# EXPONENTIELLE – LIMITES ET ÉTUDE DE FONCTION

1) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{e^x}{x} \right) = +\infty$. Rechercher la limite de $xe^x$ quand $x$ tend vers $-\infty$ revient à chercher la limite de $-xe^{-x} = -\dfrac{x}{e^x} = -\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}$ quand $x$ tend vers $+\infty$. De ce qui précède, on voit que cette limite est égale à 0. On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$

2) On considère $f$ définie sur **R** par $f(x) = xe^x$.

2.a) Calculons la dérivée de $f$ :

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$. Comme $e^x$ est strictement positive sur $]-\infty\,;+\infty[$, $f'$ est du signe de $(x + 1)$, c'est à dire :

$f'(x) < 0$ pour $x < -1$,

$f'(x) = 0$ pour $x = -1$,

$f'(x) > 0$ pour $x > -1$.

En remarquant que $f(-1) = -e^{-1}$, on peut dresser le tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-e^{-1}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2.b) On calcule facilement que $f'(0) = 1$. Par ailleurs $f(0) = 0$. L'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $C$ représentative de $f$ au point d'abscisse 0 est donc $y = x$.

2.c) $f$ est d'abord décroissante puis croissante et, puisque $f'(-1) = 0$, on en déduit que $f$ passe par un minimum de coordonnées $(-1\,;-e^{-1})$. $C$ et $(T)$ sont représentées ci-dessous :