PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur I.

On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I, si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de cette même fonction f.

PROPRIÉTÉ

Si F est une primitive de f sur I, alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

REMARQUE

Une fonction continue ayant une infinité de primitives, il ne faut pas dire **la** primitive de f mais **une** primitive de f.

EXEMPLE

Les primitives de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sont les fonctions $F : x \mapsto x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

PROPRIÉTÉS (PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES)

Fonction f	**Primitives F**	**Ensemble de validité**
0	k	$\mathbb{R}$
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x + k$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$

PROPRIÉTÉS

Si f et g sont deux fonctions définies sur I et admettant respectivement F et G comme primitives sur I et k un réel quelconque.

- $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I.
- kF est une primitive de la fonction kf sur I.

PROPRIÉTÉS

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$ (où $k \in \mathbb{R}$)

EXEMPLE

La fonction $x \mapsto 2xe^{(x^2)}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$.

Ses primitives sont donc les fonctions $x \mapsto e^{(x^2)} + k$ ($k \in \mathbb{R}$)

2. INTÉGRALES

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$.

L'intégrale de a à b de f est le nombre réel noté $\int_a^b f(x)\,dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

REMARQUE

L'intégrale ne dépend pas de la primitive de f choisie.

En effet si G est une autre primitive de f, on a $G = F + k$ donc :

$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$

NOTATIONS

On note souvent : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

On obtient avec cette notation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

EXEMPLE

La fonction F définie par $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction carré.

On a donc :

$$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{0}{3}=\frac{1}{3}$$

3. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

PROPRIÉTÉ

Relation de Chasles Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et $c\in[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

PROPRIÉTÉ

Linéarité de l'intégrale Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

- $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$

PROPRIÉTÉ

Comparaison d'intégrales Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $f\geqslant g$ sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\int_a^b g(x)\,dx$$

REMARQUE

En particulier, en prenant pour g la fonction nulle on obtient si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a;b]$:

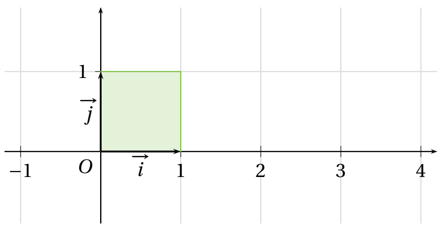
$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$$

4. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

DÉFINITION

Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On appelle **unité d'aire (u.a.)** l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent $||\vec{i}||$ et $||\vec{j}||$.



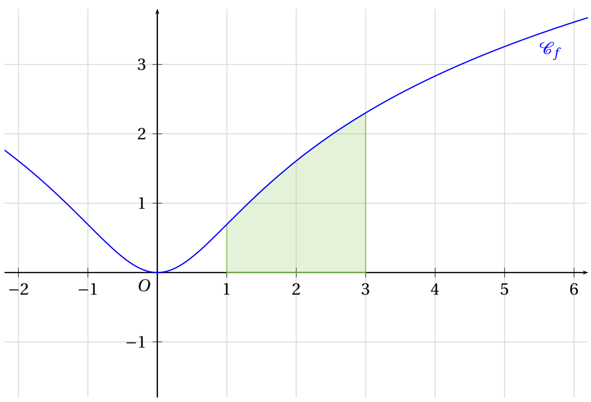
Unité d'aire dans le cas d'un repère orthonormé

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction continue et **positive** sur $[a; b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par :

- la courbe C_f
- l'axe des abscisses
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$

EXEMPLE



L'aire colorée ci-dessus est égale (en unités d'aire) à $\int_1^3 f(x)\,dx$

REMARQUES

- Si f est négative sur $[a; b]$, la propriété précédente appliquée à la fonction $-f$ montre que $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'**opposé** de l'aire délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
- Si le signe de f varie sur $[a; b]$, on découpe $[a; b]$ en sous-intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont des fonctions continues et telles que $f \leqslant g$ sur $[a; b]$, alors l'aire de la surface délimitée par :

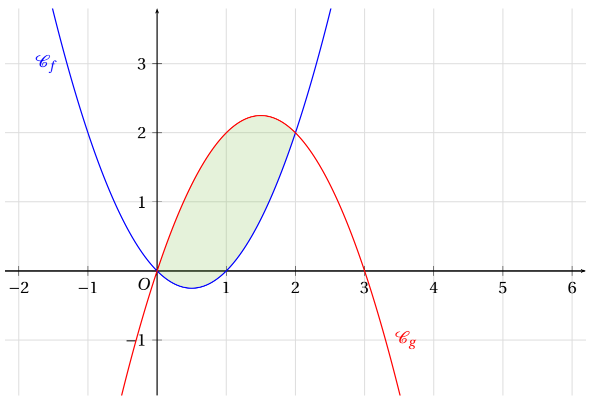
- la courbe C_f
- la courbe C_g
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$

est égale (en unités d'aire) à :

$$A = \int_a^b g(x) - f(x)\,dx$$

EXEMPLE

f et g définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 3x - x^2$ sont représentées par les paraboles ci-dessous :



L'aire colorée est égale (en unités d'aire) à :

$$A = \int_0^2 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^2 4x - 2x^2 = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\text{u.a.}$$