Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ = 2900 euros et d'écart-type σ = 1250 euros.

1.A.1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4000 euros ?

Si N désigne la loi normale centré réduite, on a:
P(X>4000)=1 - P(X<4000)=1 - P(N<((4000-2900)/1250)=1 - P(N<0.88) ≈ **18.9%**

1.A.2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10 % des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte ? Donner ce montant à l'euro près.

Il faut donc déterminer a tel que p(X<a)=0.1
On détermine d'abord n tel que
p(N<n)=0.1 où N désigne la loi normale centrée réduite. On trouve n≈ -1.28155 Puis on calcule la valeur de x correspondante avec P(X<x)=0.1
(x-μ)/σ ≈ -1.28155
x=μ-1.28155*1250≈**1298€**

1.B.1 *Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam. Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé "dossier spam". Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58, 6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les événements suivants :*
• D : « le message est déplacé » ;
• S : « le message est un spam ».

On fait l'arbre des possibilités

		Déplacé (0.95)
	Spam (60%)	
		Non déplacé (0.05)
Racine		
		Déplacé (x)
	Non Spam (40%)	

		Non déplacé (1-x)

1. Calculer P(S ∩D).

P(S∩D)=0.6*0.95=57%

2. On choisit au hasard un message qui n’est pas un spam. Montrer que la probabilité qu’il soit déplacé est égale à 0, 04.

La proportion des messages déplacés est de 58.6% (constat). Cette proportion est aussi égale à $P(S \cap D) + P(\bar{S} \cap D) = 0.57 + 0.4*x=0.586$
donc 0.4x=0.016 donc x=0.04

3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?

Les messages non déplacés sont formés des spams non déplacés = 0.6*0.05 et des non-spams non déplacés = 0.4 * (1-0.04) soit 0.414. Donc la proportion de spams non déplacés est donc de 0.6*0.05 / 0.414 ≈ 7.24%

4. Pour le logiciel choisi par l’entreprise, le fabricant estime que 2, 7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l’efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine. Ces résultats remettent-ils en cause l’affirmation du fabricant ?

On est en présence d’une loi binomiale.
L'événement élémentaire est le déplacement d’un message vers le dossier spam. Cet évènement a deux issues : soit le message déplacé est fiable (probabilité de 2.7%), soit le message déplacé est un spam (probabilité 100%-2.7%=97.3%). De plus, comme chaque expérience est indépendante, on est en présence d’une loi de Bernoulli de paramètres p=2.7%, N=231.

On applique les règles de l’intervalle de confiance asymptotique:
Vérification des hypothèses

- N=231 est supérieur à 30
- 0.027*231=6,237 est supérieur à 5
- (1-0.027)*231= 224.7 est supérieur à 5

Calcul de l’intervalle
$1.96\sqrt{(p(1-p)/N)}$ =0.021
L’intervalle de confiance est donc 2.7%-2.1%=0.6% et 2.7% +2.1%=4.8% La fréquence constatée est de 13/231=5.6%

A 95%, l’échantillon ne permet pas de valider la proportion annoncée par le fabricant.

Exercice 2
Partie A
1 Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle [−2 ; 2], f (−x) = f (x). Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

f (x) = − $\frac{b}{8}$ ($e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}$) + 9/4
f(-x)= − $\frac{b}{8}$ ($e^{-\frac{x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}$) + 9/4
f(x) = f(-x)

Donc la fonction est paire. Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés (d'équation x=0)

2.A.2 Calcul de f'(x)

f (x) = − $\frac{b}{8}$ ($e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}$) + 9/4
f'(x) = − $\frac{b}{8}$ ($\frac{1}{b}e^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{b}e^{-\frac{x}{b}}$)
f'(x) = $\frac{1}{8}$ ($e^{-\frac{x}{b}} - e^{\frac{x}{b}}$)

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle [−2 ; 2] et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

La fonction est symétrique par rapport à l'axe x=0 donc étude sur [0,2]

f'(x)=0 ⇔ $e^{-\frac{x}{b}} - e^{\frac{x}{b}}$ =0
⇔ $e^{-\frac{x}{b}} = e^{\frac{x}{b}}$

