BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

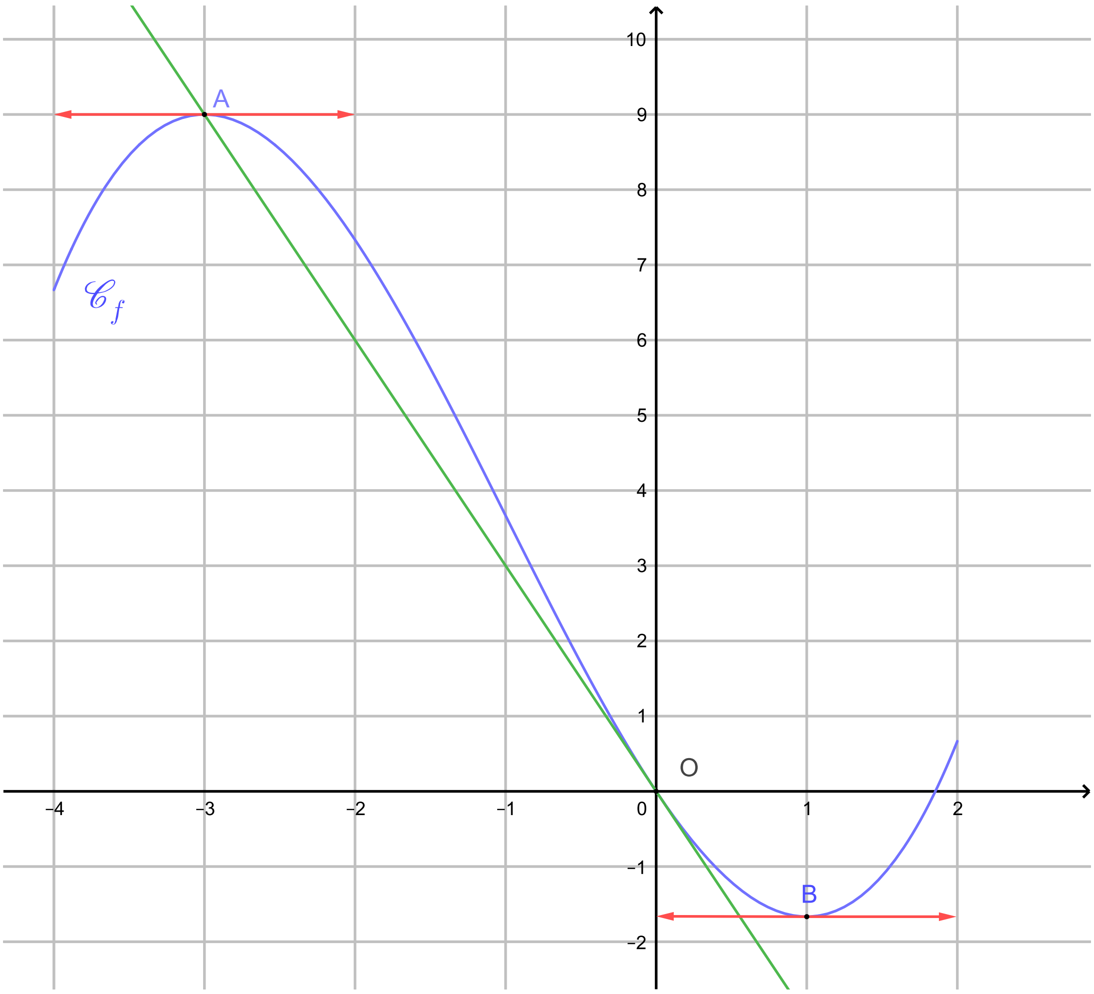
Le sujet comporte 8 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (*5 points*)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie en justifiant le choix effectué.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Pour les questions **1.**, **2.** et **3.**, f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 2]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$, dans un repère orthogonal, est tracée ci-après.



La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine O du repère et par les points $A(-3\ ;\ 9)$ et $B\left(1\ ;\ -\dfrac{5}{3}\right)$.

Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A et B sont parallèles à l'axe des abscisses.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point O passe par le point A.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

- **Question 1 :**

  La valeur exacte de $f(0)$ est :

  a. 0
  b. 1
  c. $-\dfrac{5}{3}$
  d. autre réponse

- **Question 2 :**

  La valeur exacte de $f'(0)$ est :

  a. 0
  b. -3
  c. 3
  d. autre réponse

- **Question 3 :**

  L'ensemble S des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est :

  a. $S = \emptyset$
  b. $S = \{0\}$
  c. $S = \{-3\ ;\ 1\}$
  d. $S = \left\{-\dfrac{5}{3}\ ;\ 9\right\}$

- **Question 4 :**

  Lors des soldes d'hiver, le prix d'un article est passé de 150 euros à 120 euros.

  Quel est le taux de la remise accordée par le vendeur ?

  a. 15%
  b. 20%
  c. 25%
  d. 30%

- **Question 5 :**

  De 2005 à 2010, la population d'une ville a augmenté de 5% puis, de 2010 à 2015, a diminué de 3%.

  Le taux d'évolution global de cette population entre 2005 et 2015 est :

  a. 2%
  b. 8,15%
  c. 1,85%
  d. 0,2%

EXERCICE 2 (*5 points*)

Une entreprise produit et commercialise des granulés de céréales destinés à l'alimentation des volailles.

Elle produit, chaque jour, entre 0 et 5 tonnes de granulés.

On note x le nombre de tonnes de granulés produits quotidiennement par cette entreprise.

Le coût de fabrication quotidien, exprimé en centaines d'euros, peut être modélisé par une fonction C, définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est fournie en Annexe.

L'entreprise vend la totalité des granulés produits au prix de 5 400 euros la tonne.

Partie A

1. Expliquer pourquoi la recette quotidienne de l'entreprise, exprimée en centaines d'euros, peut être modélisée par la fonction R, définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$, par :

$$R(x) = 54x.$$

où x représente le nombre de tonnes de granulés produits en une journée.

Tracer la représentation $\mathscr{R}$ de la fonction R sur le graphique fourni en Annexe (à rendre avec la copie).

2. Estimer, à l'aide du graphique, le coût de fabrication quotidien et la recette quotidienne pour une production de 2 tonnes puis de 5 tonnes.

Indiquer, dans chacun de ces deux cas, si l'entreprise est bénéficiaire.

3. Par lecture graphique, estimer l'intervalle auquel doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que le coût de fabrication de x tonnes de granulés, en centaines d'euros, peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par :

$$C(x) = 8x^3 - 60x^2 + 150x.$$

1. Calculer $C'(x)$.

En déduire que la fonction C est croissante sur $[0 ; 5]$.

2. On note $B(x)$ le résultat net quotidien (en centaines d'euros) de l'entreprise, c'est à dire la différence entre la recette et le coût de fabrication quotidien.

Exprimer $B(x)$ puis $B'(x)$ en fonction de x.

3. Tracer le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

4. Pour quelle production le résultat net de l'entreprise est-t-il maximal ?

   Quel est alors ce maximum ?

EXERCICE 3 (*5 points*)

Antoine et Bruno travaillent dans deux entreprises différentes depuis le premier janvier 2015.

En 2015, leurs salaires annuels s'élevaient à 19 500 euros pour Antoine et à 21 000 euros pour Bruno.

Chaque année, leurs salaires sont réévalués de la façon suivante :

- le salaire d'Antoine augmente de 3% par an ;
- le salaire de Bruno augmente de 500 euros par an.

On note a_n et b_n les salaires respectifs d'Antoine et de Bruno (en euros) pour l'année $(2015 + n)$.

On a donc $a_0 = 19\,500$ et $b_0 = 21\,000$.

Partie A

1. **a.** Calculer a_1.

   b. Établir une relation entre a_{n+1} et a_n.

   c. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

2. **a.** Exprimer a_n en fonction de n.

   b. Quel sera le salaire d'Antoine en 2030 ?

Partie B

1. **a.** Calculer b_1.

   b. Établir une relation entre b_{n+1} et b_n.

   c. Quelle est la nature de la suite (b_n) ?

2. **a.** Exprimer b_n en fonction de n.

   b. D'Antoine ou de Bruno, qui percevra le salaire le plus élevé en 2030 ? Justifier la réponse.

Partie C

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel a et b sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 19 500 Affecter à b la valeur 21 000

Traitement :	Tant que $a \leqslant b$ faire
	    n prend la valeur $n+1$
	    a prend la valeur $1,03a$
	    b prend la valeur $b+500$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher 2015+n

1. Recopier et compléter le tableau ci-après, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. On arrondira les résultats à l'unité près.

Valeur de n	0	1	$\cdots$
Valeur de a	19 500	$\cdots$	$\cdots$
Valeur de b	21 000	$\cdots$	$\cdots$
Condition $a \leqslant b$	vraie	$\cdots$	$\cdots$

2. Quelle valeur affichera cet algorithme en sortie ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 (*5 points*)

Un constructeur fabrique des tablettes informatiques. Le coût de production est 250 euros par unité.

Les tablettes sont garanties contre un défaut de fonctionnement de l'écran ou du disque dur.

Cette garantie permet à l'acheteur, en cas de panne, d'effectuer les réparations suivantes aux frais du constructeur :

- réparation de l'écran (coût pour le constructeur : 50 euros) ;
- réparation du disque dur (coût pour le constructeur : 30 euros).

Une étude statistique a montré que :

- 3% des tablettes présentent un défaut de disque dur ;

- 4% des tablettes présentent un défaut d'écran ;
- 95% des tablettes ne présentent aucun des deux défauts.

Partie A

1. Recopier et compléter le tableau ci-après à l'aide des données de l'énoncé.

	Disque dur OK	Disque dur défectueux	Total
Écran OK	...	...	...
Écran défectueux	...	...	...
Total	...	3%	100 %

2. Le prix de revient d'une tablette est égal à son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. On note X la variable aléatoire correspondant au prix de revient d'une tablette.
Établir la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

4. L'entreprise vend chaque tablette 400 euros. Quel sera son bénéfice mensuel moyen si elle vend 750 tablettes par mois ?

Partie B

Un établissement scolaire achète 50 tablettes à ce constructeur.

On suppose que l'on peut assimiler cet achat à un tirage aléatoire de 50 tablettes avec remise, les tirages étant supposés indépendants.

On rappelle que 95% des tablettes ne présentent aucun défaut couvert par la garantie constructeur.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tablettes achetées par l'établissement présentant un défaut couvert par la garantie constructeur.

