EXERCICE 1 (5 points Commun à tous les candidats)
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets. On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ = 175. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : P(X < 170) = 0,02.

<u>Question 1 :</u> Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?
Réponse a : 0,04
Réponse b : 0,96
Réponse c : 0,98
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données.

<u>Méthode complète qui fonctionne quelque soit les masses de la question 1</u>

Il faut tout d'abord estimer l'écart type de la loi.
On sait que P(X < 170) = 0,02
N= $\frac{X-\mu}{\sigma}$ donc X = N $\sigma+\mu$ où N est la loi normale centrée réduite
donc P($N\sigma+\mu$ < 170) = 0.02 soit P(N < $\frac{170-\mu}{\sigma}$) = 0.02
or P(N<-2.054)=0.02
donc $\frac{170-\mu}{\sigma}$ = -2.054 soit $\sigma = \frac{170-\mu}{-2.054}$ = 2.43
Et ensuite calculer la probabilité demandée
P(170 < X < 180)=P($\frac{170-175}{2.43}$ < N < $\frac{180-175}{2.43}$) = P(-2.054 <N< 2.054)=0.98-0.02=**0.96**

<u>Méthode simplifiée qui utilise le fait que les masses sont 170 et 180.</u>
On demande de calculer la probabilité de P(170 < X < 180)
Cet intervalle est centré sur la moyenne (175). De plus, on connaît P(175-5 < X) = 0.02
Du fait de la symétrie de la courbe de Gauss, on sait que P(175+5 > X) = 0.02
Donc la probabilité cherchée vaut 1 - P(175-5 < X) - P(175+5 > X) = **0.96**

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B. Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2 : *Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?*
Réponse a : 0,72
Réponse b : 0,28
Réponse c : 0,54
Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

On est en présence d'une loi de Bernoulli. L'expérience (bonbon déformé ou pas). Les expériences sont indépendantes. Donc la probabilité d'avoir 2 bonbons déformés sur un lot de 50 suit une loi de Bernoulli.
$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$P(X=0) = \binom{0}{50} \times 0.95^{50} = 7.69\%$
$P(X=1) = \binom{1}{50} \times 0.05 \times 0.95^{49} = 20.24\%$
$P(X \geq 2) = 100 - 7.69 - 20.24 = 72\%$

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02. Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : *Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?*
Réponse a : 0,02
Réponse b : 0,67
Réponse c : 0,44
Réponse d : 0,01

Les bonbons déformés proviennent de deux sources
machine A = ⅓ * 0.05 = 1.666%
machine B = ⅔ * 0.02 = 1.333%
La probabilité cherchée est donc $\frac{1.3333}{1.333+1.666}$ **= 0.44**

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : *Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?*

Réponse a : 0,45

Réponse b : 1

Réponse c : 0,55

Réponse d : On ne peut pas répondre car il manque des données

L'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ est égale à $\frac{1}{\lambda}$ soit $\lambda = \frac{1}{500}$

La probabilité est $\frac{1}{\lambda}\int_0^{300} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}\left[-\lambda e^{-\lambda t}\right]_0^{300} = \left[e^{-\lambda t}\right]_{300}^{0}$ = 1 - $e^{-300\lambda}$ = 1 - $e^{-\frac{300}{500}}$ = **45%**

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : *Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?*

Réponse a : 40

Réponse b : 400

Réponse c : 1 600

Réponse d : 20

Pour estimer cette proportion, on utilise l'intervalle de confiance d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$

Il faut donc que $\frac{2}{\sqrt{n}}$ <0.05 soit $\sqrt{n}$ > $\frac{2}{0.05}$ soit n> $\frac{4}{0.05^2}$

Finalement N > 1600

EXERCICE 2 (4 points Commun à tous les candidats)
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i}, \vec{j},.\vec{k})$ On considère deux droites d1 et d2 définies par les représentations paramétriques :
d1 : $x = 2+ t$, $y = 3- t$, $z = t$, $t \in R$
et
d2 : $x = -5+2t'$, $y = -1+ t'$, $z = 5$, $t' \in R$.
On admet que les droites d1 et d2 sont non coplanaires. Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d1 et d2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point A(2 ; 3 ; 0) appartient à la droite d1.
Si on remplace t par zéro dans les équations paramétriques de d1, on trouve les coordonnées de A ∈ d1 (t=.0)

2. Donner un vecteur directeur $\vec{u_1}$ de la droite d1 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$ de la droite d2. Les droites d1 et d2 sont-elles parallèles ?
En notation vectorielle, les équations paramétrique de d1 sont : (2;3;0) + t * (1;-1;1)
donc $\vec{u_1}$ (1;-1;1) est un vecteur directeur de d1
En notation vectorielle, les équations paramétrique de d2 sont : (-5;-1;5) + t' * (2;1;0)
donc $\vec{u_2}$ (2;1;0) est un vecteur directeur de d2
les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires car pour tout a ∈ R, $\vec{u_1} \neq a * \vec{u_2}$
donc d1 et d2 ne sont pas parallèles.

