Exercice 1 (6 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.
1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T11 exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 12].
a. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge?

La probabilité d'attendre au moins cinq minutes, c'est un temps d'attente compris entre 5 et 12 min. Comme la loi est uniforme, la probabilité est

T11(5,12) = $\frac{1}{12}\int_{5}^{12} dx = \frac{7}{12}$ = **58.3%**

b. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse?

Le temps moyen d'attente, c'est l'espérance de la variable aléatoire soit:

E(T11) = $\frac{1}{12}\int_{0}^{12} xdx = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{12} = \frac{144-0}{12*2}$ = **6 mn**

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles. Le temps d'attente T2 , exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.

Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0, 75 minute et 6 minutes.

P(0.75<T2<6) = P($\frac{0,75-5}{1,5}$ <N< $\frac{6-5}{1,5}$) = P(-2.8333<N<0.6667)

où N est la loi normale centrée réduite

P(0.75<T2<6) = P(N<0.6667) - P(-2.8333<N) =0.7475 - 0.0023 = **74.5%**

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne.
On donne les informations suivantes.:
Le nombre de caisses automatiques est n = 10
La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est p = 0,1
Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X? Préciser ses paramètres.

La loi de probabilité suivie par X est une **loi de Bernoulli de paramètres N=10 p=0.1.**
L'expérience de Bernoulli associée est l'**expérience qui admet deux issues**

- la caisse tombe en panne un jour donné, avec une probabilité de p
- la caisse ne tombe pas en panne un jour donné avec une probabilité de 1-p

De plus, comme les **pannes sont indépendantes** d'une machine à l'autre, on est en présence de N épreuves indépendantes, ce qui permet d'affirmer que le nombre de pannes constatées en une journée suit une loi de Bernoulli..

b.Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

La probabilité cherchée est $(1 - p)^{N} = 0.9^{10}$ = **34.9%**

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche : « Plus de 90% des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. » Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage: 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.
Cela remet-il en question l'affirmation du gérant?

Vérifions, dans un premier temps, les conditions d'application de la formule de l'intervalle de fluctuation asymptotique

N > 30	oui (N=860)
Np > 5	oui (860*0.1=86)
N(1-P)>5	oui (860*.9=774)

L'intervalle est centré sur la moyenne 90%

Pour un seuil de confiance de 95%,

sa taille est égale à taille de l'intervalle = 2 x 1.96 x $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}$ = 0.0401 = 4.0 %

L'intervalle est donc [87.9%,92.1%]

Le résultat du sondage de l'association de consommateurs est de $\frac{763}{860}$ = **88.7%. Il est dans l'intervalle de fluctuation, donc l'affirmation du gérant n'est pas remise en cause.**

Exercice 2 (5 points)
Au 1er janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :
- *25% des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion;*
- *12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.*

PARTIE A
On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,75\, u_n + 12.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.
1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2017.

Au premier janvier $U_0=900$
Au premier février $U_1=0.75 * 900 + 12 = 687$
Au premier mars $U_2=0.75 * 687 + 12 = 527$

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n.
a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 48}{u_n - 48} = \frac{(0.75u_n+12)-48}{u_n - 48} = \frac{0.75u_n-36}{u_n - 48} = \frac{0.75(u_n-48)}{u_n - 48} = 0.75$$

si $u_n \neq 48$

Le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut 0.75. Donc v est une suite géométrique de raison 0.75.

b. Préciser v0 et exprimer Vn en fonction de n.

$v_0 = u_0 - 48 = 900 - 48 =$ **852**

$v_n = v_0 \times q^n =$ $\boldsymbol{852 \times (0.75)^n}$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 852 \times 0,75n + 48$.

Puisque $v_n = u_n - 48$, on a $u_n = v_n + 48$

donc $\mathbf{u_n = 852 \times (0.75)^n + 48}$

3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ?

lim u_n = 48 quand n tend vers l'infini. Comme 100 est supérieur à 48, il existe n tel que $u_n <$ 100. **Donc la présidente va devoir démissionner**

Si oui, au bout de combien de mois ?

$u_n > 100 \quad \Leftrightarrow \quad 852 \times (0.75)^n + 48 > 100$

$\Leftrightarrow \quad (0.75)^n > \frac{52}{852}$

$\Leftrightarrow \quad n \times \log(0.75) > \log\left(\frac{52}{852}\right)$ car log monotone croissante sur R^+

$\Leftrightarrow \quad n > 9.72$

Le nombre d'adhérents sera inférieur à la valeur limite donnée dans 10 mois (1er janvier 2017 étant la référence)

PARTIE B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017. Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la septième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).
1. Recopier et compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le montant total des cotisations de l'année 2017.

