COMPUTABILIDAD Y COMPLEJIDAD (CMC)

BOLETIN DE EJERCICIOS – FUNCIONES MU-RECURSIVAS

TOMÁS A. PÉREZ
JOSÉ M. SEMPERE

Funciones recursivas
Ejercicios propuestos y ejercicios resueltos

(I) Ejercicios propuestos

1. Definir las siguientes funciones como recursivas primitivas:

   - factorial: $fact(n)$
   - exponencial en base n: $\exp(m, n) = n^m$

2. Demuestre que las siguientes funciones son recursivas primitivas.

   - $maig(n, m) =$
     - 1, si $n \geq m$
     - 0, en otro caso
   - $meig(n, m) =$
     - 1, si $n \leq m$
     - 0, en otro caso
   - $|n - m| =$
     - $n - m$, si $n \geq m$
     - $m - n$, en otro caso
   - $máx(n, m)$: el máximo entre n y m.
   - $mín(n_1, \dots, n_m)$: el mínimo entre $n_1, \dots, n_m$.
   - $div(n, m) =$
     - 0, si $m = 0$
     - n/m, en otro caso
   - $resto(n, m) =$
     - 0, si $m = 0$
     - $n\%m$, en otro caso
   - $par(n) =$
     - 1, si n es par
     - 0, en otro caso
   - $impar(n) =$
     - 1, si n es impar
     - 0, en otro caso

3. Demuestre que si $f(n, m)$ es una función recursiva primitiva, entonces, para cada k, también lo es la función $g_k(n)$ definida como $g_k(n) = f(n, k)$

(II) Ejercicios resueltos

1. Para cada $k \geq 0$, sea la función $cte_k(n) = k$ para cada $n \geq 0$. Demuestre que estas funciones son recursivas primitivas.

   Solución

   Utilizando fundamentalmente el operador de recursión primitiva podemos definir, para cada $k \geq 0$, la función cte_k como

   - $cte_k(0) = s^k(c(\,)) = k$
   - $cte_k(s(n)) = p_{1,2}(cte_k(n), n)$

2. Sea $Proy_0$ la familia de las funciones de proyección con selector 0, esto es,

$$Proy_0 = \{p_{0,k} : k \geq 1\}.$$

   Demuestre que cada función de $Proy_0$ puede definirse como recursiva primitiva sin utilizar ninguna función de $Proy_0$.

   Solución

   Sea una función de proyección $p_{0,k}$. Esta función puede ser también definida en las condiciones especificadas mediante

$$p_{0,k}(n_1, \dots, n_k) = cte_0(p_{1,k}(n_1, \dots, n_k))$$

3. Sea $g(i, n_1, \dots, n_m)$ una función recursiva primitiva. Demuestre que la función

$$f(j, k, n_1, \dots, n_m) = \sum_{j \leq i \leq k} g(i, n_1, \dots, n_m)$$

   también lo es. (Nótese que cuando $k < j$, se tiene que $f(j, k, n_1, \dots, n_m) = 0$.)

   Solución

   Resolveremos esta cuestión de tres modos diferentes.

   I. $f(j, k, n_1, \dots, n_m) = igual(j, k) \cdot g(j, n_1, \dots, n_m) +$
   $menor(j, k) \cdot sg(j) \cdot (\sum_{0 \leq i \leq k} g(i, n_1, \dots, n_m) \dot{-}$
   $\sum_{0 \leq i \leq pred(j)} g(i, n_1, \dots, n_m)) +$
   $menor(j, k) \cdot cosg(j) \cdot \sum_{0 \leq i \leq k} g(i, n_1, \dots, n_m)$

II. Sea la función $maig(n, m)$ que se ha definido como recursiva primitiva en los ejercicios propuestos (véase el ejercicio 2).

Entonces, $f(j, k, n_1, \dots, n_m) = f'(k, j, n_1, \dots, n_m)$ donde

- $f'(k, j, n_1, \dots, n_m) = \sum_{0 \le i \le k} h(i, j, n_1, \dots, n_m)$
- $h(i, j, n_1, \dots, n_m) = g(i, n_1, \dots, n_m) \cdot maig(i, j)$

Nótese que las funciones f, f' y h son, a partir de su definición, recursivas primitivas.

III. $f(j, k, n_1, \dots, n_m) = maig(k, j) \cdot \hat{h}(k \dot{-} j, j, n_1, \dots, n_m)$ donde

- $\hat{h}(r, j, n_1, \dots, n_m) = \sum_{0 \le i \le r} \hat{g}(i, j, n_1, \dots, n_m)$
- $\hat{g}(i, j, n_1, \dots, n_m) = g(i + j, n_1, \dots, n_m)$

Nótese que las funciones f, $\hat{h}$ y $\hat{g}$ son, a partir de su definición, recursivas primitivas.

4. Sea $g(i, n_1, \dots, n_m)$ una función recursiva primitiva. Demuestre que la función

$$f(j, k, n_1, \dots, n_m) = \prod_{j \le i \le k} g(i, n_1, \dots, n_m)$$

también lo es. (Nótese que cuando $k < j$, se tiene que $f(j, k, n_1, \dots, n_m) = 1$.)

Solución

A partir del apartado III en la solución del ejercicio anterior directamente definimos.

$$f(j, k, n_1, \dots, n_m) = maig(k, j) \cdot \prod_{0 \le i \le k \dot{-} j} g(i + j, n_1, \dots, n_m) + menor(j, k)$$

5. Sea $máx(n, m)$ la función que obtiene el máximo entre n y m. Sea la función $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función recursiva primitiva. Se define la función $máx.g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de modo que $máx.g(n) = máx\{g(i) : i \in \{0, \dots, n\}\}$.

Sabiendo que la función $máx$ es recursiva primitiva (véase el apartado de ejercicios propuestos), demuestre que también lo es la función $máx.g$.

Solución

Lo resolvemos por recursión primitiva

- $máx.g(0) = s^{g(0)}(c(\,)) = g(0)$
- $máx.g(s(n)) = máx(g(s(n)), máx.g(n))$

6. Diremos que las funciones recursivas primitivas $g_i(n_1, \dots, n_m)$ $i = 1, \dots, k$ son compatibles si y sólo si

$$\sum_{1 \le i \le k} g_i(n_1, \dots, n_m) = 1, \qquad \forall\, n_1, \dots, n_m$$

Sean para $i = 1, \dots, k$, las funciones recursivas primitivas $h_i(n_1, \dots, n_m)$ y las funciones recursivas primitivas compatibles $g_i(n_1, \dots, n_m)$. Demuestre que la función

$f(n_1, \dots, n_m) =$

- $h_1(n_1, \dots, n_m)$, si $g_1(n_1, \dots, n_m) = 1$
- . . .
- $h_k(n_1, \dots, n_m)$, si $g_k(n_1, \dots, n_m) = 1$

es recursiva primitiva.

Solución

Lo resolvemos por sustitución

$$f(n_1, \dots, n_m) = \sum_{1 \le i \le k} g_i(n_1, \dots, n_m) \cdot h_i(n_1, \dots, n_m)$$