VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

INTRODUCTION

Il arrive qu'une variable aléatoire puisse prendre n'importe quelle valeur sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, $X(\Omega) = I$.

Une telle variable est dite variable aléatoire réelle continue.

Pour une telle variable, les événements intéressants ne sont plus $X = 5$, $X = 20$, etc... , mais $X \leqslant 5$, $5 \leqslant X \leqslant 20$ etc...

1. GÉNÉRALITÉS

DÉFINITION

Une variable aléatoire réelle **continue** est une application définie sur un ensemble Ω et prenant toutes les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

C'est le cas par exemple d'une variable aléatoire qui mesure la durée de vie d'un organisme ou la taille d'une personne.

Plus généralement, les variables qui résultent d'une mesure peuvent généralement être considérées comme des variables aléatoires continues.

DÉFINITION

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $I = [a; b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

On dit que X est une variable aléatoire réelle continue de **densité** f si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et tout $x_2 \in I$ $(x_1 \leqslant x_2)$:

$$P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

EXEMPLE

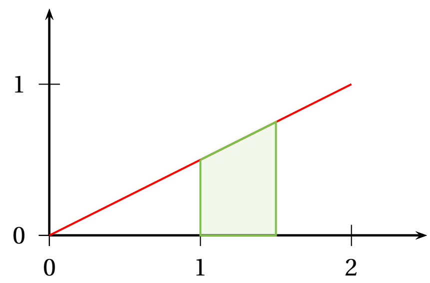
La fonction f définie sur $I = [0; 2]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2}$ est une fonction continue et positive sur I et :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1$$

Si X est la variable aléatoire réelle à valeur dans I de **densité** f on a, par exemple :

$P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5) = \int_1^{1{,}5} f(x)\,dx$

donc $P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$ est l'aire (en u.a.) colorée ci-dessous.



Un calcul simple montre que $P(1 \leqslant X \leqslant 1{,}5) = \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^{1{,}5} = 0{,}3125$

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle $[a; b]$.

On appelle **espérance mathématique** de X le nombre :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$$

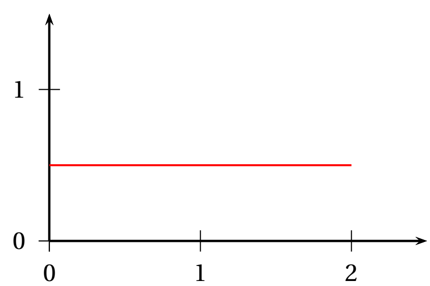
REMARQUE

Comme dans le cas d'une variable aléatoire discrète, l'espérance mathématique représente la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X.

2. LOI UNIFORME SUR UN INTERVALLE

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a; b]$ si sa densité de probabilité f est définie sur $[a; b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$



Densité de la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2]$

REMARQUE

On vérifie facilement que $\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = 1$

PROPRIÉTÉ

Si X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ et si c et d sont deux réels tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, alors :

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

DÉMONSTRATION

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$

PROPRIÉTÉ

L'espérance mathématique d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

3. LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

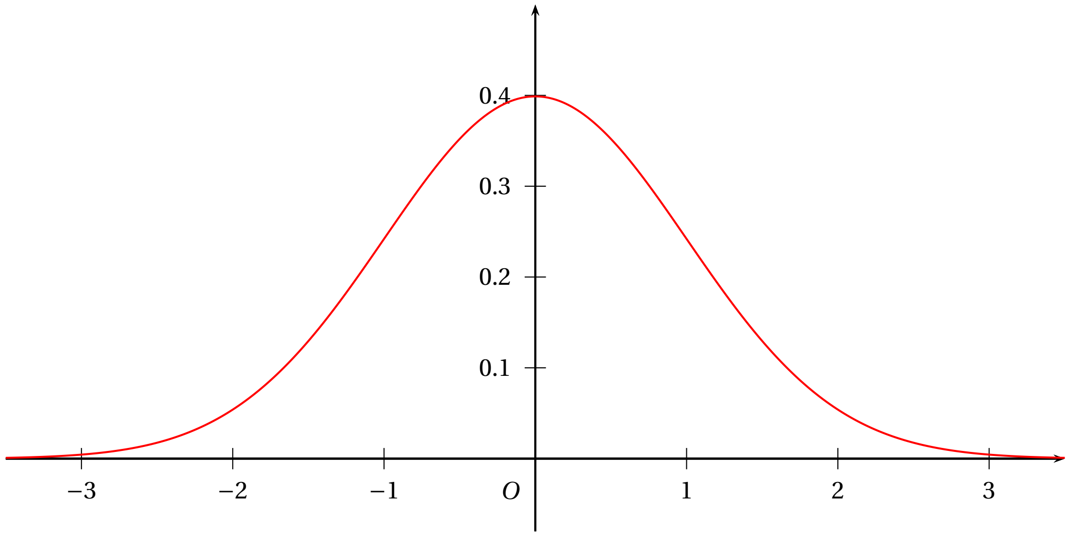
DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** sur $\mathbb{R}$ (notée $\mathcal{N}(0; 1)$) si sa densité de probabilité f est définie par :

