EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée. On a alors :

a) $f'(x) = 0$ **b)** $f'(x) = \ln(x)$ **c)** $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ **d)** $f'(x) = \frac{1}{x} - x$

f'(x) = ln(x) + x 1/x -1=ln(x)* ***réponse b***

2) Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0{,}95^n - 1 \leq 2$ appartiennent à l'intervalle :

a) $\left]-\infty\,;\frac{\ln 3}{\ln(5{,}7)}\right]$ **b)** $\left]-\infty\,;\ln\left(\frac{0{,}5}{0{,}95}\right)\right]$ **c)** $\left]-\infty\,;\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}\right]$ **d)** $\left[\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)};+\infty\right[$

$6*0.95^n - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 6*0.95^n \leq 3 \Leftrightarrow 0.95^n \leq 0.5$

$\Leftrightarrow \ln(0.95^n) \leq 0.5 \Leftrightarrow n\ln(0.95) \leq ln(0.5)$

$\Leftrightarrow n \geq \ln(0.5)/\ln(0.95)$ réponse d

3) Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2 m.
Un tube métallique est considéré comme étant dans la norme si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme. L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3}, est :

a) [0,922 ; 0,986] **b)** [0,947 ; 0,961] **c)** [1,98 ; 2,02] **d)** [0,953; 0,955]

L'intervalle est égal [f - 1/ $\sqrt{N}$, f + 1/ $\sqrt{N}$] avec f=954/1000 et 1/ $\sqrt{N}$ = 1/ $\sqrt{1000}$ = 3.16%

Réponse a

4) Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est de 0,8. Les tirs sont supposés indépendants. Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

a) 0,512 **b)** 2,4 **c)** 0,262144 **d)** 0,08192

Loi bernoulli p(x=3)= C(3,6)*$0.8^3 0.2^3$ (Réponse d)

EXERCICE 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants. Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- *150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ;*
- *les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.*

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2016 + ,"on a donc $u_0 = 27500$.

1) a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

Il y avait 27500 étudiants en septembre, **l'effectif de juin 2017 sera 27500-150=27350**

b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

Il y avait 27350 étudiants en juin, **donc l'effectif de juin 2017 sera 27350*1.04=28444**

2) Justifier que, pour tout entier naturel ,"on a $u_{n+1} =\ 1.04 * u_n - 156$.

Par rapport à l'année n où l'effectif vaut u_n, l'effectif en juin suivant sera de $(u_n - 150)$ et celui de septembre suivant sera de $1.04(u_n - 150)$.

on a donc $u_{n+1} = 1.04(u_n - 150). = 1.04 * u_n - 156$.

3) Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1 Variables : n est un nombre entier naturel
L2 U est un nombre réel
L3 Traitement : n prend la valeur 0
L4 U prend la valeur 27500
*L5 Tant que **U < 33000** faire*
*L6 n prend la valeur **n+ 1***
*L7 U prend la valeur 1.04 * U -156*
L8 Fin Tant que
L9 Sortie : Afficher 2016 + N

4) a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.

Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ;

	Init	*Et1*	*Et2*	*Et3*	*Et4*	*Et5*	*Et6*
Valeur de N	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Valeur de U	27500	28444	29426	30447	31509	32613	33762

b) Donner la valeur affichée en sortie de cet algorithme.

La valeur de sortie vaut donc 2022

5) On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel ,* $v_n = u_n - 3900$
a) Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$v_{n+1} / v_n = (u_{n+1} - 3900) / (u_n - 3900)$
or $u_{n+1} = 1.04 * u_n - 156$.
donc $v_{n+1} / v_n = (1.04 * u_n - 156 - 3900) / (u_n - 3900)$
$= 1.04 * (u_n - 3900) / (u_n - 3900)$ car $1.04*3900=3900+156$
$= 1.04$

Donc (v_n) est une suite géométrique car le ratio de deux termes consécutifs est constant
On a de plus de plus $v_0 = u_0 - 3900 = 27500 - 3900 = 23600$

b) En déduire que, pour tout entier naturel ,* $u_n = 23600 * 1.04^n + 3900$.

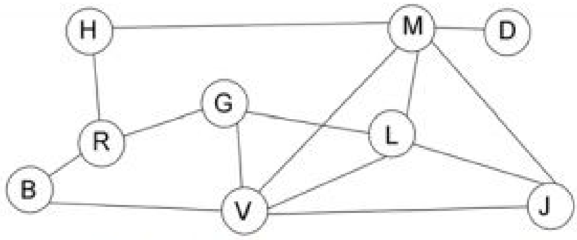
D'après la question précédente: on a $v_n = v_0 1.04^n = 23600 * 1.04^n$
or $v_n = u_n - 3900$
donc $u_n = v_n + 3900$
soit $u_n = 23600 * 1.04^n + 3900$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Puisque 1.04 > 1, la limite de 1.04^n quand n tend vers l'infini est + l'infini.
Si le modèle est juste, l'effectif de l'université va encore croître et cela sans limite.

