[BAC] PROBABILITÉS – VARIABLES ALÉATOIRES (D'après Bac S Liban 2008)

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. sont indiscernables au toucher.

PARTIE A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire a boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ».

1. Montrer que p(R) = 0,15

Soit A, urne A, B l'urne B, R (boule rouge) et N (boule noire) : A = { 4/10 R ; 6/10 N } et B = { 1/10 R ; 9/10 N } - Dé = { 1; 2; 3; 4;

Soit un seul lancer de dé. Soit P(A) éventualité de " l'événement d'obtenir 1 " qui est = à 1/6 et soit p(Non A) ou bien p (B), l de " l'événement ne pas obtenir 1 ", [l'éventualité contraire de p(A)] qui est = à 5/6

Soit p (R) = éventualité de " l'événement d'obtenir R, boule rouge".

Soit p_A(R) = 4/10 : la probabilité d'obtenir une boule rouge sachant A

Soit $p_{non\ A}$(R) = 1/10 : la probabilité d'obtenir une boule rouge sachant "non A" on peut dire aussi :

p_B(R) = 1/10 car p(B) = p (non A) : probabilité d'obtenir une boule rouge sachant B. Ainsi,

- Si l'on obtient "1" au dé et donc => p(A) * p_A(R) = 1/6 *4/10 = 4/60
- Si l'on n'obtient aucun "1" au dé et donc => p(non A) * $p_{non\ A}$(R) = 5/6 *1/10 = 5/60

Enfin : p(R) = [P(A) * P_A(R)] + [P(non A) * $P_{non\ A}$(R)] = 4/60 + 5/60 = 9/60 = 3/20 = 0,15

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu provienne de B ?

Soit :

" p_R(A) = probabilité que la boule provienne de A sachant qu'elle est rouge " => p_R(A) = p(A ∩ R) / p (R) = (1/6 *4/10) / 3/20 = 4/9 "

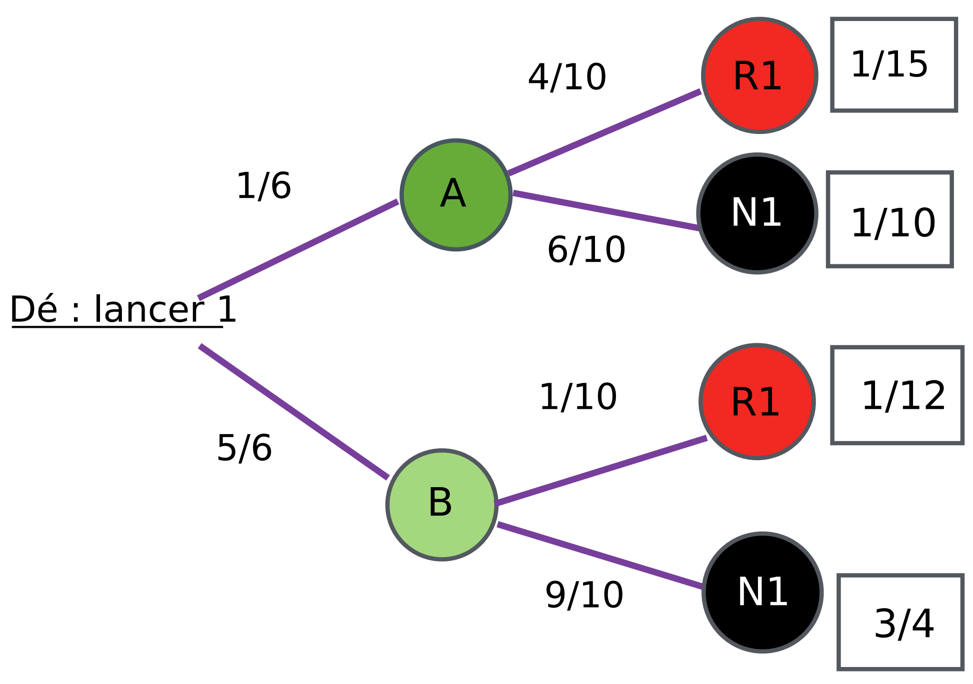
" p_R(B) = probabilité que la boule provienne de B sachant qu'elle est rouge " => p_R(B) = p(B ∩ R) / p (R) = (5/6 * 1/10) / 3/20 = 5/9 "

Ainsi la probabilité que la boule provienne de A est-elle inférieure à la probabilité qu'elle provienne de B.

PARTIE B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale). Soit x un entier naturel non nul. Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire. On désigne par G, la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs 2 x, x - 2 et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.