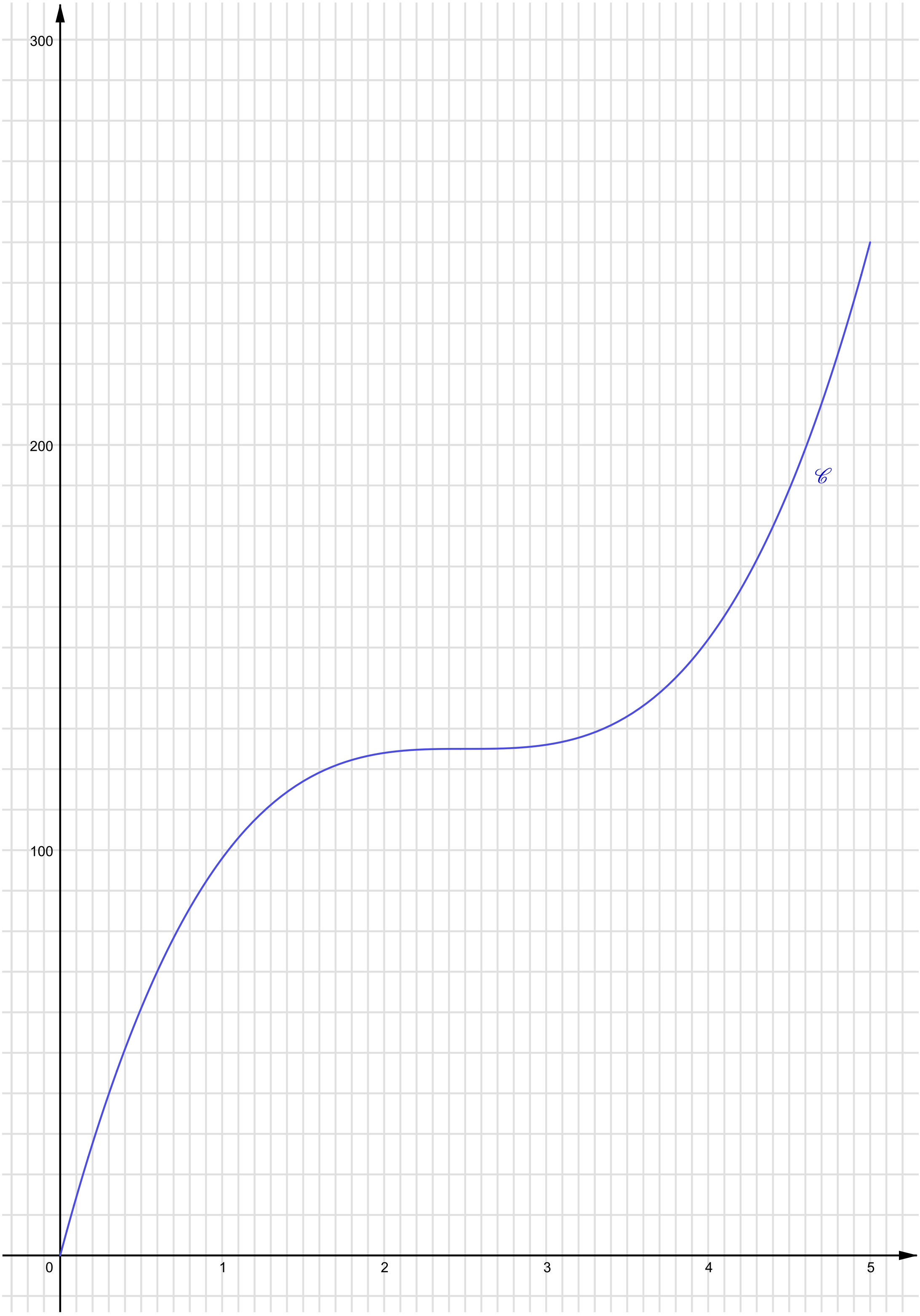
1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'aucune des tablettes achetées par l'établissement ne présente de défaut couvert par la garantie constructeur ?

3. Quelle est l'espérance mathématique de Y ? Interpréter ce résultat.

ANNEXE

À rendre avec la copie



BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (*5 points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse exacte ***en justifiant le choix effectué****.*

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

- **Question 1 :**

  Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire tels que $p(A) = 0,7$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cap B) = 0,4$.

  Alors :

  a. $p(A \cup B) = 0,9$
  b. $p_A(B) = 0,7$
  c. $p_B(A) = 0,8$

- **Question 2 :**

  Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

  Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(0\ ;\ 1)$ est :

  a. $y = -x + 1$
  b. $y = x - 1$
  c. $y = 3x^2 + 4x - 1$

- **Question 3 :**

  On lance trois dés équilibrés à six faces. La probabilité p d'obtenir au moins un « 6 » (arrondie à 10^{-2}) est :

  a. $p \approx 0,17$
  b. $p \approx 0,42$
  c. $p \approx 0,84$

- **Question 4 :**

  f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ dont le tableau de variations est donné ci-après :

x	0		3		10
$f(x)$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

  L'équation $f(x) = 3$:

  a. n'admet aucune solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$

b. admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$
c. admet deux solutions sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$

- **Question 5 :**

  On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

  $$u_{n+1} = 2u_n.$$

  La somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ ... \ + u_{10}$ vaut :

  a. $S = 1\ 023$
  b. $S = 2\ 047$
  c. $S = 4\ 095$

EXERCICE 2 (*6 points*)

Le propriétaire d'un restaurant a constaté que, lorsque le prix de son menu était fixé à 25 euros, il accueillait 20 clients, et qu'à chaque baisse de 1 euro, il attirait 2 clients supplémentaires.

Partie A

1. De quel pourcentage le prix a-t-il baissé lorsqu'il est passé de 25 à 24 euros ?

2. Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre de clients lorsque celui-ci passe de 20 à 22 clients ?

3. L'**élasticité** de la demande par rapport au prix est le rapport :

   $$e = \frac{V_c}{V_p}$$

   où V_c désigne la variation en pourcentage du nombre de clients et V_p la variation en pourcentage du prix du menu.
   Le nombre de clients variant en sens contraire du prix, ce rapport sera **négatif**.

   a. Montrer que l'élasticité de la demande par rapport au prix lorsque le prix du menu passe de 25 à 24 euros est égale à -2,5.

   b. Déterminer le nombre de clients pour un menu à 20 euros puis pour un menu à 19 euros.
   En déduire l'élasticité de la demande par rapport au prix lorsque le prix du menu passe de 20 à 19 euros.

4. La recette est égale au produit du nombre de clients par le prix du menu.

Calculer le montant de la recette lorsque le prix du menu est 25 euros puis lorsque le prix du menu est 20 euros.

Partie B

1. On admet que la fonction f donnant le nombre de clients en fonction du prix du menu x est définie sur l'intervalle $[10 ; 25]$ par :

$$f(x) = 70 - 2x.$$

Exprimer la recette du restaurant en fonction de x.

Pour quel prix x_0 la recette est-elle maximale ?

2. Pour $x \in [10 ; 25]$, on note $e(x)$ l'élasticité de la demande par rapport au prix du menu lorsque ce dernier passe de x à $x - 1$ euros.

Montrer que $e(x) = x\,\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

3. Calculer $e'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction e sur l'intervalle $[10 ; 25]$.

Montrer que $e(x_0) = -1$.

EXERCICE 3 (*4 points*)

Un cinéma de trois salles propose le choix entre les films **A**, **B** ou **C**. Suivant leur âge, les spectateurs payent leur place plein tarif ou bénéficient d'un tarif réduit.

Le directeur de la salle a constaté que :

- 30% des spectateurs bénéficient du tarif réduit (les 70% restant payant plein tarif) ;
- 45% des spectateurs payant plein tarif et 40% des spectateurs bénéficiant du tarif réduit ont été voir le film **A** ;
- 30% des spectateurs payant plein tarif et 37% des spectateurs bénéficiant du tarif réduit ont été voir le film **B** ;
- 25% des spectateurs payant plein tarif et 23% des spectateurs bénéficiant du tarif réduit ont été voir le film **C**.

On choisit au hasard un spectateur à la sortie du cinéma. On note :

- R : l'événement « le spectateur bénéficie du tarif réduit » ;
- A : l'événement « le spectateur a été voir le film **A** » ;
- B : l'événement « le spectateur a été voir le film **B** » ;

- C : l'événement « le spectateur a été voir le film **C** ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Montrer que la probabilité que le spectateur choisi vienne d'aller voir le film **A** est égale à $0,435$.

3. On sait que le spectateur vient de voir le film **A**. Quelle est la probabilité qu'il bénéficie du tarif réduit ?

4. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante, trois spectateurs. On suppose que ces choix peuvent être assimilés à des tirages successifs avec remise.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de ces spectateurs qui viennent de voir le film **A**.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité $p(X \geqslant 1)$. Interpréter cette probabilité dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 4 (*5 points*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 250$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 60.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Compléter l'algorithme ci-après afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 290$.

Variables :	N est un entier naturel U est un nombre réel
Initialisation :	U prend la valeur 250 N prend la valeur 0

Traitement :	Tant que ... faire
	    U prend la valeur ...
	    N prend la valeur ...
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher ...

3. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 300.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 300 - 50 \times 0,8^n.$$

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur affichée par l'algorithme de la question **2.**

5. Une ville organise chaque année un tournoi d'Échecs.

En 2016, 200 joueurs ont participé à ce tournoi.

Les organisateurs font l'hypothèse que, d'une année sur l'autre :

- 20% des joueurs ne reviennent pas l'année suivante,
- 60 nouveaux joueurs s'inscrivent au tournoi.

La taille de la salle dans laquelle se déroule le tournoi limite le nombre de joueurs à 320.

Les organisateurs vont-ils devoir refuser des inscriptions par manque de places dans les années à venir ?

Justifier la réponse.

BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (*5 points*)

Une entreprise fabrique une boisson conditionnée en bouteille d'un litre.

