SUITES – RÉCURRENCE – LIMITE

Soit la suite (*un*) définie pour tout entier *n* ≥ 1 par :

.

PARTIE A

A.1)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 1 | 2 | 3 | 100 |
| *un* |  |  |  | 0,749 |

A.2) On peut conjecturer que (*un*) est croissante.

A.3) On constate que . Montrons que si , alors  pour tout entier *n* ≥ 2 :

 pour tout entier *n* ≥ 2. Par récurrence on en déduit que

 pour tout *n* ≥ 1.

A.4) . On peut alors écrire que :.

Le second membre de cette inégalité est *un*, et le premier est la somme des termes d'une progression géométrique de premier terme  et de raison . Cette somme est égale à  et elle tend vers 1 lorsque *n* tend vers +∞. On en conclut que :

 pour tout *n* ≥ 1 et 1 est donc un majorant de *un*.

A.5) D'après A.3), . Or, . On en déduit que

, ce qui montre que *un*+1 – *un* tend vers 0 quand *n* tend vers +∞ et prouve que *un* est convergente.

PARTIE B

B.1) On vérifie que :

*n* = 0 : 3 > 0,

*n* = 1 : 9 > 4 et

*n* =2: 27 > 18

On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n* ≥ 2 :

. (1)

Si l'inégalité (1) est vraie pour *n*,

montrons que  pour tout *n* ≥ 2 :

D'après (1), on peut écrire :

. Comparons  et .

.

En remarquant que  pour tout entier *n* ≥ 2, on en déduit que :, et donc que

 pour tout entier *n* ≥ 2.

Puisque l'inégalité (1) est vérifiée pour *n* = 0, *n* = 1 et *n* = 2, elle vraie pour tout entier naturel *n*.

B.2) Pour tout entier naturel *n* ≠ 0, on pose .

On a .

Et puisque , alors  et .

Ceci démontre que (*vn*) est décroissante.

B.3) Puisque  tend vers 0 quand *n* tend vers +∞, la limite de (*vn*) est celle de (*un*), c'est à dire *l*.

B.4) On remarque que *un* < *l* < *vn* pour tout entier naturel *n*.

Avec la calculatrice, on trouve que *u*6 < *l* < *v*200 avec une amplitude de 10–2 soit :

0,745 < *l* < 0,755.