# PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

## I - CONDITIONNEMENT

DÉFINITION

$A$ et $B$ étant deux événements tels que $p(A) \neq 0$, la **probabilité de $B$ sachant $A$** est le nombre réel :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

REMARQUES

- On note parfois $p(B/A)$ au lieu de $p_A(B)$.
- **Rappel** : Le signe $\cap$ (intersection) correspond à **"et"**.
- De même si $p(B) \neq 0$, la **probabilité de $A$ sachant $B$** est $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

EXEMPLE

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement 2 boules **sans remise** On note :

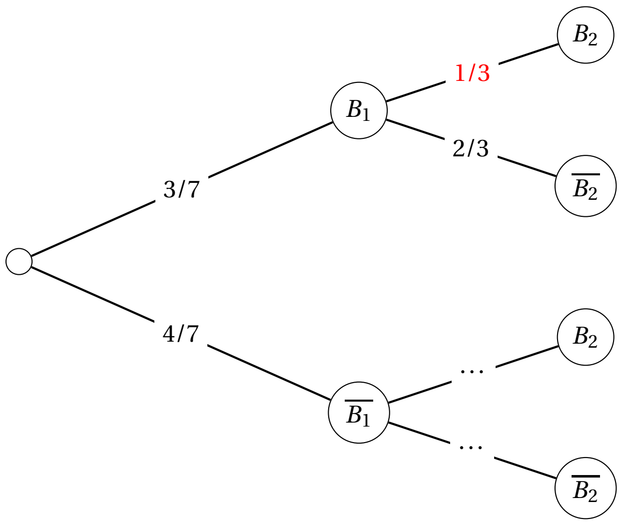
- $B_1$ l'événement *"la première boule tirée est blanche"*
- $B_2$ l'événement *"la seconde boule tirée est blanche"*

la probabilité $p_{B_1}(B_2)$ est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première était blanche. Pour la calculer, on se place dans la situation où l'on se trouve après avoir obtenu une boule blanche au premier tirage. Il reste alors 6 boules dans l'urne; 2 sont blanches et 4 sont rouges.

La probabilité de tirer une boule blanche au second tirage est donc :

$$p_{B_1}(B_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

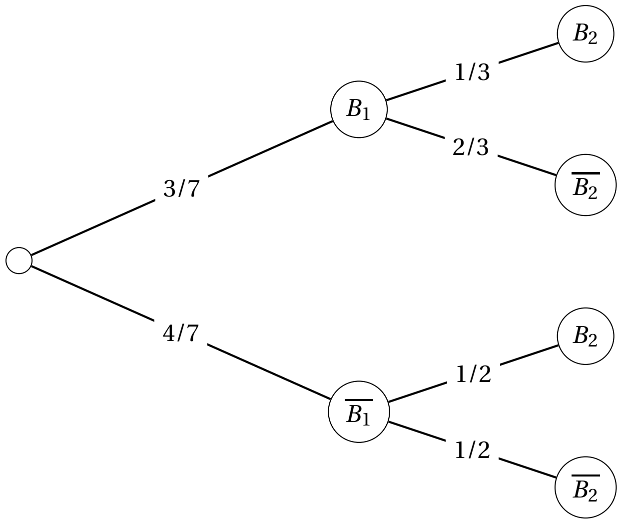
Cette probabilité se place sur l'arbre de la façon suivante :



On peut calculer de même $p_{\overline{B_1}}(B_2)$ est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première était rouge. Il reste alors 3 boules blanches et 3 boules rouges après le premier tirage donc :

$$p_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

et on peut compléter l'arbre :




PROPRIÉTÉ

De la définition précédente, on déduit immédiatement que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

REMARQUE

Attention à ne pas confondre :

- $p(A \cap B)$ qui est la probabilité que $A$ **et** $B$ soient réalisés alors qu'on ne possède **aucune indication** sur la réalisation de $A$ ou de $B$
- $p_A(B)$ qui est la probabilité que $B$ soit réalisé alors qu'**on sait déjà** que $A$ est réalisé.

