NOMBRES COMPLEXES – BAC S NOUVELLE CALÉDONIE 2016

$z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$

1)

1.a) Soit le nombre complexe $c = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Il s'écrit $c = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sous forme exponentielle, r étant son module et θ son argument.

On a $r = |c| = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2}$

dont on déduit que $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ modulo(2π).

Alors $c = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

1.b) $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n \Rightarrow z_1 = c = 1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et, sous forme exponentielle, $z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

$z_2 = \left(1 + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) z_1 = z_1^2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2)

2.a) On peut écrire $z_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}1\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{\pi}{6}}$.

Si la proposition $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$ est vraie, elle est aussi vraie pour $z_{n+1} = z_1 z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\pi}{6}}$ et par récurrence la proposition est vraie pour tout entier naturel n.

2.b) Les points O, A_0 et A_n sont respectivement les points d'affixe 0, z_0 et z_n. Pour qu'ils soient alignés, il faut que leurs arguments soient égaux à $k\pi$ près, avec $k \in \mathbb{Z}$. Les arguments de 0 et z_0 sont nuls. Il faut donc que $\arg(z_n) = n\dfrac{\pi}{6} = 0 + k\pi$, ce qui donne $n = 6k$.

3)

3.a) $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ est le module du complexe $z_{n+1} - z_n$ dont l'image A_d dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$ est telle que $\overrightarrow{OA_d} = \overrightarrow{OA_{n+1}} - \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$.

Ceci revient à dire que d_n est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$: $d_n = \left\|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right\|$.