POLYNÔMES ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

1. FONCTIONS POLYNÔMES

DÉFINITION

Une fonction P est une **fonction polynôme** si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et si on peut l'écrire sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

REMARQUES

- par abus de langage, on dit souvent polynôme au lieu de fonction polynôme.
- les nombres a_i s'appellent les **coefficients** du polynôme.

DÉFINITION (DEGRÉ D'UN POLYNÔME)

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (où le coefficient a_n est non nul), on dit que P est une fonction polynôme de **degré** n.

CAS PARTICULIERS

- la fonction nulle n'a pas de degré.
- une fonction constante non nulle définie par $f(x) = a$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 0.
- une fonction affine $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 1.

PROPRIÉTÉ

Le produit d'un polynôme de degré n par un polynôme de degré m est un polynôme de degré $m+n$.

REMARQUE

Il n'existe pas de formule donnant le degré d'une somme de polynôme. On peut tout au plus dire que le degré de $P+Q$ est inférieur ou égal à la fois au degré de P et au degré de Q.

PROPRIÉTÉ

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.

CAS PARTICULIER

P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

DÉFINITION

On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une racine du polynôme P si et seulement si $P(a) = 0$.

EXEMPLE

1 est racine du polynôme $P(x) = x^3 - 2x + 1$ car $P(1) = 0$

THÉORÈME

Si P est un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et si a est une racine de P alors $P(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = (x - a)\,Q(x)$$

où Q est un polynôme de degré $n - 1$.

2. FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

DÉFINITION

On appelle **polynôme (ou trinôme) du second degré** toute expression pouvant se mettre sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

EXEMPLES

- $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ est un polynôme du second degré.
- $P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme du second degré avec $b = 0$ mais $Q(x) = x - 1$ n'en est pas un car a n'est pas différent de zéro (c'est un polynôme du premier degré - ou une fonction affine).
- $P(x) = 5(x - 1)(3 - 2x)$ est un polynôme du second degré car en développant on obtient une expression du type souhaité.

THÉORÈME ET DÉFINITION

Tout polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.

Cette expression s'appelle **forme canonique** du polynôme P.

DÉFINITION

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

PROPRIÉTÉ (RACINES D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ)

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- n'a aucune solution réelle si $\Delta < 0$;
- a une solution unique $x_0 = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

EXEMPLES

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$:
  $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$.
  P_1 possède 2 racines :
  $x_1 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$
- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$:
  $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 0$.
  P_2 possède une seule racine :
  $x_0 = -\dfrac{-4}{2} = 2$.
- $P_3(x) = x^2 + x + 1$:
  $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
  P_3 ne possède aucune racine.

PROPRIÉTÉ (SOMME ET PRODUIT DES RACINES)

Soit un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ dont le discriminant est strictement positif.

- La somme des racines vaut $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.
- Le produit des racines vaut $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

REMARQUE

Ces propriétés sont souvent utilisées pour résoudre rapidement une équation qui possède une racine "évidente".

Par exemple l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet $x_1 = 1$ comme racine puisque $1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$; comme $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = 3$ l'autre racine est $x_2 = 3$.

PROPRIÉTÉ (SIGNE D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ)

Le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$:

- est toujours du signe de a si $\Delta < 0$;
- est toujours du signe de a mais s'annule en $x_0 = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- est du signe de a « à l'extérieur des racines » (c'est à dire sur $]-\infty\,; x_1[\,\cup\,]x_2; +\infty[$) et du signe opposé « entre les racines » (sur $]x_1; x_2[$).

REMARQUE

Suivant chacun des cas on peut représenter le tableau de signe de P de la façon suivante :

- **Si** $\Delta > 0$ **:** $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines (c'est à dire si $x < x_1$ ou $x > x_2$) et du signe opposé entre les racines (si $x_1 < x < x_2$).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- **Si** $\Delta = 0$ **:** $P(x)$ est toujours du signe de a sauf en x_0 (où il s'annule).