EXERCICE 3 (5 points) Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés. Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu.
D : Chute d'eau de Dettifoss.
G : Geyser de Geysir.
H : Rocher Hvitserkur.
J : Lagune glacière de Jökulsárlón.
L : Massif du Landmannalaugar.
M : Lac de Mývatn.
R : Capitale Reykjavik.
V : Ville de Vík.

1) Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.

a) Déterminer l'ordre du graphe.

L'ordre d'un graphe, c'est le nombre de ses sommets. Donc ici 9

b) Déterminer si le graphe est connexe.

Comme il est possible d'atteindre tous les points en partant du point H, il est clair qu'il existe une suite d'arêtes qui relie chacun des 36 couples de points. Donc le graphe est connexe.

c) Déterminer si le graphe est complet.

Dans une graphe complet, tout noeud du graphe est relié à n'importe quel autre noeud du graphe. Le graphe proposé n'est pas complet car, par exemple, il n'existe pas de chemin direct entre H et G.

2) Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

Pour répondre à la question, il faut savoir si le graphe contient une chaîne eulérienne, c'est à dire une chaîne qui contient une et une seule fois toutes les arêtes.

Calculons le degré de chaque noeud

B=2,D=1,G=3,H=2,J=3,L=4,M=5,R=3,V=5

Il existe des noeuds d'ordre impair, donc il n'existe pas de cycle eulérien dans ce graphe

Il existe plus de deux noeuds d'ordre impair, donc il n'existe pas de chaîne eulérienne.

Donc Sarah ne peut pas emprunter toutes les routes qu'une seule fois.

3) On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M4

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}$$

a) Il manque certains coefficients de la matrice M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.

La sous matrice matrice manquante correspond aux nombre d'arêtes entre les points

BM	*DM*	*GM*
BR	*DR*	*GR*
BV	*DV*	*GV*

soit

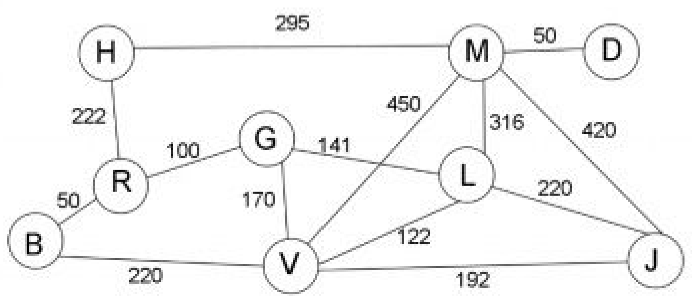
0	*1*	*0*
1	*0*	*1*
1	*0*	*1*

b) Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D.

Par définition de la matrice d'adjacence, le coefficient a_{ij} est le nombre d'arêtes qui relient les points i et j. Si on élève la matrice d'adjacence à la puissance n, la signification ne change pas, il s'agit toujours du nombre de chemins qui relient les points i et j.

Dans le cas présent le nombre de chemins est donc égale au coefficient $m_{12}^4 = 3$

4) Sur le graphe pondéré ci-dessous, on a indiqué sur les arêtes les distances en kilomètre entre les différents lieux :



Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss). Préciser alors le trajet à emprunter.

B	*R*	*V*	*H*	*G*	*J*	*L*	*M*	*D*	*Et*
0	*50-B*	*220-B*							***1***
x	***50-B***		*272-R*	*150-R*					***2***
x	*x*		*320-G*	***150-R***		*291-G*			***3***
x	*x*	***220-B***		*x*	*412-V*	*342-V*	*670-V*		***4***
x	*x*	*x*	***272-R***	*x*			*567-H*		***5***
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*511-L*	***291-G***	*607-L*		***6***
x	*x*	*x*	*x*	*x*	***412-V***	*x*	*832-J*		***7***
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	***567-H***	*617-M*	***8***
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	***617-M***	***9***

Etape 0
On est en B, distance parcourue 0

Etape 1
Depuis B, chemin vers R = +50km, chemin vers V=+220km
Meilleur parcours : R/50-B

Etape 2
Depuis R, chemin vers G =+100, chemin vers H=+220
Meilleur parcours : G/150-R

Etape 3
Depuis G, chemin vers L=+141, chemin vers V=+170
Meilleur parcours : V/220-B

Etape 4
Depuis V,   chemin vers M=+450, chemin vers L=+122, chemin vers J=+192
Meilleur parcours : H/272-R

