INTÉGRALES ENCADREMENTS – BAC S AMÉRIQUE DU NORD 2008

PARTIE A

– Si $u > 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. (1)

– Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$. (2)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $a < b$ et $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a, b]$.

Posons $F(x) = g(x) - f(x)$. Alors $F(x) \geq 0$ et, d'après (1), on peut écrire :

$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geq 0$. D'après (2), on peut écrire :

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

D'où, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. CQFD.

PARTIE B

Fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

1) Sur $[0, +\infty[$, on a $e^{-x} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-x} > 1 \Rightarrow \ln(1 + e^{-x}) > \ln(1) > 0$.

Par ailleurs $f'(x) = 1 + \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ qui est strictement positive sur $[0, +\infty]$.

Donc f est positive et croissante sur $[0, +\infty[$.

2)

2.a) Quand $x \to +\infty$, alors $e^{-x} \to 0$ et $\ln(1 + e^{-x}) \to \ln 1 \to 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$.

Ce qui montre que la courbe C admet pour asymptote la droite D.

2.b) Comme $e^{-x} > 0$, alors $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0$. On en conclut que C est au dessus de D.

3) Soit $I = \int_0^1 \ln(1 + e^{-x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

3.a) D'après la PARTIE A, on peut écrire $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$.

I représente la valeur de l'aire délimitée par C, D et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

3.b) Soit g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \ln(1 + t) - t$.

On a $g(0) = 0$ et $g'(t) = \dfrac{1}{1 + t} - 1 = -\dfrac{t}{1 + t} < 0$ pour tout $t > 0$.

La fonction g est donc nulle pour $t = 0$ et décroissante, donc négative, pour $t > 0$ d'où l'on déduit que :

$g(t) = \ln(1 + t) - t \leq 0$ pour $t \geq 0$, et $\ln(1 + t) \leq t$ (3) pour $t \geq 0$. CQFD.