LES SUITES : GÉNÉRALITÉS

I - DÉFINITION D'UNE SUITE

DÉFINITIONS

Une **suite** u associe à tout entier naturel n un nombre réel noté u_n.

Les nombres réels u_n sont les **termes** de la suite.

Les nombres entiers n sont les **indices** ou les **rangs**.

La suite u peut également se noter (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

REMARQUE

Intuitivement, une suite est une liste infinie et ordonnée de nombres réels. Ces nombres réels sont les termes de la suite et les indices correspondent à la position du terme dans la liste.

EXEMPLE

Par exemple la liste $1{,}6 ; 2{,}4 ; 3{,}2 ; 5 ; ...$ correspond à la suite (u_n) suivante :

$u_0 = 1{,}6$ (terme de rang 0)

$u_1 = 2{,}4$ (terme de rang 1)

$u_2 = 3{,}2$ (terme de rang 2)

$u_3 = 5$ ...

REMARQUE

Ne pas confondre l'écriture (u_n) avec parenthèses qui désigne la suite et l'écriture u_n sans parenthèse qui désigne le n-ième terme de la suite.

DÉFINITION

Une suite est définie de façon **explicite** lorsqu'on dispose d'une formule du type $u_n = f(n)$ permettant de calculer chaque terme de la suite à partir de son rang.

EXEMPLE

La suite (u_n) définie par la formule explicite $u_n = \dfrac{2n+1}{3}$ est telle que

$u_0 = \dfrac{1}{3}$

$u_1 = \dfrac{3}{3} = 1$ ...

$u_{100} = \dfrac{201}{3} = 67$

DÉFINITION

Une suite est définie par une relation de **récurrence** lorsqu'on dispose du premier terme et d'une formule du type $u_{n+1} = f(u_n)$ permettant de calculer chaque terme de la suite à partir du terme précédent.

REMARQUE

Il est possible de calculer un terme quelconque d'une suite définie par une relation de récurrence mais il faut au préalable calculer tout les termes précédents. Comme cela peut se révéler long, on utilise parfois un algorithme pour faire ce calcul.

EXEMPLE

La suite (u_n) définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

est telle que :

$u_0 = 1$

$u_1 = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1$

$u_2 = 2 \times u_1 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5$

etc...

II - REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE

DÉFINITION

La représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère du plan, s'obtient en plaçant les points de coordonnées $(n; u_n)$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$.

EXEMPLE

Pour représenter la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{n+1}$ on calcule :

$u_0 = 4$

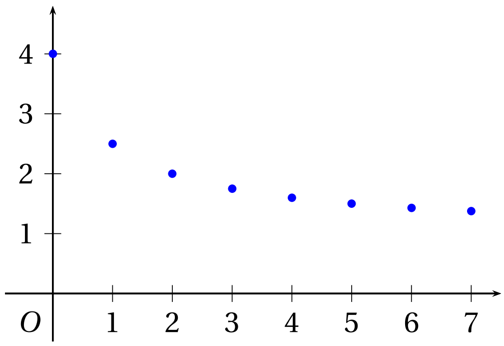
$u_1 = \dfrac{5}{2}$

$u_2 = 2$

$u_3 = \dfrac{7}{4}$

etc.

et on place les points de coordonnées : $(0;4)$; $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$; $(2;2)$; $\left(3;\dfrac{7}{4}\right)$; etc.



Représentation graphique de la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{3}{n+1}$

III - SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

DÉFINITIONS

On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** (*resp.* ***décroissante***) si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} \geqslant u_n \ (resp.\ u_{n+1} \leqslant u_n)$$

On dit qu'une suite (u_n) est **strictement croissante** (*resp.* ***strictement décroissante***) si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} > u_n \ (resp.\ u_{n+1} < u_n)$$

On dit qu'une suite (u_n) est **constante** si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n$$

REMARQUES

- Une suite peut n'être ni croissante,, ni décroissante, ni constante. C'est le cas, par exemple de la suite définie par $u_n = (-1)^n$ dont les termes valent successivement : $1; -1; 1; -1; 1; -1$; etc.
- En pratique pour savoir si une suite (u_n) est croissante ou décroissante, on calcule souvent $u_{n+1} - u_n$:
  - si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est croissante
  - si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est décroissante
  - si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est constante.