EXERCICE 1

4 POINTS Cet exercice est un questionnaire à choix multiples

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle [1;9], alors :

a. $p(1 < X < 9) = 1/8$

b. $p(5 < X < 9) = 1/2$

c. $p(1 < X < 3) = 3/8$

d. $p(1 < X < 2) = 1/2$

$p(1 < X < 9) = 1$

$p(5 < X < 9) = 1/2$

$p(1 < X < 3) = 1/4$

$p(1 < X < 2) = 1/8$

Pour une loi uniforme entre min et max, p(a<x<b)= $\frac{b-a}{max-min}$

2. Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,01 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, il faut interroger :

a. 200 personnes

b. 400 personnes

c. 10 000 personnes

d. 40 000 personnes

Intervalle de confiance = [p- $\frac{1}{\sqrt{n}}$,p + $\frac{1}{\sqrt{n}}$] donc la taille de l'intervalle = $\frac{2}{\sqrt{n}}$

soit $\frac{2}{\sqrt{n}}$ = 0.01 donc n=40.000

3. La solution de l'équation $x^{23} = 92$ est égale à :

a. 4

b. 1,2

c. $e^{\ln(92)/23}$

d. $e^{\ln(23)/92}$

$x^{23} = 23$ ⇔ $\ln(x^{23}) = \ln(92)$ ⇔ $23.\ln(x)=\ln(92)$

$\ln(x)= \frac{ln(92)}{23}$ soit $x= e^{\frac{ln(92)}{23}}$

4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle [−10 ; 10] dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-10		-5		3		10
$g(x)$	7	$\searrow$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-6

On note $I = \int_{-5}^{3} g(x)dx$. On peut affirmer que :

a. -5 $\leq$ I $\leq$ 3

b. 2 $\leq$ I $\leq$ 4

c.16 $\leq$ I $\leq$ 32

d. 4 $\leq$ I $\leq$ 8

g est continue, dérivable et strictement croissante sur [-5,3]

Vu les variations de g, Quelque soit x de [-5,3], 2 $\leq$ g(x) $\leq$ 4

Donc il est possible d'encadrer I par :

16 = 8(largeur de l'intervalle) * 2 (valeur mini de g(x))

32 = 8 (largeur de l'intervalle) * 4 (valeur maxi de g(x))

EXERCICE 2

6 POINTS Commun à tous les candidats Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [−20 ; 20] par

$$f(x) = (-2x+30)e^{0,2x-3}.$$

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0,4x+4)e^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle [−20 ; 20]

La fonction f est continue et dérivable sur R car produit et composée de fonctions continues et dérivables sur R.

$f'(x) = -2 * .e^{0,2x-3} + 0.2(-2x+30)e^{0,2x-3}$

$f'(x) = e^{0,2x-3}(-2 + 0.2(-2x+30))$

$f'(x) = e^{0,2x-3}(-0.4x+4)$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [−20;20] . On précisera la valeur exacte du maximum de f .

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -0.4x+4=0$ car la fonction exponentielle est strictement positive

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$

si $x<10 \Rightarrow f'(x)>0$ et si $x>10 \Rightarrow f'(x)<0$

$f(10)= (-2.10+30)e^{0,2.10-3}= 10e^{-1}$

$f(-20) \approx 0.064$

$f(20) \approx -27.2$

$f(10) \approx 3.67$

x	*-20*		*10*		*20*
f'(x)		+	*0*	-	
f(x)	*f(-20)*	↗	$10e^{-1}$	↘	*f(20)*

2. a. Montrer que, sur l'intervalle [−20 ; 20], l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.

<u>Etude sur [-20,10]</u>

f est croissante sur cet intervalle. Or $f(-20) > 0$ donc pour tout x de [-20,10] $f(x) > 0$

donc $f(x) = -2$ n'admet pas de racine

<u>Etude sur [10,20]</u>

f est strictement décroissante sur]10,20]. Or $f(10)>0$ et $f(20) < -2$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe α unique tel que $f(\alpha)=0$

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Par encadrement, on a $15.8 < \alpha < 15.9$

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

Dériver $(-10x+200)e^{0,2x-3}$ $= (-2x+30)e^{0,2x-3}$
Dériver $(-2x+30)e^{0,2x-3}$ $= (-0,4x+4)e0,2x-3$
Dériver $(-0,4x+4)e^{0,2x-3}$ $= (-0,08x+0,4)e^{0,2x-3}$

Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

a. Calculer la valeur exacte de $I = \int_{10}^{15} f(x)\,dx$.