Variables
S est un nombre réel
N est un entier
U est un nombre réel
Initialisation
S prend la valeur 0
U prend la valeur 900
Pour N allant de 1 à 12 :
Affecter à S la valeur S + ***U * 10 (le montant cumulé des cotisation jusqu'au mois traité)***
Affecter à U la valeur 0,750+12 (le nombre d'adhérents en début du mois suivant)
Fin pour
Sortie
Afficher S

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017?

$$\text{Tot} = 10 \times \sum_{n=0}^{11} u_n = 10 \times \sum_{n=0}^{11} (852 \times (0.75)^n + 48) = 8520 \sum_{n=0}^{11} (0.75)^n + 480 \sum_{n=0}^{11} 1$$

Tot = 8520 * $\frac{1-0.75^{12}}{1-0.75}$ + 480 x 12 = **38 760 €**

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication. Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :

pour tout réel x de [0 ; 1],

$$f(x) = (1 - x)e^{3x} \text{ et}$$
$$g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Leurs courbes représentatives seront notées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

dériver((1-x)*exp(3x)) : -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)

factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)) : exp(3x)*(-3x+2)

factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2))) : 3*exp(3*x)(1-3x)

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par

$f'(x) = -3xe^{3x} + 2e^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x + 2)e^{3x}$

.

1. Étudier sur [0 ; 1] le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur [0 ; 1] en précisant les valeurs utiles.

x	0		2/3		1
f'(x)		+	0	-	
f(x)	1	↗	2e/3	↘	0

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées. $\mathscr{C}_g$ $\mathscr{C}_f$

L'abscisse du point d'inflexion est tel que f''(x)= 0

$f''(x) = -3e^{3x} + 3(-3x + 2)e^{3x} = (-9x + 3)e^{3x}$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-9x + 3)e^{3x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -9x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}e$

Le point d'inflexion a pour coordonnées (⅓,⅔ e)

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1) sont des points communs aux courbes $\mathscr{C}f$ et $\mathscr{C}g$.

Les points (0,1) et (1,0) appartiennent à la courbe $\mathscr{C}f$ (cf tableau de variation ci-dessus)

g(0)=0² - 2 x 0 + 1 = 1

g(1)=1² - 2 x 1 + 1 = 0

Donc les points (0,1) et (1,0) appartiennent à la courbe $\mathscr{C}g$

2. On admet que : pour tout x dans [0 ; 1], $f(x) - g(x) = (1 - x)(e^{3x} - 1 + x)$.

a. Justifier que pour tout x dans [0 ; 1], $e^{3x} - 1 \geq 0$.

h(x)=e^{3x} est une fonction strictement croissante sur R,

donc h(x)-1 est une fonction strictement croissante sur R

h(0)-1=0 donc si x>=0 alors h(x)-1>=0 ce qui prouve le résultat demandé

b. En déduire que pour tout x dans [0 ; 1], $e^{3x} - 1 + x \geq 0$.

e^{3x}– 1 est une fonction croissante sur R

x est une fonction croissante sur R

donc r(x) = $e^{3x} - 1 + x$ est une fonction croissante sur R

or r(0)=0 donc si x>=0 alors r(x) >=0

c. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans [0 ; 1].

si x>=0 et x<=1 alors 1-x>=0

si x>=0 et x<=1 alors $e^{3x} - 1 + x$

>= 0

donc

si x>=0 et x<=1 alors f(x) - g(x) >=0

3. a. Calculer $\int_0^1 g(x)\,dx$

$$\int_0^1 x^2 - 2x + 1 = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

b. On admet que : $\int_0^1 f(x)\,dx = (e^3 - 4)/9$.

Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.

L'aire de la partie grisée est égale à $\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)\,dx$

S=$(e^3 - 4)/9 - 3/9 = (e^3 - 7)/9$ = **1.4539 = 1.5 (arrondi à 1 chiffre)**

Exercice 4 (3 points)
Commun à tous les candidats
Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.
Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9, $P(X = c) = (\ln(c + 1) - \ln(c))/ \ln(10)$. Cette loi est appelée loi de Benford.
1. Que vaut $P(X = 1)$?

$P(X = 1) = (\ln(1 + 1) - \ln(1))/ \ln(10)=((\ln(2)-\ln(1))/ \ln(10)=(\ln(2)-0)/\ln(10)=$**0,301**

2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.
a. Premier cas.
Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion). À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.
Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

Le premier chiffre de la population d'une commune est une expérience qui est soit vraie (avec une probabilité de 30.1%, soit fausse avec une probabilité de 1 - 30.1%. Si on répète cette expérience N fois et en notant que la population d'une commune x est indépendante de la commune y, on peut admettre que le nombre de communes dont le premier chiffre de la population est suit une loi de Bernoulli de paramètre p=30.1% et N=36677.

Vérifions, dans un premier temps, les conditions d'application de la formule de l'intervalle de fluctuation asymptotique

N > 36677	oui (N=36677)
Np > 5	oui (36677*0.301=11000)
N(1-P)>5	oui (36677*(1-0.301) #22000)

L'intervalle est centré sur la moyenne 30.1%
Pour un seuil de confiance de 95%,

sa taille est égale à taille de l'intervalle = 2 x 1.96 x $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}$ = 0.0401 = 0.9 %

L'intervalle est donc [30.1%-0.009/2,30.1%+0.009/2]=[29.6%,30.6%]
Le résultat du recensement est de 11094/36677=30.2%

Ce résultat est dans l'intervalle de fluctuation, donc le recensement est conforme à la loi de Benford.

b. Deuxième cas.
Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres. On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.
La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée ?

A priori non, puisque la plupart des personnes qui passent le bac mesurent entre 100 et 199 cm.