Exercice 1 (7 points) :
commun à tous les candidats
Partie A
On considère la fonction h définie sur l'intervalle [0; +∞[par : $h(x) = xe^{-x}$
1. Déterminer la limite de la fonction h en +∞

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose $x>1$
Montrons, dans un premier temps, que $r(x)= e^x - x^2 > 0$

$r'(x) = e^x - 2x$, $r''(x) = e^x - 2$.
$r''(1) > 0$. La fonction exponentielle étant croissante sur R donc $r''(x) > 0$
r' est une fonction croissante puisque sa dérivée r'' est positive
$r'(1) = e - 2 > 0$ donc $r'(x)>0$
r est une fonction croissante puisque sa dérivée r' est positive
$r(1) = e-2 > 0$ donc $\mathbf{r(x) > 0}$

Donc, si $x>1$ alors $e^x - x^2 > 0$ alors $\frac{1}{x^2} > e^{-x} > 0$
En multipliant membre à membre par x (x > 1), on obtient $\frac{1}{x} > xe^{-x} > 0$
Si x tend vers l'infini, d'après le théorème des gendarmes, h(x), encadrée par deux fonctions dont la limite est zéro, tend elle aussi vers 0 quand x tend vers l'infini.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle [0; +∞[et dresser son tableau de variations.
$h'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$
$h'(x) = 0$ a le même signe que $1-x$ car $e^{-x} >0$

x	*0*		*1*		*+ ∞*
h'(x)		+	*0*	-	
h(x)	0	↗	*1/e*	↘	*0*

3.L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.
a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0; +∞[, on a :

$h(x) = e^{-x} - h'(x)$
où h' désigne la fonction dérivée de h.

En remplaçant h(x) et h'(x) par leurs valeurs, on a
$xe^{-x} = e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x})$ ce qui est vrai pour tout x

b. Déterminer une primitive sur l'intervalle [0; +∞[de la fonction $x \mapsto e^{-x}$).

la fonction $x \mapsto -e^{-x}$ est une primitive de la fonction exponentielle de -x

c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle [0; +∞[. $\int h(x)dx = \int (e^{-x} - h'(x))dx = \int e^{-x}dx - \int h'(x)dx = -e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x}(x+1)$

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle [0; +∞[par :

$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1)$

On note Cf et Cg les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé. Ces deux courbes sont tracées en annexe page 8. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle [0; +∞[, on appelle M le point de coordonnées (x,f(x)) et N le point de coordonnées (x,g(x)) : M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes Cf et Cg.

a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

Etudions la fonction d(x)= $\sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-g(x))^2} = \sqrt{h^2(x)}$ = h(x) car h(x)>0 si x>0

D'après la partie A, h(x) admet un maximum en (1,1/e), donc la distance maximale MN vaut 1/e et est obtenue pour x=1

b. Placer sur le graphique fourni en annexe page 8 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

Cf graphique ci-après

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle [0; +∞[. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes Cf et Cg et par les droites d'équations x = 0 et x = λ.

a.. Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe page 8.

b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}$$

On connaît une primitive de h(x) (Cf partie A), donc

$$A_\lambda = \int_0^\lambda (f(x)-g(x))dx = \int_0^\lambda h(x)dx = \left[-e^{-x}(x+1) \right]_0^\lambda == \left[e^{-x}(x+1) \right]_\lambda^2 = 1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$$