3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}$ (1 ; −2 ; −3) est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.
$\vec{u_1} \cdot \vec{v}$ = (1;-1;1) .(1 ; −2 ; −3) = 1 + 2 - 3 = 0
$\vec{u_2} \cdot \vec{v}$ = (2;1;0) .(1 ; −2 ; −3) = 2 -2 + 0 = 0
donc $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$

4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$. On étudie dans cette question l'intersection de la droite d2 et du plan P .
a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x +4y - z -22 = 0$.

Pour trouver l'équation cartésienne du plan P, commençons par déterminer un vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a;b;c) normal aux deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$.
(a) : $\vec{u_1} \cdot \vec{n}$ = (1;-1;1) .(a ; b ; c) = a - b + c = 0
(b) : $\vec{v} \cdot \vec{n}$ = (1;-2;-3) .(a ; b ; c) = a - 2b -3c = 0

(a)-(b) : b = -4c
(a) : a = b - c = -5c (en substituant b par sa valeur trouvée ci-dessus)
Les vecteurs orthogonaux à $\vec{u_1}$ et $\vec{v}$ sont de la forme (-5c;-4c,c)
on pose c=-1 donc $\vec{n}$ = (5;4;-1)
Le plan P a donc pour équation cartésienne : 5x+4y-z+d=0
Il suffit ensuite d'écrire que A(2 ; 3 ; 0) appartient à P donc 5*2+4*3+d=0 d'où d=-22
Le plan P a pour équation 5x+4y-z-22=0

b. Montrer que la droite d2 coupe le plan P au point B (3 ; 3 ; 5) .

Pour déterminer $d2 \cap P$, il suffit de déterminer t' pour annuler l'expression 5x+4y-z-22.

Soit $5 * (-5+2t) + 4 * (-1+ t') -5 -22 = 0$

$-25 +10t' -4 +4t' - 27 = 0$

$14t' = 56$

$t' = 4$

En remplaçant cette valeur dans les équations paramétriques de d2, on obtient B

B(-5+8;-1+4;5)=B(3,3,5)

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}$ (1 ; −2 ; −3), et passant par le point B (3 ; 3 ; 5).

a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

La droite Δ est l'ensemble des points M tels que le vecteur BM = t$\vec{v}$ ou M = B + t$\vec{v}$

donc x=3+t, y=3-2t, z=5-3t , $t \in R$

b. Les droites d1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

Δ : x=3+t'', y=3-2t'', z=5-3t'' , $t \in R$

d1 : x = 2+ t , y = 3− t , z = t , $t \in R$

Δ et d1 sont sécante si le système de 3 équations à deux inconnues admet une solution

(a): 3+t''=2+ t

(b): 3-2t''=3− t

(c): 5-3t''= t

je propose de résoudre le système formé des équations (b) et (c) est de vérifier que la solution est compatible avec l'équation (a)

(b): t=2t''

(c): 5-3t''=2t'' donc t''=1, t=2

(a)3+1=2+2 vrai.

Donc les droites Δ et d1 sont sécantes.

c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Il faut donc justifier que la droite Δ est sécante avec d1 et d2 et orthogonale à d1, d2

a)La droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}$ (1 ; −2 ; −3), or $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ donc Δ est orthogonale avec d1 et d2

b) D'après le §5.b, la droite Δ est sécante avec d1

c) De plus Δ passe par le point B(3;3;5) qui appartient aussi à d2 (cf %4.b) il suffit de poser t''=0. Donc Δ et d2 sont sécantes.

Les alinéas a) b) et c) prouvent que Δ répond au problème posé

EXERCICE 3 (6 points Commun à tous les candidats)°

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma. On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note f (t) la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (µg.L−1), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc f (0) = 20µg.L−1 . 1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale. Déterminer cette demi-vie, notée t0,5.

Pour trouver , il suffit de résoudre l'équation d'inconnue t suivante : $20e^{-0,1t} = 10$

$e^{-0,1t} = 0.5 \Leftrightarrow \ln(e^{-0,1t}) = \ln(0.5)$ puisque ln est une fct monotone croissante

$\Leftrightarrow -0.1t = \ln(0.5)$

$\Leftrightarrow t_{0.5} = \dfrac{ln(0.5)}{-0.1}$ = **6.9 h**

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à 0,2µg.L−1 . Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

Pour trouver , il suffit de résoudre l'équation d'inconnue t suivante : $20e^{-0,1t} = 0.2$

$e^{-0,1t} = 0.01 \Leftrightarrow \ln(e^{-0,1t}) = \ln(0.01)$ puisque ln est une fct monotone croissante

