

sol97a.pdf



Anónimo



Computabilidad y complejidad



3º Grado en Ingeniería Informática



**Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad Politécnica de Valencia**

WUOLAH + BBVA

Hazte **cliente de BBVA y...**
ahórrate 6 meses
de suscripción

BOOM

1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

Ahora, si te abres una Cuenta Online en BBVA, te reembolsamos una de estas suscripciones durante 6 meses (hasta 9,99€/mes) al pagarla con tu tarjeta Aqua Débito

NETFLIX

Spotify

HBOmax

Disney+

PlayStation Plus

DAZN

Promoción solo para nuevos clientes de BBVA. Válida hasta el 30/06/2023. Estas empresas no colaboran en la promoción.

Abre tu cuenta



Hazte cliente de BBVA y ... ahórrate 6 meses de suscripción

WUOLAH
+ BBVA

NETFLIX

Spotify

HBOmax

Disney+

PlayStation.Plus

DAZN

Ahora, si te abres una Cuenta Online en BBVA, te reembolsamos una de estas suscripciones durante 6 meses (hasta 9,99€/mes) al pagarla con tu tarjeta Aqua Débito

Promoción solo para nuevos clientes de BBVA. Válida hasta el 30/06/2023. Estas empresas no colaboran en la promoción.

1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

Examen de Computabilidad y Complejidad

(CMC)

17 de junio de 1997

(I) Cuestiones (justifique formalmente las respuestas)

1. Sea la operación P que trabaja sobre cadenas de la forma $P(x) = x^2$. Se extiende la operación P a lenguajes de la forma habitual. ¿Es la familia de los lenguajes incontextuales cerrada respecto de P ?

(1 pto)

Solución

La familia de los lenguajes incontextuales no es cerrada bajo P . Tomemos el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ que es incontextual dado que puede ser generado por la gramática $S \rightarrow aSb \mid \lambda$. Si aplicamos la operación P sobre L obtenemos $P(L) = \{a^n b^n a^n b^n : n \geq 0\}$ que no es incontextual tal y como se ha visto en clase mediante el lema de bombeo. Por lo tanto, al aplicar la operación P sobre un lenguaje incontextual, hemos obtenido un lenguaje no incontextual y, en consecuencia, la operación P no es de cierre para la clase de los lenguajes incontextuales.

2. Sean L_1 y L_2 dos lenguajes definidos sobre un mismo alfabeto. Sabemos que L_1 es un lenguaje recursivo, que $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje recursivamente enumerable y que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Demuéstrese que L_2 es un lenguaje recursivamente enumerable.

(1.5 ptos)

Solución

Podemos expresar $L_2 = ((L_1 \cup L_2) - L_1) \cup (L_1 \cap L_2)$ que equivale a la expresión $L_2 = ((L_1 \cup L_2) \cap \overline{L_1}) \cup (L_1 \cap L_2)$. Sabemos que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y, por lo tanto, $L_2 = ((L_1 \cup L_2) \cap \overline{L_1})$. Por otra parte, L_1 es recursivo y, al ser la complementación una operación de cierre para la clase de los lenguajes recursivos, entonces $\overline{L_1}$ también es recursivo y, en consecuencia, recursivamente enumerable. Hemos reducido L_2 a la intersección de dos lenguajes recursivamente enumerables: $(L_1 \cup L_2)$ (ya que así se afirma en el enunciado) y $\overline{L_1}$. Dado que la clase de los lenguajes recursivamente enumerables es cerrada bajo la operación de intersección (tal y como se ha establecido en clase), podemos afirmar que L_2 es recursivamente enumerable.

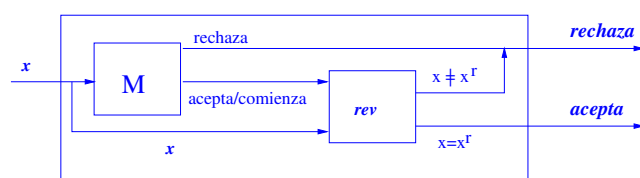
3. Sea L un lenguaje recursivo. Definimos $L' = \{x \in L \mid x = x^r\}$. ¿Es L' un lenguaje recursivo?