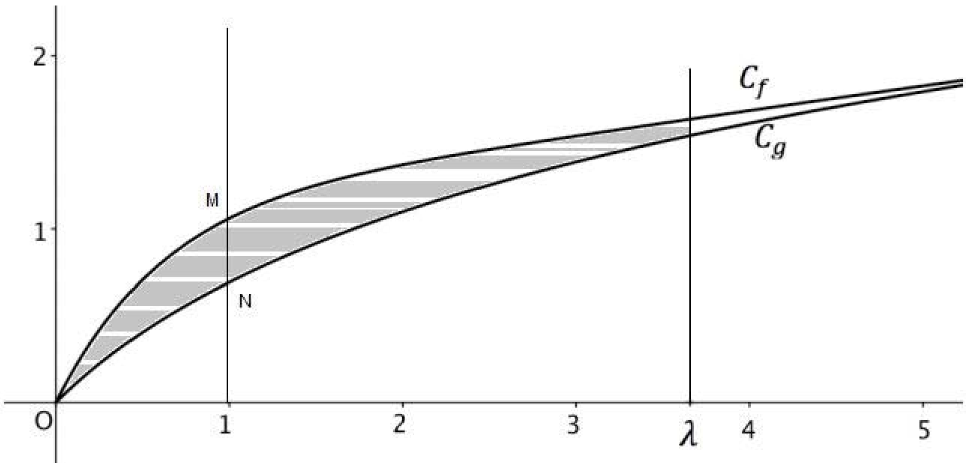
c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers +∞ et interpréter le résultat.

$A = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 1-(\lambda+1)e^{-\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 1 - \lim\limits_{\lambda\to+\infty} (\lambda+1)e^{-\lambda} = 1 - \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda e^{-\lambda} - \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 1$

car $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0$ (cf partie A) et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$ (propriete fct exponentielle)

La portion de courbe infinie entre Cf et Cg est égale à une unité d'aire.

Exercice 1



3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :

λ est un réel positif

S est un réel strictement compris entre 0 et 1.

Initialisation :

Saisir S

λ prend la valeur 0

Traitement :

Tant Que $1-\frac{\lambda+1}{e^{\lambda}}$ < S faire

λ prend la valeur λ+1

Fin Tant Que

Sortie :

Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur S = 0,8 ?

l'algorithme calcule *pour* $\lambda=0$ la valeur $1-\frac{\lambda+1}{e^{\lambda}}$ = 0, résultat < 0.8, itération suivante

l'algorithme calcule *pour* $\lambda=1$ la valeur $1-\frac{\lambda+1}{e^{\lambda}}$ = 0.26, résultat < 0.8, itération suivante

l'algorithme calcule *pour* $\lambda=2$ la valeur $1-\frac{\lambda+1}{e^{\lambda}}$ = 0.59 résultat < 0.8, itération suivante

l'algorithme calcule *pour* $\lambda=3$ la valeur $1-\frac{\lambda+1}{e^{\lambda}}$ = 0.8008, résultat > 0.8, arrêt itération

La valeur affichée est 3 (c'est la valeur de de λ à la dernière itération)

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme affiche la plus petite valeur de λ entiere pour laquelle l'aire comprise entre les courbes Cf et Cg est supérieure à S.

Exercice 2 (3 points) :
commun à tous les candidats
L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k).
Soit P le plan d'équation cartésienne : 2x - z - 3 = 0
On note A le point de coordonnées (1 ; a ; a²), où a est un nombre réel.
1. Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a, le point A n'appartient pas au plan P .
Si on remplace les coordonnées de A dans l'équation du plan, on obtient:
$2 - a^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+1=0$
cette équation n'a pas de solution dans R*
Donc quelque soit a, le point A n'appartient pas au plan P

2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D (de paramètre noté t) passant par le point A et orthogonale au plan P.

Le vecteur (2,0,-1) est un vecteur normal au plan P
Donc la droite D a comme équation:
$x=1+2t$
$y=a$
$z=a^2-t$

2.b. Soit M un point appartenant à la droite D, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente. Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

$M(1+2t,a,a^2-t)$, $A(1,a,a^2)$
AM= $\sqrt{(2t+1-1)^2+(a-a)^2+(a^2-t-a^2)^2} = \sqrt{4t^2+t^2} = \sqrt{5t^2}$

On note H le point d'intersection du plan P et de la droite D orthogonale à P et passant par le point A. Le point H est appelé le projeté orthogonal du point A sur le plan P, et la distance AH est appelée distance du point A au plan P.

3. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées (1 ; a ; a²) au plan P est minimale ? Justifier la réponse.

