MATRICES [SPÉ]

1. DÉFINITIONS

DÉFINITION

Une **matrice** de dimension (ou d'*ordre* or de *taille*) $n \times p$ est un tableau de nombres réels (appelés coefficients ou termes) comportant n lignes et p colonnes.

Si on désigne par a_{ij} le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne la matrice s'écrira :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & amp;2 & amp;3 \\ 4 & amp;5 & amp;6 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3

NOTATIONS

On notera, en abrégé, $A = (a_{ij})$ la matrice dont le coefficient situé à la i-ème ligne et la j-ième colonne est a_{ij}.

DÉFINITIONS

- Une matrice **carrée** est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes.
- Une matrice **ligne** est une matrice dont le nombre de lignes est égal à 1.
- Une matrice **colonne** est une matrice dont le nombre de colonnes est égal à 1.

EXEMPLES

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & amp;2 \\ 1 & amp;2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée (de dimension 2×2 - ou on peut dire, plus simplement, de dimension 2)
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & amp;2 & amp;0,5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (de dimension 1×3)
- La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne (de dimension 4×1)

REMARQUE

Pour une matrice carrée, on appelle **diagonale principale**, la diagonale qui relie le coin situé en haut à gauche au coin situé en bas à droite. Sur l'exemple ci-dessous, les coefficients de la diagonale principale sont marqués en rouge :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & amp;2 & amp;3 & amp;4 \\ 2 & amp;3 & amp;4 & amp;5 \\ 3 & amp;4 & amp;5 & amp;6 \\ 4 & amp;5 & amp;6 & amp;7 \end{pmatrix}$$

DÉFINITIONS

- La matrice **nulle** de dimension $n \times p$ est la matrice de dimension $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls
- Une matrice **diagonale** est une matrice carrée dont tout les coefficients situés en dehors de la diagonale principale sont nuls.
- La matrice **unité** de dimension n est la matrice carrée de dimension n qui contient des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLES

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & amp;0 & amp;0 & amp;0 \\ 0 & amp;2 & amp;0 & amp;0 \\ 0 & amp;0 & amp;0 & amp;0 \\ 0 & amp;0 & amp;0 & amp;1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 4.
- La matrice unité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & amp;0 \\ 0 & amp;1 \end{pmatrix}$.

2. OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

DÉFINITION (SOMME DE MATRICES)

Soient A et B deux matrices de même dimension.

La somme $A + B$ des matrices A et B s'obtient en ajoutant les coefficients de A aux coefficients de B situés **à la même position**.

EXEMPLE

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & amp;-2 & amp;1 \\ -1 & amp;1 & amp;0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & amp;1 & amp;1 \\ -2 & amp;2 & amp;0 \end{pmatrix}$.

Alors :

$$A+B=\begin{pmatrix} 2-1 & amp;-2+1 & amp;1+1 \\ -1-2 & amp;1+2 & amp;0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & amp;-1 & amp;2 \\ -3 & amp;3 & amp;0 \end{pmatrix}$$

REMARQUES

- On ne peut additionner deux matrices que si elles ont les même dimensions, c'est à dire le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.
- On définit de manière analogue la différence de deux matrices.

DÉFINITION (PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN NOMBRE RÉEL)

Soient A une matrice et k un nombre réel..

Le produit kA est la matrice obtenue en multipliant chacun des coefficients de A par k.

EXEMPLE

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & amp;1 & amp;0 \\ 2 & amp;0 & amp;0 \end{pmatrix}$ alors :

- $2A=\begin{pmatrix} 2\times 1 & amp;2\times 1 & amp;2\times 0 \\ 2\times 2 & amp;2\times 0 & amp;2\times 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & amp;2 & amp;0 \\ 4 & amp;0 & amp;0 \end{pmatrix}$
- $-A=-1\times A=\begin{pmatrix} -1 & amp;-1 & amp;0 \\ -2 & amp;0 & amp;0 \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉS

Soient A, B et C trois matrices de mêmes dimensions et k et k' deux réels.

- $A+B=B+A$ (commutativité de l'addition)
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ (associativité de l'addition)
- $k(A+B)=kA+kB$
- $\left(k+k'\right)A=kA+k'A$
- $k\left(k'A\right)=\left(kk'\right)A$

DÉFINITION (PRODUIT D'UNE MATRICE LIGNE PAR UNE MATRICE COLONNE)

Soient $A=(a_1\,a_2\cdots a_n)$ une matrice ligne $1\times n$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne $n\times 1$. Le produit de A par B est le nombre réel :

$$A\times B=(a_1\,a_2\cdots a_n)\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

REMARQUE

- Les deux matrices A et B doivent avoir le même nombre n de coefficients.
- Pour cette formule, la matrice ligne doit être impérativement en premier !

