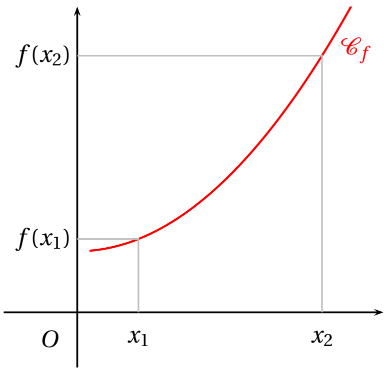
VARIATIONS D'UNE FONCTION - FONCTIONS ASSOCIÉES

I - RAPPELS

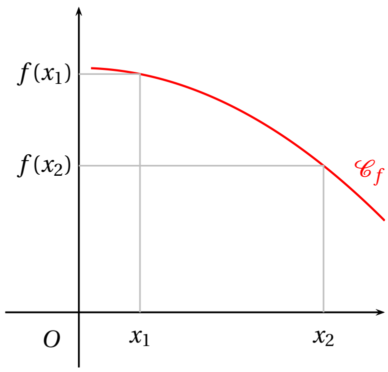
DÉFINITIONS

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est :

- **croissante** sur l'intervalle I : si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 \leqslant x_2$ on a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- **décroissante** sur l'intervalle I : si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 \leqslant x_2$ on a $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
- **strictement croissante** sur l'intervalle I : si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$.
- **strictement décroissante** sur l'intervalle I : si pour tous réels x_1 et x_2 appartenant à I tels que $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) > f(x_2)$.



Fonction croissante



Fonction décroissante

REMARQUES

- Une fonction qui dont le sens de variations ne change pas sur I (c'est à dire qui est soit croissante sur I soit décroissante sur I) est dite **monotone** sur I.
- Une fonction constante ($x \mapsto k$ où k est un réel fixé) est à la fois croissante et décroissante mais n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante.

PROPRIÉTÉ

Une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est croissante si son coefficient directeur a est **positif ou nul**, et **décroissante** si son coefficient directeur est **négatif ou nul**.

REMARQUE

Si le coefficient directeur d'une fonction affine est nul la fonction est **constante**.

II - FONCTION ASSOCIÉES

FONCTIONS $U + K$

Soit u une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

On note $u + k$ la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :

$$u + k : x \mapsto u(x) + k$$

PROPRIÉTÉ

Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $u + k$ a le même sens de variation que u sur $\mathscr{D}$.

EXEMPLE

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.

Si on note u la fonction *carrée* définie sur $\mathbb{R}$ par $u : x \mapsto x^2$

on a $f = u - 1$

Le sens de variation de f est donc identique à celui de u d'après la propriété précédente.

Donc

- f est **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty; 0]$
- f est **croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x^2 - 1$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

FONCTIONS $K \times U$

Soit u une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$

On note ku la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par :

$$ku : x \mapsto k \times u(x)$$

PROPRIÉTÉ

- si $k > 0$, ku a le même sens de variation que u sur $\mathscr{D}$.
- si $k < 0$, le sens de variation de ku est le contraire de celui de u sur $\mathscr{D}$.

EXEMPLE

Soit f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Si on note u la fonction *inverse* définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $u : x \mapsto \frac{1}{x}$

on a $f = -1 \times u$

Comme -1 est négatif, le sens de variation de f est inverse de celui de u sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$

Donc f est **croissante** sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et sur l'intervalle $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

FONCTIONS $\sqrt{U}$

Soit u une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.

On note $\sqrt{u}$ la fonction définie, pour tout x de $\mathscr{D}$ tel que $u(x) \geqslant 0$, par :

$$\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{u(x)}$$

PROPRIÉTÉ

$\sqrt{u}$ a le **même sens de variation** que u sur tout intervalle où u est positive.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$

f est définie si et seulement si $x-2 \geqslant 0$, c'est à dire sur $\mathscr{D} = [2;+\infty[$

Sur l'intervalle $\mathscr{D}$ la fonction f est croissante car la fonction $x \mapsto x-2$ l'est (fonction affine dont le coefficient directeur est positif).

x	2	$+\infty$
$\sqrt{x-2}$	0	$\nearrow$

FONCTIONS $\frac{1}{U}$

Soit u une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$.

On note $\frac{1}{u}$ la fonction définie pour tout x de $\mathscr{D}$ **tel que** $u(x) \neq 0$ par :

$$\frac{1}{u} : x \mapsto \frac{1}{u(x)}$$

PROPRIÉTÉ

$\frac{1}{u}$ a le **sens de variation contraire** de u sur tout intervalle où u ne s'annule pas et garde un **signe constant**.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$

f est définie si et seulement si $x+1 \neq 0$, c'est à dire sur $\mathscr{D} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

La fonction $x \mapsto x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$

Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ la fonction $x \mapsto x+1$ est strictement négative (donc a un signe constant).

Sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ la fonction $x \mapsto x+1$ est strictement positive (donc a un signe constant).

Donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\dfrac{1}{x+1}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	