ORTHOGONALITÉ ET PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1. PRODUIT SCALAIRE

Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires (voir chapitre précédent). On peut alors définir le produit scalaire dans l'espace à l'aide de la définition donnée en Première pour deux vecteurs d'un plan.

La plupart des propriétés vues en Première seront donc encore valables pour le produit scalaire dans l'espace, en particulier pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- $\vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$

La notion d'**orthogonalité de vecteurs** vue en Première est encore valable dans l'espace. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Les principales distinctions concernent les formules faisant intervenir les coordonnées puisque, dans l'espace, chaque vecteur possède trois coordonnées.

PROPRIÉTÉ

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans ce repère. Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

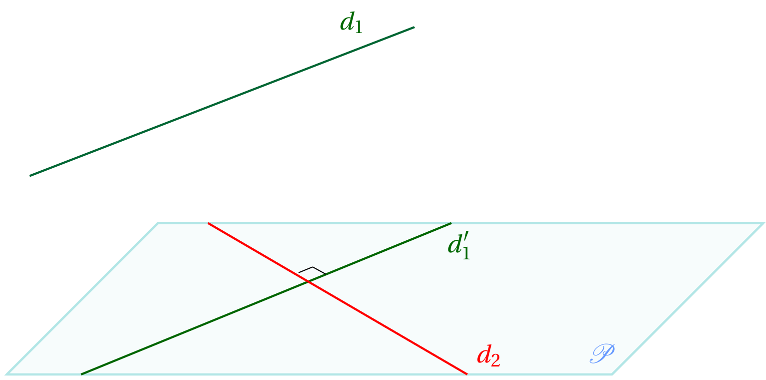
CONSÉQUENCES

- $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + (z_B - z_A)^2}$

2. ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

DÉFINITION

Deux droites d_1 et d_2 sont **orthogonales** si et seulement si il existe une droite qui est à la fois parallèle à d_1 et perpendiculaire à d_2



d_1 et d_2 sont orthogonales

REMARQUE

Attention à ne pas confondre *orthogonales* et *perpendiculaires*. Le terme *perpendiculaires* s'emploie uniquement pour des droites **sécantes** (donc **coplanaires**).

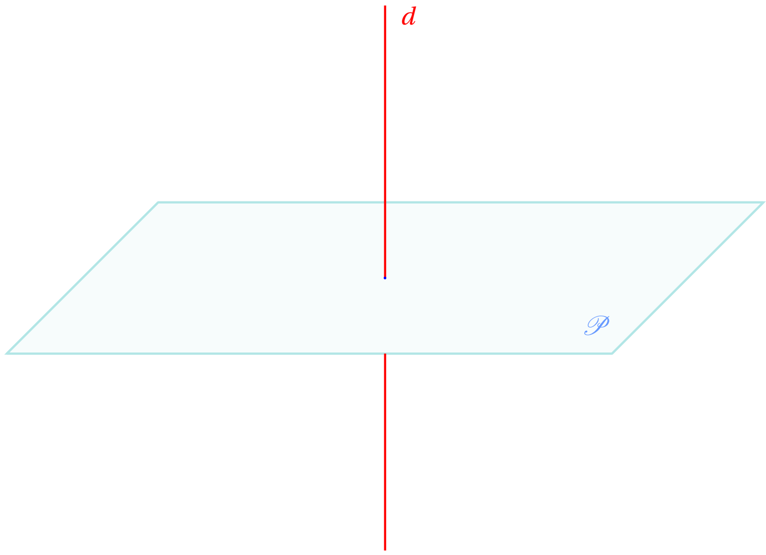
PROPRIÉTÉS

Soient deux droites d_1 et d_2, $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de d_1 et $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de d_2.

d_1 et d_2 sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux, c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0$

DÉFINITION (DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN)

Une droite d est **perpendiculaire** (ou **orthogonale**) à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.



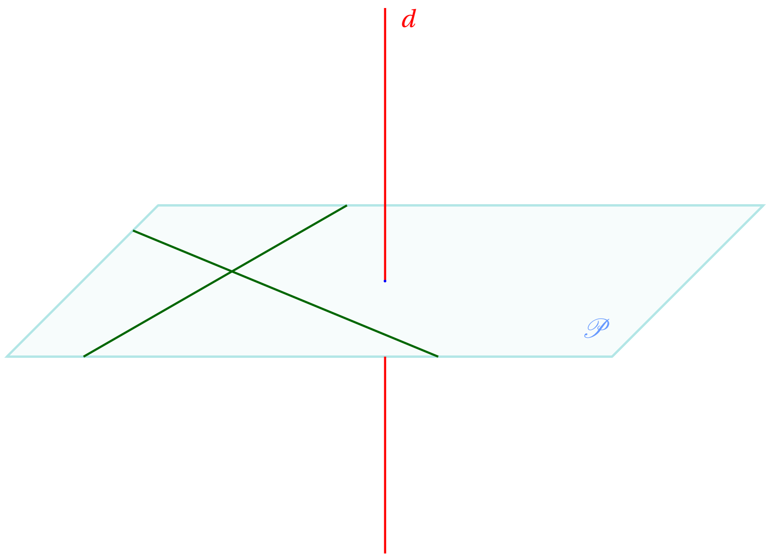
Droite perpendiculaire à un plan

REMARQUE

Une droite orthogonale à un plan coupe nécessairement ce plan en un point. Il n'y a donc plus lieu ici de distinguer orthogonalité et perpendicularité.

