3.b)

$$d_0 = |z_1 - z_0|$$

$$z_1 - z_0 = \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

$$d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.c) Pour tout entier n non nul on a :

$z_{n+2} = \left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n+1}$ et $z_{n+1} = \left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$

donc $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$.

3.d) Le module du produit de deux complexes étant égal au produit de leurs modules, on a :

$|z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right||z_{n+1} - z_n|$, c'est à dire, $d_{n+1} = d_n\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$(d_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ainsi pour tout entier n naturel, $d_n = d_0 q^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4)

4.a) D'après 2.a), on a $|z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

d'où $|z_{n+1}|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)} = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ et $|z_n|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$. Par ailleurs $d_n{}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$.

Donc $|z_n|^2 + d_n{}^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ et,

$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n{}^2$.

4.b) D'après 3.a), l'égalité précédente est équivalente à : $\left\|\overrightarrow{OA_{n+1}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OA_n}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right\|^2$.

Ceci implique que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.