La fonction exponentielle est continue, croissante et monotone, donc

f'(x)=0 ⇔ $\frac{x}{b}$ =- $\frac{x}{b}$
⇔ x=0

et f'(x) est de signe constant sur [0,+∞[
or f'(b)= $\frac{1}{8}$ ($e^{-1} - e$) <0 (b>0 par hypothèse)
donc f'(x)<0 sur [0,+∞[

f(0)= $\frac{-b}{4}$+ $\frac{9}{4}$= $\frac{9-b}{4}$
Le point S a pour coordonnées (0, $\frac{9-b}{4}$)

f(2)=f(-2)= $\frac{9}{4} - \frac{b}{8}\left(e^{\frac{2}{b}} + e^{-\frac{2}{b}} \right)$

C a pour coordonnées (2,f(2))

D a pour coordonnées (-2,f(2))

x	*-2*		*0*		*2*
f'(x)		*+*	*0*	*-*	
f(x)	*f(2)*	$\nearrow$	$\frac{9-b}{4}$	$\searrow$	*f(2)*

Partie B

La hauteur du mur est de 1, 5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

1. Justifier que b = 1.

Le point S a pour coordonnées (0, $\frac{9-b}{4}$). Si b=1 le point S est (0,2), ce qui permet de justifier la propriété.

2. Montrer que l'équation f (x) = 1, 5 admet une unique solution sur l'intervalle [0 ; 2] et en déduire une valeur approchée de a au centième.

la fonction f' n'admet qu'un zéro en x=0. Pour x>0, elle est strictement négative. Comme cette fonction est continue, elle est donc monotone décroissante.

Si on considère la fonction f(x)- $\frac{3}{2}$,

cette fonction est positive pour x=0 : f(0)= $\frac{1}{2}$

et elle est négative pour x=2 : f(2) - $\frac{3}{2}$ = $\frac{9}{4}$ - $\frac{3}{2}$ - $\frac{1}{8}$ $(e+e^{-1})$=-0.19

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un zéro entre 0 et 2.

<u>*Calcul du zéro de f(x)-* $\frac{3}{2}$ entre 0 et 2</u>

<u>*f(x)=*</u> $\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(e^{-x}+e^{x}) = \frac{6}{4}$

$\Leftrightarrow$ $\frac{9}{4} - \frac{6}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{8}(e^{-x}+e^{x})$

$f(x)= \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $e^{-x}+e^{x}=6$

si on pose exp(x)=Y

Y+1/Y=6, soit Y²-6Y+1=0

Δ=36-4=32

Y1= $\frac{6+\sqrt{32}}{2}$ =3+4$\sqrt{2}$ $\approx$ de 5.8

Y2== $\frac{6-\sqrt{32}}{2}$ =3-4$\sqrt{2}$ $\approx$ de 0.17

on revient en x avec le changement de variable x=ln(Y)
X1=ln(Y1)=1.76
X2=ln(Y2)=-1.76

a=1.76

3. Dans cette question, on choisit a = 1, 8 et b = 1. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux = 20 kg.m^{-2} . Que décide le client ?

La masse d'un vantail est la surface du vantail * densité surfacique

La surface est égale à $\int_0^a$ f(x)dx.

$f(x) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(e^{x}+e^{-x})$

une primitive I(x) de f(x) est : $\frac{9}{4}x - \frac{1}{8}(e^{-x}-e^{x})$

La surface vaut donc I(a)-I(0)=I(a)= $\frac{9}{4} * 1.8 - \frac{1}{8}(e^{-1.8}-e^{1.8}) \approx 3.314$

Le poids vaut donc 66kg. Il faut automatiser le portail

Partie C

On conserve les valeurs a = 1, 8 et b = 1. Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OC HG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1. Forme 1 : découpe dans un rectangle Forme 2 : découpe dans un trapèze La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique. Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1. On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze : Ai r e = b +B 2 ×h.

Si on opte pour la solution 1, la surface consommée est 2*1.8=3.6m²

Si on opte pour la solution 2, il faut calculer les coordonnés des points G et H, puis la surface du trapèze OCHG.

En F, la pente de la courbe est la pente de la droite GH. Ce nombre est égale à la dérivée de f en 1 donc f'(1).

$f'(1) = -\frac{1}{8}(e - e^{-1})$

La droite GH est donc d'équation y=f'(1)x+b
or F (1,f(1)) appartient à la droite donc f(1)=f'(1)+b donc b=f(1)-f'(1)

La droite GH est donc d'équation y=f'(1)x+f(1)-f'(1).