D'après (1), une primitive de f(x) est $(-10x+200)e^{0,2x-3}$

donc I $= [(-10x+200)e^{0,2x-3}]_{10}^{15} = (-150+200)exp(0.2*15-3) - (-100+200)exp(0.2*10-3)$

$= 50-100e^{-1}$

b. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

D'après (2) et (3) on sait que $f''(x)=(-0,08x+0,4)e^{0,2x-3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow (-0,08x+0,4)=0$ *car exponentielle est une fonction strictement positive*

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 0.08x=0.4$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=5$

Le point d'inflexion est obtenu pour x=5

si $x \in [-20,5]$ $f''(x)>0$ la fonction est convexe

si $x \in [5,20]$ $f''(x)<0$ la fonction est concave

Partie B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative Cf de la fonction f définie dans la partie A sur l’intervalle [0 ; 10]. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l’arrivée. Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et f (x) représente l’altitude, exprimée en km. On appelle pente de la piste au point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe. Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de 15/100 = 0,15.

1. On appelle dénivelé d’une piste de ski, la différence d’altitude entre le point de départ et le point d’arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.

Dénivelé de la piste = f(10) - f(0) = 3.679 - 1.494 = 2185m

2. La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.

— La piste sera classée noire, c’est-à-dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure ou égale à 40 %.

— La piste sera classée rouge, c’est-à-dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40 %).

— Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c’est-à-dire facile.

Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste. Justifier la réponse.

on étudie la dérivée de la fonction f qui donne la pente en chaque point de la piste.

f’’(x) donne les variations de la pente

x	*0*		*5*		*10*
f’’(x)		+	*0*	-	
f’(x)	*f’(0)*	↗	0.27	↘	*0*

f’(5) ≈ 0.27

f’(0) ≈ 0.20

Il existe une portion dont la pente est supérieure à 25%

La pente maximum est de l’ordre de 27% dont inférieure à 40%

C’est donc une piste rouge.

EXERCICE 3

5 POINTS Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection présidentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B. Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis. Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote. Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisée de la façon suivante.

Chaque mois :

- *5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.*
- *3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.*

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A. On représente ce modèle par un graphe probabiliste (G) de sommets A et B où :

- *A est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A » ;*
- *B est l'évènement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».*

Dans la suite de l'exercice, on note :

- *a_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc a0 = 0,65 .*
- *b_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le n-ième mois après le début de la campagne.*

On note Pn = (a_n b_n) l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le n-ième mois après le début de la campagne. On a donc P0 = (0,65 0,35) .

1. a. Dessiner le graphe probabiliste (G) de sommets A et B.

b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

$$M = \begin{vmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.03 & 0.97 \end{vmatrix}$$

2. Démontrer que P_1 = (0,628 0,372) .

$$P_1 = P_0 M = (0.65 \;\; 0.35) \begin{vmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.03 & 0.97 \end{vmatrix} = (0.65*0.95+0.35*0.03 \;\; 0.65*0.05+0.35*0.97)$$

$$P_1 = (0.628 \; 0.372)$$

3.. On note P = (a b) l'état stable associé à ce graphe.
a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système
0,05a −0,03b = 0
a + b = 1 .

P existe car tous les coefficients de M sont non nuls.
On doit avoir P * M = P et a+b=1 (la somme des probabilités vaut 1)
soit le système
(a) 0.95a + 0.03b = a
(b) 0.05a + 0.97b = b
(c) x + y = 1

Comme (a) et (b) sont équivalentes, on ne conserve que :
0,05a −0,03b = 0
a + b = 1

b. Résoudre le système précédent.

b = 1 - a
0.05a -0.03(1-x)=0 donc 0.08a=0.03

a=0.375
b=0.625

c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question 3. b.

Au bout d'un certain temps (qui reste à déterminer), c'est le candidat B qui aura le plus de voix (62.5%).

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03$.
On a : $P_{n+1} = P_n * M$. En ne considérant que la première coordonnée on obtient :
$a_{n+1} = 0.95\, a_n + 0.03\, b_n$
or $a_n + b_n = 1$
donc $a_{n+1} = 0.95\, a_n + 0.03\, (1- a_n) = 0.92\, a_n + 0.03$

b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n − 0,375$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,92 et préciser le premier terme.
$v_{n+1} / v_n = (a_{n+1} - 0.395)/ (a_n - 0.395) = (0,92a_n +0,03 - 0.375)/(a_n - 0.395)$.
$$v_{n+1} / v_n = \frac{0.92*(a_n+\frac{0.03-0.375}{0.92})}{a_n-0.375} = \frac{0.92*(a_n-0.375)}{a_n-0.375} = 0.92$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 0.92

$v_0=a_0-0.375=0.65-0.375=0.275$

c. Pour tout entier naturel n, exprimer vn en fonction de n et en déduire que :

$a_n = 0{,}275 \times 0{,}92^n + 0{,}375$.

Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 0.92 et de premier terme 0.275

on a : $v_n = 0.275(0.92)^n$

Et puisque $v_n = a_n - 0{,}375$ on a : $a_n = v_n + 0{,}375$

Donc $a_n = 0{,}275 \times 0{,}92^n + 0{,}375$.

5. La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.

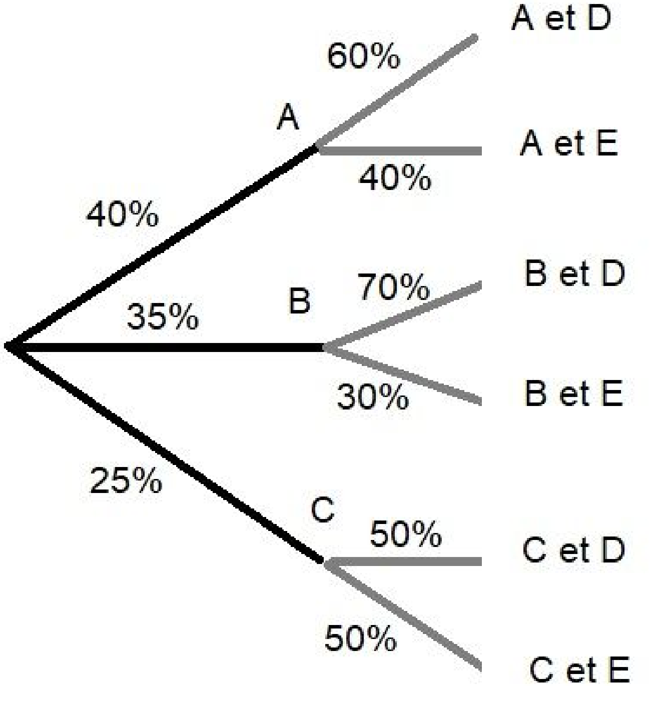
$a_{11} = 0.275 * 0.92^{11} + 0.375 = 48.5\%$ et donc $b_{11} = 51.5\%$

Si la modélisation est valable, B sera élu.

EXERCICE 4 5 POINTS Commun à tous les candidats
Une base nautique propose la location de différentes embarcations pour visiter les gorges du Verdon. Les touristes peuvent louer des kayaks, des pédalos ou des bateaux électriques, pour une durée de 1 heure ou 2 heures. Les parties A et B sont indépendantes
Partie A
Une étude statistique met en évidence que :
- *40 % des embarcations louées sont des pédalos ;*
- *35 % des embarcations louées sont des kayaks ;*
- *les autres embarcations louées sont des bateaux électriques ;*
- *60 % des pédalos sont loués pour une durée de 1 heure ;*
- *70 % des kayaks sont loués pour une durée de 1 heure ;*
- *la moitié des bateaux électriques sont loués pour une durée de 1 heure.*

On interroge au hasard un touriste qui vient pour louer une embarcation. On note A, B, C, D et E les évènements suivants :
- *A : « l'embarcation louée est un pédalo » ;*
- *B : « l'embarcation louée est un kayak » ;*
- *C :« l'embarcation louée est un bateau électrique » ;*
- *D :« l'embarcation est louée pour une durée de 1 heure » ;*
- *E : « l'embarcation est louée pour une durée de 2 heures ».*

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2. Calculer la probabilité p(A ∩ E).
d'après la loi des probabilités conditionnelles on a :
$P(A \cap E) = P_A(E) \times P(A)$ = 0.40 * 0.40 = 16.0%

3. Montrer que la probabilité que l'embarcation soit louée pour une durée de 2 heures est égale à 0,39.

d'après la loi des probabilités totales on a

$P(E) = P_A(E)*P(A) + P_B(E)*P(B) + = P_C(E)*P(C) = 0.16 + 0.35*0.30 + 0.25*0.50 =$ 39.0%

4. Sachant que l'embarcation a été louée pendant 2 heures, quelle est la probabilité que ce soit un bateau électrique ? Arrondir le résultat au centième.

