

# [BAC] FAMILLE DE FONCTIONS AVEC EXPONENTIELLE

## PARTIE A

Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que

$$f(x) = (x+1)e^x.$$

A.1) On a  $f(x) = xe^x + e^x$ .

Il est évident que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Par ailleurs on admet de par le théorème des croissances comparées que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0. \text{ D'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

A.2)  $f'(x) = (xe^x)' + (e^x)' = e^x + xe^x + e^x = xe^x + 2e^x = (x+2)e^x$ .

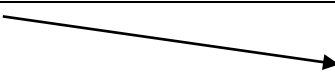

A.3)  $e^x$  étant strictement positif sur  $\mathbb{R}$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x+2)$ . Soit :

$$f'(x) < 0 \text{ pour } x < -2,$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = -2,$$

$$f'(x) > 0 \text{ pour } x > -2.$$

En remarquant que  $f(-2) = -e^{-2}$ , on peut dresser le tableau de variations de  $f$ :

$x$	$-\infty$		$-2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	$0$				
			$-e^{-2}$		$+\infty$

## PARTIE B

Soit la fonction  $g_m$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g_m(x) = x+1 - me^{-x}$  et  $C_m$  sa courbe dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

B.1.a)  $g_m(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = me^{-x} = \frac{m}{e^x} \Leftrightarrow (x+1)e^x = m$ , c'est à dire  $f(x) = m$ .

B1.b) On déduit du tableau de variations de  $f$  que pour :

$m < -e^{-2}$ ,  $C_m$  ne coupe pas l'axe des abscisses,

$m = -e^{-2}$ ,  $C_m$  est tangente à l'axe des abscisses,

$-e^{-2} < m < 0$ ,  $C_m$  coupe deux fois l'axe des abscisses,

$m \geq 0$ ,  $C_m$  coupe une fois l'axe des abscisses.

B.1.c) On a :

$$g_0(x) = x + 1, \quad g_e(x) = x + 1 - ee^{-x} \quad \text{et} \quad g_{-e}(x) = x + 1 + ee^{-x}.$$

On en déduit immédiatement que la courbe 2 sur la figure est celle de  $g_0(x)$ , c'est à dire  $C_0$ .

Par ailleurs :

$$g_e(0) = 1 - e < 0 \quad \text{et}$$

$$g_{-e}(0) = 1 + e > 0.$$

On en déduit que la courbe 3 correspond à  $C_e$  et la courbe 1 à  $C_{-e}$ .

B.1.d) Puisque  $e^{-x}$  est strictement positif sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x} < x + 1 \quad \text{pour} \quad m > 0,$$

$$g_m(x) = x + 1 \quad \text{pour} \quad m = 0 \quad \text{et}$$

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x} > x + 1 \quad \text{pour} \quad m < 0.$$

Donc  $C_m$  est au dessous de  $D$  pour  $m > 0$ ,  
confondue avec  $D$  pour  $m = 0$  et  
au-dessus de  $D$  pour  $m < 0$ .