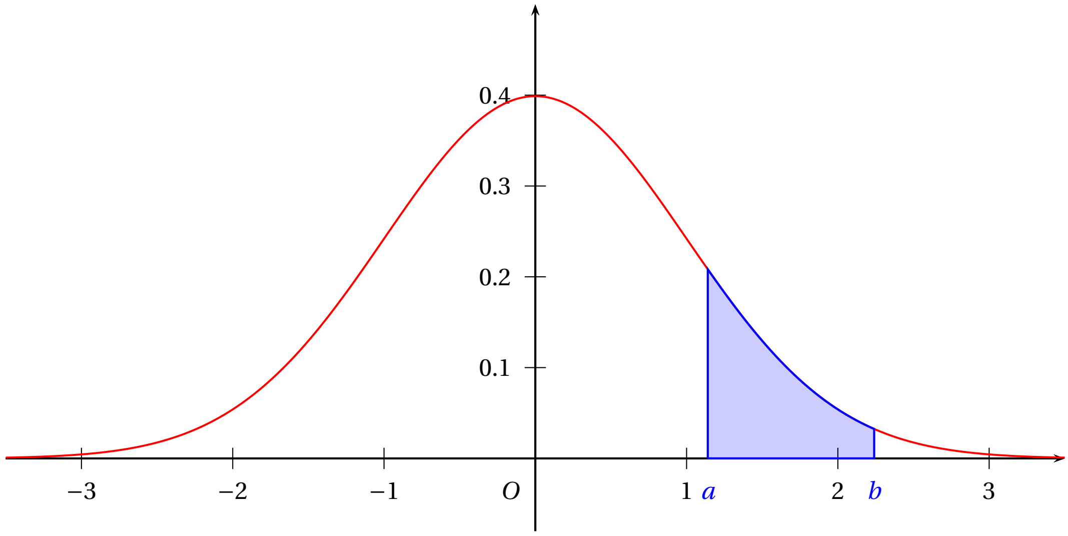
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

REMARQUES

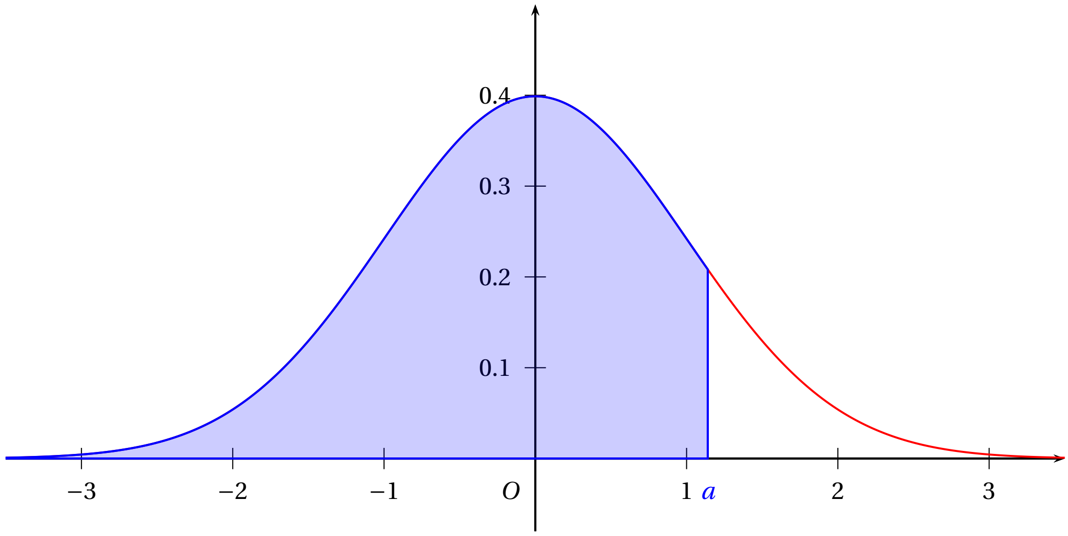
- On admet que f définit bien une densité, c'est à dire que l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f est égale à 1
- La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$ sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :



- $p(a \leqslant X \leqslant b)$ est l'aire du domaine coloré ci-dessous :



- $p(X \leqslant a)$ est l'aire du domaine coloré ci-dessous :



- Il n'est pas possible d'exprimer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ à l'aide des fonctions usuelles. Toutefois, les calculatrices scientifiques permettent de calculer directement $p(a \leqslant X \leqslant b)$ pour une loi normale.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et α un réel quelconque :