L'ordonnée de G est obtenue pour x=0 sur la droite (GH) donc G(0,f(1)-f'(1))
L'ordonnée de H est obtenue pour x=a sur le droite (GH) donc H(a,af'(1)+f(1)-f'(1))

Donc, la surface du trapèze vaut

OC*(OG+OH)/2=a*(f(1)-f'(1)+af'(1)+f(1)-f'(1))/2
OC*(OG+OH)/2=a*(f(1)-f'(1)+a*f'(1)/2)

$f(1)= \frac{9}{4} - \frac{1}{8}(e - e^{-1}) \approx 1.864$
f'(1)=-0.294

OC*(OG+OH)/2=1.8*(1.864+0.294-1.8*0.294/2)≈3.408

L'économie est de 0.2m² par vantail soit 0.4m² pour l'ensemble.

EXERCICE 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel n > 0, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

Pour calculer u_1 on a : 3*x=3+x donc 2x=3 x= $\frac{3}{2}$

Pour calculer u_2 on a : 3* $\frac{3}{2}$ *x=3+ $\frac{3}{2}$ +x

$(\frac{9}{2} - 1)x = \frac{9}{2}$

x=**u_2=** $\frac{9}{7}$

2.a

1: $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$

2: $s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i$

Par soustraction membre à membre (2)-(1) on a:
$s_{n+1} - s_n = u_n$

Par hypothèse, on a $u_0>1$ et $u_n >0$ pour tout n donc $\sum_{i=0}^{n-1} u_i > 1$ donc $s_n >1$

2.b En déduire que pour tout n>0 $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$

$s_{n+1} - s_n = u_n$ donc $s_{n+1} = u_n + s_n$
or $s_{n+1} = s_n * u_n$
donc
$s_n * u_n = s_n + u_n$
soit $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$

2.c Montrer que pour tout n, $u_n > 1$

On sait que a > a - 1 pour tout a.
Cette inégalité est vraie en particulier pour $a=s_n$
donc $s_n > s_n - 1$
si on divise membre à membre par sn - 1 > 0 (car par hypothèse $s_m > 1$)
on obtient $\frac{s_n}{s_n-1} > 1$
or $u_n = \frac{s_n}{s_n-1}$ (d'après la question précédente)
donc $u_n > 1$

3.A l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.
a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

Traitement
S prend la valeur U
Pour i allant de 0 à n
    u prend la valeur s/(s-1)
    s prend la valeur s+u
Fin pour

b.Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n. Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
Il semble que la suite converge vers 1.

4.a) Justifier que pour tout entier n>0, $s_n>n$.

Nous allons démontrer la proposition s(n)>n par récurrence :
Initialisation : n = 1 : s(1)=u(0)=3 >1
Hérédité : supposons que pour une valeur donnée de n on a s(n)>n. On sait que $u_n > 1$. En ajoutant membre à membre ces deux inégalités on obtient :
$s_n+u_n > n + 1$
or $s_{n+1}=s_n+u_n$
donc $s_{n+1}> n+1$
ce qui démontre que la propriété est héréditaire.

On est donc en présence d'une propriété héréditaire vraie au premier rang, donc elle est vraie pour tout n.

b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Puisque (s_n) est supérieure à une suite dont la limite tend vers l'infini, (s_n) tend aussi vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Pour calculer la limite de u_n qui se présente sous la forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$, il convient de factoriser et de simplifier le terme qui devient infini au numérateur et au dénominateur.

$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} = \frac{s_n}{s_n(1 - \frac{1}{s_n})} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{s_n})}$

Sous cette forme, plus d'indétermination, la limite vaut 1

1.Sans calcul, justifier que :

a)le segment [K M] est parallèle au segment [U V] ;

Le théorème du toit énonce la propriété suivante: si on a deux droites parallèles d_1 et d_2 contenues respectivement dans deux plans P_1 et P_2 alors la droite d intersection des plans P_1 et P_2, si elle existe, est parallèle aux droites d_1 et d_2.
On pose d_1=EF, P_1=(EKF), d_2=UV, P_2=(UVK)
On sait que $d_1//d_2$, $d_1 \in P_1$, $d_2 \in P_2$
Donc la droite intersection de P_1 et P_2, qui contient le point K est parallèle à d_2.

b)le segment [N P] est parallèle au segment [U K]

On a la propriété suivante : Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles alors tout plan P sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections d_1 et d_2 sont deux droites parallèles.
On pose P_1=(UOA), P_2=(GCB), P=(UVK)
On a alors d_1=(UK),d_2=(NP) puisque le plan (UKV) coupe la véranda selon une ligne polygonale,
donc $d_1//d_2$ et donc (NP)//(UK)

2.Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé (O;i,j,k). Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4;0;0), B(4;5;0), C(0;5;0), E(4;0;2,5), F(4;5;2,5), G(0;5;2,5), S(0;0;3,5), U(0;0;6) et V(0;8;6). On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (K U V) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.
a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2;0;3,2).

