SUITES – BAC S LIBAN 2013

On considère la suite (*vn*) définie pour tout entier naturel *n* par *v*0 = 1 et .

PARTIE A

A.1) C'est l'algorithme N° 3 qui convient. Le N° 1 n'affiche que *vn* et et le N° 2 n'affiche que des 1.

A.2) D'après les valeurs données dans l'énoncé, on conjecture que (*vn*) est croissante et convergente.

A.3)

A.3.a) On observe que 0 < *v*0 = 1 < 3 et que 0 < *v*1 = 1,8 < 3.

Supposons que 0 < *vn* < 3 pour un certain entier naturel *n*. Alors on peut écrire la série d'inégalités suivante :

.

En remarquant que , on a , d'où l'on déduit que :

. Comme , on peut écrire finalement que .

Et par récurrence on a démontré que 0 < *vn* < 3 pour tout entier naturel *n*.

4.3.b) .

Puisque 0 < *vn* < 3, alors 6 – *vn* > 0. Donc  pour tout entier naturel *n*, démontrant ainsi que (*vn*) est monotone croissante.

4.3.c) (*vn*) est monotone croissante et 0 < *vn* < 3 pour tout entier naturel *n*. Donc la suite est convergente et a une limite *l* telle que 0 < *l* < 3.

PARTIE B

On considère la suite (*wn*) définie pour tout entier naturel *n* par .

B.1) Calculons *wn*+1 en fonction de *wn* :

. Calculons la différence *wn*+1 – *wn* :



Ce qui démontre que (*wn*) est une suite arithmétique de raison .

B.2) On calcule que  et on en déduit que .

On a alors  d'où l'on tire 

B.3) On en déduit facilement que la limite de (*vn*) est égale à 3.