Calculons les coordonnées du point H en fonction de a:
H appartient au plan P donc $2x_H - z_H - 3 = 0$
AH est normal au plan donc il existe t tel que AH = t (2,0,-1)

$x_H - 1 = 2t \qquad\qquad x_H = 2t + 1$
$y_H - a = 0 \qquad\qquad y_H = a$
$z_H - a^2 = -t \qquad\qquad z_H = a^2 - t$

$2(2t + 1) - a^2 + t - 3 = 5t - a^2 - 1 = 0$
donc $t = \dfrac{a^2+1}{5}$
Comme quelque soit a, k > 0 on a AH= $\sqrt{5k^2} = \sqrt{5}\ \dfrac{a^2+1}{5}$
Cette valeur est minimale pour a=0

Exercice 3 (5 points) : commun à tous les candidats

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie. Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur. L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante : Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentriques correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H. L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3. On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé (O; u, v) de la manière suivante :

- *l'origine O marque la position du capteur ;*
- *l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;*
- *l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;*
- *l'unité choisie est le kilomètre.*

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

Partie A 1.

On note z_p *l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de* z_p *et* θ *son argument dans l'intervalle* $]-\pi,\pi.]$ *Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour* θ *(aucune justification n'est demandée) :*

C'est la proposition C qui est correcte

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :

a. z = 70 $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ r=70, $\theta=-\pi/3$ secteur G4

b. z = -45 $\sqrt{3}$ + 45i = 90 x ($-\sqrt{3}$/2 + 1/2i) = 90 $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. secteur D5

Partie B

On suppose dans cette partie que le capteur affiche un impact au point P d'affixe 50 $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre.

Ainsi, lorsque le capteur affiche le point d'impact P d'affixe 50 $e^{i\frac{\pi}{3}}$, l'affixe z du point d'impact réel de la foudre admet :

• un module qui peut être modélisé par une variable aléatoire M suivant une loi normale d'espérance μ = 50 et d'écart type σ = 5 ;

• un argument qui peut être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi normale d'espérance $\pi/3$ et d'écart type $\pi/12$.

On suppose que les variables aléatoires M et T sont indépendantes, c'est à dire que quels que soient les intervalles I et J, les événements (M $\in$ I) et (T $\in$ J) sont indépendants.
Dans la suite les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près.
1. Calculer la probabilité P(M < 0) et interpréter le résultat obtenu.

p(M<0) = p(N< $\frac{0-50}{5}$) = p(N<-10)   où N est la loi normale centrée réduite

p(M<0)=0
Un telle erreur est très peu probable.

2. Calculer la probabilité P(M $\in$]40; 60[ ).

P(M $\in$]40; 60[ ) = P(N $\in$] $\frac{40-50}{5}$; $\frac{60-50}{5}$ [ ) = P(N $\in$]-2 ; 2[ ) = 95.4%
où N est la loi normale centrée réduite

3. On admet que : P(M $\in$]$\pi/4$; $\pi/2$ [ ) = 0,819.
En déduire la probabilité que la foudre ait effectivement frappé le secteur B3 selon cette modélisation.

Si la foudre a frappé le secteur B3 alors r $\in$]40; 60[et θ $\in$]$\pi/4$; $\pi/2$ [
Puisque les probabilités sont indépendantes on a P(M $\in$ I $\cap$ T $\in$ J) = P(M $\in$I) × P(T $\in$ J)
Donc la probabilité correspondante est P(M $\in$]40; 60[ ) x P(M $\in$]$\pi/4$; $\pi/2$ [
Pr = 0,954499 x 0,819 = 78.2%

Exercice 4 (5 points) : pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :
• soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
• soit malade (atteint par le virus) ;
• soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :
• Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine n + 1 :
85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
• Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine n + 1 :
65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
• Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine n + 1.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :
S_n *: « l'individu est de type S en semaine n » ;*
M_n *: « l'individu est malade en semaine n » ;*
I_n *: « l'individu est immunisé en semaine n ».*

