GRAPHE PROBABILISTE [SPÉ]

I. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

On étudie la propagation d'une maladie dans une population.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On note :

- M_n l'événement « la personne est malade le $n$ième jour de l'étude » ;
- $\overline{M_n}$ l'événement « la personne est saine le $n$ième jour de l'étude » ;
- p_n la probabilité de l'événement M_n ;
- q_n la probabilité de l'événement $\overline{M_n}$.

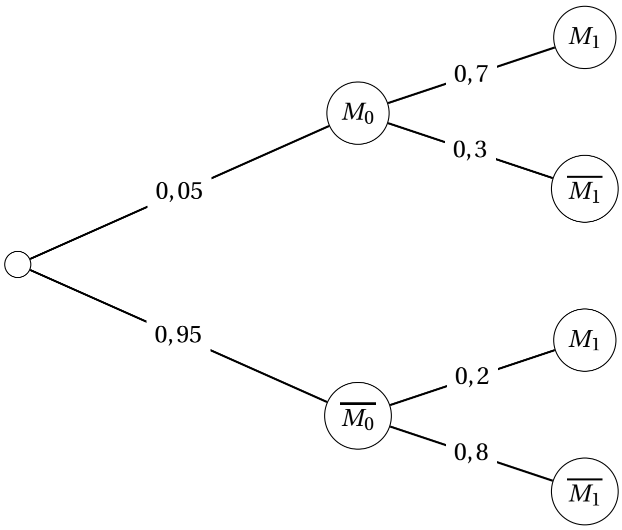
On suppose que :

- la probabilité qu'une personne malade soit guérie le lendemain est $0,3$;
- la probabilité qu'une personne saine tombe malade le lendemain est $0,2$.

Au début de l'étude, la maladie touche 5 % de la population. On a donc $p_0 = 0,05$ et $q_0 = 0,95$.

A. UTILISATION D'UN ARBRE

On peut représenter la situation au jour 0 et au jour 1 par l'arbre ci-dessous :

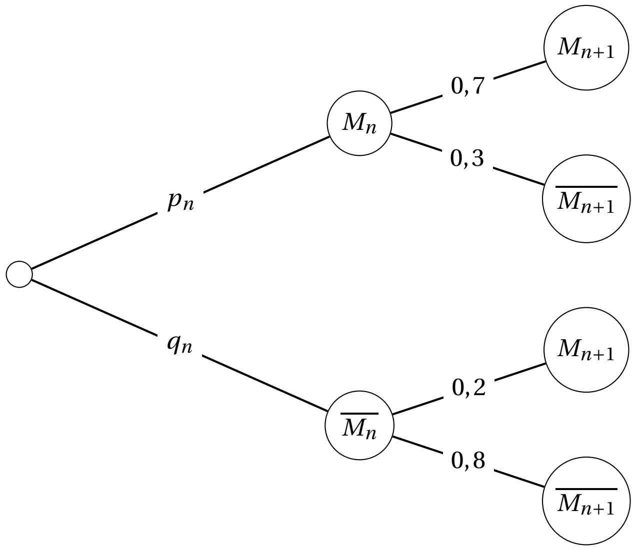


La formule des probabilités totales permet de calculer les probabilités p_1 et q_1 :

$p_1 = 0,05 \times 0,7 + 0,95 \times 0,2 = 0,225$

$q_1 = 0,05 \times 0,3 + 0,95 \times 0,8 = 0,775$

De même, on peut représenter l'évolution du jour n au jour $n+1$ grâce à l'arbre ci-dessous :



On obtient, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2q_n$

$q_{n+1} = 0,3p_n + 0,8q_n$.

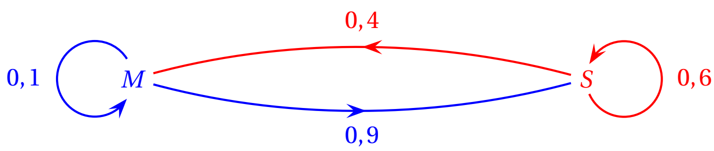
B. GRAPHE PROBABILISTE

À une date donnée, un individu se trouve dans l'un ou l'autre des deux états suivants :

- la personne est malade (état noté M)
- la personne est saine (état noté S)

Un **graphe probabiliste** représente ces deux **états** sous la forme de **sommets** et les **probabilités** de passer d'un état à l'autre sous la forme d'**arcs orientés**.

Dans notre exemple, on obtient le graphe suivant :



On remarque que la somme des probabilités issues d'un même sommet (en bleu pour M et en rouge pour S) est toujours égale à 1.

C. MATRICE DE TRANSITION

Les relations trouvées grâce à l'arbre :

$p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2q_n$

$q_{n+1} = 0,3p_n + 0,8q_n$

peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$A = \begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

N.B. Vérifier le en effectuant le calcul : $\begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

En notant $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$, la relation précédente s'écrit :

$P_{n+1} = P_n \times T$

La matrice T s'appelle **matrice de transition** et les matrices lignes P_n, **états probabilistes**.

