SUITES ET RÉCURRENCE

I - DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

THÉORÈME

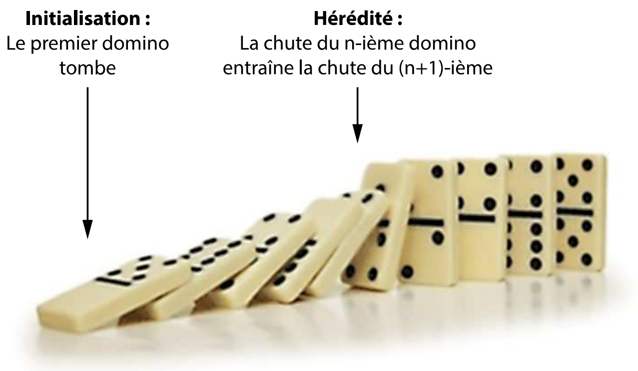
Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n.

- Si $P(n_0)$ est vraie **(initialisation)**
- Et si $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie **(hérédité)**

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$

REMARQUES

- La démonstration par récurrence s'apparente au "principe des dominos" :



Conclusion : Tous les dominos vont tomber ...

- L'étape d'initialisation est souvent facile à démontrer ; toutefois, faites attention à **ne pas l'oublier** !
- Pour prouver l'hérédité, on suppose que la propriété est vraie **pour un certain entier** n (cette supposition est appelée **hypothèse de récurrence**) et on démontre qu'elle est alors vraie pour l'entier $n+1$. Pour cela, il est conseillé d'écrire ce que signifie $P(n+1)$ (que l'on souhaite démontrer), en remplaçant n par n+1 dans la propriété $P(n)$

EXEMPLE

Montrons que pour tout entier n strictement positif $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation

On commence à $n_0=1$ car l'énoncé précise "strictement positif".

La proposition devient :

$1=\dfrac{1\times 2}{2}$

ce qui est vrai.

Hérédité

On suppose que pour un certain entier n :

$1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (**Hypothèse de récurrence**)

et on va montrer qu'alors :

$1+2+...+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ (on a remplacé n par $n+1$ dans la formule que l'on souhaite prouver).

Isolons le dernier terme de notre somme

$1+2+...+n+1=(1+2+...+n)+n+1$

On applique maintenant notre hypothèse de récurrence à $1+2+...+n$:

$1+2+...+n+1=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{2(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$1+2+...+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

ce qui correspond bien à ce que nous voulions montrer.

En conclusion nous avons bien prouvé que pour pour tout entier n strictement positif :

$1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

II - SENS DE VARIATION - SUITES MAJORÉES, MINORÉES

DÉFINITIONS (RAPPEL)

- On dit que la suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geqslant u_n$
- On dit que la suite (u_n) est **strictement croissante** si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} > u_n$
- On dit que la suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leqslant u_n$
- On dit que la suite (u_n) est **strictement décroissante** si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} < u_n$
- On dit que la suite (u_n) est **constante** si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n$

DÉFINITIONS

- On dit que la suite (u_n) est **majorée** par le réel M si tout entier naturel n : $u_n \leqslant M$.
  M s'appelle alors un **majorant** de la suite (u_n)
- On dit que la suite (u_n) est **minorée** par le réel m si pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant m$.
  m s'appelle un **minorant** de la suite (u_n)

REMARQUE

Si la suite (u_n) est majorée (ou minorée), les majorants (ou minorants) **ne sont pas uniques**. Bien au contraire, si M est un majorant de la suite (u_n), tout réel supérieur à M est aussi un majorant de la suite (u_n)

EXEMPLE

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases} \text{pour tout} n \in \mathbb{N}$$

On vérifie aisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est supérieur ou égal à 1 donc la suite (u_n) est minorée par 1. Par contre cette suite n'est pas majorée (on peut, par exemple, démonter par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > n$.

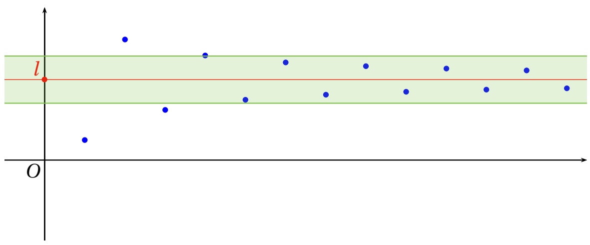
III - CONVERGENCE - LIMITE

DÉFINITION

On dit que la suite (u_n) **converge** vers le nombre réel l (ou **admet pour limite** le nombre réel l) si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

EXEMPLE



Suite convergeant vers l

REMARQUES

- Une suite qui n'est pas convergente (c'est à dire qui n'a pas de limite ou qui a une limite infinie - voir ci-dessous) est dite **divergente**.
- La limite, si elle existe, est **unique**.

EXEMPLE

Les suites définies pour $n > 0$ par $u_n = \dfrac{1}{n^k}$ où k est un entier strictement positif, **convergent vers zéro**

DÉFINITION

On dit que la suite u_n admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

EXEMPLE

Les suites définies pour $n>0$ par $u_n=n^k$ où k est un entier strictement positif, divergent vers $+\infty$

THÉORÈME (DES GENDARMES)

Si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers **la même limite** l et si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ pour tout entier n à partir d'un certain rang, alors la suite (u_n) converge vers l.

EXEMPLE

Soit la suite définie pour $n>0$ par $u_n=\dfrac{\sin(n)}{n}$.

On sait que pour tout n, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Or les suites (v_n) et (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n=-\dfrac{1}{n}$ et $w_n=\dfrac{1}{n}$ convergent vers zéro donc, d'après le théorème des gendarmes (u_n) **converge vers zéro**.

THÉORÈME

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=+\infty$

THÉORÈME

Une suite **croissante et majorée** est convergente.

Une suite **décroissante et minorée** est convergente.

REMARQUES

- Ce théorème est fréquemment utilisé dans les exercices
- Ce théorème permet de montrer qu'une suite est convergente mais, à lui seul, il ne permet pas de trouver la valeur de la limite l

EXEMPLE

Un cas particulier assez fréquent est celui d'une suite **décroissante et positive**. Puisqu'elle est positive, elle est minorée par zéro, donc d'après le théorème précédent, elle est convergente.

THÉORÈME (LIMITE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $-1 < q < 1$ la suite (u_n) **converge vers 0**
- Si $q > 1$ la suite (u_n) **tend vers** $+\infty$
- Si $q \leqslant -1$ la suite (u_n) **n'a pas de limite.**

REMARQUE

Si $q = 1$ la suite (u_n) est constante (donc convergente)

EXEMPLE

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3} < 1$)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$ (suite géométrique de raison $q = \dfrac{4}{3} > 1$)