SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

1. SUITES ARITHMÉTIQUES

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite arithmétique.

REMARQUE

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on pourra calculer la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si on constate que la différence est une constante r, on pourra affirmer que la suite est arithmétique de raison r.

EXEMPLE

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 5$.

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 5 - (3n+5) = 3n + 3 + 5 - 3n - 5 = 3$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$

PROPRIÉTÉ

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et k :

$$u_n = u_k + (n-k) \times r$$

En particulier :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 5$.

$u_{100} = 5 + 2 \times 100 = 205$

PROPRIÉTÉ

Réciproquement, si a et b sont deux nombres réels et si la suite (u_n) est définie par $u_n = a \times n + b$ alors cette suite est une suite arithmétique de raison $r = a$ et de premier terme $u_0 = b$.

DÉMONSTRATION

$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an+b) = an + a + b - an - b = a$

et

$u_0 = a \times 0 + b = b$

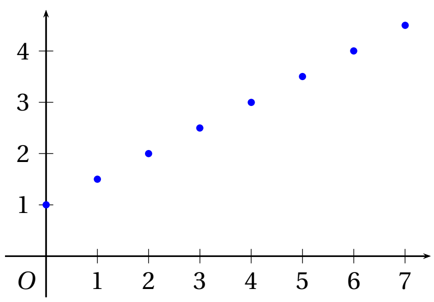
PROPRIÉTÉ

La représentation graphique d'une suite arithmétique est formée de points alignés.

REMARQUE

Cela se déduit immédiatement du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$ donc les points représentant la suite sont sur la droite d'équation $y = rx + u_0$

EXEMPLE



Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$

THÉORÈME

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante
- si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.

DÉMONSTRATION

Ce résultat découle immédiatement de $u_{n+1} - u_n = r$

THÉORÈME (SOMME DES PREMIERS ENTIERS)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$0+1+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

DÉMONSTRATION

Une démonstration astucieuse consiste à réécrire la somme en inversant l'ordre des termes :

$S = 0+1+2+...+n$**(1)**
$S = n+n-1+n-2+...+0$**(2)**

Puis on additionne les lignes **(1)** et **(2)** termes à termes. Dans le membre de gauche on trouve que tous les termes sont égaux à n ($0+n=n$; $1+n-1=n$; $2+n-2=n$, etc.). Comme en tout il y a $n+1$ termes on trouve :

$S+S = n+n+n+...+n$

$2S = n(n+1)$

$S = \frac{n(n+1)}{2}$

EXEMPLE

Soit à calculer la somme $S_{100} = 1+2+...+100$.

$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$

2. SUITES GÉOMÉTRIQUES

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q s'appelle la **raison** de la suite géométrique (u_n).

REMARQUE

Pour démontrer qu'une suite (u_n) dont les termes sont non nuls est une suite géométrique, on pourra calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si ce rapport est une constante q, on pourra affirmer que la suite est une suite géométrique de raison q.

EXEMPLE

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{3}{2^n}$.

Les termes de la suite sont tous strictement positifs et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{2^{n+1}} \div \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2}$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

PROPRIÉTÉ

Si la suite (u_n) est géométrique de raison q, pour tous entiers naturels n et k :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}.$$

En particulier :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

PROPRIÉTÉ

Réciproquement, soient a et b deux nombres réels. La suite (u_n) définie par $u_n = a \times b^n$ suite est une suite géométrique de raison $q = b$ et de premier terme $u_0 = a$.

DÉMONSTRATION

$u_{n+1} = a \times b^{n+1} = a \times b^n \times b = u_n \times b$

et

$u_0 = a \times b^0 = a \times 1 = a$

THÉORÈME

Soit (u_n)une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme strictement positif :

- Si q > 1, la suite (u_n) est strictement croissante
- Si 0 < q < 1, la suite (u_n) est strictement décroissante
- Si q=1, la suite (u_n)est constante

REMARQUES

- Si le premier terme est strictement négatif, le sens de variation est inversé.
- Si la raison est strictement négative, la suite n'est ni croissante ni décroissante.

THÉORÈME

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $q \neq 1$

$$1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

REMARQUE

Cette formule n'est pas valable pour $q = 1$. Mais dans ce cas tous les termes de la somme valent 1 ; la somme est donc égale au nombre de termes $n+1$

DÉMONSTRATION

On multiplie chaque membre par q. Cela incrémente chacun des exposants de q :

$S = 1+q+q^2+...+q^n$ **(1)**
$qS = q+q^2+q^3+...+q^{n+1}$ **(2)**

On soustrait termes à termes les égalités **(1)** et **(2)** ; tous les termes se simplifient sauf le premier et le dernier :

$$S - qS = 1-q+q-q^2+q^2-q^3+...+q^n-q^{n+1}$$

$$(1-q)\,S = 1-q^{n+1}$$

$$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

EXEMPLE

Soit à calculer la somme $S = 1+2+4+8+16...+2^{10}$

$$S = \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = \frac{1-2048}{1-2} = \frac{-2047}{-1} = 2047$$