[BAC] FAMILLE DE FONCTIONS AVEC EXPONENTIELLE

PARTIE A

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que
$f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}$.

A.1) On a $f(x)=x\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}$.
Il est évident que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Par ailleurs on admet de par le théorème des croissances comparées que
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\,\mathrm{e}^{x}\right)=0$. D'où
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

A.2) $f'(x)=\left(x\,\mathrm{e}^{x}\right)'+\left(\mathrm{e}^{x}\right)'=\mathrm{e}^{x}+x\,\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}=x\,\mathrm{e}^{x}+2\,\mathrm{e}^{x}=(x+2)\mathrm{e}^{x}$.

A.3) e^{x} étant strictement positif sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+2)$. Soit :
$f'(x)<0$ pour $x<-2$,
$f'(x)=0$ pour $x=-2$,
$f'(x)>0$ pour $x>-2$.
En remarquant que $f(-2)=-\mathrm{e}^{-2}$, on peut dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

PARTIE B

Soit la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}$ par $g_m(x)=x+1-m\,\mathrm{e}^{-x}$ et C_m sa courbe dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

B.1.a) $g_m(x)=0 \Leftrightarrow x+1=m\,\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{m}{\mathrm{e}^{x}} \Leftrightarrow (x+1)\mathrm{e}^{x}=m$, c'est à dire $f(x)=m$.

B1.b) On déduit du tableau de variations de f que pour :
$m<-\mathrm{e}^{-2}$, C_m ne coupe pas l'axe des abscisses,
$m=-\mathrm{e}^{-2}$, C_m est tangente à l'axe des abscisses,
$-\mathrm{e}^{-2}<m<0$, C_m coupe deux fois l'axe des abscisses,
$m\geq 0$, C_m coupe une fois l'axe des abscisses.

B.1.c) On a :

$g_0(x) = x+1$, $g_e(x) = x+1-\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-x}$ et $g_{-e}(x) = x+1+\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-x}$.

On en déduit immédiatement que la courbe 2 sur la figure est celle de $g_0(x)$, c'est à dire C_0.

Par ailleurs :

$g_e(0) = 1-\mathrm{e} < 0$ et

$g_{-e}(0) = 1+\mathrm{e} > 0$.

On en déduit que la courbe 3 correspond à C_e et la courbe 1 à C_{-e}.

B.1.d) Puisque e^{-x} est strictement positif sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$g_m(x) = x+1-m\mathrm{e}^{-x} < x + 1$ pour $m > 0$,

$g_m(x) = x+1$ pour $m = 0$ et

$g_m(x) = x+1-m\mathrm{e}^{-x} > x + 1$ pour $m < 0$.

Donc Cm est au dessous de D pour $m > 0$,

confondue avec D pour $m = 0$ et

au-dessus de D pour $m < 0$.