EXPONENTIELLE ET INTÉGRALE

1.) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)e^x$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $(1-x^2)$ tend vers $-\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$:

$f(x)=e^x-x^2e^x=e^x-(xe^{(x/2)})^2$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

Et en posant $X=\dfrac{x}{2}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} 2Xe^X=0$ (car d'après le cours $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$).

Par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$

2.a) $f(x) = uv$ avec $u=1-x^2$ et $v = e^x$. Alors $u' = -2x$, $v' = {}^{x}$ et :

$f'\left(x\right)=u'v+uv'=\left(-x^2-2x+1\right)e^x$.

2.b) Comme e^x est strictement positif sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(-x^2-2x+1)$. C'est une fonction trinôme dont le coefficient de x^2 est négatif.
En cherchant les racines de l'équation de second degré $-x^2-2x+1=0$, on trouve que $f'(x) = 0$ pour $x_1=-\sqrt{2}-1$ et $x_2=\sqrt{2}-1$.
On en déduit le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

2.c) On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$f(-\sqrt{2}-1)$	↗	$f(\sqrt{2}-1)$	↘	$-\infty$

3) La courbe représentative de f coupe l'axe des ordonnées en $f(0) = 1$.