On admet que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t)$ (4).

3.c) On remarque que $x \in [0,+\infty[$ implique $0 < e^{-x} \leq 1$. On peut donc remplacer t par e^{-x} dans les inégalités (3) et (4), ce qui donne :
$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \leq \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$.

3.d) En rappelant que $I = \int_0^1 \ln(1+e^{-x})\,dx$, on peut écrire (d'après la PARTIE A) :
$\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx < I \leq \int_0^1 e^{-x}\,dx$

Cherchons une primitive P de $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$. Posons $u = e^{-x}+1$. Alors $u' = -e^{-x}$ et
$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = -\frac{u'}{u}$ d'où $P(x) = -\ln(u) = -\ln(e^{-x}+1)$. On en tire :

$\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx = P(1) - P(0) = -\ln(e^{-1}+1) + \ln 2 = \ln\frac{2}{1+e^{-1}}$

D'autre part, une primitive Q de e^{-x} est $Q(x) = -e^{-x}$ d'où l'on tire :
$\int_0^1 e^{-x}\,dx = Q(1) - Q(0) = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1}$. Finalement,
$\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}$. CQFD.

3.e) La calculatrice nous donne au centième près : $\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) = 0{,}38$ et $1 - e^{-1} = 0{,}63$.
Un encadrement de I d'amplitude 0,4 serait : $0{,}3 \leq I \leq 0{,}7$.

4) 0,5 mm correspond à 0,025 unité sur le graphe de l'énoncé.
On recherche l'ensemble des valeurs de x telles que $f(x) - x \leq 0{,}025$, c'est à dire :
$\ln(1+e^{-x}) \leq 0{,}025$.
Résolvons l'équation $\ln(1+e^{-x}) = 0{,}025$.
On peut écrire $e^{\ln(1+e^{-x})} = e^{0{,}025} \Rightarrow 1+e^{-x} = e^{0{,}025} \Rightarrow e^{-x} = e^{0{,}025} - 1 \Rightarrow -x = \ln(e^{0{,}025} - 1)$.
Finalement $x = -\ln(e^{0{,}025} - 1) = \ln\left(\frac{1}{e^{0{,}025} - 1}\right)$. En notant que la fonction $x \mapsto \ln(1+e^{-x})$ est décroissante sur $[0,+\infty]$, on en déduit que $f(x) - x \leq 0{,}025$ pour tout $x > \ln\left(\frac{1}{e^{0{,}025} - 1}\right)$.

NB) $\ln\left(\frac{1}{e^{0{,}025} - 1}\right)$ est égal à 3,676 au millième près.