PRODUIT SCALAIRE DANS L’ESPACE – BAC S – AMÉRIQUE DU NORD 2008

PARTIE A

**1)** On remarque que, quelque soit *M* dans l'espace, les points *A*, *D*, *I* et *M* sont coplanaires. On peut donc traiter la question dans le plan. Rapportons le plan (*ADM*) à un repère orthonormal. Les points *A*, *D*, *I* et *M* ont pour coordonnées dans ce repère :

*A* (*a*;*b*), *D* , *I*  et *M* (*x*;*y*). On en tire les coordonnées des vecteurs  :

.

On calcule :

,

 et

. En remarquant que , on a :

,

c'est à dire .

**2)**  implique que (*MD*) et (*MA*) sont perpendiculaires en *M* et que *MI* = *IA*. Cela démontre que, dans le plan (*ADM*), *M* appartient à un cercle de centre *I* et de rayon *IA* = *ID* = *IM*. On en déduit que, dans l'espace, (*E*) est la sphère de centre *I* et de rayon *IA*.

PARTIE 2

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal , les points *A*, *B*, *C* et *D* ont pour coordonnées :.

**1)**

**1.a)** Pour que le vecteur  soit normal au plan (*ABC*), il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires appartenant à (*ABC*).



Les vecteurs  et , non colinéaires, ont pour coordonnées respectives :

 et . On calcule les produits scalaires  et  :

et .



Cela démontre que le vecteur est normal au plan (*ABC*).



**1.b)** Des coordonnées de , vecteur normal au plan (*ABC*), et sachant que *A* (3;0;0) appartient à ce plan, on en déduit l'équation du plan (*ABC*) : .

**2)**

**2.a)** , normal au plan (*ABC*), est un vecteur directeur de la droite ∆. *D* est un point de cette droite. On obtient facilement la représentation paramétrique de ∆ :



**2.b)** Les coordonnées de *H* sont obtenues en résolvant l'équation :

. On obtient *t* = 1, d'où l'on déduit les coordonnées de *H* : (–1;2;4).

**2.c)** , d'où .

**2.d)** Les coordonnées de  sont  et celles de  . Alors :

.

Ce qui démontre que .