第四章

数值积分与数值微分

—— 自适应积分方法

自适应积分方法

在求积区间中被积函数变化很大，有的部分函数值变化剧烈，另一部分变化平缓，如何选取步长 h ？

太 大 → 计算精度难以保证

太 小 → 增加额外的计算量

解决办法：采用 根据剧烈程度确定步长

通常在满足精度前提下积分计算工作量尽可能小，在不同区间上预测被积函数变化的剧烈程度确定相应步长，直到所得到的计算结果满足指定的精度为止。

举例

$I[f]=4$

例： 用复合辛普森法和自适应积分法计算定积分 $\int_{0.2}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx$ ，要求计算精度满足 $|S_n - S_{n-1}| < \varepsilon = 0.02$

demo_4_8.m

n	h_n	S_n	$\lvert S_n - S_{n-1}\rvert$
1	0.8	4.948148	
2	0.4	4.187037	0.76111
3	0.2	4.024218	0.162819
4	0.1	4.002164	0.022054
5	0.05	4.000154	0.002010

注：复合 Simpson 公式计算了 33 个节点的函数值，自适应积分法计算了17个节点的函数值

第四章

数值积分与数值微分

—— Gauss 求积公式

怎样构造更高精度的求积方法

考虑求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

- 含 $2n+2$ 个参数 (节点与系数)，为了使该公式具有尽可能高的代数精度，可将 $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$ 代入公式，使其精确成立，则可构造出代数精度至少为 $2n+1$ 的求积公式!

自由选取求积节点！等分点不一定最佳！

举例

例： 试确定节点 x_i 和系数 A_i，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

解： 将 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2/3 \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1,\ \ A_1 = 1 \\ x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \ x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

该公式对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，故有 3 次代数精度！

缺点： 非线性方程组求解较困难！

Gauss 型求积公式

一般情形：考虑机械带权求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

定义： 若存节点在 $x_i \in [a, b]$ 及系数 A_i，使得上面的求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，则称节点 x_i 为**高斯点**，A_i 为**高斯系数**，求积公式为 **高斯型求积公式**

性质： 上面的求积公式至多具有 $2n+1$ 次代数精度

（将 $f(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$ 代入验证即可）

Gauss 求积公式在所有机械求积公式中代数精度最高

Gauss 点

问题： 如何计算 Gauss 点 x_i 和 高斯系数 A_i

法一：解**非线性**方程组

太困难! ☹

法二：分开计算

- 先确定 Gauss 点
- 再通过解线性方程组计算 Gauss 系数

更多 G-L 公式

高斯求积公式的节点和系数 (教材122页)

n	节点个数	Gauss点	Gauss系数
0	1	0.0000000	2.0000000
1	2	±0.5773503	1.0000000
2	3	±0.7745967 0.0000000	0.5555556 0.8888889
3	4	±0.8611363 ±0.3399810	0.3478548 0.6521452
4	5	±0.9061798 ±0.5384693 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
5	6	±0.93246951 ±0.66120939 ±0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393

一般区间上的 G-L 公式

- 积分区间：$[a, b]$， 权函数：$\rho(x) = 1$

做变量代换 $x = \dfrac{b-a}{2}t + \dfrac{b+a}{2}$

$$g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{n} A_i g(t_i)}$$

G-L公式举例

$I[f]=0.46740110027234\cdots$

例： 用四点G-L公式 (n=3) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$

解： 令 $x=\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}$

demo_4_9.m

$$\Rightarrow \boxed{g(t)=\frac{\pi^2}{16}(t+1)^2\cos\frac{\pi}{4}(t+1)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\frac{\pi^2}{16}(t+1)^2\cos\frac{\pi}{4}(t+1)\,\mathrm{d}t$$

$$\approx\frac{\pi}{4}[0.3479g(-0.8611)+0.6521g(-0.3400)$$

$$+0.6521g(0.3400)+0.3479g(0.8611)]$$

$$\approx 0.4674$$

几点注记

- **Gauss 型求积公式的优点**
  - 计算精度高
- **Gauss 型求积公式的缺点**
  - 需计算 Gauss 点和 Gauss 系数
  - 增加节点时需重新计算
- **实际应用中可以使用复合 Gauss求积公式**
  - 将积分区间分隔成若干小区间
  - 在每个小区间上使用 Gauss 求积公式