RÉCURRENCE ET ENCADREMENT

Soit la suite (*un*) définie par *u*0 = 1 et, pour tout *n* ∈ **N** : .

1) On a *u*0 = 1 et on calcule que . On a donc 1 ≤ *u*0 ≤ 2 et 1 ≤ *u*1 ≤ 2.

Admettons que 1 ≤ *un* ≤ 2. Alors .

En remarquant que pour tout entier naturel *a* et *b*, si , on peut écrire :

, c'est à dire . Comme , on a finalement :.

Et par récurrence, on démontre ainsi que 1 ≤ *un* ≤ 2 pour tout *n* ∈ **N**.

2) On calcule *un* à 10–2 près pour *n* allant de 0 à 3 :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *un* | 1 | 1,73 | 1,93 | 1,98 |

On observe que *u*1 > *u*0, *u*2 > *u*1 et *u*3 > *u*2 d'où l'on conjecture que (*un*) est croissante. Si tel est le cas on doit avoir  pour tout *n* ∈ **N**. Admettons que . Alors :

, c'est à dire.

Et par récurrence nous avons démontré que  pour tout *n* ∈ **N**, et donc que (*un*) est croissante.

3) (*un*) est croissante et  pour tout *n* ∈ **N**. Cela implique que (*un*) est convergente et tend vers une limite *l* telle que 1 ≤ *l* ≤ 2.

Puisque *u*3 = 1,98, on peut préciser l'encadrement de *l* : 1,98 < *l* ≤ 2.

NB. En fait, si (*un*) tend vers une limite *l*, on peut considérer pour *n* très grand que

, et, pour trouver *l*, on peut écrire , ce qui donne *l* = 2.