(1.5 ptos)

Solución

L' es recursivo. Propondremos una máquina de Turing que acepte a L' y que garantice la parada sea cual sea la cadena de entrada. Para ello contaremos con una máquina de Turing M que acepta a L y para ante cualquier entrada. Podemos asumir la existencia

de la máquina M ya que se nos asegura en el enunciado que L es recursivo. De igual forma, contaremos con un módulo rev que comprueba si una cadena de entrada x es un palíndromo, es decir si $x = x^r$. El módulo rev se fundamenta en una máquina de Turing con dos cintas que copia la cadena de entrada a la segunda cinta y comprueba si la cadena es un palíndromo símbolo a símbolo invirtiendo las direcciones de las dos cabezas de cintas (la de entrada irá de izquierda a derecha y la de la segunda cinta de derecha a izquierda). A partir de los anteriores módulos proponemos la siguiente máquina de Turing cuyo esquema se muestra a continuación



El esquema anterior funciona tal y como se explica a continuación. Dada una cadena de entrada x se comprueba en primer lugar si $x \in L$ o no mediante la máquina M . Si $x \in L$ entonces se comprueba si $x = x^r$ mediante el módulo rev . En caso afirmativo se acepta la cadena de entrada (ya que pertenece a L'). En el caso de que $x \notin L$ o que $x \neq x^r$ se rechaza la cadena de entrada (ya que no pertenece a L'). Puesto que el esquema anterior garantiza la parada y acepta L' podemos concluir que L' es recursivo.

4. ¿ Son incontextuales los siguientes lenguajes ?

- (a) $L_1 = \{x_1x_2x_2^rx_1^r \mid x_1, x_2 \in (0+1)^*\}$
- (b) $L_2 = \{0^i1^j0^{min(i,j)} \mid i, j \geq 1\}$

(2 ptos)

Solución

Nos pronunciaremos sobre la incontextualidad o no de cada lenguaje por separado.

- (a) L_1 sí es incontextual. Obsérvese que $L_1 = \{ww^r \mid w \in (0+1)^*\}$. Podemos definir una gramática incontextual que genere L_1 mediante las producciones $S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \lambda$.
- (b) L_2 no es incontextual. Comprobemos que L_2 no cumple el lema de bombeo para lenguajes incontextuales. Supongamos que n es la constante del lema y tomemos $z = 0^n1^n0^n \in L_2$ de forma que $|z| = 3n > n$. Dado que $z = uvwxy$ analizaremos por separado cada caso de localización de las subcadenas v y x :
 - i. Supongamos que v y x se encuentran en el primer bloque de ceros de la cadena z y $|vx| = j \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 0$ y formemos la cadena $uw^jy = 0^{n-j}1^n0^n$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.
 - ii. Supongamos que v y x se encuentran en el bloque de unos de la cadena z y $|vx| = j \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 0$ y formemos la cadena $uw^jy = 0^n1^{n-j}0^n$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.



Hazte cliente de BBVA y ... **ahórrate 6 meses** **de suscripción**

Ahora, si te abres una Cuenta Online en BBVA, te reembolsamos una de estas suscripciones durante 6 meses (hasta 9,99€/mes) al pagarla con tu tarjeta Aqua Débito

NETFLIX**HBOmax**[Abre tu cuenta](#)

- iii. Supongamos que v y x se encuentran en el segundo bloque de ceros de la cadena z y $|vx| = j \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 2$ y formemos la cadena $uvvwxxy = 0^n 1^n 0^{n+j}$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.
- iv. Supongamos que v y x están formadas por ceros del primer bloque y unos de forma que $|vx|_0 = j \geq 1$ y $|vx|_1 = k \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 0$ y formemos la cadena $uvw = 0^{n-j} 1^{n-k} 0^n$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos.
- v. Supongamos que v y x están formadas por ceros del segundo bloque y unos de forma que $|vx|_0 = j \geq 1$ y $|vx|_1 = k \geq 1$. Tomemos un valor de $i = 2$ y formemos la cadena $uvvwxxy$. Si v está formada sólo por unos y x está formada sólo por ceros del segundo bloque, entonces $uvvwxxy = 0^n 1^{n+k} 0^{n+j}$ que no pertenece al lenguaje L_2 ya que el segundo bloque de ceros no contiene el mínimo entre las longitudes del primer bloque de ceros y el bloque de unos. Por otra parte, si v o x contienen unos y ceros del segundo bloque, entonces $uvvwxxy$ contendrá dos bloques de unos separados por ceros y, de nuevo, se forma una cadena que no pertenece al lenguaje ya que, en las cadenas de L_2 , sólo puede haber un bloque de unos.