EXEMPLE

Si $A = (1234)$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$A \times B = 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + 4 \times 8 = 5 + 12 + 21 + 32 = 70$

DÉFINITION (PRODUIT DE DEUX MATRICES)

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Le produit de A par B est la matrice $C = (c_{ij})$ à n lignes et q colonnes dont le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne est obtenu en multipliant la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

C'est à dire que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant q$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

REMARQUE

Faites bien attention aux dimensions des matrices : Le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde pour que le calcul soit possible.

Par exemple, le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 3×4 est possible et donnera une matrice 2×4.

Par contre, le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 2×3 n'est pas possible.

EXEMPLE

Calculons le produit $C = A \times B$ avec :

$A = \begin{pmatrix} 2 & amp;4 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & amp;0 & amp;2 \\ -2 & amp;1 & amp;0 \end{pmatrix}$

Ce calcul est possible car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Le résultat C sera une matrice 2×3 (2×2par$2 \times 3 \rightarrow 2 \times 3$)

Notons $C = \begin{pmatrix} c_{11} & amp;c_{12} & amp;c_{13} \\ c_{21} & amp;c_{22} & amp;c_{23} \end{pmatrix}$

Pour calculer c_{11} on multiplie la première ligne de A et la première colonne de B :

$C = \begin{pmatrix} 2 & amp;4 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & amp;0 & amp;2 \\ -2 & amp;1 & amp;0 \end{pmatrix}$

on a donc $c_{11} = 2 \times (-1) + 4 \times (-2) = -2 - 8 = -10$

$C = \begin{pmatrix} 2 & amp;4 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & amp;0 & amp;2 \\ -2 & amp;1 & amp;0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & amp;\cdots & amp;\cdots \\ \cdots & amp;\cdots & amp;\cdots \end{pmatrix}$

Pour calculer c_{12} on multiplie la première ligne de A et la seconde colonne de B :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & amp;4 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & amp;0 & amp;2 \\ -2 & amp;1 & amp;0 \end{pmatrix}$$

on a donc $c_{12} = 2 \times 0 + 4 \times 1 = 0 + 4 = 4$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & amp;4 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & amp;0 & amp;2 \\ -2 & amp;1 & amp;0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & amp;4 & amp;\cdots \\ \cdots & amp;\cdots & amp;\cdots \end{pmatrix}$$

Et ainsi de suite...

Au final on trouve :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & amp;4 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & amp;0 & amp;2 \\ -2 & amp;1 & amp;0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & amp;4 & amp;4 \\ -1 & amp;0 & amp;2 \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit, on s'intéressera principalement à des matrices **carrées**.

PROPRIÉTÉ

Soit A, B et C, trois matrices carrées de même dimension.

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité à gauche)
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (distributivité à droite)
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité de la multiplication)

Par contre en général : $A \times B \neq B \times A$: la multiplication n'est **pas** commutative.

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & amp;2 \\ 0 & amp;0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & amp;2 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & amp;0 \\ 0 & amp;0 \end{pmatrix}$$

tandis que :

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & amp;0 \\ 0 & amp;2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $A \times B \neq B \times A$

DÉFINITION (PUISSANCE D'UNE MATRICE)

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

On note A^n la matrice :

$$A^n = A \times A \times \cdots . \times A \text{ (n facteurs)}$$

REMARQUE

Par convention, on considèrera que A^0 est la matrice unité de même taille que A

DÉFINITION (MATRICE INVERSIBLE)

Une matrice carrée A de dimension n est **inversible** si et seulement si il existe une matrice B telle que

$$A \times B = B \times A = I_n$$

où I_n est la matrice unité de dimension n

La matrice B est appelée **matrice inverse** de A et notée A^{-1}.

3. RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Soit le système :

$$(S)\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

d'inconnues x et y.

Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} a & amp;b \\ c & amp;d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, le système (S) peut s'écrire :

$A \times X = B$. Le théorème ci-dessous permet alors de résoudre ce système.

THÉORÈME

Soit A une matrice carrée.

Si A est inversible, le système $A \times X = B$ admet une solution unique donnée par :

$$X = A^{-1} \times B$$

EXEMPLE

On cherche à résoudre le système :

$$(S)\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 5x + 7y = 2 \end{cases}$$

Pour cela on pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & amp;4 \\ 5 & amp;7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle est alors $A \times X = B$

A la calculatrice, on trouve que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & amp;-4 \\ -5 & amp;3 \end{pmatrix}$.

La solution du système est donné par :

$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 7 & amp;-4 \\ -5 & amp;3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C'est à dire $x = -1$ et $y = 1$.