NOMBRES COMPLEXES – ÉQUATION ET PUISSANCES

1) $(4-2i)z-\dfrac{1+i}{1-i}=2\sqrt{3}+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)$. *(1)*

On remarque que $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$. L'équation *(1)* peut s'écrire

$2(2-i)z=2\sqrt{3}+1+i\left(2-\sqrt{3}\right)$. *(2)*

En multipliant les deux membres de *(2)* par $(2+i)$, on obtient après développement et réarrangement :

$10z=5\sqrt{3}+5i$. La solution cherchée est :

$$z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

2) Pour la suite de l'exercice, il est commode d'exprimer z_0 sous la forme exponentielle

$z_0=r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, d'où $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. Alors :

$z_0=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$. On voit immédiatement que $z_0{}^2=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_0{}^3=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}=i$.

3) Alors $z_0{}^{12}=\left(z_0{}^3\right)^4=i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1$ et $z_0{}^{2016}=\left(z_0{}^{12}\right)^{168}=1^{168}=1$.

NB) Dans le plan complexe d'origine O, les images A_n des complexes d'affixe $z_0{}^n$ sont toutes sur le cercle de centre O et de rayon $R=1$. Les vecteurs $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ font entre eux un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ radians.