FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN EN TERMINALE S

1. DÉFINITION DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

THÉORÈME ET DÉFINITION

Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^y = x$, d'inconnue y, admet une **unique** solution.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à $x > 0$, associe le réel y solution de l'équation $e^y = x$.

REMARQUE

Pour $x \leqslant 0$, par contre, l'équation $e^y = x$ n'a **pas de solution**

PROPRIÉTÉS

- Pour tout réel $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$: $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln(x)$
- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel x : $\ln\left(e^x\right) = x$

REMARQUES

- Ces propriétés se déduisent immédiatement de la définition
- On dit que les fonctions «logarithme népérien» et «exponentielle» sont *réciproques*
- On en déduit immédiatement : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

2. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

THÉORÈME

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est définie par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

DÉMONSTRATION

On dérive l'égalité $e^{\ln(x)} = x$ membre à membre.

D'après le théorème de dérivation des fonctions composées on obtient :

$\ln'(x) \times e^{\ln(x)} = 1$

C'est à dire :

$\ln'(x) \times x = 1$

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$

PROPRIÉTÉ

La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

Sa dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ est strictement positive sur $]0;+\infty[$

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$f' = \frac{u'}{u}$$

DÉMONSTRATION

On utilise le théorème de dérivation de fonctions composées .

EXEMPLE

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

LIMITES

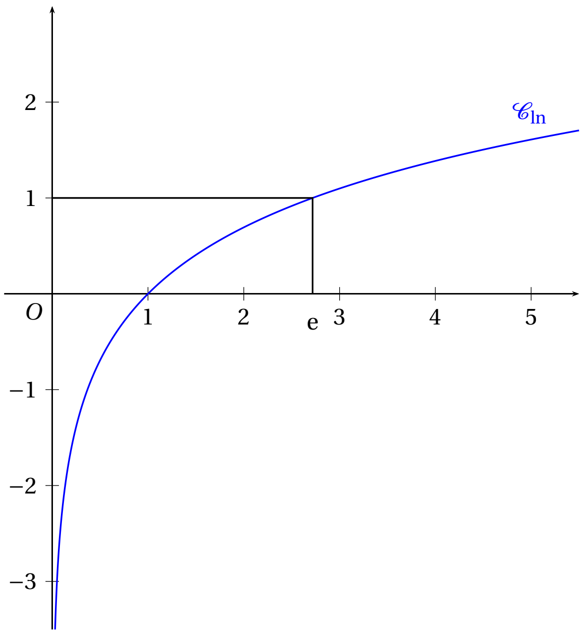
- $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

REMARQUES

- Ces résultats permettent de tracer le tableau de variation et la courbe représentative de la fonction logarithme népérien :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	‖			$+$			
$f(x) = \ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

Tableau de variation de la fonction logarithme népérien



Graphique de la fonction logarithme népérien

THÉORÈME («CROISSANCE COMPARÉE»)

- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

REMARQUE

Comme dans le cas de la fonction exponentielle, on peut généraliser les deux premières formules :

Pour tout entier $n > 1$:

- $\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

THÉORÈME

Si a et b sont 2 réels strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$

REMARQUES

- Le théorème précédent résulte de la stricte croissance de la fonction logarithme népérien.
- En particulier, comme $\ln(1) = 0$: $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$. N'oubliez donc pas que $\ln(x)$ **peut être négatif** (si $0 < x < 1$) ; c'est une cause d'erreurs fréquente dans les exercices notamment avec des inéquations !

3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

THÉORÈME

Si a et b sont 2 réels strictement positifs et si $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} \ln a$

EXEMPLES

- $\ln(4) = \ln\left(2^2\right) = 2\ln(2)$
- Pour $x > 1$: $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$
  Cette égalité peut être intéressante (pour calculer la dérivée par exemple) mais il faut que $x > 1$.
  Si $x < -1$, l'expression $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ est définie mais pas $\ln(x+1) - \ln(x-1)$.