LES SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 - CARACTÉRISTIQUES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

DÉFINITION

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$

Le réel q s'appelle la **raison** de la suite géométrique (u_n).

REMARQUE

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont non nuls est une suite géométrique, on pourra calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si ce rapport est une constante q, on pourra affirmer que la suite est une suite géométrique de raison q.

EXEMPLE

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{3}{2^n}$.

Les termes de la suite sont tous strictement positifs et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

PROPRIÉTÉ

Pour n et k quelconques entiers naturels, si la suite (u_n) est géométrique de raison q :$u_n = u_k \times q^{n-k}$.

En particulier $u_n = u_0 \times q^n$.

PROPRIÉTÉ

Réciproquement, soient a et b deux nombres réels. La suite (u_n) définie par $u_n = a \times b^n$ suite est une suite géométrique de raison $q = b$ et de premier terme $u_0 = a$.

DÉMONSTRATION

$u_{n+1} = a \times b^{n+1} = a \times b^n \times b = u_n \times b$

et

$u_0 = a \times b^0 = a \times 1 = a$

THÉORÈME

Soit (u_n)une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme strictement positif :

- Si q >1, la suite (u_n)est strictement croissante
- Si 0 < q <1, la suite (u_n)est strictement décroissante
- Si q=1, la suite (u_n)est constante

THÉORÈME

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques de raison respectives q et q' alors le produit (w_n) de ces deux suites défini par :

$w_n = u_n \times v_n$

est une suite géométrique de raison $q'' = q \times q'$

2 - SOMME DES PUISSANCES SUCCESSIVES D'UN NOMBRE

THÉORÈME

Soit q un nombre réel **différent de 1** :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

REMARQUE

Cette formule n'est pas valable pour $q = 1$. Mais dans ce cas le calcul est immédiat car tous les termes sont égaux à 1.

EXEMPLE

Soit à calculer la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n$

Donc :

$S = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$

3 - LIMITE DE LA SUITE (Q^N) OÙ $Q \geqslant 0$

THÉORÈME

Soit q un nombre réel positif.

- **Si** $q > 1$ **:** alors q^n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand. On dit que la suite (q^n) tend vers $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty \text{ (ou } \lim_{n\to+\infty} (q^n) = +\infty)$$

- **Si** $0 \leqslant q < 1$ **:** alors q^n est aussi proche de zéro que l'on veut dès que n est suffisamment grand. On dit que la suite (q^n) tend vers 0 et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \text{ (ou } \lim_{n\to+\infty} (q^n) = 0)$$

REMARQUE

Pour $q = 1$ $q^n = 1^n = 1$; la suite est constante, égale à 1, et tend donc vers 1 ;

4 - SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

DÉFINITION

Une suite arithmético-géométrique u_n est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b \text{ pour tout entier } n$$

où a et b sont deux nombres réels.

REMARQUE

Attention : Ces suites ne sont **ni arithmétiques** (sauf si $a = 1$) **ni géométriques** (sauf si $b = 0$).

PROPRIÉTÉ

Il existe un nombre réel k tel que la suite v_n définie, pour tout entier n, par $v_n = u_n + k$ soit une suite géométrique de raison a.

REMARQUES

- En général, dans les exercices, le nombre k vous sera donné (et si ce n'est pas le cas on vous indiquera une démarche pour le trouver). On vous demandera de prouver que v_n est une suite géométrique de raison a.

- Puisque $v_n = u_n + k$, pour tout entier n, on a en particulier $v_0 = u_0 + k$ ce qui permet de connaître le premier terme de la suite v_n.
- $v_n = u_n + k$ signifie aussi que $u_n = v_n - k$.
  Donc une fois que l'on connaît v_n on peut trouver u_n (voir exemple ci-dessous)

EXEMPLE DÉTAILLÉ

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 10$ est une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

1. **Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique** Pour montrer que la suite (v_n) est géométrique on va calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
   $v_n = u_n - 10$ pour tout entier n donc :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 10$
   or on sait que
   $u_{n+1} = 0,6u_n + 4$
   donc
   $v_{n+1} = 0,6u_n + 4 - 10 = 0,6u_n - 6$
   Ici, une petite astuce consiste à mettre $0,6$ en facteur (on peut également dire que $u_n = v_n + 10$ et remplacer u_n par $v_n + 10$)
   $v_{n+1} = 0,6u_n - 0,6 \times 10 = 0,6(u_n - 10) = 0,6v_n$
   On a bien une relation du type $v_{n+1} = q \times v_n$ avec $q = 0,6$ ce qui montre que **la suite (v_n) est une suite géométrique de raison** $0,6$.
2. **Expression de u_n en fonction de n** Par ailleurs, $v_0 = u_0 - 10 = 5 - 10 = -5$
   (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 0,6$ donc pour tout entier n :
   $v_n = v_0 \times q^n = -5 \times 0,6^n$
   Comme $u_n = v_n + 10$, on obtient finalement :

$$u_n = -5 \times 0,6^n + 10$$