CONGRUENCES-BAC S LIBAN 2009

PARTIE A

**1)** En remarquant que on peut écrire : . Et puisque , on a , ce qui montre que le reste de la division euclidienne de 20092 par 16 est égal à 1.



**2)** On en déduit que toute puissance paire de 2009 est congrue à 1 modulo 16 et que toute puissance impaire est congrue à 2009 modulo 16. D'où :

.

PARTIE B

**1)**

**1.a)** , ce qui montre que *u*0 est divisible par 5.

**1.b)** La formule du binôme de Newton appliquée à donne :



. D'où :

.

**1.c)** La proposition est vraie pour *u*0 (cf. 1.a). Montrons que si elle vraie pour *un* elle l'est aussi pour *un*+1. Posons . D'après ce qui précède, on peut écrire : , soit : , ce qui démontre que *un*+1 est divisible par 5*n*+2. La proposition est donc vraie pour tous les termes de la suite (*un*).

**2)**

**2.a)** Démontrons par récurrence que . Ceci est vrai pour . Si la proposition est vraie pour *un*, montrons qu'elle est vraie pour *un*+1:

. Ainsi la proposition est vraie pour tous les termes de la suite (*un*). Alors .

D'après ce qui précède *u*3 est divisible par 54 = 625. Donc :.

**2.b)** On remarque que . Donc :

.

PARTIE C

**1)** Un corollaire du théorème de Gauss énonce que si un nombre entier *a* est divisible par deux nombres entiers *b* et *c* premiers entre eux, alors *a* est divisible par le produit *bc*.

Dans ce qui précède, nous avons démontré que  est divisible par 16 et 625 qui sont premiers entre eux. Il s'ensuit que  est divisible par .

**2)** En remarquant que , on peut conclure que le nombre  est un cube dont l'écriture décimale se termine par 2009, c'est à dire tel que .