On a alors :

$P_1 = P_0 \times T$ où P_0 est l'état initial$P_0 = \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$

$P_2 = P_1 \times T = P_0 \times T \times T = P_0 \times T^2$

$P_3 = P_2 \times T = P_0 \times T^2 \times T = P_0 \times T^3$

et ainsi de suite...

$P_n = P_0 \times T^n$

Par exemple, l'état probabiliste au cinquième jour sera :

$P_5 = P_0 \times T^5$

À la calculatrice, on trouve $P_5 = \begin{pmatrix} 0,389 & 0,611 \end{pmatrix}$ (au millième près).

Le cinquième jour, 38,9% de la population sera malade.

II. GRAPHE PROBABILISTE - MATRICE DE TRANSITION

Dans toute cette partie, on considère un système possédant n états possibles notés A_1, A_2, ... A_n. Ce système peut changer d'état au cours du temps et on suppose que la probabilité de passer de l'état A_i à l'état A_j reste constante.

DÉFINITION

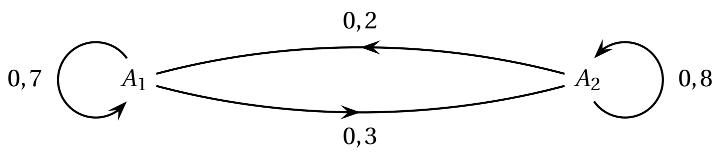
Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré dans lequel :

- Les sommets du graphe représentent les différents états possibles d'un système
- Les poids des arcs indiquent les probabilités de passage d'un état à l'autre

Dans un graphe orienté, la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

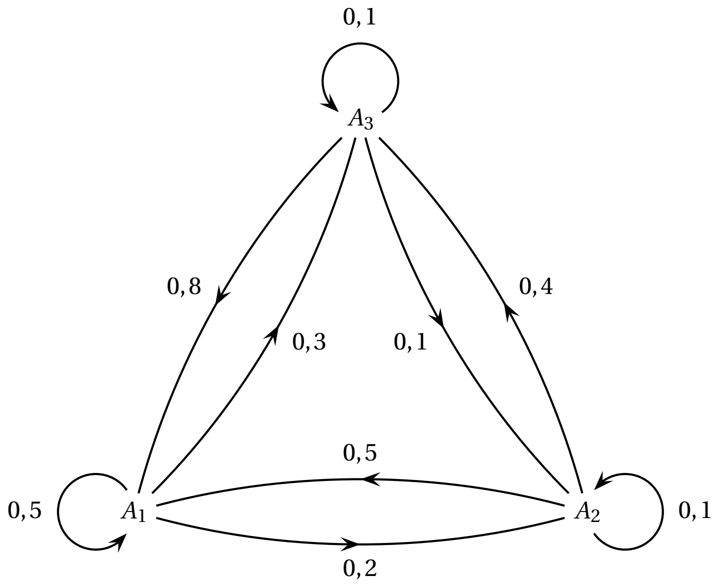
EXEMPLES

a. Graphe probabiliste d'ordre 2



Graphe probabiliste à 2 états A_1 et A_2

b. Graphe probabiliste d'ordre 3



Graphe probabiliste à 3 états A_1, A_2 et A_3

DÉFINITION

Soit un graphe probabiliste d'ordre n.

Les **états probabilistes** P_k sont des matrices à une ligne à n colonnes qui indiquent pour chacun des n sommets, la probabilité de se trouver dans cet état à l'étape k.

La somme des coefficients d'un état probabiliste est égale à 1.

REMARQUES

- L'état probabiliste P_0 s'appelle l'état probabiliste **initial**.
- Pour un système à deux états A et B, les états probabilistes seront de la forme $P_k = \begin{pmatrix} p_k & q_k \end{pmatrix}$ où p_k et q_k sont les probabilités de se trouver respectivement dans les états A et B à l'étape k.
  Le système se trouvant, à chaque étape, soit dans l'état A soit dans l'état B, on aura, pour tout entier naturel k, $p_k + q_k = 1$
- Pour un système à trois états, les états probabilistes seront de la forme $P_k = \begin{pmatrix} p_k & q_k & r_k \end{pmatrix}$ avec, pour tout entier naturel k, $p_k + q_k + r_k = 1$.

DÉFINITION

Soit un graphe probabiliste d'ordre n dont les états sont notés A_1, A_2, ... A_n.

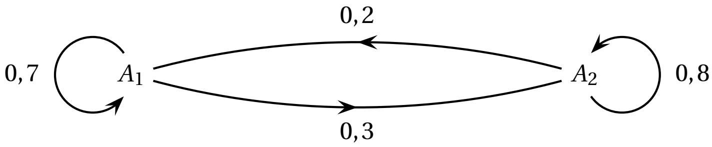
La **matrice de transition** associée un graphe probabiliste d'ordre n est une matrice carrée $n \times n$ dont le terme $p_{i,j}$ situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne représente la probabilité de passer de l'état A_i à l'état A_j.

