SUITES – BAC S MÉTROPOLE 2013

Soit la suite (*un*) définie sur **N** par *u*0 = 2 et pour tout *n* > 0 par :

.

1)

1.a)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *un* | 2 | 2,33 | 2,89 | 3,59 | 4,40 |

1.b) On conjecture d'après le tableau précédent que (*un*) est croissante.

2)

2.a) On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* :

*un* < *n* + 3.

On voit que cela est vrai pour *u*0 et *u*1. Démontrons que si la proposition est vraie pour *un* alors elle est vraie pour *un*+1, c'est à dire que l'on doit avoir 



.

En remarquant que le premier membre de cette dernière inégalité est égal à *un*+1, on a :

.

2.b) .

2.c) Puisque *un* < *n* + 3 pour tout *n* ∈**N**, on en déduit que :

** pour tout *n* ∈**N**, et donc que (*un*) est croissante, ce qui valide la conjecture précédente.

3) On désigne par (*vn*) la suite définie sur **N** par *vn* = *un* – *n*.

3.a) On calcule *vn*+1 :

.

C'est à dire :, d'où .

Ceci démontre que (*vn*) est une suite géométrique de raison .

Son premier terme est , et son terme général est .

3.b) On déduit de ce qui précède que :

.

3.c) En remarquant que , on détermine que .

4) Pour tout entier naturel *n* non nul on pose :



et

.

4.a) , c'est à dire la somme de la somme des termes de la suite géométrique de raison  et de premier terme 2 d'une part, et des termes de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0 d'autre part. Ce qui donne :

.

4.b) L'expression précédente peut s'écrire :

. Alors :

. D'où l'on déduit que :

.