FONCTIONS EXPONENTIELLES EN TERMINALE ES ET L

1. FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE Q

THÉORÈME ET DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif.

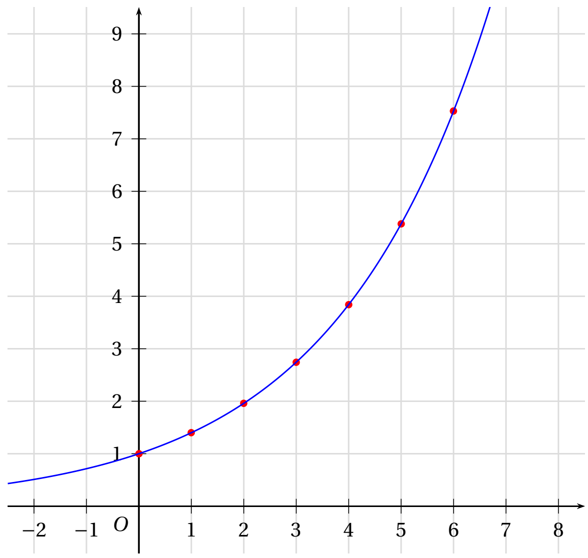
Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = q^n$
- pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ *(relation fonctionnelle)*

Cette fonction s'appelle fonction **exponentielle de base** q et on note $f(x) = q^x$

REMARQUES

- D'après la première propriété et les formules vues au collège, on a notamment : $q^1 = q$, $q^0 = 1$, $q^{-1} = \dfrac{1}{q}$
- Avec la notation exponentielle, la seconde propriété (relation fonctionnelle) s'écrit : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.
  A partir de cette propriété on montre également que pour tout $q > 0$ et tous réels x et y :
  $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$ (en particulier $q^{-y} = \dfrac{1}{q^y}$)
  $[q^x]^y = q^{xy}$
  ce qui généralise les propriétés vues au collège.
- La courbe de la fonction $x \longmapsto q^n$ s'obtient en reliant les points de coordonnées (n, q^n). Pour $n \geqslant 0$ ces points représentent la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q.



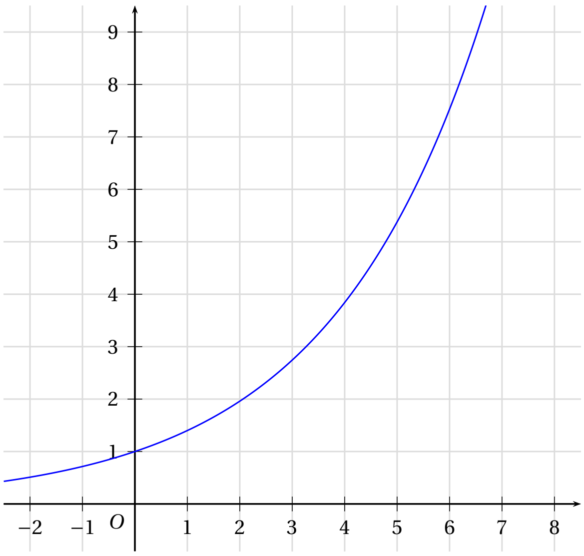
Fonction exponentielle de base $q = 1,4$
(les points correspondent à la suite géométrique $u_0 = 1$ et $q = 1.4$)

PROPRIÉTÉ

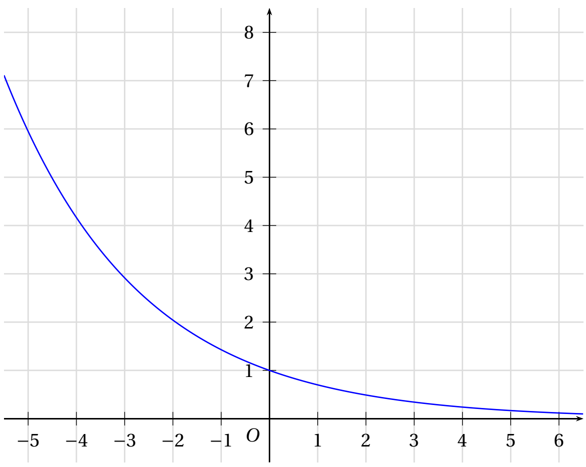
Pour tout réel x et tout réel $q > 0$, q^x est **strictement positif**.

PROPRIÉTÉ

- Pour $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Pour $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$



Fonction exponentielle de base $q > 1$



Fonction exponentielle de base $0 < q < 1$

REMARQUE

Pour $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est constante et égale à 1. Sa courbe représentative est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

2. FONCTION EXPONENTIELLE (DE BASE E)

THÉORÈME ET DÉFINITION

Il existe une valeur de q pour laquelle la fonction $f : x \mapsto q^x$ vérifie $f'(0) = 1$.

Cette valeur est notée e.

La fonction $x \mapsto e^x$ (parfois notée exp) est appelée **fonction exponentielle**.

REMARQUE

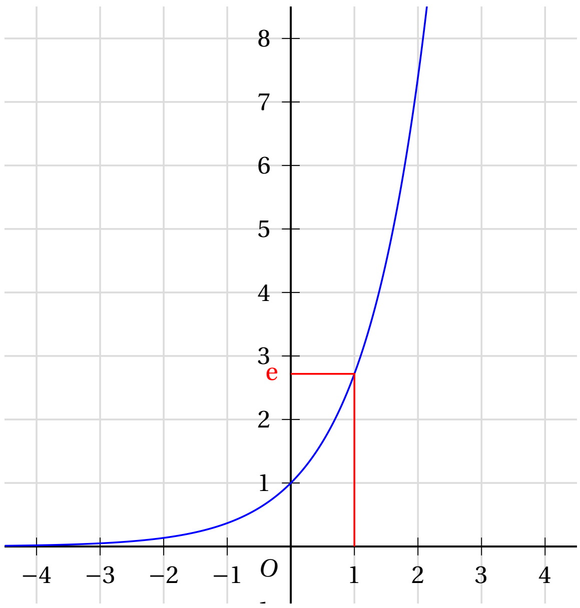
Le nombre e est approximativement égal à 2,71828 (on l'obtient à la calculatrice en faisant e^1 ou $\exp(1)$.

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est **strictement positive** et **strictement croissante** et sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

Cela résulte du fait que $e > 1$ et des résultats de la section précédente.



Fonction exponentielle de base e

REMARQUE

La stricte croissance de la fonction exponentielle entraîne que :

$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$

Cette propriété est fréquemment utilisée dans les exercices (inéquations notamment).

THÉORÈME (DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp'(x) = \exp(x)$

DÉMONSTRATION

Le taux d'accroissement de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[x; x+h]$ est égal à :

$$T = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \times \frac{e^h - 1}{h}$$

Par définition du nombre dérivé, le quotient $\frac{e^h - 1}{h}$ tend vers $\exp'(0) = 1$ quand h tend vers 0, donc T tend vers e^x quand h tend vers 0.

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$$

EXEMPLE

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}$ (on pose $u(x) = -x$ donc $u'(x) = -1$)