Dans une matrice de transition, la somme des coefficients situés sur une même ligne est égale à 1.

EXEMPLES

a. Graphe probabiliste d'ordre 2

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent :

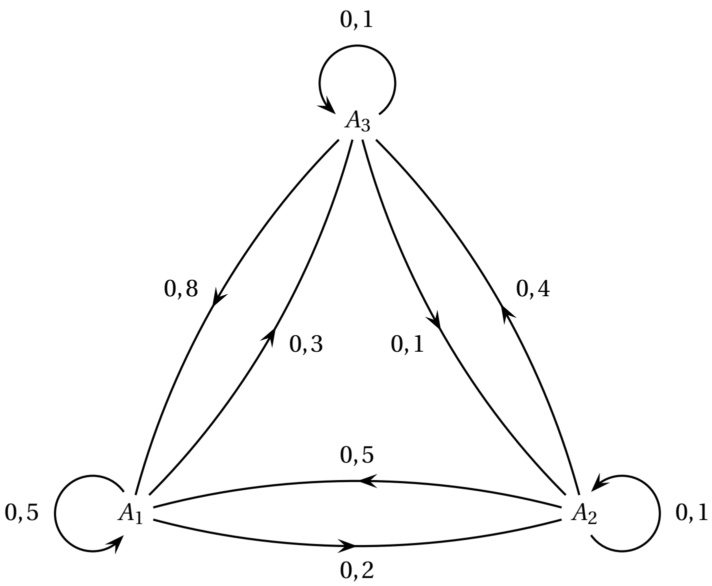


La matrice de transition associée à ce graphe est :

$$T = \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \ \text{origine } A_1 \\ \longleftarrow \ \text{origine } A_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{vers} & \text{vers} \\ A_1 & A_2 \end{array} & \end{array}$$

b. Graphe probabiliste d'ordre 3

Dans l'exemple du graphe d'ordre 3 :



La matrice de transition est :

$$\begin{array}{cl} T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{ origine } A_1 \\ \longleftarrow \text{ origine } A_2 \\ \longleftarrow \text{ origine } A_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{vers} & \text{vers} & \text{vers} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{array} & \end{array}$$

THÉORÈME

Soit un système dont la matrice de transition est notée T, d'état initial P_0 et d'état probabiliste P_k à l'étape k.

Alors, pour tout entier naturel k :

- $P_{k+1} = P_k \times T$
- $P_k = P_0 \times T^k$

DÉMONSTRATION

Ce résultat se démontre en utilisant la formule des probabilités totales (voir partie I. Étude d'un exemple)

REMARQUE

On peut rapprocher ces formules de celles obtenues pour les suites géométriques : $u_{n+1} = u_n \times q$ et $u_n = u_0 \times q^n$.

Mais attention à l'ordre des matrices : le produit de matrices n'est pas commutatif!

III. ÉTATS STABLES

DÉFINITION

Soit un graphe probabiliste de matrice de transition T.

Un **état stable** est un état probabiliste P qui vérifie $P = P \times T$.

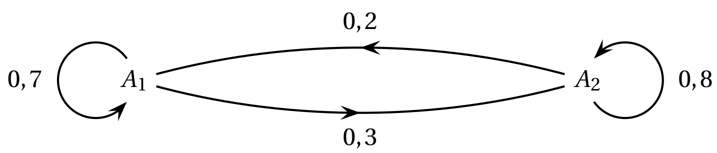
REMARQUE

En pratique pour trouver un état stable :

- On pose $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ si le graphe possède 2 états (ou $P = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ si le graphe possède 3 états)
- On écrit le système correspondant à l'égalité matricielle $P = P \times T$
- On ajoute au système l'équation $x + y = 1$ (ou $x + y + z = 1$ si le graphe possède 3 états) qui caractérise les états probabilistes (la somme des coefficients est égale à 1)
- On résout le système obtenu...

EXEMPLE

Reprenons le graphe :



La matrice de transition associée est $T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

En posant $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ on obtient le système

$$\begin{cases} x = 0,1x + 0,4y \\ y = 0,9x + 0,6y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} 0,9x - 0,4y = 0 \\ 0,9x - 0,4y = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Les deux premières équations sont identiques et en remplaçant y par $1 - x$ dans la première équation on obtient :

$$\begin{cases} 0,9x - 0,4(1 - x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{13} \\ y = \dfrac{9}{13} \end{cases}$$

Il y a donc un état stable $P = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{13} & \dfrac{9}{13} \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉ

Si la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre 2 ou 3 ne comporte pas de coefficient nul, alors :

- le graphe possède un état stable P
- les états probabilistes P_n tendent vers l'état stable P quand n devient grand.

REMARQUES

- Cette propriété donne une condition suffisante mais non nécessaire. Il est possible qu'une matrice de transition comporte des coefficients nuls mais que le système converge malgré tout vers un état stable.
- Le résultat précédent est également valable si le degré du graphe est supérieur à 3 (mais n'est pas au programme dans ce cas). Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Perron-Frobenius