EXEMPLE

Si l'on reprend l'exemple précédent, la probabilité de tirer 2 boules blanches est $p(B_1 \cap B_2)$ *(il faut que la première boule soit blanche **et** que la seconde boule soit blanche)*.

D'après la formule précédente :

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$$

## II - FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

### DÉFINITION

On dit que les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une **partition** de l'univers $\Omega$ si chaque élément de $\Omega$ appartient à un et un seul des $A_i$

### EXEMPLE

On lance un dé à 6 faces. On peut modéliser cette expérience par l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Les événements :

- $A_1 = \{1;2\}$ *(le résultat est inférieur à 3)*
- $A_2 = \{3\}$ *(le résultat est égal à 3)*
- $A_3 = \{4;5;6\}$ *(le résultat est supérieur à 3)*

forment une partition de $\Omega$. En effet, chacune des six éventualités $1,2,3,4,5,6$ appartient à et à un seul des $A_i$.

### REMARQUE

$A$ et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, quel que soit l'événement $A$. En effet, toute éventualité appartient soit à un événement, soit à son contraire et ne peut appartenir au deux en même temps.

### THÉORÈME (FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES)

Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ une **partition** de l'univers $\Omega$. Pour tout événement $B$ :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$$

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + ... + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

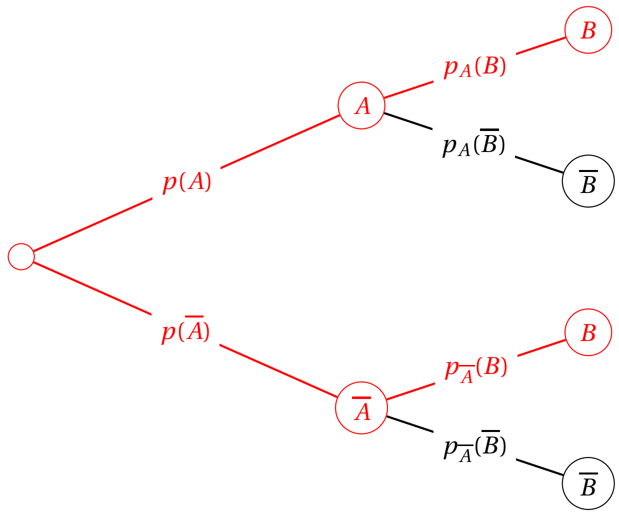
### CAS PARTICULIER FRÉQUENT

Comme $A$ et $\overline{A}$ forme une partition de l'univers :

$$p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B)$$

### REMARQUE

Le diagramme ci-dessous montre, sur un arbre, les chemins à prendre en compte pour calculer $p(B)$. Ce sont les chemins qui aboutissent à $B$.

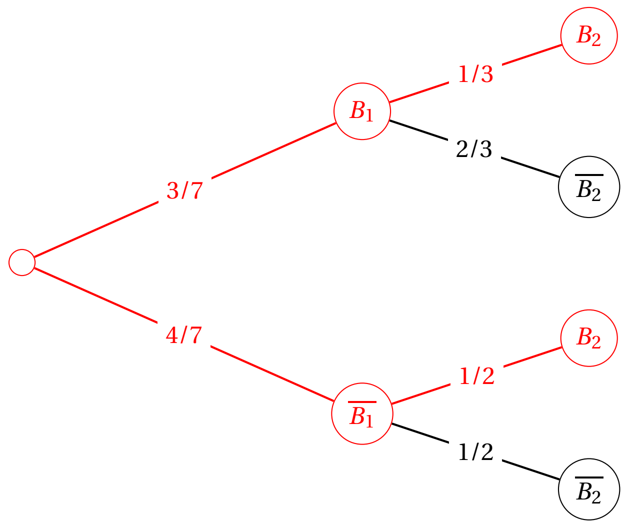



EXEMPLE

Si on reprend l'exemple ci-dessus, la probabilité que la seconde boule soit blanche est :

$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$

$p(B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p\left(\overline{B_1}\right) \times p_{\overline{B_1}}(B_2)$




$p(B_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$