

Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Оганнисян Давит Багратович

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Теоретическое введение	6
4	Выполнение лабораторной работы	7
4.1	Построение модели	9
5	Выводы	15
	Список литературы	16

Список иллюстраций

4.1	Траектория движения катера в 1 случае	11
4.2	Траектория движения катера и лодки	12
4.3	Траектория движения катера во 2 случае	13
4.4	Траектория движения катера во 2 случае	14

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 10,5 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,3 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка А равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки Р такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки А [wiki:bash?].

4 Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта: $(1132226440\%70)+1 = 31$ вариант.

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = k$ – место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс – это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние,

вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{4.3v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{4.3v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4.3v} \text{ - в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4.3v} \text{ - во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{10.5}{5.3}$ и $x_2 = \frac{10.5}{3.3}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость - это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , $r \frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{18.49v^2 - v^2} = \sqrt{17.49}v$$

Из чего можно вывести:

$$r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{17.49}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{17.49}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{10.5}{5.3} \end{cases} \quad (1)$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{10.5}{3.3} \end{cases} \quad (2)$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{17.49}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

4.1 Построение модели

```
using DifferentialEquations, Plots
```

```
# расстояние от лодки до катера
```

```
k = 10.5
```

```
# начальные условия для 1 и 2 случаев
```

```

r0 = k/5.3
r0_2 = k/3.3
theta0 = (0.0, 2*pi)
theta0_2 = (-pi, pi)

# данные для движения лодки браконьеров

fi = 3*pi/4;
t = (0, 50);

# функция, описывающая движение лодки браконьеров

x(t) = tan(fi)*t;

# функция, описывающая движение катера береговой охраны

f(r, p, t) = r/sqrt(17.49)

# постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая

prob = ODEProblem(f, r0, theta0)

sol = solve(prob, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения катера")

```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.1):



Рис. 4.1: Траектория движения катера в 1 случае

`## необходимые действия для построения траектории движения лодки`

```
ugol = [fi for i in range(0,15)]
```

```
x_lims = [x(i) for i in range(0,15)]
```

`# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером`

```
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения лодки")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.2):

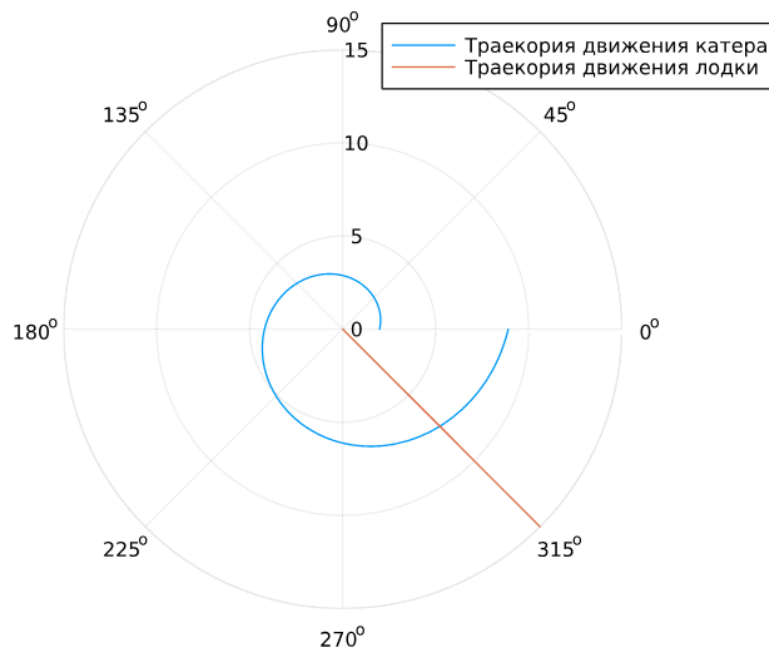


Рис. 4.2: Траектория движения катера и лодки

точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны

$$y(x) = \frac{(1050 \cdot \exp(10 \cdot x) / (\sqrt{1749}))}{(530)}$$

подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нах

$$y(fi)$$

точка пересечения лодки и катера для 1 случая

$$9.097317686870947e8$$

Теперь перейдем к решению в случае 2.

постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая

```
prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)
```

```
sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)
```

```
# отрисовка траектории движения катера
```

```
plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траектория движения катера")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.3):



Рис. 4.3: Траектория движения катера во 2 случае

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером
```

```
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения лодки")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. 4.4):

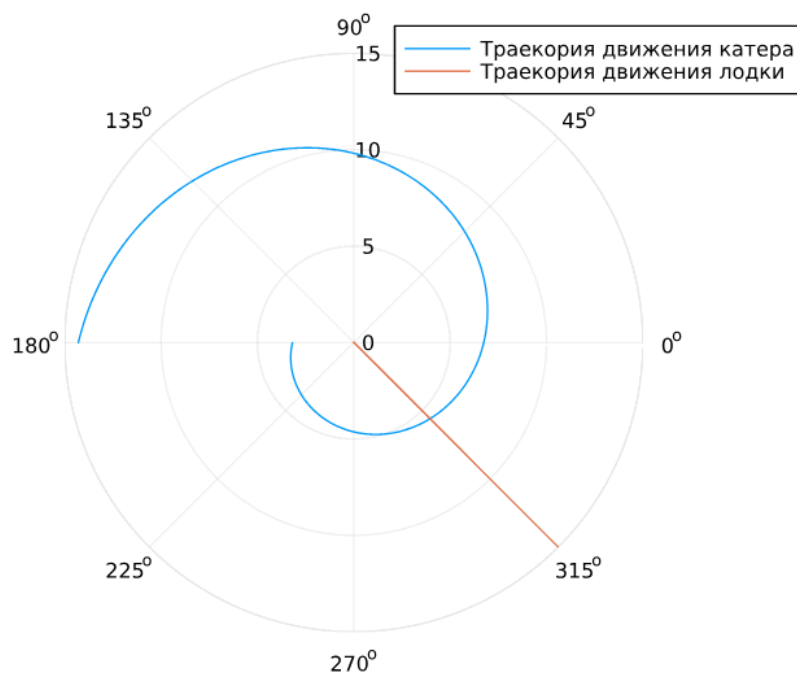


Рис. 4.4: Траектория движения катера во 2 случае

точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случая

$$y_2(x) = \frac{1050 \cdot \exp\left(\left(\frac{10 \cdot x}{\sqrt{1749}}\right) + \left(\frac{10 \cdot \pi}{\sqrt{1749}}\right)\right)}{330}$$

подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нах

$$y_2(\pi)$$

точка пересечения лодки и катера для 2 случая

5.589288485774418

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построил математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

Список литературы