PROBABILITÉS EN SECONDE

1. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

DÉFINITIONS

Une expérience **aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard.

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

On le note en général Ω.

DÉFINITION

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω.

Chacun des résultats possibles s'appelle une **éventualité** (ou un **événement élémentaire** ou une **issue**).

On appelle **événement** tout sous ensemble de Ω.

Un événement est donc constitué de zéro, une ou plusieurs éventualités.

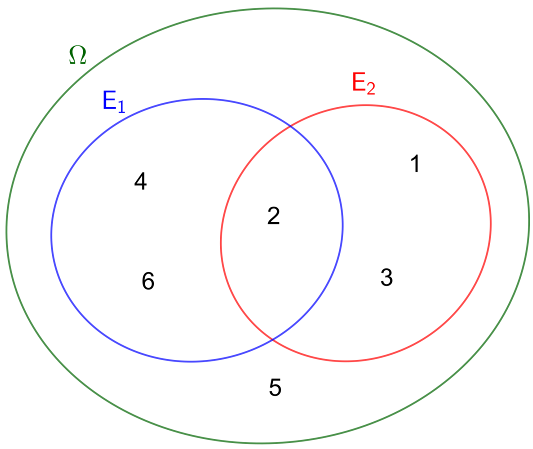
EXEMPLES

Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire d'univers :

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

- L'ensemble $E_1 = \{2;4;6\}$ est un événement. En français, cet événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est un nombre pair* »
- L'ensemble $E_2 = \{1;2;3\}$ est un autre événement. Ce second événement peut se traduire par la phrase : « *le résultat du dé est strictement inférieur à 4* »

Ces événements peuvent être représentés par un diagramme de Venn :



DÉFINITION

- l'**événement impossible** est la partie vide, noté $\varnothing$, lorsque aucune issue ne le réalise.
- l'**événement certain** est Ω, lorsque toutes les issues le réalisent.
- l'**événement contraire** de A noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- l'événement $A \cup B$ (lire « A union B » ou « A **ou** B ») est constitué des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles.
- l'événement $A \cap B$ (lire « A inter B » ou « A **et** B ») est constitué des éventualités qui appartiennent à la fois à A et à B.

EXEMPLE

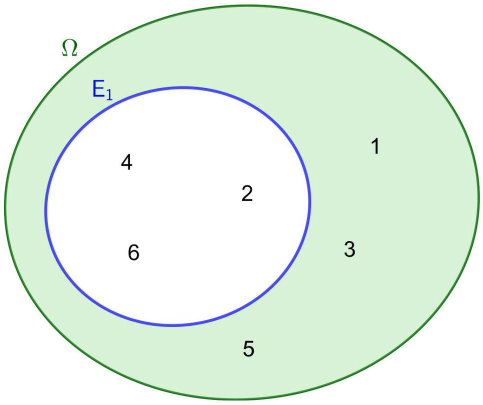
On reprend l'exemple précédent avec :

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

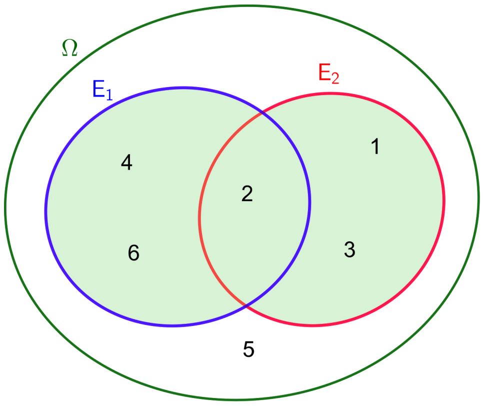
$E_1 = \{2;4;6\}$

$E_2 = \{1;2;3\}$

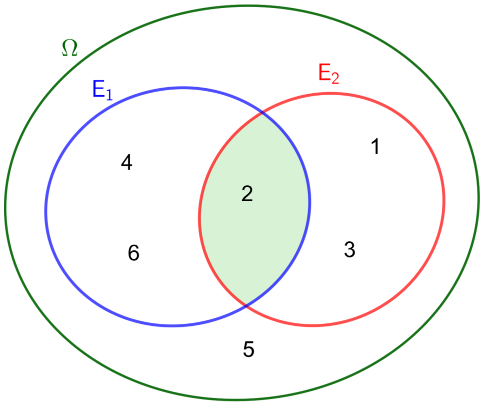
- L'événement « obtenir un nombre supérieur à 7 » est l' événement impossible.
- L'événement « obtenir un nombre entier » est l' événement certain.
- $\overline{E}_1 = \{1;3;5\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est un nombre impair » :



- $E_1 \cup E_2 = \{1;2;3;4;6\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **ou** strictement inférieur à 4 » :



- $E_1 \cap E_2 = \{2\}$: cet événement peut se traduire par « le résultat est pair **et** strictement inférieur à 4 » :



DÉFINITION

On dit que A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$

Deux événements sont incompatibles lorsqu'aucun événement ne les réalise simultanément.

REMARQUE

Deux événements contraires sont incompatibles mais deux événements peuvent être incompatibles sans être contraires.

EXEMPLE

« Obtenir un chiffre inférieur à 2 » et « obtenir un chiffre supérieur à 4 » sont deux événements incompatibles.

2. PROBABILITÉS

DÉFINITION

La probabilité d'un événement élémentaire est un nombre réel tel que :

- Ce nombre est compris entre 0 et 1
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de l'univers vaut 1

PROPRIÉTÉS

- $p(\varnothing) = 0$
- $p(\Omega) = 1$
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$

EXEMPLE

On lance un dé à six faces. On note S l'événement : « obtenir un 6. On suppose que le dé est bien équilibré et que la probabilité de S est de $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir un résultat différent de 6 est alors :

$$p\left(\overline{S}\right) = 1 - p(S) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

THÉORÈME

Quels que soient les événements A et B de Ω :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

En particulier, si A et B sont **incompatibles** :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

DÉFINITION

Deux événements qui ont la même probabilité sont dits **équiprobables**.

Lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

EXEMPLE

Un lancer d'un dé non truqué est une situation d'équiprobabilité.

PROPRIÉTÉS

On suppose que l'univers est composé de n événements élémentaires

- Dans le cas d'équiprobabilité, chaque événement élémentaire a pour probabilité : $\frac{1}{n}$
- Si un événement A de Ω est composé de m événements élémentaires, alors $P(A) = \frac{m}{n}$.

EXEMPLE

On reprend l'exemple du lancer d'un dé avec E_1 : « le résultat du dé est un nombre pair »

$$P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$