Fonctions continues

# FONCTIONS CONTINUES

### 1. FONCTIONS CONTINUES

#### **DÉFINITION**

Une fonction définie sur un intervalle I est **continue** sur I si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon

### **EXEMPLES**

- Les fonctions polynômes sont continues sur R.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur  $\mathbb R$

### **THÉORÈME**

Si f et g sont continues sur I, les fonctions f+g, kf (  $k \in \mathbb{R}$  ) et  $f \times g$  sont continues sur I.

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, la fonction  $\frac{f}{g}$ , est continue sur I.

### THÉORÈME (LIEN ENTRE CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ)

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I.

### **REMARQUE**

Attention! La réciproque est fausse.

Par exemple, la fonction valeur absolue  $(x \mapsto |x|)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  tout entier mais n'est pas dérivable en 0.

# 2. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

## THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle [a;b] et si  $y_0$  est compris entre f(a) et f(b), alors l'équation  $f(x) = y_0$  admet **au moins une** solution sur l'intervalle [a;b].

Fonctions continues 2

### **REMARQUES**

• Ce théorème dit que l'équation  $f(x) = y_0$  admet **une ou plusieurs solutions** mais ne permet pas de déterminer le nombre de ces solutions. Dans les exercices où l'on recherche le nombre de solutions, il faut utiliser le corollaire ci-dessous.

• Cas particulier fréquent : Si f est continue et si f(a) et f(b) sont de signes contraires, l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution sur l'intervalle [a;b] (en effet, si f(a) et f(b) sont de signes contraires, 0 est compris entre f(a) et f(b))

### COROLLAIRE (DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES)

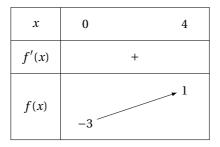
Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle [a;b] et si  $y_0$  est compris entre f(a) et f(b), l'équation  $f(x) = y_0$  admet une **unique** solution sur l'intervalle [a;b].

### **REMARQUES**

- Il faut vérifier **3 conditions** pour pouvoir appliquer ce corollaire :
  - *f* est continue sur [*a*; *b*]
  - f est strictement croissante ou strictement décroissante sur [a; b]
  - $y_0$  est compris entre f(a) et f(b)

### EXEMPLE

Soit une fonction f définie sur [0;4] dont le tableau de variations est fourni ci-dessous :



On cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x) = -1

L'unique flèche oblique montre que la fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur [0;4].

-1 est compris entre f(0) = -3 et f(4) = 1.

Par conséquent, l'équation f(x) = -1 admet une **unique** solution sur l'intervalle [0;4].