$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = -2t + 2xe^{-t} + 7t\sin\left(\dfrac{3\pi x}{10}\right), x \in [0,5]; \\ u(0,t) = 1 + t^2, u_x(5,t) = 2e^{-t}; \\ u(x,0) = 2x + 2. \end{cases}$$

Решение

Этап 1. Необходимо свести задачу к случаю **однородных граничных условий**. Ищем решение $u(x,t)$ в виде суммы двух функций:

$$u(x,t) = H(x,t) + \tilde{u}(x,t),$$

где $H(x,t)$ удовлетворяет заданным граничным условиям, т. е.

$$H(0,t) = 1 + t^2, H_x(5,t) = 2e^{-t}. \qquad (1)$$

Такая функция $H(x,t)$ ищется обычно в виде

$$H(x,t) = a(t) + xb(t),$$

где $a(t), b(t)$ – неопределённые коэффициенты. Найти их можно из самих граничных условий (1)

$$H(0,t) = a(t) = 1 + t^2, H_x(5,t) = b(t) = 2e^{-t}.$$

В итоге

$$H(x,t) = 1 + t^2 + 2xe^{-t}. \qquad (2)$$

Переформулируем теперь исходную задачу в терминах $\tilde{u}(x,t)$, именно её осталось найти для получения решения. Для этого подставим формулу

$$u(x,t) = 1 + t^2 + 2xe^{-t} + \tilde{u}(x,t)$$

в уравнение и начальные условия (в граничные можно не подставлять, они гарантировано станут однородными: $\tilde{u}(0,t) = 0, \tilde{u}_x(5,t) = 0$).

Подстановка в уравнение:

$$\left(1 + t^2 + 2xe^{-t} + \tilde{u}(x,t)\right)_{xx} - \left(1 + t^2 + 2xe^{-t} + \tilde{u}(x,t)\right)_t = -2t + 2xe^{-t} + 7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right).$$

Упростим

$$\tilde{u}_{xx} - 2t + 2xe^{-t} - \tilde{u}_t = -2t + 2xe^{-t} + 7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right).$$

Таким образом, новое уравнение на функцию $\tilde{u}(x,t)$

$$\tilde{u}_{xx} - \tilde{u}_t = 7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right).$$

Подстановка в начальные условия:

$$\left.\left(1 + t^2 + 2xe^{-t} + \tilde{u}(x,t)\right)\right|_{(x,0)} = 2x + 2,$$

$$1 + 2x + \tilde{u}(x,0) = 2x + 2,$$

$$\tilde{u}(x,0) = 1.$$

Окончательно для функции $\tilde{u}(x,t)$ получаем следующую задачу с **однородными граничными условиями**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xx} - \tilde{u}_t = 7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right), x \in [0,5]; \\ \tilde{u}(0,t) = 0, \tilde{u}_x(5,t) = 0; \\ \tilde{u}(x,0) = 1. \end{cases}$$

Далее удобно разбить $\tilde{u}(x,t)$ ещё на две части

$\tilde{u}(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$,

где $V(x,t)$ – решение **однородного уравнения с неоднородными начальными условиями**

$$\begin{cases} V_{xx} - V_t = 0, x \in [0,5]; \\ V(0,t) = 0, V_x(5,t) = 0; \\ V(x,0) = 1; \end{cases}$$

а $W(x,t)$ – решение **неоднородного уравнения с однородными начальными условиями**

$$\begin{cases} W_{xx} - W_t = 7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right), x \in [0,5]; \\ W(0,t) = 0, W_x(5,t) = 0; \\ W(x,0) = 0. \end{cases}$$

Этап 2. Нахождение $V(x,t)$.

$$\begin{cases} V_{xx} - V_t = 0, x \in [0,5]; \\ V(0,t) = 0, V_x(5,t) = 0; \\ V(x,0) = 1, \end{cases}$$

Используем обычный метод Фурье:

$V(x,t) = X(x) \cdot T(t)$,

$(XT)_{xx} - (XT)_t = 0,$,

$X''T - XT' = 0,$

$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2$,

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ T' + \lambda^2 T = 0. \end{cases}$$

