SUITES – BAC S AMÉRIQUE DU NORD 2013

(u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1)

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	…Affecter à u la valeur $\sqrt{}(2u)$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

1.a) Résultat à 10^{-4} près affiché par l'algorithme ci-dessus pour $n = 3$: 1,8340.
1.b) L'algorithme permet de calculer u_n.
1.c) Valeurs de u_n calculées par l'algorithme :

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

On peut conjecturer que (u_n) est croissante et convergente quand $n \to +\infty$.

2)
2.a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrons par récurrence que $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:
La proposition est vraie pour $u_0 = 1$. Si elle vraie pour u_n, démontrons qu'elle est aussi vraie pour u_{n+1} :

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} = \sqrt{2}\sqrt{u_n} .$$

$$u_n \leq 2 \Rightarrow \sqrt{u_n} \leq \sqrt{2} \text{ et } u_{n+1} \leq \sqrt{2}\sqrt{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq 2 .$$

Alors, par récurrence, $u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.b) On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = u_n\left(\sqrt{\frac{2}{u_n}} - 1\right)$.

$$u_n \leq 2 \Rightarrow \frac{2}{u_n} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{u_n}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{u_n}} - 1 \geq 0$$

Comme $u_n > 0$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\sqrt{\frac{2}{u_n}} - 1\right) \geq 0$, et $u_{n+1} \geq u_n$.

Ceci implique que (u_n) est croissante.

2.c) (u_n) est croissante et $0 < u_n \leq 2$ impliquent que la suite est convergente et tend vers une limite l telle que $0 < \mathsf{l} \leq 2$.