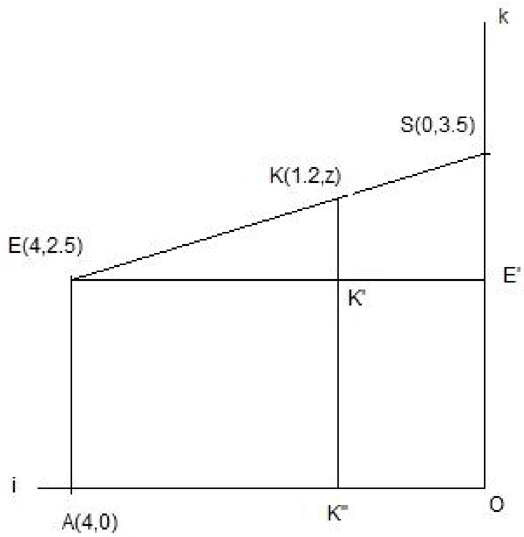
Dans le plan (0;i;k) on considère le trapèze (OSEA) (cf dessin ci-contre)
Dans le triangle (SEE') par application du théorème de Thalès, on a:

$$\frac{EK'}{EE'} = \frac{K'K}{E'S}$$

donc z = K''K + E'S * $\frac{EK'}{EE'}$

z = 2.5 + 1 x $\frac{4-1.2}{4}$ = 3.2

donc K(1.2;0;3.2)



b. Montrer que le vecteur n de coordonnées (7;0;3) est un vecteur normal au plan (U V K) et en déduire une équation cartésienne du plan (K U V).

n est un vecteur normal du plan (KUV) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (KUV).

Le vecteur UK a pour coordonnées (1.2;0;3.2) - (0;0;6) = (1.2;0;-2.8)
Le vecteur UV a pour coordonnées (0;8;6) - (0;0;6) = (0;8,0)
Les deux vecteurs UK et UV ne sont évidemment pas colinéaires.
n.UK = 7*1.2+0*0-3*2.8=8.4-8.4=0
n.UV = 7*0+0*0+3*0=0

N est un vecteur normal au plan (KUV)

le plan (KUV) a donc pour équation 7x+3z+d=0

Pour déterminer d, il suffit de traduire que le point U (0;0;6) appartient au plan (KUV), c'est à dire 7*0+3*6+d=0 donc d=-18

Le plan KUV est d'équation : 7x+3z-18=0

c. Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (U V K) avec la droite (FG).

Déterminons l'équation de la droite (FG).
Le vecteur FG est de coordonnées G(0;5;2,5) - F(4;5;2,5) = (-4;0;0)
La droite FG a donc comme équations paramétriques
x=4-4t
y=5
z=2.5

si on remplace ces valeurs dans l'équation du plan on peut calculer la valeur de t qui définit les coordonnées du point recherché:
7(4-4t)+3*2.5-18=0
28-28t+7.5-18=0
28t=17.5
t=0.625

En remplaçant t par cette valeur dans les équations paramétriques, on obtient les coordonnées du point recherché: N(1,5;5;2,5)

d. Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.
Les points K et N sont connus. Pas de difficultés pour les tracer.

Pour tracer le point M, il faut utiliser la propriété établie en a). C'est à dire qu'il faut tracer une droite horizontale sur le triangle (SEF) qui passe par K. Le point M est à l'intersection de cette droite et du côté (SF).

Pour tracer le point P, il est possible d'utiliser le résultat établi en b). Comme (NP) et (UK) sont parallèles, il suffit de tracer la parallèle à UK qui passe par N. L'intersection de cette droite avec BC définit le point P.

3.Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

Dans le plan O,j,k on a

tg(a)= $\frac{GG'}{SG'} = \frac{1}{5}$

a=atan(0.2)=11.3°

la condition est donc satisfaite.