VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

INTRODUCTION

Il arrive qu'une variable aléatoire puisse prendre n'importe quelle valeur sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On parle alors de **variable aléatoire continue**.

Pour une telle variable, les événements qui vont nous intéresser ne sont plus $(X=5)$, $(X=20)$, etc... , mais $(X \leqslant 5)$, $(5 \leqslant X \leqslant 20)$, etc...

1. GÉNÉRALITÉS

DÉFINITION

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $I=[a;b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1.$$

On dit que X est une **variable aléatoire réelle continue de densité** f si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et tout $x_2 \in I$ $(x_1 \leqslant x_2)$:

$$p(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

EXEMPLE

La fonction f définie sur $I=[0;2]$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}$ est une fonction continue et positive sur I.

La fonction $F: x \longmapsto \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de f sur I, par conséquent :

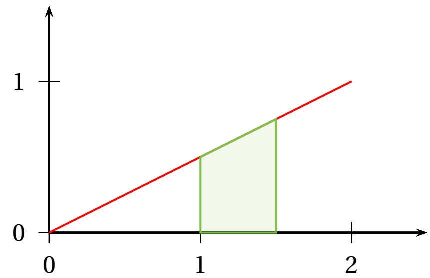
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1.$$

f est donc une **densité de probabilité**.

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans I de densité f, on a alors, par exemple :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5) = \int_1^{1{,}5} f(x)\,dx.$$

$P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$ est donc l'aire (en u.a.) colorée ci-dessous :



Un calcul simple montre que $P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5) = \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^{1{,}5} = 0{,}3125$.

REMARQUES

- On peut étendre cette définition aux cas où l'une ou les deux bornes a et b sont infinies.
  Dans ce cas, on remplace la condition $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$ par une condition portant sur une limite ; par exemple si b vaut $+\infty$, la condition $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 1$ deviendra $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)\,dx = 1$
- Comme indiqué en introduction, les événements du type $(X = k)$ ne sont pas intéressants car pour tout k appartenant à I, $p(X = k) = \displaystyle\int_k^k f(x)\,dx = 0$.
- On peut employer indifféremment des inégalités larges ou strictes :

$$p(x_1 < X < x_2) = p(x_1 \leqslant X \leqslant x_2).$$

DÉFINITION

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de densité f sur $[a;b]$ est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

EXEMPLE

Si l'on reprend l'exemple de la fonction f définie sur $I = [0;2]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}$, l'espérance mathématique est :

$E(X) = \displaystyle\int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

2. LOI UNIFORME SUR UN INTERVALLE

DÉFINITION

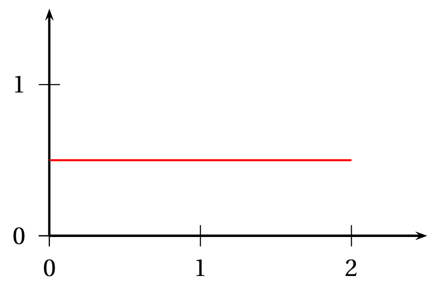
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ si sa densité de probabilité f est constante sur $[a\,;\,b]$.

Cette densité vaut alors, pour tout réel $x \in [a\,;\,b]$:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$

EXEMPLE

La densité de la loi uniforme sur l'intervalle $[0,2]$ est représentée ci-dessous :



Densité de la loi uniforme sur l'intervalle $[0,2]$

REMARQUE

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{b-a}$ sur $[a\,;\,b]$ est $x \longmapsto \frac{x}{b-a}$.

On vérifie alors que : $\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = 1$.

PROPRIÉTÉ

Si X suit une **loi uniforme** sur $[a;b]$, alors pour tous réels c et d compris entre a et b avec $c < d$:

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

DÉMONSTRATION

En effet, si $a \leqslant c < d \leqslant b$ alors :

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$

THÉORÈME

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une **loi uniforme** sur $[a;b]$ est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

DÉMONSTRATION

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2(b-a)}$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{b-a}$ sur $[a\,;\,b]$; par conséquent :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

3. LOI EXPONENTIELLE DE PARAMÈTRE LAMBDA

DÉFINITION

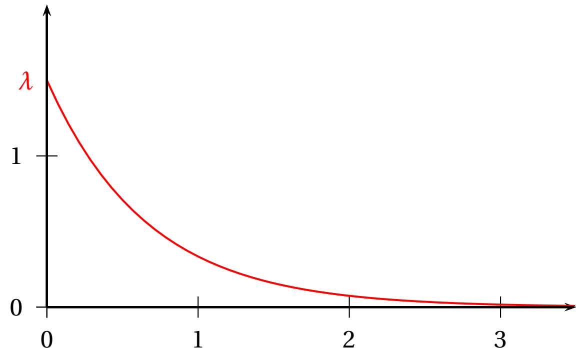
On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$ sur $[0;+\infty[$ si sa densité de probabilité f est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

EXEMPLE

La densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$ est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5x}$.

Cette fonction est représentée ci-dessous :



REMARQUE

La fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

On vérifie alors que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx &= \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{t \to +\infty} \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t \\ &= \lim_{t \to +\infty} -\mathrm{e}^{-\lambda t} + 1 = 1.\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ

Si X suit une exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$, alors pour tous réels positifs x_1 et x_2 :

- $p(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \mathrm{e}^{-\lambda x_1} - \mathrm{e}^{-\lambda x_2}$
- $p(X \geqslant x_1) = \mathrm{e}^{-\lambda x_1}$.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}p(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda x_1} - \mathrm{e}^{-\lambda x_2}\end{aligned}$$

La seconde égalité s'obtient alors en faisant tendre x_2 vers $+\infty$.

THÉORÈME

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une **loi exponentielle** de paramètre λ est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

DÉMONSTRATION

Voir exercice : [ROC] Espérance mathématique d'une loi exponentielle .

PROPRIÉTÉ

Soient X une variable aléatoire qui suit une exponentielle de paramètre λ et x et x_0 deux réels, alors :

$$p(X > x) = p_{(X>x_0)}(X > x + x_0)$$

On dit qu'une loi exponentielle est « *sans vieillissement* ».

COMMENTAIRE

Tout d'abord, rappelons que la notation $p_{(X>x_0)}(X > x + x_0)$ indique la probabilité (conditionnelle) de l'événement $(X > x + x_0)$ **sachant que** l'événement $(X > x_0)$ est réalisé.

Supposons que X modélise la durée de vie d'une machine.

- $p(X > x)$ correspond à la probabilité qu'une machine « neuve » fonctionne pendant une durée supérieure ou égale à x;
- $p_{(X>x_0)}(X > x + x_0)$ est la probabilité qu'une machine, qui a déjà fonctionné pendant une durée x_0, fonctionne encore pendant une durée supérieure ou égale à x.

Dans le cadre d'une loi exponentielle, ces probabilités sont égales ce qui explique l'expression « *sans vieillissement* ».

DÉMONSTRATION

Voir exercice : Loi exponentielle - Bac S Métropole 2008 .