FONCTIONS CONTINUES

1. FONCTIONS CONTINUES

DÉFINITION

Une fonction définie sur un intervalle I est ***continue*** sur I si l'on peut tracer sa courbe représentative *sans lever le crayon*

EXEMPLES

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont continues sur $\mathbb{R}$

THÉORÈME

Si f et g sont continues sur I, les fonctions $f+g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues sur I.

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$, est continue sur I.

THÉORÈME (LIEN ENTRE CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ)

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I.

REMARQUE

Attention! La réciproque est fausse.

Par exemple, la fonction valeur absolue ($x \longmapsto |x|$) est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mais n'est pas dérivable en 0.

2. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = y_0$ admet **au moins une** solution sur l'intervalle $[a; b]$.

REMARQUES

- Ce théorème dit que l'équation $f(x) = y_0$ admet **une ou plusieurs solutions** mais ne permet pas de déterminer le nombre de ces solutions. Dans les exercices où l'on recherche le nombre de solutions, il faut utiliser le corollaire ci-dessous.
- **Cas particulier fréquent :** Si f est continue et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$ (en effet, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$)

COROLLAIRE (DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES)

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y_0$ admet une **unique** solution sur l'intervalle $[a; b]$.

REMARQUES

- Il faut vérifier **3 conditions** pour pouvoir appliquer ce corollaire :
  - f est continue sur $[a; b]$
  - f est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a; b]$
  - y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

EXEMPLE

Soit une fonction f définie sur $[0; 4]$ dont le tableau de variations est fourni ci-dessous :

x	0		4
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	1

On cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$

L'unique flèche oblique montre que la fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur $[0; 4]$.

-1 est compris entre $f(0) = -3$ et $f(4) = 1$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = -1$ admet une **unique** solution sur l'intervalle $[0; 4]$.