On veut calculer $P_E(C)$

En application la loi des probabilités conditionnelles on a :

$P_E(C) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)}$

On connaît P(E) et $P(C \cap E)$ (Cf question précédente).

$P_E(C) = 0.25*0.5/0.39 = 32.1\%$

5. La base nautique pratique les tarifs suivants :

	1 heure	2 heures
Pédalo	15 €	25 €
Kayak	10 €	16 €
Bateau électrique	35 €	60 €

En moyenne, 200 embarcations sont louées par jour. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique. Déterminer la recette journalière que peut espérer la base nautique.

Dressons tout d'abord le tableau des probabilités de location de chaque type et pondérons-le par les tarifs afin de calculer le gain moyen par bateau.

	1 heure	2 heures
Pédalo	24%	16%
Kayak	24.5%	10.5%
Bateau Électrique	12.5%	12.5%

La recette moyenne par bateau est donc de :

recette moy = (24*15+16*25+24,5*10+10,5*16+35*12,5+60*12,5)/100 = 23.60€

Pour 200 bateau loués, la recette espérée = 4721€

Partie B Dans cette partie les résultats seront arrondis au millième
Les bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes. Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation. On note X la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
1. À l'aide de la calculatrice, calculer $p(490 < X < 520)$.
$p(490 < X < 520)$=81.9%
2. Chaque jour, les bateaux sont utilisés pendant une durée de 8 heures sans être rechargés. Déterminer la probabilité que la batterie d'un bateau soit déchargée avant la fin de la journée.
8h=8*60=480mn
$p(x<480)$=2.3%
3. Déterminer l'entier a tel que $p(X < a) \approx 0,01$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
Avec la calculatrice, on obtient a = 477.
Ce qui signifie qu'il y a 1% de chance que le bateau soit déchargé avant 477 mn de fonctionnement.

EXERCICE 3 5 POINTS

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive. Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m2 au 1er janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m2 .

1. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018. On modélise la situation par une suite (u_n) où un représente la superficie de terrain en m2 envahi par la Renouée du Japon au 1er janvier de l'année 2017+n. La suite (u_n) est donc définie par u0 = 120 et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0,9u_n + 4$.

u_0=120m²

$u_1=0.9u_0+4=0.9*120+4=112$m²

2. Le jardinier souhaite connaitre l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1er janvier de l'année 2017. Recopier et compléter les lignes L1, L3, L4 et L7 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée. On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme.

L1 U prend la valeur **120**

L2 N prend la valeur 0

L3 Tant que **U > 60**. . . . .

L4 U prend la valeur **0,9 * U + 4**. . . . .

L5 N prend la valeur N +1

L6 Fin tant que

L7 Afficher **N**. . . . .

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 40$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q = 0,9 et préciser le premier terme.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-40}{u_n-40} = \frac{(0.9u_n+4)-40}{u_n-40} = \frac{0.9(u_n-\frac{36}{0.9})}{u_n-40} = 0.9$$

Le produit de deux termes consécutif est constant et vaut 0.9, donc (v_n) est une suite géométrique. Son premier terme v_0 est égal à u_0-40 = 80

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

$v_n= v_0q^n = 80 \times 0.9^n$

c. Justifier que $u_n = 80\times0,9^n +40$ pour tout entier naturel n.

Puisque $v_n = u_n - 40$, on a $u_n = v_n + 40$

Donc $u_n = 80 \times 0.9^n + 40$

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $80\times0{,}9^n +40 \leq 60$.

$80\times0{,}9^n +40 \leq 60 \quad\Leftrightarrow\quad 80\times0{,}9^n \leq 20 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}9^n \leq 0.25$

$\Leftrightarrow\quad n\ln(0.9)\leq\ln(0.25)$ car ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow\quad n \geq \dfrac{ln(0.25)}{ln(0.9)}$ car $\ln(0.9) < 0$

$\Leftrightarrow\quad n \geq 13.2$ soit $n>14$

b. En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier de l'année 2017 .

C'est donc en 2031 (2017+14) que la surface occupée sera inférieure à 60m²

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

La limite de (u_n) quand n tend vers l'infini est égale à 40. En effet, comme 0,9 est compris entre zéro et un, la limite de $0{,}9^n$ est égale à zéro. Donc le jardinier n'arrivera pas, selon ce modèle, à éliminer complètement la plante. Il restera toujours 40m²