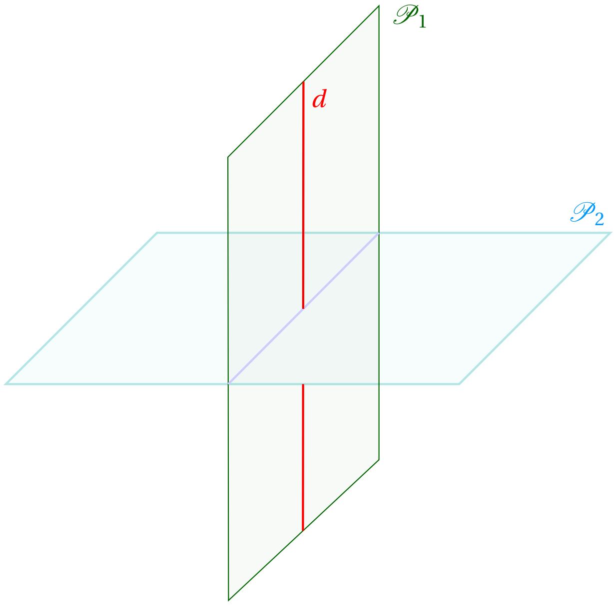
PROPRIÉTÉ

La droite d est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** incluses dans ce plan.



DÉFINITION (PLANS PERPENDICULAIRES)

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_1$ sont **perpendiculaires** (ou **orthogonaux**) si et seulement si $\mathscr{P}_1$ contient une droite d perpendiculaire à $\mathscr{P}_2$.

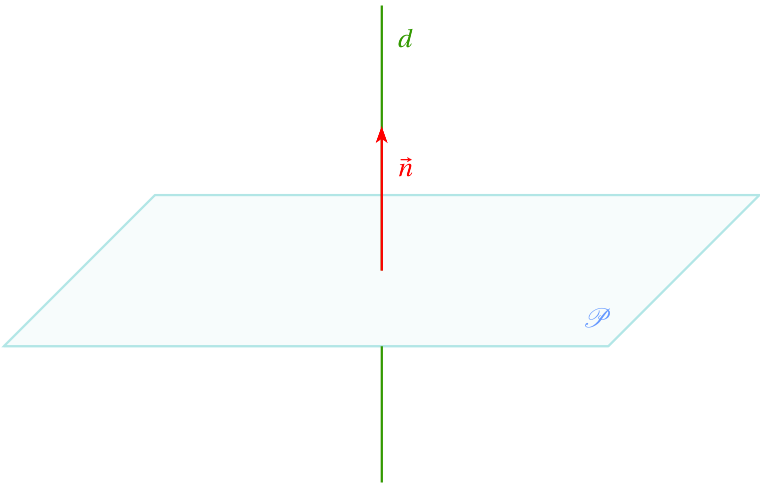


REMARQUE

Attention, cela ne signifie **pas** que toutes les droites de $\mathscr{P}_1$ sont orthogonales à toutes les droites de $\mathscr{P}_2$

DÉFINITION (VECTEUR NORMAL À UN PLAN)

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est un vecteur **normal** au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si la droite dirigée par $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.



THÉORÈME

Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et soit A un point de $\mathscr{P}$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0.$$

THÉORÈME

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Le plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\,(a; b; c)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c sont les coordonnées de $\vec{n}$ et d un nombre réel.

Réciproquement, l'ensemble des points $M\left(x; y; z\right)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ $(a, b, c, d$ étant des réels avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0)$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\,(a; b; c)$.

DÉMONSTRATION

Soit $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ un point de $\mathscr{P}$:

$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow a\,(x - x_A) + b\left(y - y_A\right) + c\,(z - z_A) = 0$ $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

et il suffit de poser $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Réciproquement, supposons par exemple $a \neq 0$.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\dfrac{d}{a}; 0; 0\right)$ Les coordonnées de A vérifient :

$ax_A + by_A + cz_A + d = 0.$

On a alors $d = -ax_A - by_A - cz_A$ donc :

$ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b\left(y - y_A\right) + c(z - z_A) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

donc $M\left(x; y; z\right)$ appartient au plan passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{n}(a; b; c)$

EXEMPLE

On cherche une équation cartésienne du plan passant par $A(1;3;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;1;1)$.

Ce plan admet une équation cartésienne de la forme :

$(E)\ x + y + z + d = 0$

Le point $A(1;3;-2)$ appartient à ce plan, donc les coordonnées de A vérifient l'équation (E) :

$1 + 3 - 2 + d = 0$ soit $d = -2$

Une équation cartésienne du plan est donc :

$(E)\ x + y + z - 2 = 0$

PROPRIÉTÉS

- Une droite d est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de d est orthogonal à un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
- Une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de d est colinéaire à un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.