Le coût total, exprimé en euros est donné par la fonction C_t :

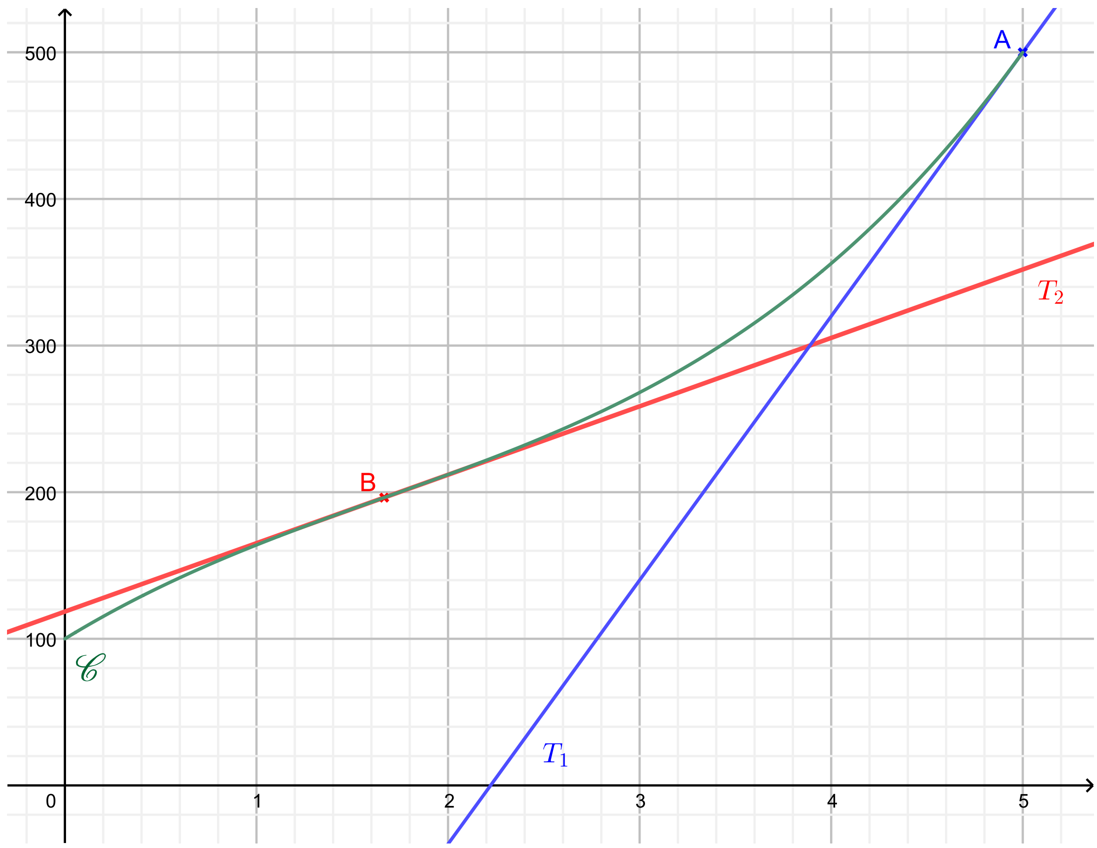
$$C_t(x) = 4x^3 - 20x^2 + 80x + 100.$$

où x représente le volume exprimé en centaines de litres, x variant dans l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

Le graphique ci-après affiche la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction C_t dans un repère orthogonal.

Le point A est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 5 et B un point d'inflexion de cette courbe.

T_1 et T_2 sont les tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement aux points A et B.



Partie A

1. Les coûts fixes sont les coûts que supporte l'entreprise même lorsque la production est nulle.

   À l'aide du graphique ou de la formule définissant C_t, déterminer les coûts fixes puis le coût pour une production de 500 litres.

2. Le coût marginal est égal au coût de fabrication d'une unité supplémentaire.

   On rappelle que l'on peut assimiler le coût marginal à la dérivée du coût total.

   Par lecture graphique, donner une estimation du coefficient directeur à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 5.

   En déduire une estimation du coût marginal pour une production de 500 litres.

3. Donner, par lecture graphique, une estimation de l'intervalle sur lequel la fonction C_t est convexe et une estimation de l'intervalle sur lequel la fonction C_t est concave.

4. À l'aide du graphique, estimer la valeur minimum du coût marginal.

Partie B

1. Pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 5]$, exprimer le coût marginal $C_m(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer les coordonnées exactes du point B.

   Retrouver, par le calcul, la valeur minimum du coût marginal.

EXERCICE 2 (*6 points*)

L'objectif de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 2.$$

Partie A
Étude graphique

Sur le graphique fourni en Annexe, on a représenté les droites D et Δ d'équations respectives $y = 0,9x + 2$ et $y = x$.

Ces deux droites se coupent en un point M.

1. Déterminer, par le calcul, les coordonnées exactes du point M.

2. A_0 est le point de la droite D d'abscisse $u_0 = 2$.

   Expliquer pourquoi l'ordonnée de A_0 est égale à u_1.

3. B_1 est le point de la droite Δ tel que la droite (A_0B_1) est parallèle à l'axe des abscisses.

   Exprimer, en fonction de u_1, les coordonnées de B_1.

4. Compléter le graphique de l'annexe de manière à faire apparaître, sur l'axe des abscisses, les valeurs de $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5$ et u_6.

5. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B
Utilisation d'une suite annexe

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 20$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2. Exprimer v_n en fonction de n.

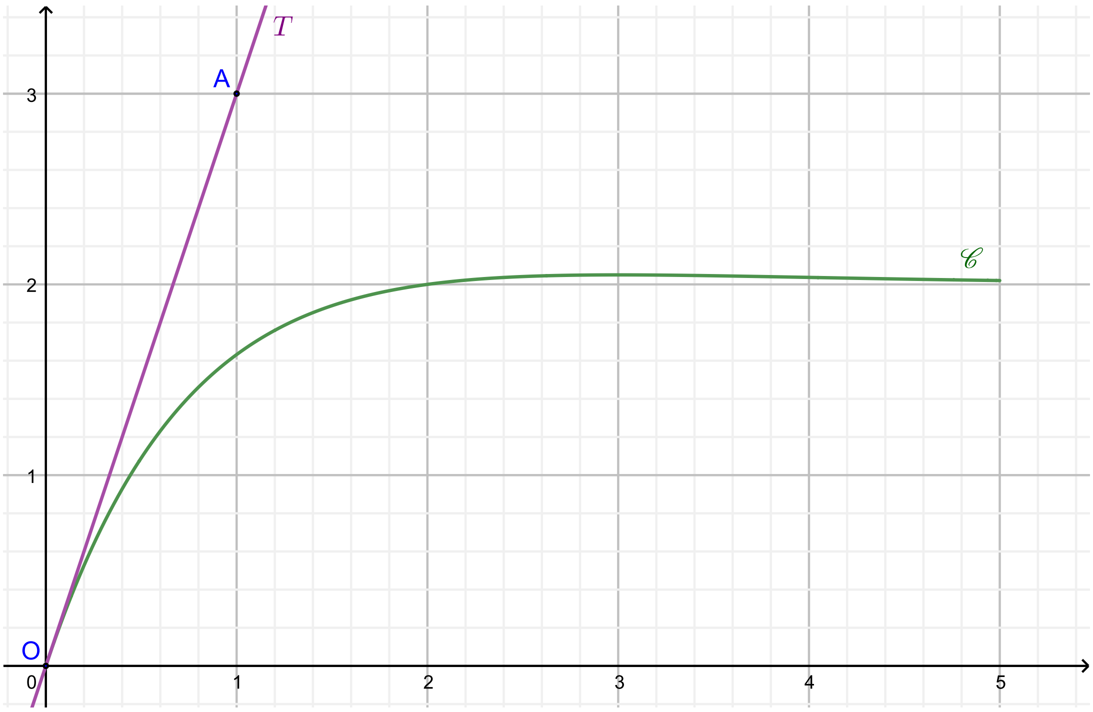
3. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 20 - 18 \times 0,9^n.$$

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 (*5 points*)

On a représenté, ci-après, la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 5]$ ainsi que la tangente T à cette courbe au point O, origine du repère.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Partie A

1. Préciser la valeur de $f(0)$.

2. La tangente T passe par le point $A(1 ; 3)$.
   Déterminer la valeur de $f'(0)$.

3. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par une expression de la forme :
$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + 2$$
   où a et b sont deux nombres réels.

   a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 5]$:
$$f'(x) = (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}.$$

   b. À l'aide des questions **1.** et **2.**, déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

Par la suite, on considèrera que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0~;~5]$ par :

$$f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x} + 2.$$

1. Calculer $f'(x)$ et tracer le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0~;~5]$.

   On placera, dans le tableau, les valeurs exactes de $f(0)$, de $f(5)$ et du maximum de f sur l'intervalle $[0~;~5]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0~;~5]$.

3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède un unique point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

EXERCICE 4 (*3 points*)

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans le cadre d'essais cliniques, on souhaite tester l'efficacité d'un nouveau médicament destiné à lutter contre l'excès de cholestérol.

L'expérimentation s'effectue sur un échantillon de patients présentant un excès de cholestérol dans le sang.

Lors de cet essai clinique, 70% des patients reçoivent le médicament tandis que les 30% restant reçoivent un placebo (comprimé sans principe actif).

À la fin de la période de test, le taux de cholestérol de chaque patient est mesuré et comparé au taux initial.

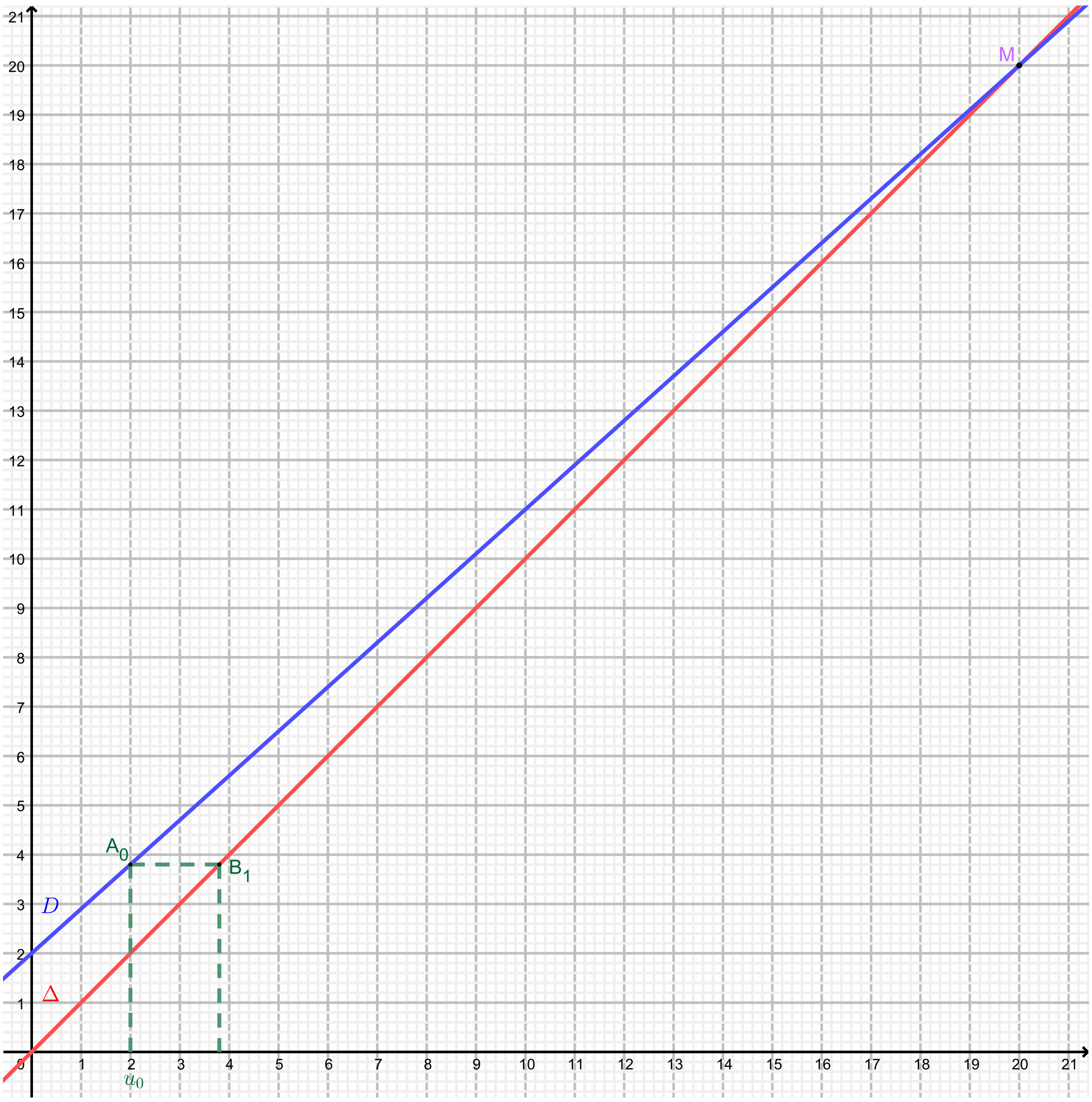
On observe une baisse significative du taux de cholestérol chez 85% des personnes ayant pris le médicament tandis que chez les personnes ayant pris le placebo, cette baisse n'est constatée que dans 20% des cas.

