INTÉGRALES – BAC S CENTRES ÉTRANGERS 2013

PARTIE A

A.1) $g(x) = 1 + e^{-x}$ définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

A.1.a) Soit $P(x)$ une primitive de $g(x)$, alors $\mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x)\mathrm{d}x = P(a) - P(0)$.

Une primitive de $g(x)$ est $P(x) = x - e^{-x}$. Alors $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} - (0 - e^0) = a - e^{-a} + 1$

A.1.b) $\mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x)\mathrm{d}x = P(1) - P(a) = 1 - \mathrm{e}^{-1} - a + \mathrm{e}^{-a}$

A.2) $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \dfrac{1}{e}$ définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1].

A.2.a)

On a $f(0) = -2 + \dfrac{1}{e}$ et $f(1) = 2 - 2e^{-1} + \dfrac{1}{e} = 2 - \dfrac{1}{e}$. On observe que

$2x$ et $2e^{-x}$ étant des fonctions continues pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, à fortiori, sur [0 ; 1]. f est donc dérivable sur cet intervalle :

$f'(x) = 2 + 2e^{-x}$. Comme e^{-x} est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et sur [0 ; 1]. On obtient le tableau de variations suivant pour f :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-2 + \dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	$2 - \dfrac{1}{e}$

f est donc strictement croissante sur [0 ; 1]

A.2.b) On remarque que $-f(0) = f(1)$ et, compte tenu du sens de variation de f, que $f(0) < f(1)$.

Ce qui implique $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$.

On en conclut que f s'annule une seule fois sur [0 ; 1] (théorème des valeurs intermédiaires).
Soit $f(\alpha) = 0$. On trouve avec la calculatrice $\alpha = 0{,}45$ arrondie au centième.

A.3)

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ s'écrit en fonction de a :

$a - e^{-a} + 1 = 1 - a - e^{-1} + e^{-a}$ ce qui donne l'équation $2a - 2e^{-a} + \dfrac{1}{e} = 0$.

Le premier membre de l'équation n'est autre que $f(a)$. On doit donc résoudre $f(a) = 0$.
Comme $f(x) = 0$ n'a qu'une solution sur [0 ; 1], on en déduit que $a = \alpha = 0{,}45$.