Находим сначала $X(x)$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x). \qquad (3)$$

Применим граничные условия (они в точности повторяют условия для функции $V(x,t)$)

$$X(0)=0, X'(5)=0.$$

Это даёт

$$X(0)=C_1\cos(\lambda 0)+C_2\sin(\lambda 0)=C_1=0,$$

$$X'(x)=-\lambda C_1\sin(\lambda x)+\lambda C_2\cos(\lambda x)=\lambda C_2\cos(\lambda x),$$

$$X'(5)=\lambda C_2\cos(5\lambda)=0.$$

Случай $\lambda=0$ необходимо рассматривать, вообще говоря, отдельно, но здесь (и на контрольной работе) он приводит только к тривиальному решению, поэтому

$$\cos(5\lambda)=0\Rightarrow 5\lambda=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in \mathrm{Z},$$

$$\lambda_n=\frac{\pi}{10}(1+2n), n\in \mathrm{Z}.$$

Подставляя $C_1=0$ и $\lambda_n=\frac{\pi}{10}(1+2n), n\in \mathrm{Z}$ в формулу (3), получим

$$X_n(x)=C_{2,n}\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right), n\in \mathrm{Z}.$$

Выберем только **линейно независимые** функции $X_n(x)$

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right), n=0,1,2\ldots. \qquad (4)$$

Теперь $X_n(x)$ образуют **ортогональный базис**. Он ещё пригодится для нахождения $W(x,t)$.

Переходим к $T(t)$

$$T_n'+\lambda_n^2 T_n=0,$$

$$T_n'+\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 T_n=0,$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\alpha+\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2=0,$$

$$\alpha=-\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2,$$

$$T_n(t)=A_n e^{\alpha t}=A_n e^{-\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 t}.$$

Перемножаем $X_n(x)$ и $T_n(x)$ и получаем набор решений

$$V_n(x,t)=X_n(x)\cdot T_n(x)=A_n e^{-\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right), n=0,1,2\ldots,$$

из которых мы составляем комбинацию (сумму)

$$V(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right). \qquad (5)$$

Применяем начальное условие $V(x,0)=1$

$$V(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)=1.$$

Чтобы найти A_n, необходимо функцию в правой части ($f(x)=1$) разложить в ряд Фурье. Справедлива формула

$$A_n=\frac{\left(1,\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)\right)}{\left\|\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)\right\|^2}=\frac{\int_0^5\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)dx}{\int_0^5\sin^2\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)dx}.$$

Вычислим получившиеся интегралы

$$\int_0^5\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)dx=-\left.\frac{\cos\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)}{\frac{\pi}{10}(1+2n)}\right|_0^5=-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+2n)\right)-\cos(0)}{\frac{\pi}{10}(1+2n)}=\frac{10}{\pi(1+2n)},$$

$$\int_0^5\sin^2\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^5\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{5}(1+2n)x\right)\right)dx=\frac{1}{2}\left.\left(x-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}(1+2n)x\right)}{\frac{\pi}{5}(1+2n)}\right)\right|_0^5=\frac{5}{2}.$$

Таким образом

$$A_n=\frac{4}{\pi(1+2n)}.$$

Подставим найденное A_n в формулу (5)

$$V(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(1+2n)}e^{-\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2t}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right).\qquad(6)$$

Этап 3. Нахождение $W(x,t)$.

$$\begin{cases}W_{xx}-W_t=7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right), x\in[0,5];\\ W(0,t)=0, W_x(5,t)=0;\\ W(x,0)=0.\end{cases}$$

Воспользуемся базисом $X_n(x)$ (см. формулу (4)), найденным на этапе 2

$$W(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right).\qquad(7)$$

Подставим решение (7), записанное в виде ряда Фурье в уравнение

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)\right)_{xx}-\left(\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)\right)_t=7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}W_n(t)\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)\right)''-\sum_{n=0}^{\infty}W_n'(t)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)=7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)\left(-\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)-\sum_{n=0}^{\infty} W_n'(t)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)=7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(W_n'(t)+\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 W_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right)=-7t\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right).$$