Le laboratoire pharmaceutique ayant réalisé cette étude affirme que « plus de 90% des patients chez qui une baisse significative a été constatée avaient pris le médicament ».

Que pensez-vous de cette affirmation ?
Justifier votre réponse.

ANNEXE

À rendre avec la copie



BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 8 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (*4 points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse exacte ***en justifiant le choix effectué****.*

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

- **Question 1 :**

  Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{-2x}+1}.$$

  Alors, pour tout réel x :

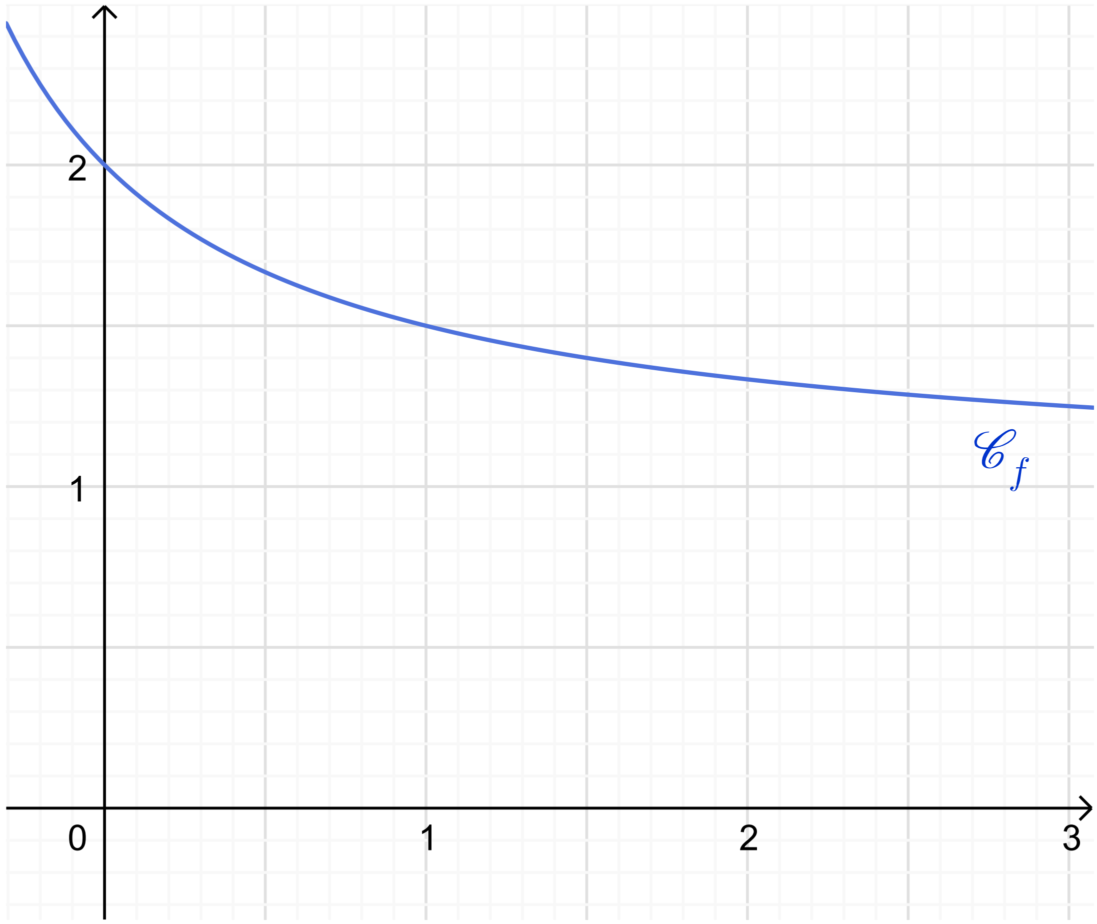
  a. $f(x) = e^{2x}$

  b. $f(x) = \dfrac{1}{e^{x}}$

  c. $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$

- **Question 2 :**

  La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-après est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé.



On pose $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Alors :

a. $0 < I < 2$
b. $2 < I < 4$
c. $8 < I < 16$

- **Question 3 :**

  Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^x + 1.$$

  Alors, pour tout réel x :

a. $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1$
b. $g'(x) = (1 + x)\mathrm{e}^x$
c. $g'(x) = \mathrm{e}^x$

- **Question 4 :**

  f est la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~5]$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x + 1.$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Alors, sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$:

a. La fonction f est concave
b. La fonction f est convexe
c. La courbe $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion

EXERCICE 2 (*5 points*)

Les parties A et B sont indépendantes.

Les probabilités demandées seront arrondies au dix-millième.

Partie A

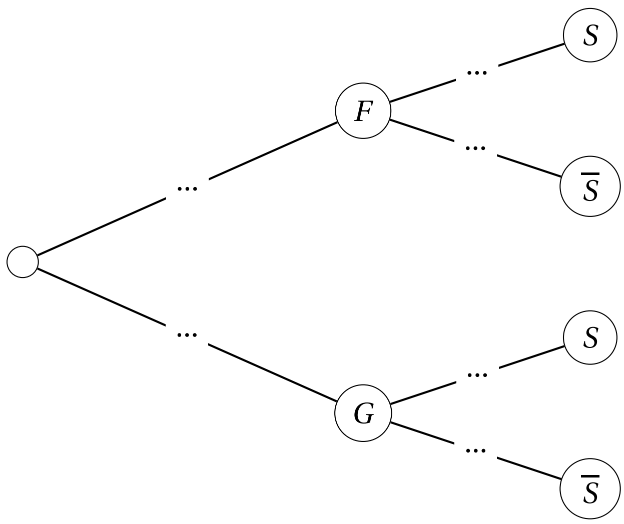
Dans un lycée parisien, on a dénombré 52% de filles et 48% de garçons.

Une étude a révélé que, dans ce lycée, 59% des filles et 68% des garçons pratiquaient un sport en dehors de l'établissement.

On choisit au hasard un élève dans ce lycée et on considère les événements suivants :

- F : « l'élève choisi est une fille » ;
- G : « l'élève choisi est un garçon » ;
- S : « l'élève choisi pratique un sport en dehors de l'établissement » ;
- $\overline{S}$: l'événement contraire de S.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-après :



2. Quel est la probabilité que l'élève choisi soit un garçon pratiquant un sport en dehors du lycée ?

3. Quel est la probabilité que l'élève choisi pratique un sport en dehors du lycée ?

4. On sait que l'élève choisi pratique un sport en dehors de l'établissement. Quel est la probabilité que ce soit un garçon ?

Partie B

Luc doit se rendre, par les transports en commun, à un cours de natation qui débute à 10h. En fonction de la circulation, il arrive entre 9h30 et 10h15.

On suppose que son heure d'arrivée peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9,5\ ;\ 10,25]$.

1. Quelle est la probabilité que Luc arrive à l'heure à son cours ?

2. Quelle est la probabilité que Luc arrive avec plus d'un quart d'heure d'avance à son cours ?

3. Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T ?

   Interpréter cette valeur dans le cadre de l'exercice.

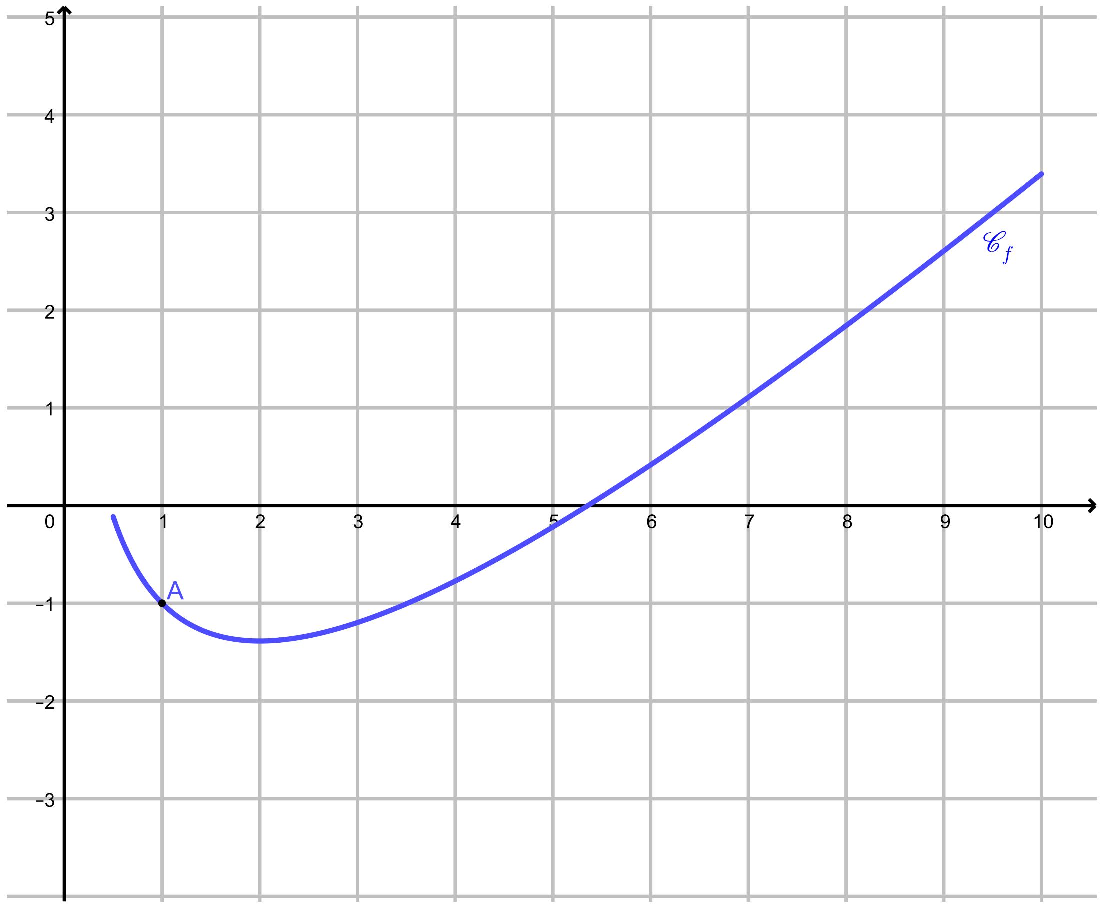
EXERCICE 3 (*5 points*)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = x - 2 - 2\ln x.$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Cette courbe est tracée ci-après :



1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,5\,;\,10]$:

$$f'(x) = \frac{x-2}{x}.$$

2. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$.