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :
$P(S_0)=1, P(M_0)=0, P(I_0)=0$

Partie A
On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.
1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :

				S2=72.25%
		S1 : 85%		M2=4.25%
				I2=8.5%
				M2=3.25%
S0=1		M1 : 5%		
				I2=1.75%
		I1 : 10%		I2=10%

2. Montrer que P(I2) = 0,2025.

$P_{S1}(I2) = 8.5\%$
$P_{M1}(I2) = 1.75\%$
$P_{I1}(I2) = 10\%$

P(I2)= $P_{S1}(I2) + P_{M1}(I2) + P_{I1}(I2)$ =20.25%

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

La formule des probabilités conditionnelles est la suivante: $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Dans ce cas, il faut l'appliquer aux évènement suivants:
évènement A : l'individu est malade en semaine 1
évènement B : l'individu est immunisé en semaine 2

$p_B(A)$ = 1.75 / 20.25 = 8.6%

Partie B
On étudie dans cette partie l'évolution à long terme de l'épidémie.
Pour tout entier naturel n , on note $u_n = P(S_n)$, $v_n=P(M_n)$ et $w_n=P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

Semaine après semaine, la population reste constante. En effet, les trois règles qui transforment les populations S_n *(85%+5%+15%=1),* M_n *(65%+35%=1) et* I_n (100%=1) conservent les effectifs globaux. Donc puisque l'effectif de la population reste constante et que chaque membre de la population fait partie d'un et d'un seul groupe, la somme des probabilités reste constante.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n

$$v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n.$$

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites u_n , v_n et w_n :
Pour répondre aux questions a et b suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.
a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet, par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

=0,65*C2+0,05*B2

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par le modèle.

Le pic épidémique est atteint en semaine N=4.
Le pourcentage de personnes qui sont malades est de 8.6%

3. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85\ u_n$.

La seule façon d'être S_n (c'est à dire susceptible d'être atteint par le virus en semaine n), c'était d'être S_{n-1} (c'est à dire susceptible d'être atteint par le virus en semaine n-1). Dans ces conditions, il est donc clair que S_{n+1}= 0.85 x S_n. Si on divise cette égalité par la population totale, on obtient la relation cherchée.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Dans ces conditions, la suite u_n est une suite géométrique de raison 85% et de premier terme 1, donc $u_n=0,85^n$

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $v_n = (0,85^n - 0,65^n) / 4$.

Initialisation
$v0=(0,85^0 - 0,65^0) / 4 = (1-1)/4=0$. vrai
Hérédité
Supposons maintenant que la relation est vraie au rang n ($v_n = (0,85^n - 0,65^n) / 4$) et montrons qu'elle est vraie au rang n+1 ($v_{n+1} = (0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}) / 4$.

$v_{n+1}= 0.05*u_n + 0.65*v_n$ $= 0.05*0,85^n + 0.65(0,85^n - 0,65^n) / 4$
$= 0,85^n \times (0.05 + 0.65/4) - 0.65 \times 0,65^n / 4$
$= 0,85^n \times (0.2125) - 0,65^{n+1} / 4$
Or 0.2125 = 0.85/4
donc
$v_{n+1}= 0.05*u_n + 0.65*v_n$ $= 0,85^n \times (0.85) / 4 - 0,65^{n+1} / 4$
$= (0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}) / 4$

Ce qui montre la propriété est vraie au rang n+1 si elle est vraie au rang n. Comme elle est vraie au rang zéro, elle est vraie pour tout n.

Calculer les limites de chacune des trois suites u_n , v_n et w_n . Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ en effet, le terme général d'une suite géométrique dont la raison est comprise entre 0 et 1 tend vers zéro.

Par le même raisonnement, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

Enfin on sait que $u_n + v_n + w_n = 1$, donc $w_n = 1 -(u_n + v_n)$

Donc $\lim_{n \to +\infty} w_n = 1$

A long terme, tout le monde est immunisé contre la maladie.