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

**解：**将  $f(x)=1, x, x^2, x^3$  代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2/3 \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} A_0 = 1, A_1 = 1 \\ x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

该公式对  $f(x)=x^4$  不精确成立，故有 3 次代数精度！

**缺点：**非线性方程组求解较困难！

# Gauss 型求积公式

一般情形：考虑机械带权求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

**定义：**若存节点在  $x_i \in [a, b]$  及系数  $A_i$ ，使得上面的求积公式具有  $2n+1$  次代数精度，则称节点  $x_i$  为**高斯点**， $A_i$  为**高斯系数**，求积公式为 **高斯型求积公式**

**性质：**上面的求积公式至多具有  $2n+1$  次代数精度

(将  $f(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$  代入验证即可)

**Gauss 求积公式在所有机械求积公式中代数精度最高**

# Gauss 点

---

问题：如何计算 Gauss 点  $x_i$  和高斯系数  $A_i$

法一：解非线性方程组



太困难! 😞

法二：分开计算

- 先确定 Gauss 点
- 再通过解线性方程组计算 Gauss 系数



# 更多 G-L 公式

## 高斯求积公式的节点和系数 (教材122页)

$n$	节点个数	Gauss点	Gauss系数
0	1	0.0000000	2.0000000
1	2	$\pm 0.5773503$	1.0000000
2	3	$\pm 0.7745967$ 0.0000000	0.5555556 0.8888889
3	4	$\pm 0.8611363$ $\pm 0.3399810$	0.3478548 0.6521452
4	5	$\pm 0.9061798$ $\pm 0.5384693$ 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
5	6	$\pm 0.93246951$ $\pm 0.66120939$ $\pm 0.23861919$	0.17132449 0.36076157 0.46791393

# 一般区间上的 G-L 公式

- 积分区间:  $[a, b]$ , 权函数:  $\rho(x) = 1$

→ 做变量代换  $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$

→  $g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$

→ 
$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) \, dt \approx \sum_{i=0}^n A_i g(t_i)$$

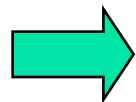
# G-L公式举例

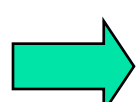
$$I[f]=0.46740110027234\dots$$

例：用四点G-L公式 (n=3) 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx$

解：令  $x = \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}$

demo\_4\_9.m


$$g(t) = \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1)$$


$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1) dt \\ &\approx \frac{\pi}{4} [0.3479 g(-0.8611) + 0.6521 g(-0.3400) \\ &\quad + 0.6521 g(0.3400) + 0.3479 g(0.8611)] \\ &\approx 0.4674 \end{aligned}$$

# 几点注记

---

- Gauss 型求积公式的优点

- 计算精度高

- Gauss 型求积公式的缺点

- 需计算 Gauss 点和 Gauss 系数
- 增加节点时需重新计算

- 实际应用中可以使用复合 Gauss 求积公式

- 将积分区间分隔成若干小区间
- 在每个小区间上使用 Gauss 求积公式