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(1\,;\,-1)$.

4. Étudiez la convexité de f sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x\ln x$$

   est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$.

7. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}, de l'intégrale :

$$I = \int_6^{10} f(t)dt.$$

   Interpréter graphiquement la valeur de cette intégrale.

EXERCICE 4 (*6 points*)

Un fournisseur d'accès internet propose deux formules, nommées « Start » et « Plus », à ses abonnés.

On suppose que le nombre global d'abonnés à ce fournisseur d'accès est stable d'une année sur l'autre et égal à 2 millions.

En 2010, 1,5 million de personnes étaient abonnés à la formule « Start » et 500 000 personnes étaient abonnés à la formule « Plus ».

Chaque année :

- 30% des abonnés à la formule « Start » choisissent de passer à la formule « Plus » l'année suivante (les 70% restant conservant la formule « Start ») ;
- 10% des abonnés à la formule « Plus » décident de migrer vers la formule « Start » l'année suivante (les 90% restant conservant la formule « Plus »).

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'abonnés, en milliers, à la formule « Start » (respectivement à la formule « Plus ») l'année $2010 + n$.

On a donc $a_0 = 1\,500$ et $b_0 = 500$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 2\,000$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = 0,7a_n + 0,1b_n.$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = 0,6a_n + 200.$$

4. Soit la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = a_n - 500.$$

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$a_n = 500 + 1000 \times 0,6^n.$$

5. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et converge vers une limite que l'on déterminera. Que peut-on en déduire concernant le nombre d'abonnés à la formule « Start » ?

6. On souhaite utiliser un tableur pour calculer les termes a_n et b_n.

	A	B	C	D	E
1	n	0	1	2	3
2	a_n	1500			
3	b_n				
4					

a. Proposer une formule à saisir dans la cellule **C2** pour calculer a_1.

Cette formule devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (a_n) en la « tirant vers la droite ».

b. Proposer une formule à saisir dans la cellule **B3** pour calculer b_0.

Cette formule devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (b_n) en la « tirant vers la droite ».

BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (*5 points*)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

La durée de vie, en heures, d'une lampe à incandescence peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 1\,000$ et d'écart-type $\sigma = 200$.

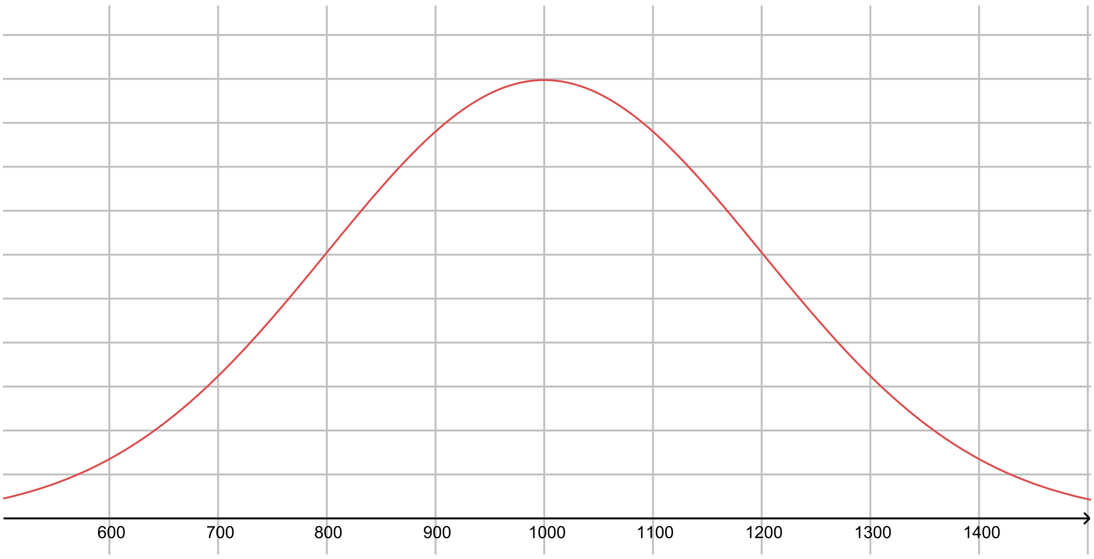
1. Déterminer la probabilité que la durée de vie d'une lampe à incandescence soit supérieure à 1 400 heures. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

2. Déterminer la valeur du réel m, arrondie à la centaine, telle que :

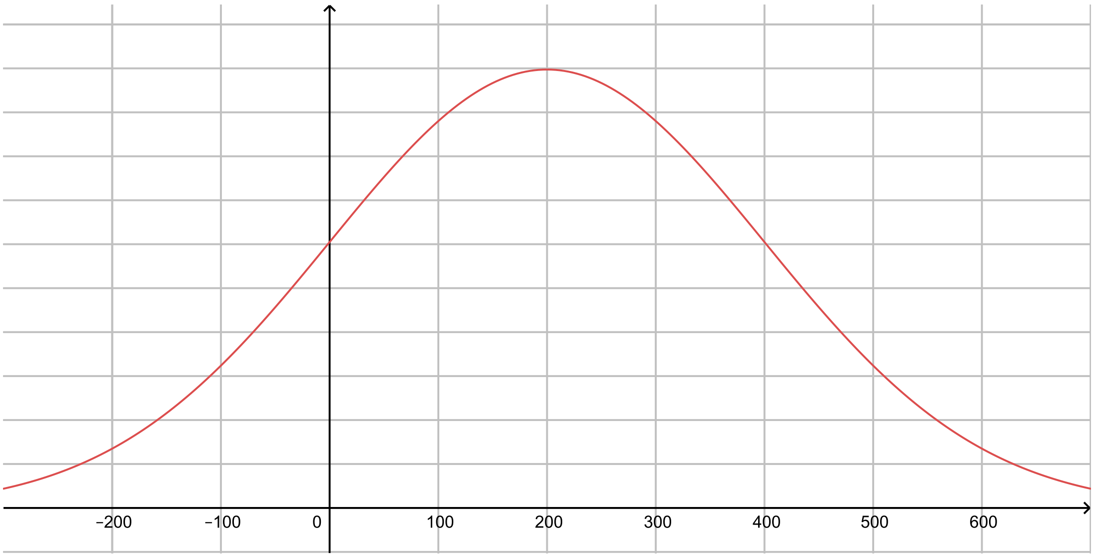
$$p(X \geqslant m) = 0,16.$$

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

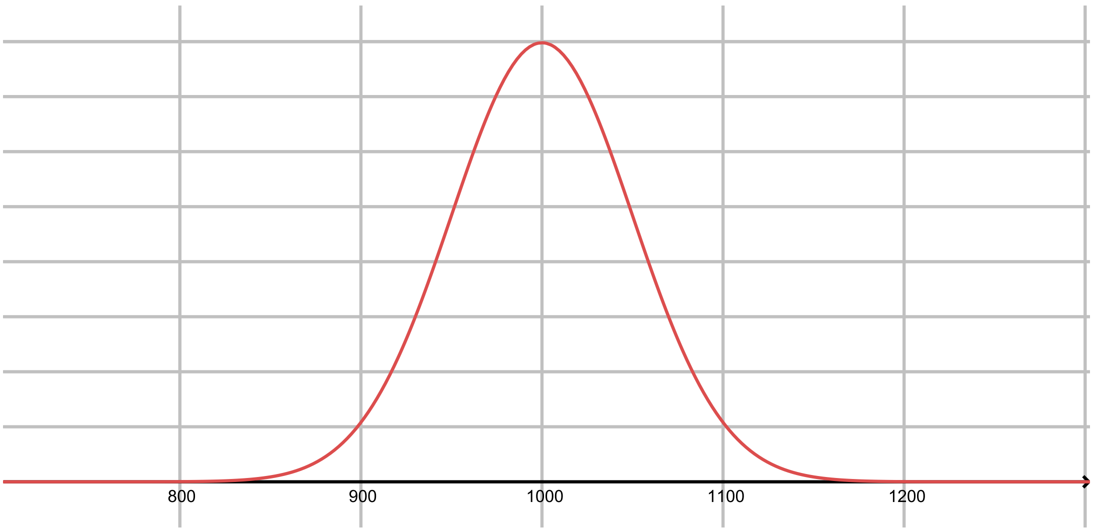
3. Parmi les quatre graphiques proposés ci-après, l'un d'eux représente la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 1\,000$ et d'écart-type $\sigma = 200$.



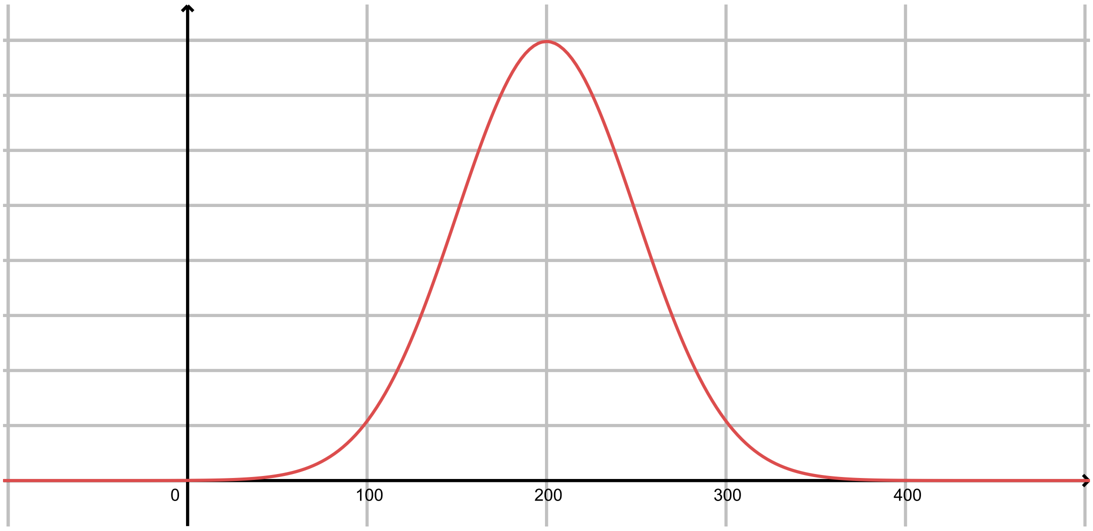
Graphique 1.