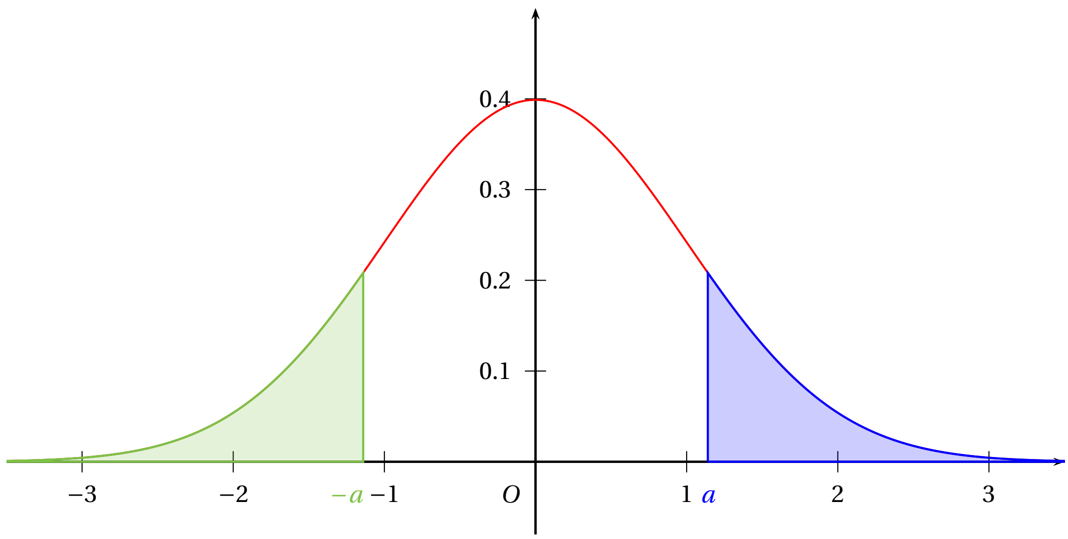
- $p(X \leqslant 0) = p(X \geqslant 0) = 0,5$
- $p(X \leqslant -a) = p(X \geqslant a)$
- $p(-\alpha \leqslant X \leqslant a) = 1 - 2 \times p(X \geqslant a) = 2 \times p(X \leqslant a) - 1$

REMARQUE

Ces propriétés résultent du fait que :

- la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe est égale à 1.

On retrouve facilement ces propriétés à l'aide d'une figure par exemple pour la seconde formule :



$p(X \leqslant -a) = p(X \geqslant a)$

4. LOI NORMALE QUELCONQUE

DÉFINITION ET THÉORÈME

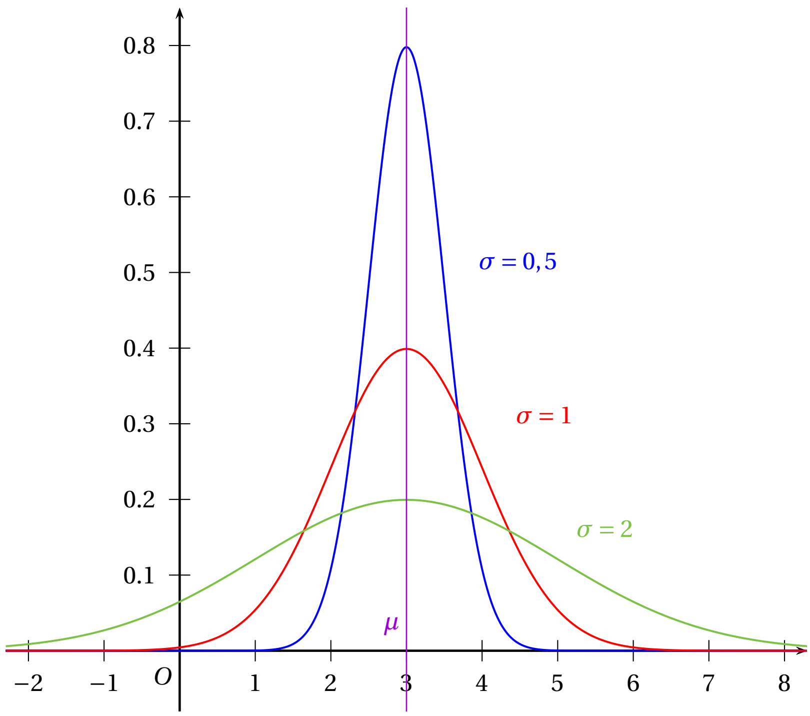
Soient deux réels μ et $\sigma > 0$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi normale de paramètres** μ **et** σ^2 (notée $\mathscr{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$) si la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

L'espérance mathématique de X est μ et son écart-type σ (et donc sa variance σ^2)

REMARQUE

La courbe représentative de la distribution d'une loi $\mathscr{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ est une courbe «en cloche» qui admet la droite d'équation $x = \mu$ comme axe de symétrie. Elle est plus ou moins «étirée» selon les valeurs de σ



$\mu = 3$ et $\sigma = 0,5\,;\,1\,;\,2$

PROPRIÉTÉ (RÈGLE DES UN-DEUX-TROIS SIGMAS)

Si X suit une loi normale $\mathscr{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ alors :

- $p\left(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma\right) \approx 0,68$ (à 10^{-2} près)
- $p\left(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma\right) \approx 0,95$ (à 10^{-2} près)
- $p\left(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma\right) \approx 0,997$ (à 10^{-3} près)

EXEMPLE

Si X suit une loi normale $\mathscr{N}\left(11;3^2\right)$ alors :

$p\,(5 \leqslant X \leqslant 17) \approx 0,95$