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- **Si** $\Delta < 0$ **:** $P(x)$ est toujours du signe de a.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

EXEMPLES

Si l'on reprend les exemples précédents :

- $P_1(x) = -x^2 + 3x - 2$:
  $\Delta > 0$ et $a < 0$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $P_2(x) = x^2 - 4x + 4$:
  $\Delta = 0$ et $a > 0$.

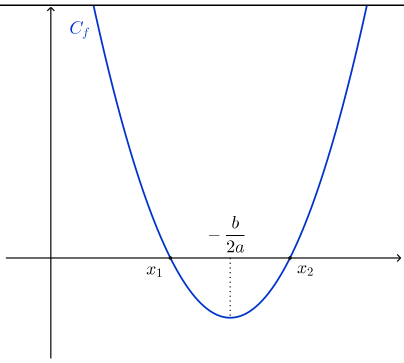
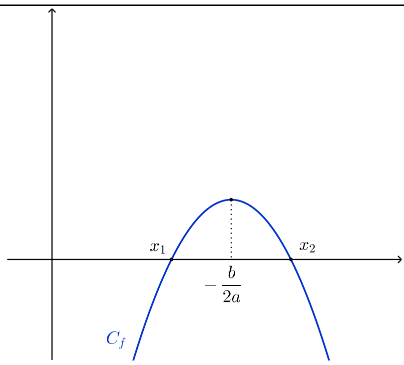
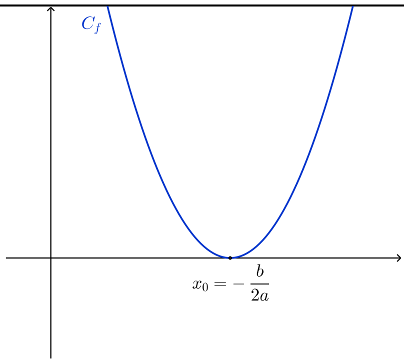
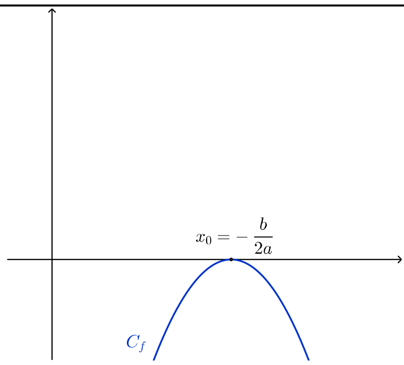
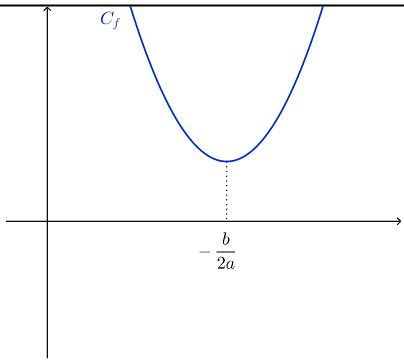
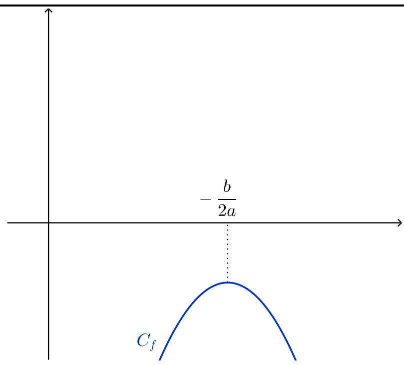
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$+$	

- $P_3(x) = x^2 + x + 1$:
  $\Delta < 0$ et $a > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	

On rappelle que les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des **points d'intersection de la courbe** C_f et de l'**axe des abscisses**.

En regroupant les propriétés de ce chapitre et celles vues en Seconde on peut résumer ces résultats dans le tableau :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	 2 racines : x_1 et x_2	 2 racines : x_1 et x_2
$\Delta = 0$	 1 racine : x_0	 1 racine : x_0
$\Delta < 0$	 Pas de racine	 Pas de racine