Graphique 2.



Graphique 3.



Graphique 4.

Lequel ?

Justifier votre réponse.

Partie B

Un fabriquant de lampes halogènes affirme que 75% des lampes qu'il produit ont une durée de vie supérieure à 3 000 heures.

Afin de vérifier cette affirmation, un laboratoire indépendant effectue un test sur 200 lampes choisies au hasard chez ce fabriquant.

Il s'avère que seulement 140 d'entre elles ont une durée de vie supérieure à 3 000 heures.

1. Déterminer, pour ce fabriquant, un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de lampes ayant une durée de vie supérieure à 3 000 heures pour un échantillon de taille 200.

2. Les résultats du test mené par le laboratoire remettent-ils en cause l'affirmation du fabriquant ?

EXERCICE 2 (*5 points*)

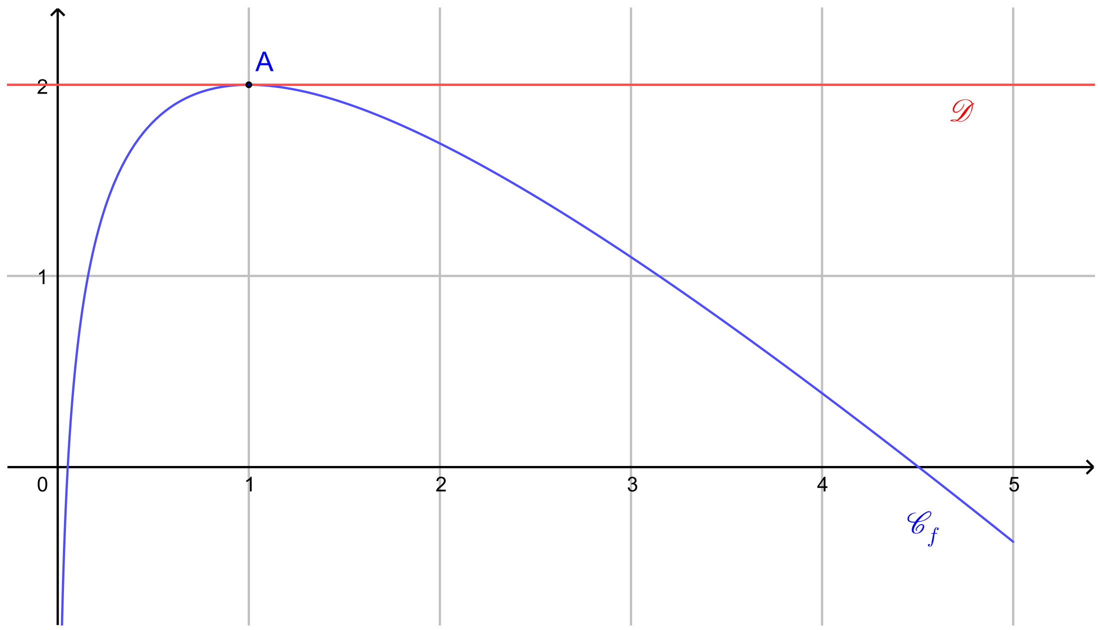
Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse, soit à l'aide du graphique, soit par un calcul.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,5]$ par :

$$f(x) = \ln x - x + 3.$$

On a tracé ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, ainsi que $\mathscr{D}$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(1 ; 2)$.
Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

On note respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.



- **Affirmation 1 :** $f'(1) = 0$.
- **Affirmation 2 :** Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; 5]$, $f''(x) > 0$.
- **Affirmation 3 :** La courbe $\mathscr{C}_f$ possède un et un seul point d'inflexion.
- **Affirmation 4 :** $1 \leqslant \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$.
- **Affirmation 5 :** La fonction F définie sur l'intervalle $]0 ; 5]$ par

$$F(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2} + 3x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 5]$.

EXERCICE 3 (*6 points*)

Une entreprise fabrique et commercialise des VTT (vélos tout terrain).

Les bénéfices (ou les pertes) mensuels de cette entreprise, en centaines d'euros, peuvent être modélisés par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - 6.$$

où x représente le nombre de vélos, en milliers, vendus mensuellement.

Si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice et dans le cas contraire, elle subit une perte.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~5]$.

Montrer que pour tout réel $x \in [0~;~5]$:

$$f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x}.$$

2. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0~;~5]$.

3. **a.** Montrer l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle $[0~;~5]$.

b. Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près.

c. Étudier le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~5]$.

d. Combien de vélos, au minimum, l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser des bénéfices ?

4. **a.** Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~5]$, on pose :

$$g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{x}.$$

Montrer que, sur l'intervalle $[0~;~5]$, $g'(x) = x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x}$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~5]$.

c. Donner une valeur approchée, à l'unité près, de l'intégrale :

$$I = \int_{4}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

d. L'entreprise vend régulièrement entre 4 000 et 5 000 vélos par mois.

Estimer la valeur moyenne du bénéfice mensuel arrondie à la centaine d'euros.

EXERCICE 4 (*4 points*)

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 0,9$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Compléter l'algorithme ci-après afin qu'il calcule et affiche la valeur de S_{10}.

Variables :	I est un entier naturel S est un nombre réel
Initialisation :	S prend la valeur 0
Traitement :	Pour $I = 0$ à ... faire : S prend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher ...

3. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = 10\,000\left(1 - 0,9^{n+1}\right).$$

En déduire la valeur affichée en sortie de l'algorithme précédent.

On arrondira le résultat à l'unité.

4. Quelle est la limite de la somme S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

5. Déterminer, par la méthode de votre choix, la plus petite valeur de l'entier n telle que :

$$S_n > 9\,000.$$

BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 7 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (*5 points*)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse exacte ***en justifiant le choix effectué****.*

Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

- **Question 1 :**

  La valeur exacte de $A = \ln(2e^2)$ est :

  a. $A = \ln 2$
  b. $A = 2e\ln 2$
  c. $A = 2e + \ln 2$
  d. $A = 2 + \ln 2$

- **Question 2 :**

  On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

  $$f(x) = x\ln(x)$$

  La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et sa dérivée f' est donnée par :

  a. $f'(x) = 1$
  b. $f'(x) = 1 + \ln(x)$
  c. $f'(x) = x + \ln(x)$
  d. $f'(x) = \frac{1}{x}$

- **Question 3 :**

  Le plus petit entier naturel n tel que :

  $$0,8^n \leqslant 0,01$$

  est :

  a. $n = 19$
  b. $n = 20$
  c. $n = 21$
  d. $n = 22$

- **Question 4 :**

  Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

  $$g(x) = \frac{1}{x}$$

  On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

L'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$ est :

a. $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$
b. $\mathscr{A} = \dfrac{1}{4}$
c. $\mathscr{A} = \ln 2$
d. $\mathscr{A} = \mathrm{e}^2$

- **Question 5 :**

  Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$.

  Alors :

  a. $p(1 < X < 5) = p(2 \leqslant X \leqslant 4)$
  b. $p(X < 2) = p(X > 2)$
  c. $p(X = 3) = \dfrac{1}{2}$
  d. $p(2 \leqslant X \leqslant 3) = \dfrac{1}{4}$

EXERCICE 2 (*5 points*)

Lors d'un tournoi de jeux vidéo, Loïc dispute plusieurs parties d'affilée.

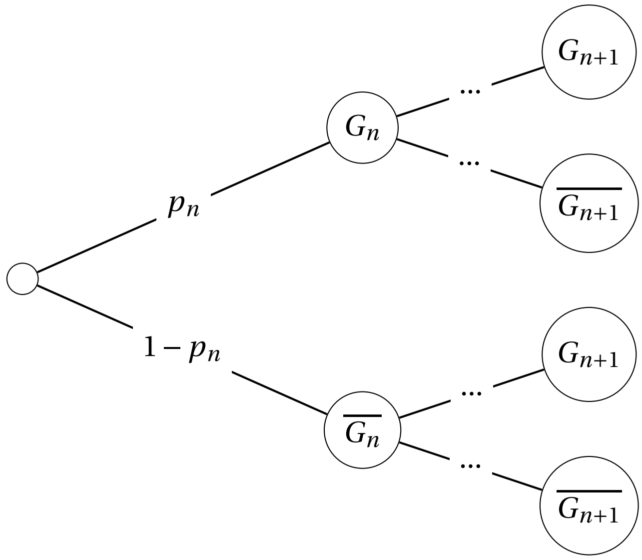
La probabilité qu'il gagne la première partie est 0,5.

Lorsqu'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7.

Si, par contre, il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est seulement 0,4.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note G_n l'événement « Loïc a gagné la n-ième partie », $\overline{G_n}$ l'événement contraire et p_n la probabilité de l'événement G_n. On a donc $p_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-après :



2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0,3p_n + 0,4.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$u_n = p_n - \frac{4}{7}.$$

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$p_n = \frac{4}{7} - \frac{1}{14} \times (0,3)^{n-1}.$$

4. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (*5 points*)

Un producteur de pommes « bio » calibre ses fruits à l'aide d'une machine qui les trie en fonction de leur diamètre.

Les pommes dont le diamètre est compris entre 6 cm et 8 cm sont jugées « conformes » et vendues en l'état. Les autres, dites « hors calibre », sont utilisées pour confectionner de la compote.

On admet que la variable aléatoire X qui donne le diamètre, en cm, d'une pomme prélevée au hasard chez ce producteur suit une loi normale d'espérance mathématique $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

Partie A

1. Montrer que la probabilité, arrondie au centième, qu'une pomme prélevée au hasard soit jugée « conforme » est égale à 0,68.

2. On sélectionne 500 pommes au hasard chez ce producteur.

   On note Y la variable aléatoire égale au nombre de pommes jugées « conformes » parmi les 500 fruits sélectionnés.

   La production est suffisamment importante pour assimiler cette sélection à un tirage aléatoire avec remise.

   a. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Quelle est la probabilité que, sur cet échantillon de 500 pommes, 350 au moins soient jugées « conformes ».

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer, au centième près, le réel k tel que :

$$p(X \geqslant k) = 0,95.$$

   Interpréter ce résultat.

Partie B

Un distributeur souhaite estimer la proportion de consommateurs satisfaits par la qualité de ces pommes « bio ».

Il réalise pour cela un sondage auprès de 200 consommateurs. Sur ces 200 personnes interrogées, 170 se déclarent satisfaites.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance 0,95, de la proportion p de consommateurs satisfaits par la qualité de ces fruits.
   Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

2. Combien de personnes, au minimum, le distributeur aurait-il dû interroger pour obtenir un intervalle de confiance, au niveau de confiance 0,95, d'amplitude inférieure ou égale à 4% ?