Функцию справа тоже необходимо разложить в ряд Фурье. Однако в данной задаче мы замечаем, что $\sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right)$ – это один из базисных синусов, имеющий номер $n=1$. Следовательно, все коэффициенты ряда слева тоже равны нулю кроме первого, т. е.

$$\left[\begin{array}{l} W_n'(t)+\dfrac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 W_n(t)=0, n\neq 1, \\ W_1'(t)+\dfrac{\pi^2}{100}(1+2\cdot 1)^2 W_1(t)=-7t. \end{array}\right.$$

Дополним эти уравнения начальными условиями $W_n(0)=0$ (они таковы, поскольку $W(x,0)=0$)

$$\left[\begin{array}{l} W_n'(t)+\dfrac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 W_n(t)=0, W_n(0)=0, n\neq 1, \\ W_1'(t)+\dfrac{9\pi^2}{100} W_1(t)=-7t, W_1(0)=0. \end{array}\right.$$

Решение первого набора уравнений можно указать сразу – только тривиальное. Так всегда бывает, если и уравнение, и все условия к нему однородные. Следовательно, $W_n(t)\equiv 0, n\neq 1$.

Случай $n=1$ необходимо рассмотреть отдельно. Решим уравнение

$$W_1'(t)+\frac{9\pi^2}{100}W_1(t)=-7t.$$

1) Сначала решается однородное уравнение

$$W_1'(t)+\frac{9\pi^2}{100}W_1(t)=0.$$

Запишем для него характеристическое

$$\alpha+\frac{9\pi^2}{100}=0,$$

$$\alpha=-\frac{9\pi^2}{100},$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$W_1^{oo}(t)=Ce^{-\frac{9\pi^2}{100}t}.$$

2) Найдём частное решение неоднородного уравнения. Оно ищется по виду правой части только с неопределёнными коэффициентами. Справа линейная функция $-7t$, поэтому

$$W_1^{чн}(t) = At + B.$$

Подставим $W_1^{чн}(t) = At + B$ в уравнение

$$(At+B)' + \frac{9\pi^2}{100}(At+B) = -7t,$$

$$A + \frac{9\pi^2}{100}At + \frac{9\pi^2}{100}B = -7t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{9\pi^2}{100}A = -7, \\ A + \dfrac{9\pi^2}{100}B = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\dfrac{700}{9\pi^2}, \\ B = -\dfrac{100}{9\pi^2}A = \dfrac{70000}{81\pi^4}. \end{cases}$$

Приходим к равенству

$$W_1^{чн}(t) = -\frac{700}{9\pi^2}t + \frac{70000}{81\pi^4}.$$

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$W_1(t) = W_1^{oo}(t) + W_1^{чн}(t) = Ce^{-\frac{9\pi^2}{100}t} - \frac{700}{9\pi^2}t + \frac{70000}{81\pi^4}.$$

Осталось найти C, используя начальные условия $W_1(0) = 0$:

$$W_1(0) = C + \frac{70000}{81\pi^4} = 0,$$

$$C = -\frac{70000}{81\pi^4}.$$

Окончательно

$$W_1(t) = -\frac{70000}{81\pi^4}e^{-\frac{9\pi^2}{100}t} - \frac{700}{9\pi^2}t + \frac{70000}{81\pi^4}.$$

Вернёмся к формуле (7)

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right) = W_1(t)\sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2\cdot 1)x\right) =$$

$$= \left(-\frac{70000}{81\pi^4}e^{-\frac{9\pi^2}{100}t} - \frac{700}{9\pi^2}t + \frac{70000}{81\pi^4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10}x\right).$$

Теперь найдены все три части решения. Ответ будет выглядеть следующим образом:

$$u(x,t) = H(x,t) + V(x,t) + W(x,t) =$$

$$= 1 + t^2 + 2xe^{-t} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1+2n)} e^{-\frac{\pi^2}{100}(1+2n)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}(1+2n)x\right) +$$

$$+ \left(-\frac{70000}{81\pi^4} e^{-\frac{9\pi^2}{100}t} - \frac{700}{9\pi^2} t + \frac{70000}{81\pi^4}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{10} x\right).$$