$\Leftrightarrow -0.1t = \ln(0.01)$

$\Leftrightarrow t_{0.5} = \dfrac{ln(0.01)}{-0.1}$ = **46.1 h**

3. En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en µg.L−1 .h, le nombre $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$. *Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à 200µg.L−1 .h.*

Une primitive de $20e^{-0,1t}$ est $\dfrac{20}{-0.1}\,e^{-0,1t}$

donc $\int_0^x 20e^{-0,1t} = [\dfrac{20}{-0.1}\,e^{-0,1t}]_0^x = 200\,[e^{-0,1t}]_x^0 = 200 * (1-e^{-0,1x})$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0.1x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt. = 200$

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L−1), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$, avec $t \in [0 ; +\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : g (0) = 0µg.L−1 .
1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a : $g'(t) = 20e^{-t}(1-0,1e^{0,9t})$.

$g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$

$g'(t)=20(-0.1e^{-0,1t}+ e^{-t}) = 20e^{-t}(1 - 0.1e^{0.9t})$

2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.) En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Etude du signe de g'(t)

$20e^{-t} > 0$ pour tout $t > 0$

$$
\begin{aligned}
1 - 0.1e^{0.9t} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0.1e^{0.9t} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{0.9t} < \frac{1}{0.1} \\
&\Leftrightarrow \quad ln(e^{0.9t}) < ln(10) \text{ car ln est une fonction monotone croissante} \\
&\Leftrightarrow \quad 0.9t < ln(10) \\
&\Leftrightarrow \quad t < \frac{ln(10)}{0.9}
\end{aligned}
$$

$$\frac{ln(10)}{0.9} \approx 2.558$$

$$g\left(\frac{ln(10)}{0.9}\right)=20\left(exp\left(\frac{0.1*ln(10)}{0.9}\right)exp\left(-\frac{ln(10)}{0.9}\right)\right)=13.94$$

x	0		$\frac{ln(10)}{0.9}$		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	
h(x)	0	↗	$g\left(\frac{ln(10)}{0.9}\right)$	↘	0

La concentration est maximale pour obtenue après 2.558 h
soit 2h + 0.558h
En exprimant la partie décimale en minute on a 2h + 33.505mn soit ***2h et 34mn.***

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse
On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre t0,5 qui a été calculé en A -
1. Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20µg.L−1 . On note un la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection. Ainsi, u1 = 20 et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$. On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20 µg.L−1 , est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit f (0).
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n > 1 : $u_n = 40-40\times0,5^n$

<u>Initialisation:</u>
$U_1 =. 40-40\times0,5^1 = 40 - 20 = 20$ la propriété est vraie au rang 1
<u>Hérédité:</u>
Admettons la propriété vraie au rang n et démontrons que le rang n+1 est vrai soit $u_{n+1} = 40-40\times0,5^{n+1}$

par hypothèse de récurrence on a $u_n = 40-40\times0,5^n$ or $u_{n+1} = 0,5u_n +20$

donc $u_{n+1} = 0,5(40-40\times0,5^n) +20$
$= 20 - 20 \times 0.5^n + 20$
$= 40 - 20 \times 0.5^n$
$= 40 - (2 \times 20) \times (0.5^n / 2)$ en multipliant et divisant par 2 le nombre 20×0.5^n
$= 40 - 40 \times 0.5^{n+1}$

ce qui montre que la propriété est héréditaire. Comme cette propriété est vraie au rang 1, elle est vraie pour tout n > 1.

2. Déterminer la limite de la suite (un) lorsque n tend vers +∞.

$u_n = 40-40\times0,5^n$
Comme 0<0,5<1, la limite de $0,5^n$ est zéro quand n tend vers l'infini
donc (u_n) tend vers 40 quand n tend vers l'infini

3.. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 µg.L-−1 . Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.
Pour traiter cette question, il faut trouver le plus petit n tel que $u_n>38$
$40-40\times0,5^n > 38$

$0,5^n < \frac{2}{40}$

$n\ln(0.5) < \ln(\frac{1}{20})$

$n > \frac{ln(1/20)}{ln(0.5)}$ car $ln(0.5) < 0$

n > 4.32 donc

Il faut donc faire 5 injections pour atteindre la concentration de 38 µg/L

EXERCICE 4 (5 points Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique)

Le plan est muni d'un repère orthonormé O,$\vec{u}$ $\vec{v}$. Pour tout entier n > 4, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O. On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier n = 6

On a représenté ci-contre un polygone P_6.

1. Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à 1/6 .

Pour montrer que ce triangle est équilatéral, il faut montrer de $[A_6B_6]=r_6$ puisque les deux autres côtés mesurent r_6.