Dado que en todos los casos posibles de localización de las subcadenas v y x hemos podido demostrar que L_1 no cumple el lema de bombeo, podemos concluir que L_2 no es incontextual.

(II) PROBLEMAS:

5. Sean dos gramáticas incontextuales G y G' . Sea la sustitución incontextual σ definida como $\sigma(a) = L(G')$ y $\sigma(b) = \{a\}$. Sea el homomorfismo h tal que $h(a) = aa$ y $h(b) = \lambda$. Se pide construir una gramática G'' tal que:

$$L(G'') = [\sigma(L(G))]^* \cup h(L(G')).$$

$$\begin{aligned} G : S &\rightarrow aAS \mid a; & A &\rightarrow SbA \mid SS \mid ba \\ G' : S &\rightarrow bA \mid aB; & A &\rightarrow bAA \mid aS \mid a; & B &\rightarrow aBB \mid bS \mid b \end{aligned}$$

(2 ptos)

Solución

En primer lugar renombramos los auxiliares para la gramática de sustitución $\sigma(a)$:

$$\begin{aligned} S_a &\rightarrow bA_a \mid aB_a \\ A_a &\rightarrow bA_a A_a \mid aS_a \mid a \\ B_a &\rightarrow aB_a B_a \mid bS_a \mid b \end{aligned}$$

A continuación, proporcionamos una gramática para el lenguaje $\sigma(L(G))$. Obsérvese que, para aplicar la sustitución $\sigma(b) = \{a\}$ basta con cambiar el símbolo b por el símbolo a

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S_a A S \mid S_a \\ A &\rightarrow S_a A \mid S S \mid a S_a \\ S_a &\rightarrow b A_a \mid a B_a \\ A_a &\rightarrow b A_a A_a \mid a S_a \mid a \\ B_a &\rightarrow a B_a B_a \mid b S_a \mid b \end{aligned}$$

Hazte cliente de BBVA y ...

ahórrate 6 meses de suscripción

WUOLAH
+ BBVA

NETFLIX

Spotify

HBOmax

Disney+

PlayStation.Plus

DAZN

Ahora, si te abres una Cuenta Online en BBVA, te reembolsamos una de estas suscripciones durante 6 meses (hasta 9,99€/mes) al pagarla con tu tarjeta Aqua Débito

Promoción solo para nuevos clientes de BBVA. Válida hasta el 30/06/2023. Estas empresas no colaboran en la promoción.

1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

Obtenemos ahora una gramática para el lenguaje $[\sigma(L(G))]$ *

$$S_1 \rightarrow SS_1 \mid \lambda$$

$$S \rightarrow S_a AS \mid S_a$$

$$A \rightarrow SaA \mid SS \mid aS_a$$

$$S_a \rightarrow bA_a \mid aB_a$$

$$A_a \rightarrow bA_a A_a \mid aS_a \mid a$$

$$B_a \rightarrow aB_a B_a \mid bS_a \mid b$$

Para el lenguaje $h(L(G'))$ proponemos la siguiente gramática

$$S_h \rightarrow A_h \mid aaB_h$$

$$A_h \rightarrow A_h A_h \mid aaS_h \mid aa$$

$$B_h \rightarrow aaB_h B_h \mid S_h \mid \lambda$$

Por último, proponemos la siguiente gramática para el lenguaje $L(G'') = [\sigma(L(G))]$ * $\cup h(L(G'))$ donde S_2 actúa como axioma

$$S_2 \rightarrow S_1 \mid S_h$$

$$S_1 \rightarrow SS_1 \mid \lambda$$

$$S \rightarrow S_a AS \mid S_a$$

$$A \rightarrow SaA \mid SS \mid aS_a$$

$$S_a \rightarrow bA_a \mid aB_a$$

$$A_a \rightarrow bA_a A_a \mid aS_a \mid a$$

$$B_a \rightarrow aB_a B_a \mid bS_a \mid b$$

$$S_h \rightarrow A_h \mid aaB_h$$

$$A_h \rightarrow A_h A_h \mid aaS_h \mid aa$$

$$B_h \rightarrow aaB_h B_h \mid S_h \mid \lambda$$



Abre tu cuenta



WUOLAH
+ BBVA

WUOLAH