EXERCICE 4 (*5 points*)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = 2\ln(x+1) - x + 1.$$

On a utilisé un logiciel de calcul formel pour déterminer la fonction dérivée f', la fonction dérivée seconde f'' et une primitive F de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

On a obtenu les résultats suivants :

1	*dériver* (2ln(x+1)-x+1) $\rightarrow \quad \dfrac{-x+1}{x+1}$
2	*dériver* ((-x+1)/(x+1)) $\rightarrow \quad \dfrac{-2}{(x+1)^2}$
3	*intégrer* (2ln(x+1)-x+1) $\rightarrow \quad 2(x+1)\ln(x+1) - \dfrac{1}{2}x^2 - x$

Dans les questions suivantes, on pourra utiliser tous les résultats fournis par le logiciel sans les avoir justifiés.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. Montrer que la fonction f est concave sur l'intervalle $[0\,;5]$.

3. On rappelle que la valeur moyenne m d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par la formule :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;5]$ et que $4 < \alpha < 5$.

b. On a écrit l'algorithme suivant :

Variables :	x est un nombre réel y est un nombre réel
Initialisation :	x prend la valeur 4 y prend la valeur $2\ln(x+1)-x+1$
Traitement :	Tant que $y>0$ faire : x prend la valeur $x+0,1$ y prend la valeur $2\ln(x+1)-x+1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher x

Recopier et compléter le tableau suivant, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. On arrondira les résultats au millième.

Valeur de x	4	$4,1$	$\cdots$
Valeur de y	$0,219$	$\cdots$	$\cdots$
Condition $y>0$	vraie	$\cdots$	$\cdots$

c. Quel est le résultat affiché par cet algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

BACCALAURÉAT BLANC

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

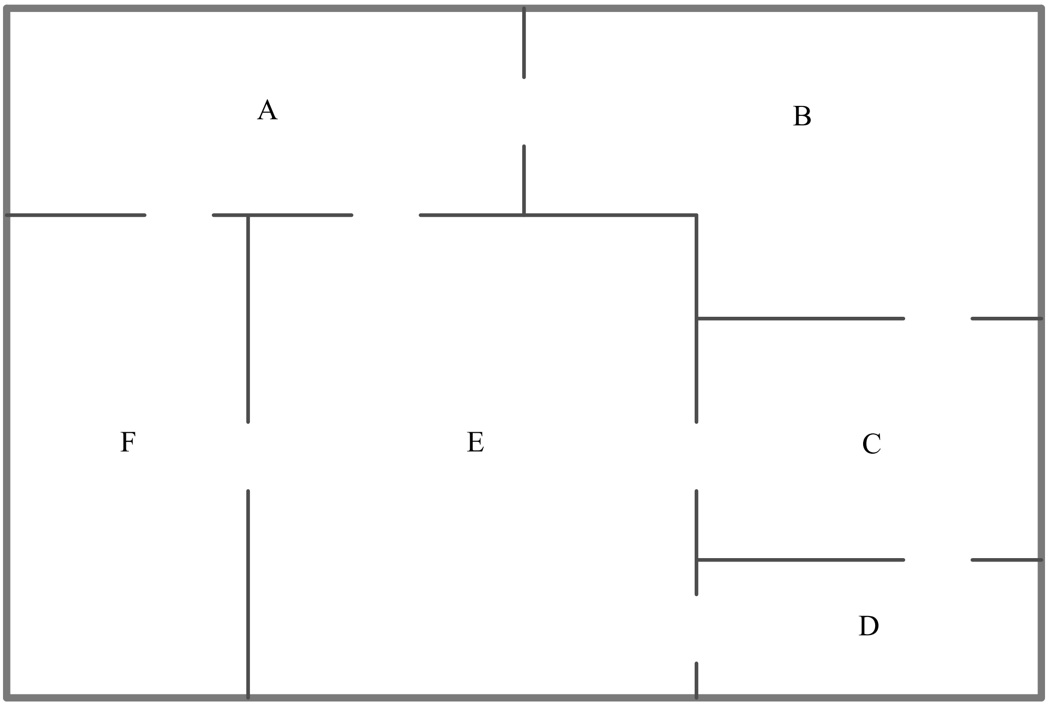
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

EXERCICE SPÉCIALITÉ ES (*5 points*)

Un appartement comporte 6 pièces notées A, B, C, D, E et F.

Le plan ci-après présente la disposition des pièces ainsi que les portes de communication entre ces pièces.



Par exemple, il y a une porte de communication entre les pièces A et B mais il n'y en a pas entre les pièces B et E.

La porte donnant accès à l'appartement est sans importance dans le cadre de l'exercice et n'a pas été représentée.

Toutes les réponses aux questions posées devront être justifiées.

1. **a.** Traduire la situation à l'aide d'un graphe (G) dont les sommets représentent les pièces et dont les arêtes représentent les portes de communication.

   b. Le graphe (G) est-il connexe ? complet ?

2. **a.** Est-il possible de parcourir l'appartement en empruntant chaque porte une fois et une seule ?
   Si oui, donner un exemple d'un tel chemin.

   b. Est-il possible de parcourir l'appartement en empruntant chaque porte une fois et une seule et *en partant et en arrivant dans la même pièce* ?
   Si oui, donner un exemple d'un tel chemin.

3. Déterminer la matrice de transition M associée au graphe précédent en prenant les sommets par ordre alphabétique.

4. À l'aide d'une calculatrice on trouve :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 7 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Combien existe-t-il de chemins permettant d'aller de la pièce A à la pièce D en empruntant exactement trois portes ?
Donner la liste de ces chemins.

b. Est-il toujours possible de relier deux pièces différentes en empruntant exactement trois portes ?

5. **a.** Montrer qu'il existe au moins un sous-graphe *complet* de (G) d'ordre 3.

b. Le propriétaire souhaite repeindre l'appartement en respectant les règles suivantes :

- chaque pièce sera repeinte avec une couleur unique ;
- deux pièces adjacentes, c'est à dire reliées par une porte, seront repeintes avec des couleurs différentes.

Pourra-t-il réaliser ces objectifs en utilisant seulement trois couleurs ?

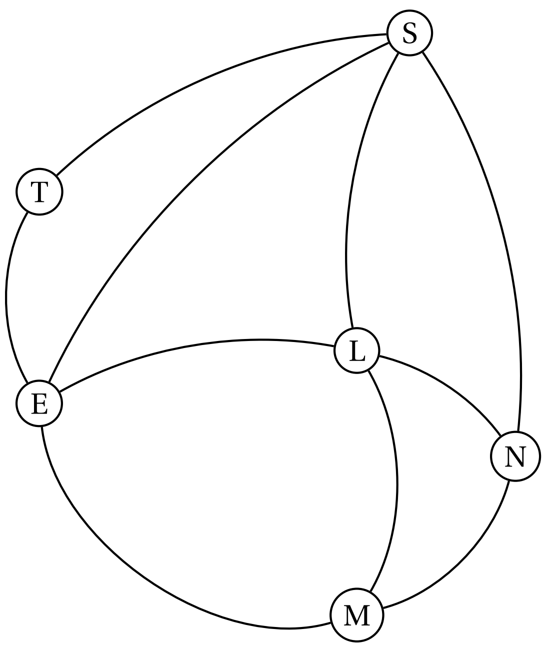
EXERCICE SPÉCIALITÉ ES (*5 points*)

Une agence de tourisme propose la visite de certains monuments parisiens.

Chacun de ces monuments est désigné par une lettre comme suit :

- E : Tour Eiffel
- L : Musée du Louvre
- M : Tour Montparnasse
- N : Cathédrale Notre-Dame de Paris
- S : Basilique du Sacré-Cœur de Montmartre
- T : Arc de triomphe

Cette agence fait appel à une société de transport par autocar qui propose les liaisons suivantes (chacune de ces liaisons pouvant s'effectuer dans les deux sens de circulation) :



1. Expliquer pourquoi il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule chacune des dix liaisons indiquées sur le graphe.
Donner un exemple d'un tel trajet.

2. **a.** Donner la matrice d'adjacence M associée à ce graphe en classant les sommets par ordre alphabétique.

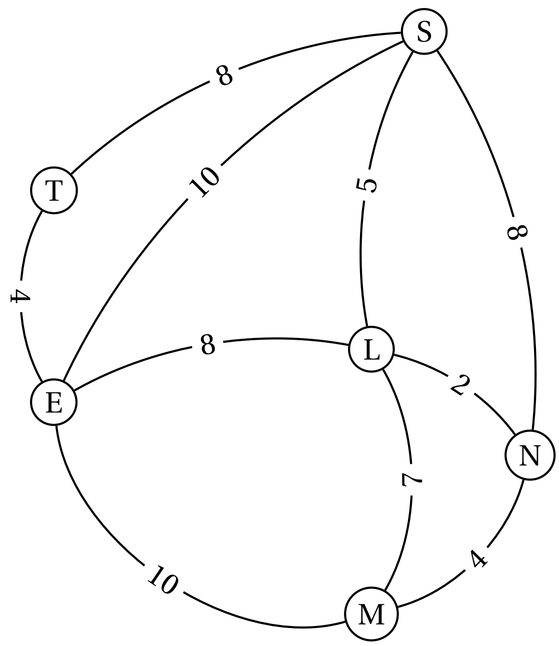
b. On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 9 & 5 & 10 & 6 \\ 10 & 8 & 8 & 8 & 10 & 4 \\ 9 & 8 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 8 & 4 & 9 & 4 \\ 10 & 10 & 5 & 9 & 6 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de trajets permettant de relier la cathédrale Notre-Dame de Paris et la tour Eiffel en utilisant au maximum trois liaisons.
Justifier votre réponse.

3. On complète le graphe précédent en indiquant, sur chacune des branches, la durée du trajet, en minutes, entre deux monuments.



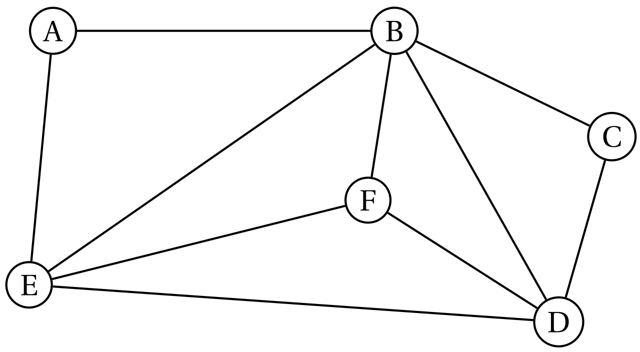
On souhaite aller de la tour Montparnasse à la Basilique du Sacré-Cœur de Montmartre.

En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le plus rapide ainsi que la durée de ce trajet.

