POURCENTAGES

1. PART EN POURCENTAGE

DÉFINITION

Soit E un ensemble fini (que l'on appellera **ensemble de référence**) et F une partie de l'ensemble E. La **part en pourcentage** de F par rapport à E est le nombre :

$$t\% = \frac{t}{100} = \frac{\text{card}\,(F)}{\text{card}\,(E)}$$

où $\text{card}\,(E)$ (cardinal de E) désigne le nombre d'éléments de E et $\text{card}\,(F)$ le nombre d'éléments de F.

On dit également que F représente $t\%$ de E.

REMARQUES

- 5%, $\frac{5}{100}$ et $0,05$ sont trois écritures différentes du **même nombre** (pourcentage, fraction, écriture décimale).
- On est en présence d'une situation de proportionnalité que l'on peut représenter par le tableau suivant :

t	nombre d'éléments de F
100	nombre d'éléments de E

- Ceci peut également s'écrire : nombre d'éléments de $F = \frac{t}{100} \times$ nombre d'éléments de E.
  Cette dernière égalité permet de calculer le nombre d'éléments de F connaissant sa part en pourcentage par rapport à E.

EXEMPLES

- Dans une classe de 25 élèves qui compte 15 garçons le pourcentage de garçons est :
  $\frac{15}{25} = 0,6 = \frac{60}{100} = 60\%$
- 16% de 75€ font : $\frac{16}{100} \times 75 = 12$€

PROPRIÉTÉ

Pourcentages de pourcentages Soit 3 ensembles E, F, G tels que $G \subset F \subset E$.

Si G représente $t_1\%$ de F et si F représente $t_2\%$ de E, la part en pourcentage de G par rapport à E est :

$$\frac{t}{100} = \frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100}$$

EXEMPLE

Dans un lycée de 800 élèves :

- 25 % des élèves sont en Seconde ;
- 45 % des élèves de Seconde sont des filles.

La part des filles de Seconde dans le lycée est :

$$\frac{t}{100} = \frac{25}{100} \times \frac{45}{100} = \frac{1125}{10000} = \frac{11,25}{100} = 11,25\%$$

Le nombre de filles en Seconde est $\frac{11,25}{100} \times 800 = 90$

2. POURCENTAGES D'ÉVOLUTION

DÉFINITION

On considère une quantité passant d'une valeur V_0 à une valeur V_1.

Le **coefficient multiplicateur** CM est le nombre par lequel il faut multiplier V_0 pour obtenir V_1 :

$$V_1 = CM \times V_0$$

REMARQUES

- On a donc $CM = \frac{V_1}{V_0}$.
- Le coefficient multiplicateur est **supérieur à 1** dans le cas d'une **augmentation** et **inférieur à 1** dans le cas d'une **diminution**.
- La fonction qui à l'ancienne valeur associe la nouvelle valeur est : $x \longmapsto CM \times x$
  C'est une **fonction linéaire** de coefficient directeur CM

DÉFINITION

On considère une quantité passant d'une valeur V_0 à une valeur V_1.

Le pourcentage d'évolution de cette quantité est le nombre

$$\frac{t}{100} = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

REMARQUES

Le pourcentage d'évolution est **positif** dans le cas d'une **augmentation** et **négatif** dans le cas d'une **diminution**.

EXEMPLE

Le prix d'un article passe de 80€ à 76€. Le pourcentage d'évolution est :

$$\frac{t}{100} = \frac{76-80}{80} = -\frac{4}{80} = -0,05 = -5\%$$

Le prix de l'article a diminué de 5%

PROPRIÉTÉ

Le coefficient multiplicateur s'exprime en fonction du pourcentage d'évolution par :

$CM = 1 + \frac{t}{100}$

(où t est positif en cas d'augmentation, négatif en cas de diminution)

REMARQUES

- On a donc : $V_1 = \left(1 + \frac{t}{100}\right) V_0$.
- Dans le cas d'une diminution de 5%, par exemple, on pourra au choix considérer que :
  $CM = 1 + \frac{t}{100}$ avec $t = -5$
  ou
  $CM = 1 - \frac{t}{100}$ avec $t = 5$
  Dans les deux raisonnements, on obtient évidemment le même coefficient multiplicateur 0,95.
- Connaissant le coefficient multiplicateur, on a facilement le pourcentage d'évolution grâce à la relation : $\frac{t}{100} = CM - 1$
- Le tableau ci-dessous résume les différents cas :

	Prendre t% de x	Augmenter x de t%	Diminuer x de t%
Calculs à effectuer	Multiplier x par $\frac{t}{100}$	Multiplier x par $1 + \frac{t}{100}$	Multiplier x par $1 - \frac{t}{100}$
Fonction linéaire	$x \longmapsto \frac{t}{100} \times x$	$x \longmapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times x$	$x \longmapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times x$

EXEMPLE

	Prendre 25% de x	Augmenter x de 25%	Diminuer x de 25%
Calculs à effectuer	Multiplier x par $\frac{25}{100}$	Multiplier x par $1,25$	Multiplier x par $0,75$
Fonction linéaire	$x \longmapsto 0,25 \times x$	$x \longmapsto 1,25 \times x$	$x \longmapsto 0,75 \times x$
Exemples	Prendre 25% de 200	Augmenter 50 de 25%	Diminuer 50 de 25%
Résultat	$0,25 \times 200 = 50$	$1,25 \times 50 = 62,5$	$0,75 \times 50 = 37,5$

PROPRIÉTÉ (ÉVOLUTIONS SUCCESSIVES)

Lors d'évolutions successives, le coefficient multiplicateur global est égal au **produit** des coefficients multiplicateurs de chaque évolution

EXEMPLE

Le prix d'un objet augmente de 10% puis diminue de 10%.

Le coefficient multiplicateur global est :

$$CM = \left(1+\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{10}{100}\right)=0,99$$

Si t désigne le pourcentage d'évolution global en %, on a donc :

$1+\frac{t}{100}=0,99$

$\frac{t}{100}=0,99-1=-0,01=-\frac{1}{100}$

Le prix de l'objet a globalement **diminué** de 1%.

REMARQUES

- **Une hausse de** t% **ne "compense" pas une baisse de** t%. C'est dû au fait que les deux pourcentages ne portent pas sur le même montant.
  En effet, si un objet coûtant 100 euros subit une augmentation de 10% son prix passera à 110€ (les 10% ont été calculé par rapport à 100€).
  Si son prix subit ensuite une diminution de 10%, le montant de la baisse sera calculé par rapport au prix de 110€ et non plus de 100€. La baisse sera donc de 11€ et non 10€.
- En cas d'évolution successives, **les pourcentages d'évolutions ne s'ajoutent (ni ne soustraient) jamais**.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ (TAUX D'ÉVOLUTION RÉCIPROQUE)

Si le taux d'évolution t% fait passer de V_0 à V_1, on appelle taux d'évolution réciproque t'%, le taux d'évolution qui fait passer de V_1 à V_0.

On a alors la relation suivante :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$$

EXEMPLE

Le prix d'un article augmente de 60%. Pour qu'il revienne à son prix de départ, il faut qu'ensuite il varie de t'% tel que :

$\left(1+\frac{60}{100}\right)\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$

$1,6\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$

$1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{1,6}$

$1+\frac{t'}{100}=0,625$

$\frac{t'}{100} = -0,375$

$t' = -37,5$

Il faut donc que le prix diminue de 37,5% pour compenser la hausse de 60%.