[BAC] EXPONENTIELLE – LIMITES – TANGENTE

Soient $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ et $g(x)=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1) On voit aisément que $f(0)=g(0)=1$, ce qui implique que les courbes représentatives C_f et C_g de f et g ont un point commun d'abscisse 0 et d'ordonnée 1.
Le coefficient directeur des tangentes en ce point à C_f et C_g est donnée, respectivement, par les valeurs de $f'(0)$ et $g'(0)$.
on a $f'(x)=\mathrm{e}^{x}$ d'où $f'(0) = 1$

et $g'(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ d'où $g'(0) = 1$.
Donc les tangentes en (0 ; 1) à C_f et C_g ayant même coefficient directeur elles sont confondues en une seule droite Δ dont on détermine facilement l'équation : $y = x + 1$.

2) Soit $h(x)=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-x-2$ définie sur $\mathbb{R}$.

2.a) En observant que $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \to 0$ et $(-x)\to +\infty$ quand $x\to -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

2.b) On peut écrire $h(x)=(x)\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-(x)1-(x)\dfrac{2}{x}$ et en mettant x en facteur :

$h(x)=x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\dfrac{2}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

2.c) On calcule la dérivée de h : $h'(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$. La fonction $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ est monotone croissante sur $\mathbb{R}$ et varie de 0 à $+\infty$ quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.
On a $h'(0) = 0$ et donc :
$h'(x) < 0$ pour $x < 0$ et
$h'(x) > 0$ pour $x > 0$

2.d) En remarquant que $h(0) = 0$, on peut dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.e) D'après le tableau ci-dessus, on voit que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

C'est à dire $2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geq 0$ d'où l'on tire : $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.

2.f) On en déduit que Δ est au-dessous de C_g sauf pour $x = 0$ où elle est tangente à C_g. (Voir graphe ci-dessous).

3)

3.a) $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1$

3.b) On remarque que l'expression ci-dessus est égale à $f(x) - g(x)$. De plus, étant un carré qui s'annule pour $x = 0$, elle est ≥ 0 sur $\mathbb{R}$. D'où l'on déduit que :
$f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et C_f est au-dessus de C_g sauf pour $x = 0$ où les deux courbes sont tangentes. (Voir graphe ci-dessous).