EXERCICE SPÉCIALITÉ ES (*5 points*)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

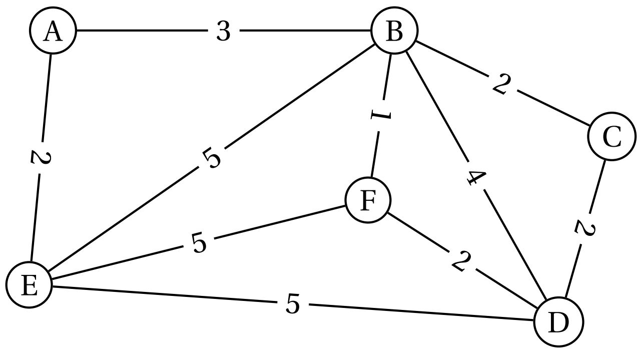
On modélise le plan d'un village à l'aide du graphe (G) ci-dessous :



Les sommets du graphe (G) représentent les carrefours et les arêtes du graphe schématisent les routes reliant ces carrefours.

- **Affirmation 1 :** Le graphe (G) est connexe.
- **Affirmation 2 :** Le graphe (G) contient un sous-graphe complet d'ordre 4.
- **Affirmation 3 :** Une personne peut parcourir toutes les routes du village sans emprunter plusieurs fois la même route.
- **Affirmation 4 :** Il y a exactement 5 trajets de trois routes reliant les carrefours C et E.
  On pourra utiliser la calculatrice pour justifier la réponse à l'aide d'un calcul matriciel.

On pondère le graphe (G) par les longueurs, en centaines de mètres, de chacune des routes :



- **Affirmation 5 :** Le plus court chemin menant de A à D mesure 700 mètres .
  On justifiera la réponse à l'aide d'un algorithme.

EXERCICE SPÉCIALITÉ ES (*5 points*)

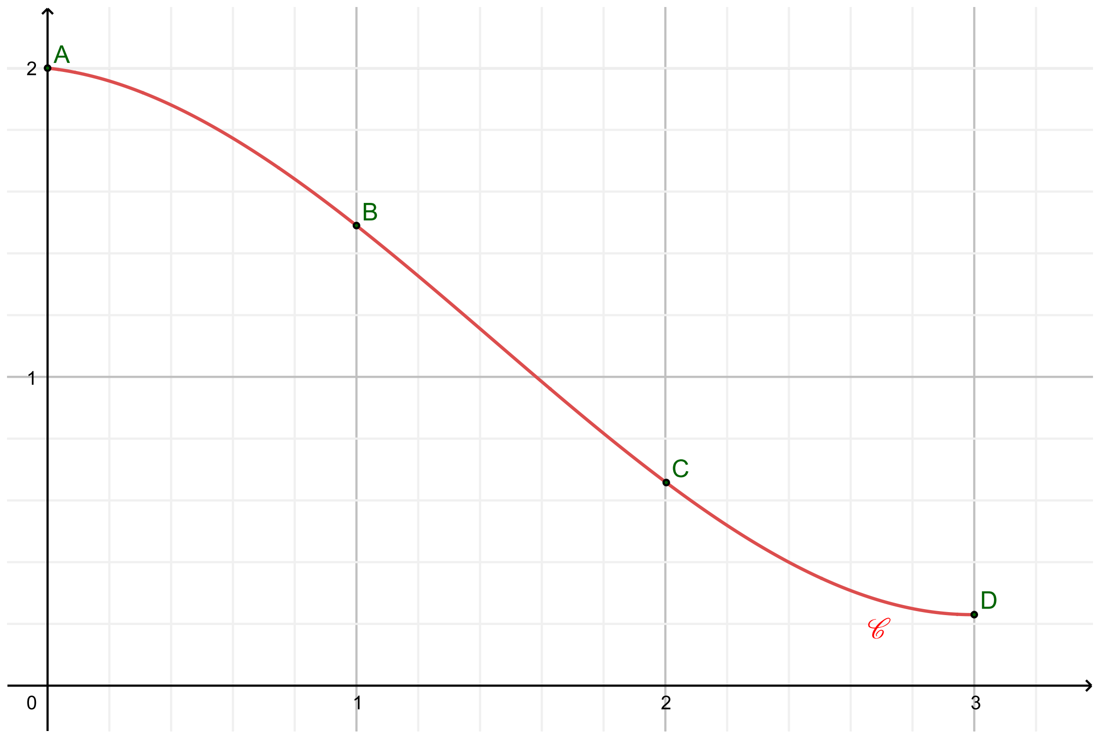
Partie A

Un service de garde d'enfants dispose d'un toboggan dans son espace de jeux.

Le profil de ce toboggan peut être représenté, dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre, par la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~3]$ à l'aide d'une formule du type :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c et d sont quatre réels.



La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0~;~2)$, $B(1~;~1,49)$, $C(2~;~0,66)$ et $D(3~;~0,23)$.

1. Montrer que les réels a, b, c et d sont les solutions d'un système (S) de quatre équations que l'on déterminera.

2. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,49 \\ 0,66 \\ 0,23 \end{pmatrix}$$

Donner une écriture matricielle du système (S) utilisant les matrices M, X et Y

3. À l'aide d'une calculatrice, vérifier que la matrice M est inversible et déterminer M^{-1}.

4. Calculer a, b, c et d et en déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

Cette garderie propose des déjeuners pour les enfants le mercredi après-midi.

Les enfants ont le choix entre deux menus : le menu *steak haché - frites* et le menu *plat du jour*.

On a remarqué que :

- si un enfant a choisi le menu *steak haché - frites* un mercredi, la probabilité qu'il choisisse à nouveau ce menu le mercredi suivant est de 0,5 ;
- si un enfant a choisi le menu *plat du jour* un mercredi, la probabilité qu'il choisisse à nouveau ce menu le mercredi suivant est de 0,7.

On sélectionne un enfant au hasard et on note A l'état « l'enfant choisit le menu *steak haché - frites* » et B l'état « l'enfant choisit le menu *plat du jour* ».

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

3. Montrer que ce graphe admet un état stable que l'on déterminera.
Interpréter ce résultat.

EXERCICE SPÉCIALITÉ ES (*5 points*)

Depuis le début de l'année 2015, une agence bancaire propose à ses clients, titulaires d'une carte de crédit, une assurance « Tranquilité » qui leur permet d'être mieux indemnisé en cas de perte ou de vol de leur carte.

De 2015 à 2017, on a constaté que :

- 20% des titulaires d'une carte de crédit qui ne bénéficient pas de l'assurance « Tranquilité » souscrivent à cette assurance l'année suivante ;
- 5% des titulaires d'une carte de crédit qui ont souscrit à l'assurance « Tranquilité » résilient cette assurance l'année suivante ;

On suppose que cette évolution se poursuivra de manière identique durant les années à venir.

On sélectionne au hasard un client titulaire d'une carte de crédit et, pour tout entier naturel n, on note :

- a_n, la probabilité que le client ait souscrit à l'assurance « Tranquilité » au début de l'année $2015 + n$;
- b_n, la probabilité que le client choisi n'ait pas souscrit à l'assurance « Tranquilité » au début de l'année $2015 + n$;
- P_n, la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$ donnant l'état probabiliste au début de l'année $2015 + n$.

Au début de l'année 2015, aucun client n'a encore souscrit à l'assurance « Tranquilité ».
On a donc $P_0 = (0 \quad 1)$.

Partie A

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets T et $\overline{T}$ où T correspond à l'état " le client a souscrit à l'assurance « Tranquilité » " et $\overline{T}$ correspond à l'état contraire.

2. Déterminer la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets T et $\overline{T}$ étant classés dans cet ordre.

3. Déterminer l'état stable de ce graphe probabiliste.
Que peut-on en conclure concernant le pourcentage de clients qui souscriront à l'assurance « Tranquilité » dans les années futures ?

Partie B

Le directeur de l'agence cherche à déterminer au début de quelle année plus de 70% des titulaires d'une carte de crédit auront souscrit à l'assurance « Tranquilité ».

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après afin qu'il réponde à l'interrogation du directeur.

Variables :	n un nombre entier naturel
	a et b sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à n la valeur ...
	Affecter à a la valeur ...
	Affecter à b la valeur ...
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à a la valeur
	$0,95 \times a + 0,2 \times b$
	Affecter à b la valeur $1 - a$
	Affecter à n la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $2015 + n$

2. On admet que pour tout entier naturel n :

$$a_n = 0,8(1 - 0,75^n).$$

Déterminer la valeur affichée par l'algorithme de la question précédente.

EXERCICE SPÉCIALITÉ ES (*5 points*)

Pour le paiement des cotisations, une société d'assurance propose à ces clients le choix entre deux types de règlement :

- le prélèvement automatique mensuel ;
- le règlement annuel par chèque.

En 2016, 50% des clients avaient opté pour le prélèvement mensuel.

Chaque année :

- 90% des clients payant par prélèvement mensuel conservent ce mode de paiement l'année suivante ;
- 25% des clients réglant leur cotisation par chèque annuel choisissent le prélèvement mensuel l'année suivante ;

Pour tout entier naturel n, on note :

- m_n, la proportion de clients ayant choisi le prélèvement mensuel pour l'année $2016+n$;
- a_n, la proportion de clients ayant choisi le règlement annuel pour l'année $2016+n$;
- P_n, la matrice-ligne $(m_n \quad a_n)$ donnant l'état probabiliste de l'année $2016+n$.

On choisit au hasard un client de cet assureur.

On note :

- M l'état « le client a opté pour le prélèvement mensuel » ;
- A l'état « le client a opté pour le règlement annuel » .

Partie A

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste.

2. Déterminer la matrice de transition T associée à ce graphe, les sommets étant classés dans l'ordre M, A.

3. Déterminer les matrices-ligne P_0, P_1 et P_2 (*Si nécessaire, on arrondira les résultats au millième*).
   Quel est le pourcentage de clients ayant choisi le prélèvement mensuel en 2018 ?

4. Déterminer l'état stable de ce graphe.
   Interpréter ce résultat.

Partie B

1. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$m_{n+1} = 0,65m_n + 0,25.$$

2. Le directeur d'agence souhaite connaître la proportion des clients qui optera pour le prélèvement mensuel pour l'année 2016+n où n est un entier naturel non nul.

   On lui a proposé les trois algorithmes suivants :

Entrée :	Saisir n
Traitement :	Affecter à i la valeur 1
	Affecter à m la valeur 0.5
	Tant que $i < n$
	Affecter à m la valeur $0,65m + 0,25$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher m

Algorithme 1

Entrée :	Saisir n
Traitement :	Affecter à m la valeur 0,5
	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à m la valeur $0,65m + 0,25$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher m

Algorithme 2

Entrée :	Saisir n
Traitement :	Affecter à m la valeur 0,5
	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à m la valeur $0,65m + 0,25$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher n

Algorithme 3

   Parmi ces trois algorithmes, un seul répond correctement à la demande du directeur. Lequel ?
   Justifier votre réponse en indiquant les erreurs présentes dans les deux autres algorithmes.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = m_n - \frac{5}{7}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$m_n = \frac{5}{7} - \frac{3}{14} \times 0,65^n.$$

4. Quelle est la limite de la suite (m_n) ?
   Interpréter et comparer ce résultat à celui de la question **4.** de la **Partie A**.