

# [BAC] EXPONENTIELLE – LIMITES – TANGENTE

Soient  $f(x)=e^x$  et  $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

1) On voit aisément que  $f(0)=g(0)=1$ , ce qui implique que les courbes représentatives  $C_f$  et  $C_g$  de  $f$  et  $g$  ont un point commun d'abscisse 0 et d'ordonnée 1.

Le coefficient directeur des tangentes en ce point à  $C_f$  et  $C_g$  est donnée, respectivement, par les valeurs de  $f'(0)$  et  $g'(0)$ .

on a  $f'(x)=e^x$  d'où  $f'(0)=1$

et  $g'(x)=e^{\frac{x}{2}}$  d'où  $g'(0)=1$ .

Donc les tangentes en  $(0 ; 1)$  à  $C_f$  et  $C_g$  ayant même coefficient directeur elles sont confondues en une seule droite  $\Delta$  dont on détermine facilement l'équation :  $y=x+1$ .

2) Soit  $h(x)=2e^{\frac{x}{2}}-x-2$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

2.a) En observant que  $e^{\frac{x}{2}} \rightarrow 0$  et  $(-x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow -\infty$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)=+\infty$ .

2.b) On peut écrire  $h(x)=(x)\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-(x)1-(x)\frac{2}{x}$  et en mettant  $x$  en facteur :

$h(x)=x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\frac{2}{x}\right)$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}=+\infty$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)=+\infty$ .

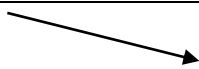

2.c) On calcule la dérivée de  $h$  :  $h'(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$ . La fonction  $e^{\frac{x}{2}}$  est monotone croissante sur  $\mathbb{R}$  et varie de 0 à  $+\infty$  quand  $x$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

On a  $h'(0)=0$  et donc :

$h'(x)<0$  pour  $x<0$  et

$h'(x)>0$  pour  $x>0$

2.d) En remarquant que  $h(0)=0$ , on peut dresser le tableau de variation de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$				
			0		$+\infty$

2.e) D'après le tableau ci-dessus, on voit que  $h(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

C'est à dire  $2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geq 0$  d'où l'on tire :  $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$ .

2.f) On en déduit que  $\Delta$  est au-dessous de  $C_g$  sauf pour  $x = 0$  où elle est tangente à  $C_g$ . (Voir graphe ci-dessous).

3)

$$3.a) \left( e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2 = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1$$

3.b) On remarque que l'expression ci-dessus est égale à  $f(x) - g(x)$ . De plus, étant un carré qui s'annule pour  $x = 0$ , elle est  $\geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ . D'où l'on déduit que :  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et  $C_f$  est au-dessus de  $C_g$  sauf pour  $x = 0$  où les deux courbes sont tangentes. (Voir graphe ci-dessous).