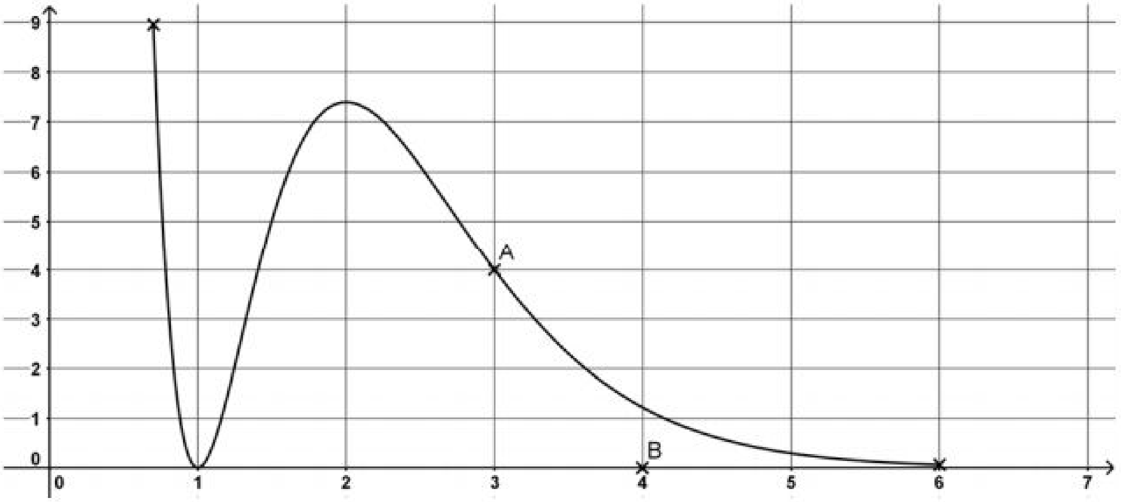
Etape 5
Depuis H, chemin vers M=+295
Meilleur parcours : L/291-G
Etape 6

Depuis L : chemin vers M=+316, chemin vers J=+220
Meilleur parcours : J/412-V

Etape 7
Depuis J: chemin vers M=+420
Meilleur parcours : M/567-H

donc le parcours le plus court pour aller de B à D est B-R-H-M-D et mesure 617km

EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats
Soit une fonction définie sur l'intervalle [0.7.6] ; on suppose que f est dérivable.
PARTIE A : Étude graphique
On a représenté la fonction sur le graphique ci-dessous.



1) La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points A(4;3) et B(4;0). Déterminer f'(3).

f'(3) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en x=3. Si la tangente passe par A et B, le coefficient directeur vaut dy/dx = -4

2) D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle [0.7.6]

x	0,7		1		2		6
f'(x)		-	0	+	0	-	

PARTIE B : Étude théorique
On admet que la fonction est définie par $f(x)=(x^2-2x+1)e^{-2x+6}$
Montrer que $f'(x)=(-2x^2+6x-4)e^{-2x+6}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

f est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables. D'après la règle de dérivation d'un produit, on a:

$f'(x)=(2x-2)e^{-2x+6}+(x^2-2x+1)(-2)e^{-2x+6}$
$f'(x)=e^{-2x+6}[(2x-2)-2(x^2-2x+1)]$
$f'(x)=e^{-2x+6}(-2x^2+6x-4)$

2) Étudier le sens de variation de la fonction sur l'intervalle [0.7.6] et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0.7.6] On ne demande pas de calculer les ordonnées.

La fonction exponentielle est toujours strictement positive, donc le signe de f' est celui du trinôme $-2x^2+6x-4$. Cette expression admet deux racines évidentes : 1 et 2. donc
$-2x^2+6x-4 = -2(x-1)(x-2)$

Le tableau de variation de F est donc

x	0,7		1		2		6
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	f(0.7)	↘	f(1)	↗	f(2)	↘	f(6)

3) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * e\hat{}(-2x + 6)$ $\rightarrow f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16xe^{-2x+6} + 4x^2e^{-2x+6} + 14e^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\rightarrow 2e^{-2x+6}(2x^2 - 8x + 7)$
L4	Résoudre$[g(x) = 0]$ $\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2}; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L5	$F(x) :=$ Primitive$[f(x)]$ $\rightarrow F(x) = \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x - 1)e^{-2x+6}$

a) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction est concave.

La fonction est concave quand sa dérivée seconde est négative.

D'après les lignes 3 et 4 du tableau ci-dessus, la dérivée de la dérivée de f (f'' donc) est définie par: $f''(x)=e^{-2x+6}(2x^2-8x+7)$

D'après la ligne 4, f'' s'annule pour 2 valeurs qui ont pour valeurs approchées $x_1=1.3$ et $x_2=2.7$. Entre ces deux racines, la dérivée est négative (fonction concave), à l'extérieur, elle est convexe. Il y a donc qu'un intervalle où la fonction f est concave: $[x_1;x_2]$

b) La courbe représentative de la fonction admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

La fonction admet deux points d'inflexion. Ce sont les points qui annulent la dérivée seconde. donc $x=x_1$ et $x=x_2$

c) Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1} .

D'après la ligne 5 du tableau, la primitive de f est $F(x)=0.25(-2x^2+2x-1)e^{-2x+6}$

Donc $I=[0.25(-2x^2+2x-1)e^{-2x+6}]_3^5 = 0.25(-2*5^2+2*5-1)\exp(-2*5+6) - (-2*3^2+2*3-1)\exp(-2*3+6)))$

$I=0.25*(-41e^{-4}-(-13e^0)) = (13 - 41e^{-4}) / 4 = 3.1$