Le point A_6 a pour coordonnées $(r_6,0)$

Le point B_6 a pour coordonnées ($r_6\cos(\frac{\pi}{3})$,$r_6\sin(\frac{\pi}{3})$)

$[A_6B_6]^2= r_6^2(1-\cos(\frac{\pi}{3}))^2+ r_6^2\sin(\frac{\pi}{3}))= r_6^2(1+\cos^2(\frac{\pi}{3})-2\cos(\frac{\pi}{3})+\sin^2(\frac{\pi}{3}))$

comme $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ et $\cos(\frac{\pi}{3})=0.5$

on obtient finalement $[A_6B_6]^2= r_6^2(2-2*0.5)= r_6^2$

donc $[A_6B_6]= r_6$ donc le triangle OA_6B_6 est équilatéral.

Puisqu'il existe 6 triangles et que l'aire totale vaut 1, l'aire d'un triangle vaut 1/6 .

2. Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

Soit H la projection de B_6 sur (OA_6). Par construction, le triangle O,H,B_6 est rectangle en H

dans ce triangle $\sin(H,O,B_6)= \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{cote\ opposé}{hypothénuse} = \frac{hauteur}{r_6}$

donc hauteur = $r_6 \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_6$

3. En déduire que r6 = $\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

L'aire du triangle vaut ⅙ (question n°1) mais aussi hauteur * base / 2

$\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_6 * r_6 / 2$

$\frac{\sqrt{3}}{2} r_6^2 = \frac{1}{3}$ soit $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

r6 = $\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$

Partie B : cas général avec n > 4
Dans cette partie, on considère le polygone Pn avec n > 4, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n. On note alors $r_n e^{i\theta n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle [0 ; π/2[.
1. Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle OA_nB_n puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}$ sin(θ_n).

Soit H la projection de B_n sur (OA_n). Par construction, le triangle O,H,B_n est rectangle en H dans ce triangle sin(H,O,B_n)= sin(θ_n) = $\frac{cote\ opposé}{hypothénuse}$ = $\frac{hauteur}{r_n}$

donc hauteur = r_n sin(θ_n)

L'aire du triangle vaut hauteur * base / 2 soit = r_n sin(θ_n) r_n / 2 = r_n^2 sin(θ_n) / 2

2. On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1. Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle (OA_n , OB_n) , puis démontrer que : $r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin(\frac{2\pi}{n})}}$

Puisqu'il existe n triangles, l'angle(OA_n , OB_n) vaut simplement $\frac{2\pi}{n}$
Puisque l'aire du polygone vaut 1, l'aire du triangle vaut 1/n

donc $\frac{1}{n} = \frac{r_n^2 \sin(\frac{2\pi}{n})}{2}$ soit $r_n^2 = \frac{2}{n\sin(\frac{2\pi}{n})}$

donc $r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin(\frac{2\pi}{n})}}$

.
Partie C : étude de la suite (r_n)
On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle]0 ; π[par f (x) = x / sinx .
Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour n > 4, s'exprime à l'aide de la fonction f par :
$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f(\frac{2\pi}{n})}$ ¶. On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]0 ; π[.
1. Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout n > 4, on a : 0 < 2π / (n +1) < 2π / n < π.

On a pour tout n

$n+1 > n > 0$

puisque la fonction h:x -> 1/x est décroissante sur]0 ; +∞[, et n>4 on a

$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$

$0 < \frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n} < \pi$ obtenu en multipliant par $2\pi > 0$

Puisque la fonction f est strictement décroissante sur]0 ; π[, on a

$f(\frac{2\pi}{n+1}) < f(\frac{2\pi}{n}) < f(\pi)$

Puisque f(x) > 0 si x *]0 ; π[* (fonction quotient de deux termes positif)

et puisque la fonction k:x -> $\sqrt{x}$ est strictement croissante sur]0 ; +∞[

on a :

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}f(\frac{2\pi}{n})} < \sqrt{\frac{1}{\pi}f(\frac{2\pi}{n+1})}$$

soit

$r_n < r_{n+1}$

Cette relation est vraie pour tout n, ce qui établit que la suite (r_n)est décroissante.

2. En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que L = $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

La suite admet la borne inférieure 0. En effet quelque soit a > 0 $\sqrt{a}$ > 0. De plus est est décroissante, donc elle admet une limite.

3. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :

n est un nombre entier

TRAITEMENT :

n prend la valeur 4

Tant que $\sqrt{\frac{2}{n\ sin(\frac{2\pi}{n})}}$ *> 0,58 faire*

n prend la valeur n +1

Fin Tant que

SORTIE : Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

N=11

si n=10 $\sqrt{\frac{2}{n\ sin(\frac{2\pi}{n})}}$ *= 0,5833*

si n=11 $\sqrt{\frac{2}{n\ sin(\frac{2\pi}{n})}}$ *= 0.5799*