INTEGRALES DE WALLIS

On considère la suite (*In*) définie pour tout entier naturel *n* par : .

PARTIE I – CALCUL DES PREMIERS TERMES

I.1)  et

.

I.2) Soit *f* définie sur **R** :  avec *n* ∈ **N\***.

 avec :

 et , et

 et .

On en déduit :

.

En remarquant que , on peut écrire :

, soit

 pour tout *n* ∈ **N\***.

En intégrant cette expression sur [0;], on obtient :

.

Le premier terme de cette égalité est égal à

.

Le second terme est égal à

.

On en déduit que pour tout *n* ∈ **N\***, .

Et si on applique cette formule à l'indice *n* de *I*, on obtient  pour tout *n* > 1

I.3) L'algorithme de Xavier ne fonctionne pas car il calcule *In* selon la formule  au lieu de . On propose un algorithme modifié qui utilise une variable supplémentaire, V :

**VARIABLES**

**V, U, Uprec** sont des réels

**N, I** sont des entiers

**DEBUT ALGORITHME**

Lire **N**

**Uprec** prend la valeur PI/2

Afficher **Uprec**

**U** prend la valeur 1

Pour **I** allant de 2 à **N**

**V** prend la valeur **Uprec**\*(**I**–1)/**I**

**Uprec** prend la valeur **U**

Afficher **Uprec**

**U** prend la valeur **V**

Fin Pour

**FIN ALGORITHME**

PARTIE II – ETUDE DE LA CONVERGENCE

II.1) On a , d'où *In* < *In*–2 pour tout *n* > 1, ce qui montre que (*In*) est décroissante.

II.2) On a , d'où , ce qui montre que (*In*) est convergente.

II.3) On constate que l'égalité  est vraie pour *n* = 0.

Si l'égalité  est vraie pour un certain entier *n* ≥ 0, montrons qu'elle est vraie pour *n* + 1, c'est à dire que l'on doit avoir . Comme d'après I.1) , on peut écrire :

.

Et, par récurrence, l'égalité  est démontrée pour tout *n* ≥ 0.

4) On a vu que la suite (*In*) est convergente, ce qui veut dire que ses termes *In* tendent vers une limite *l* quand *n* tend vers +∞. On peut alors écrire que

.

D'où *l* =.