CONVEXITÉ

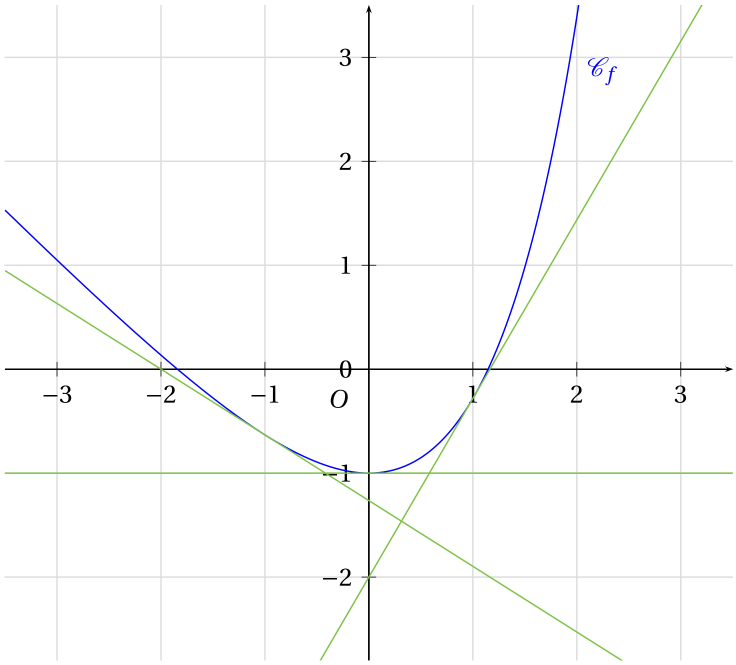
I. FONCTION CONVEXE - FONCTION CONCAVE

DÉFINITION

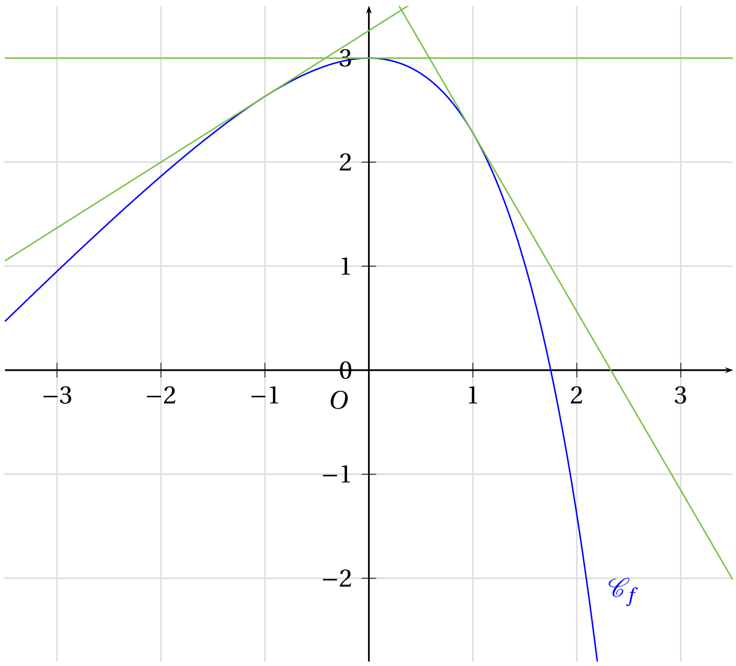
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- On dit que f est **convexe** sur I si la courbe $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de toutes ses tangentes sur l'intervalle I.
- On dit que f est **concave** sur I si la courbe $\mathscr{C}_f$ est **au-dessous** de toutes ses tangentes sur l'intervalle I.

EXEMPLES



Fonction convexe (et quelques tangentes...)



Fonction concave (et quelques tangentes...)

THÉORÈME

Si f est dérivable sur I :

- f est convexe sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I
- f est concave sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I

REMARQUE

L'étude de la convexité se ramène donc à l'étude des variations de f'. Si f' est dérivable, on donc est amené a étudier le signe la dérivée de f'. Cette dérivée s'appelle la **dérivée seconde** de f et se note f''.

THÉORÈME

Si f est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I (on dit aussi que f est 2 fois dérivable sur I) :

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est **positive ou nulle** sur I
- f est concave sur I si et seulement si f'' est **négative ou nulle** sur I

EXEMPLES

- La fonction $f : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
  $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$.
  Comme f'' est positive sur $\mathbb{R}$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $f : x \mapsto x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
  $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
  $f'' \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$, donc f est convexe sur $[0; +\infty[$.
  $f'' \leqslant 0$ sur $]-\infty; 0]$, donc f est concave sur $]-\infty; 0]$.

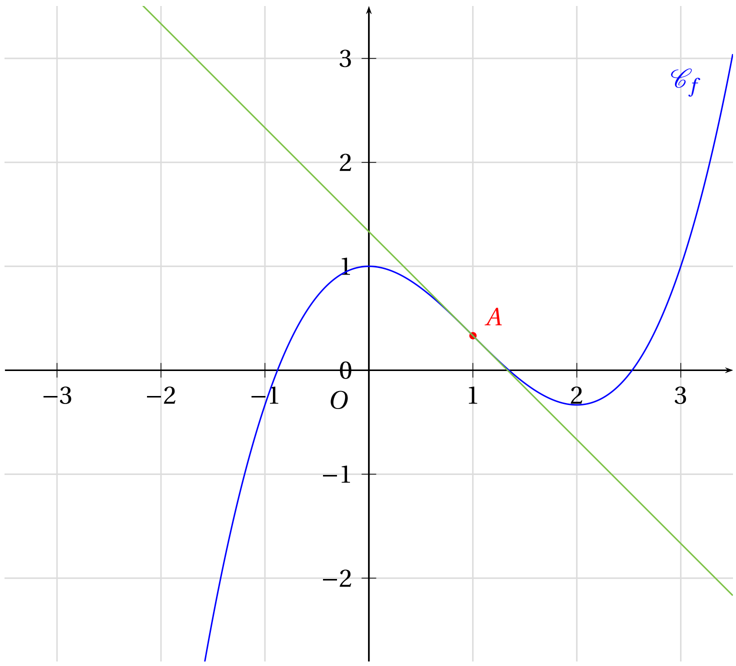
II. POINT D'INFLEXION

DÉFINITION

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $A(a; f(a))$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

On dit que A est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathscr{C}_f$, si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en A.

EXEMPLE



Point d'inflexion en A

PROPRIÉTÉ

Si A est un point d'inflexion d'abscisse a, f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en a.

THÉORÈME

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$. Le point A d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si f'' **s'annule et change de signe en** a.

EXEMPLE

Le graphique de l'exemple précédent correspond à la fonction définie par :

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

On a $f'(x) = x^2 - 2x$ et $f''(x) = 2x - 2$.

On vérifie bien que f'' change de signe en 1. Donc le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = \frac{1}{3}$ est bien un point d'inflexion.