

第六章

线性方程组的迭代解法

—— 迭代法基本概念

本章内容提要

- 迭代算法基本概念
- Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法
- SOR（超松弛）迭代法

本讲内容

■ 迭代法的基本概念

- 向量序列与矩阵序列的极限
- 迭代法的构造
- 迭代法的收敛性判断

demo_6_1.m

向量序列的收敛

矩阵序列的收敛

向量序列的极限

定义： 设向量序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ， $x^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^T$ ，

若存在向量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ，使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则称向量序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 x ，记作 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$

- 每个分量组成的序列都收敛
- 称 x 是向量序列 $x^{(k)}$ 的**极限**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

矩阵序列的极限

定义： 设矩阵序列 $A_k = [a_{ij}^{(k)}]_{n \times n}$ ，若存在矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ，使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

则称矩阵序列 $\{A_k\}$ 收敛到 A ，记作 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$

例： 设 $0 < |a| < 1$ ，考察下面矩阵序列的极限

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}, \dots, A^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{bmatrix}, \dots$$

矩阵极限判断

定理： $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\| = 0$

(其中 $\|\cdot\|$ 为任一矩阵范数)

证明： 只需证明无穷范数情形

矩阵极限判断

定理: $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0 \iff \rho(B) < 1$

定理: $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0 \iff$ 存在某算子范数 $\|\cdot\|_{\varepsilon}$, 使得
 $\|B\|_{\varepsilon} < 1$

线性方程组迭代法

线性方程组迭代法

- 直接法的缺点

- 运算量大，不适合大规模的线性方程组求解
- 无法充分利用系数矩阵的稀疏性

- 迭代法

从一个初始向量出发，按照一定的迭代格式，构造出一个趋向于真解的向量序列。

- 只需存储系数矩阵中的非零元素
- 运算量不超过 $O(kn^2)$ ，其中 k 为迭代步数

迭代法是目前求解大规模线性方程组的主要方法

迭代法的构造

- 矩阵分裂迭代法基本思想

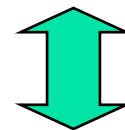
A 的一个
矩阵分裂

$$A = M - N$$

$$Ax = b$$



$$Mx = Nx + b$$



$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

给定一个初始向量 $x^{(0)}$, 可得 迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $B = M^{-1}N$ 称为迭代矩阵

矩阵分裂迭代法

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

定义： 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$ 存在，则称该迭代法**收敛**，否则称为**发散**

性质： 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x_*$ ，则 x_* 为原方程组 $Ax = b$ 的解

$$Ax_* = b \Leftrightarrow x_* = Bx_* + f$$

注： 这里用 x_* 表示真解，教材上用 x^*

迭代法的收敛性

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$$

定理： 对任意初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ ，上述迭代格式收敛的充要条件是

$$\rho(\boldsymbol{B}) < 1$$

定理： 若存在算子范数使得 $\|\boldsymbol{B}\| < 1$ ，则上述迭代格式收敛。

例： 考虑迭代法 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}$ 的收敛性，其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

[demo_6_2.m](#)

迭代法的收敛性

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$$

定理：若存在算子范数 $\|\cdot\|$ ，使得 $\|\mathbf{B}\| = q < 1$ ，则

(1) 迭代法收敛

$$(2) \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_*\| \leq q^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_*\|$$

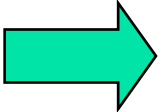
$$(3) \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_*\| \leq \frac{q}{1-q} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|$$

$$(4) \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

收敛速度

- 迭代法的收敛速度

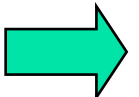
第 k 步的误差: $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \triangleq \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{B}^k \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$

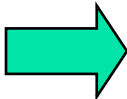

$$\frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\|}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\|} \leq \|\boldsymbol{B}^k\|$$

平均每次迭代后的误差压缩率约为: $\|\boldsymbol{B}^k\|^{\frac{1}{k}}$

- 若要求 k 步迭代后上述误差比值不超过 σ , 则

$$\|\boldsymbol{B}^k\| \leq \sigma \Rightarrow \|\boldsymbol{B}^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \sigma^{\frac{1}{k}}$$


$$\ln \|\boldsymbol{B}^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \ln \sigma$$


$$k \geq \frac{-\ln \sigma}{-\ln \|\boldsymbol{B}^k\|^{\frac{1}{k}}}$$

收敛速度

● 迭代法的收敛速度

定义： 迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的平均收敛速度定义为

$$R_k(B) = -\ln \left(\left\| B^k \right\|^{\frac{1}{k}} \right)$$

渐进收敛速度为

$$R(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k(B) = -\ln \rho(B) = \ln \frac{1}{\rho(B)}$$

$\rho(B)$ 越小，迭代收敛越快