[BAC] ETUDE D'UNE FONCTION AVEC LOGARITHME (1)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par
$f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1)

1.a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\ln(x)\right]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-\infty\times+\infty=-\infty$$

1.b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ (théorème des croissances comparées).

f peut s'écrire : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\ln(x)}{x}$ d'où l'on tire immédiatement :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

1.c) On en déduit que les axes des abscisses et des ordonnées sont des asymptotes de C.

2) Dans tout ce qui suit, on considère que $x\in I=]0\,;+\infty[$ et, en particulier, $x\neq 0$.

2.a) Calculons $f'(x)=\left(\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\right)$ avec

$u=1+\ln(x)$ et $v=x^2$, et donc $u'=\dfrac{1}{x}$ et $v'=2x$.

On obtient :

$f'(x)=\dfrac{x\left[-1-2\ln(x)\right]}{x^4}$. Puisque $x\neq 0$, on peut simplifier :

$f'(x)=\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.

2.b) $-1-2\ln(x)>0\Rightarrow \ln(x)<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

x^3 étant strictement positif sur I, $f'(x)$ a le signe de $-1-2\ln(x)$.
$\ln(x)$ étant une fonction monotone croissante sur I, on en déduit que :

$f'(x)>0$ pour $0<x<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,

$f'(x)=0$ pour $x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$,

$f'(x)<0$ pour $x>\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2.c) En remarquant que $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{e}{2}$, on peut dresser le tableau de variations de f :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

3)

3.a) f est monotone croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ e^{-\frac{1}{2}}]$ et varie de $-\infty$ à $\frac{e}{2}$ sur cet intervalle. *C* coupe donc l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse x_0 tel que : $f(x_0) = 0$, ce qui est réalisé lorsque $1+\ln(x)=0$. On obtient facilement :
$x_0 = e^{-1}$ et bien sûr $y_0 = 0$.

3.b) On remarque que le signe de $f(x)$ est celui de $1+\ln(x)$, ce qui nous donne :
$f(x) < 0$ pour $0 < x < e^{-1}$,
$f(x) = 0$ pour $x = e^{-1}$,
$f(x) > 0$ pour $x > e^{-1}$.