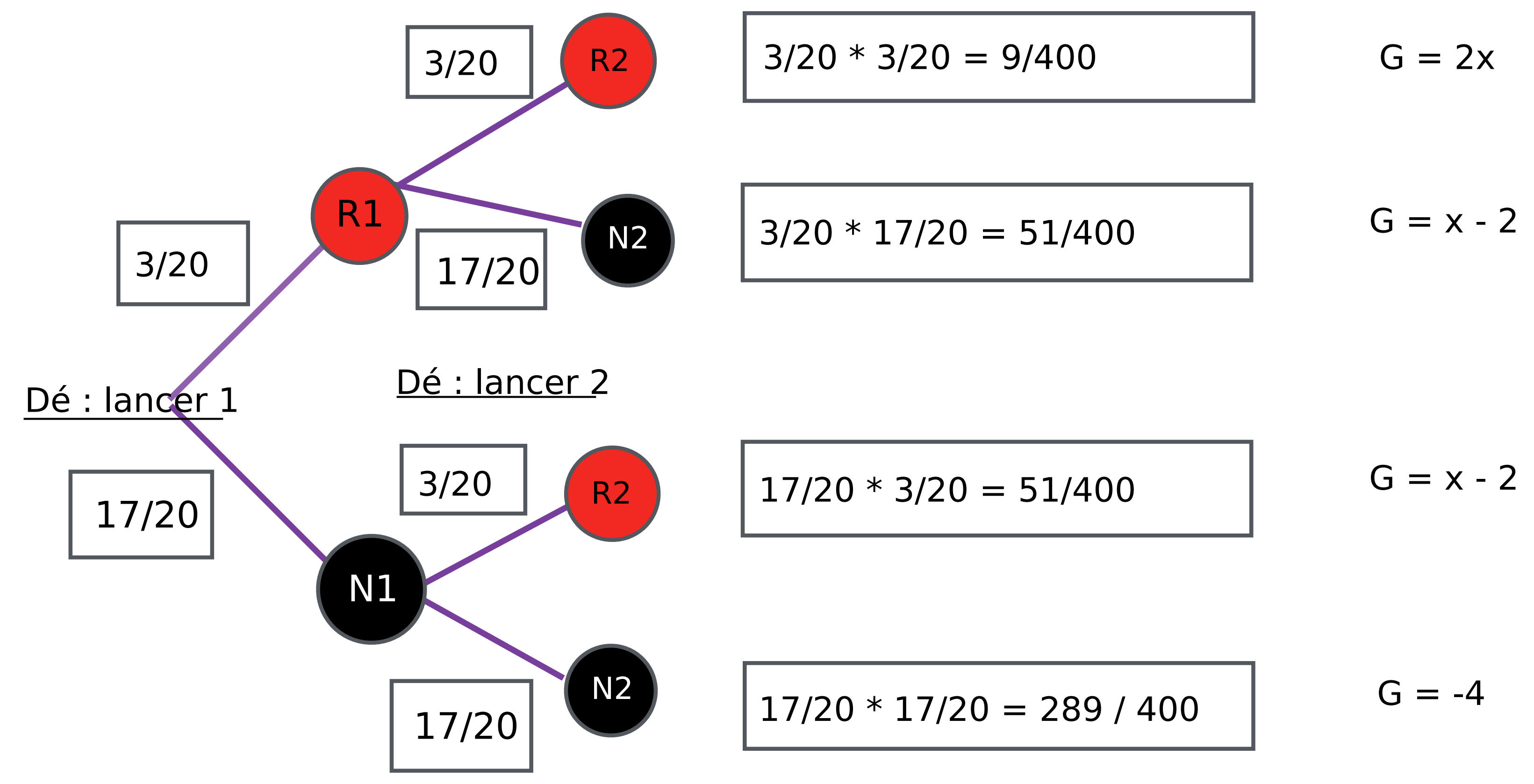
Éventualités concernant boules noires (N) et rouges (R) suite au lancer 1

R1 = boule rouge au lancer 1
N1 = boule noire au lancer 1
p(B) = p(non A)

p(R1) = [p (A) * p_A(R1)] + [p (B) * p_B(R1)] = (1/6 * 4/10) + (5/6 * 1/10) = 1/15 + 1/12 = 3/20

p(N1) = [p (A) * p_A(N1)] + [p (B) * p_B (N1)] = (1/6 * 6/10) + (5/6 * 9/10) = 1/10 + 3/4 = 17/20

Éventualités concernant les boules suite au lancer 2 en tenant compte du lancer 1



Différentes valeurs de G :

- R1 = boule rouge au lancer 1 ; R2 = boule rouge au lancer 2
- N1 = boule noire au lancer 1 ; N2 = boule noire au lancer 2

p(G = 2 x) = p(R1) * p_{R1} (R2)

3/20 * 3/20 = 9/400

p(G = -4) = p (N1) * p_{N1}(N2)

17/20 * 17/20 = 289 / 400

p(G = x - 2) = [p(R1) * p_{R1}(N2)] + [p (N1) * p_{N1} (R2)]

51/400 + 51/400 = 51/200

Vérification :

9/400 + 289/400 + 51/200 = 400/400 = 1 = somme de toutes les probabilités.

Loi de probabilité de G, exprimée sous forme de tableau

gi	- 4	x - 2	2x
P(G=gi)	289/400	51/200	9/400

2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.

E(G) = (9/400* 2x) + [51/200* (x -2)] + [289/400)* (-4)]
E(G) = 3/10 x - 17/5

3. Pour quelles valeurs de x, a-t-on E(G) ≥ 0 ?

E(G) ≥ 0 <=> E(G) = 3/10 x - 17/5
x ≥ 34/3 ; or l'énoncé indique que x est un entier naturel non nul ; on arrondi x à 12 ; ainsi avons nous : x ≥ 12.
Donc pour E(G) ≥ 0, x doit ∈ [12 ; +∞ [