Institut national des sciences appliquées de Rouen

INSA de Rouen

ASI 3.1

Algèbre linéaire

Soufiane Belharbi
soufiane.belharbi@insa-rouen.fr

01 Septembre 2016

Résumé

Ce support contient quelques rappels sur des notions de base de l'algèbre linéaire avec quelques exercices. C'est fait pour les étudiants ASI3.1.

Merci de me contacter si vous trouvez des erreurs dans le document : soufiane.belharbi@insa-rouen.fr.
Keywords: algèbre linéaire, matrice, vecteur.

Table des matières

1 Série 1 : Équations linéaires en algèbre linéaire

Équations vectorielles

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, u_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T, T : \textit{transposé} \tag{2}$$

Exemples : $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.75 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 & 8.45 & 9.88 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$.

Vecteur nul

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T, u_i = 0 \tag{3}$$

Propriétés algébriques de $\mathbb{R}^n$

Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. c et d des scalaires réels :

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(iv) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(v) $c(\mathbf{u} + \mathbf{u}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

(vi) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

(vii) $c(d\mathbf{u}) = (cd)(\mathbf{u})$

(viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Combinaisons linéaires

Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $c_1, c_2, \dots, c_p$ des scalaires réels. Le vecteur $\mathbf{y}$ défini comme :

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_p\mathbf{u}_p \tag{4}$$

est appelé **combinaison linéaire** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$. Les scalaires $c_1, c_2, \dots, c_p$ sont appelés les *coefficients* de la combinaison.

Définition

Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ est noté $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est appelé **partie de** $\mathbb{R}^n$

engendrée par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$. Autrement dit, $\mathrm{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui s'écrivent sous la forme :

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p, \text{ où } c_i \text{ sont des scalaires.} \tag{5}$$

Exercice 1.1

Calculer les deux combinaisons : $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}-2\mathbf{v}$, tel que : $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}^T$.

L'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Définition

Si A es une matrix de $m \times n$, de colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, et si $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors on appelle **produit de A par $\mathbf{x}$**, et on note $A\mathbf{x}$, **la combinaison linéaire des colonnes de A dont les coefficients sont les composantes correspondantes de $\mathbf{x}$** :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \tag{6}$$

Le produit $A\mathbf{x}$ est défini si le nombre des colonnes de A est égale au nombre des composantes de $\mathbf{x}$.

Autre manière de calculer $A\mathbf{x}$ (règle ligne-vecteur)

Si le produit $A\mathbf{x}$ est défini, alors la i^e composante de $A\mathbf{x}$ est la somme des produits des composantes correspondantes de la ligne i de A et du vecteur $\mathbf{x}$.

Propriété du produit d'une matrice par un vecteur

Soit A une matrice $m \times n$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et c un scalaire. Alors, on a les relations :

a. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

b. $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

Exercice 1.2

Calculer les produits suivants, d'abord en utilisant la définition, ensuite en utilisant la méthode ligne-vetceur.

a. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Indépendance linéaire

On dit qu'un famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **libre**, ou que ses vecteurs, sont **linéairement indépendants** si l'équation vectorielle

$$x_1\mathbf{v}1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \tag{7}$$

admet la solution triviale comme *unique* solution. On dit que la famille $(\mathbf{v}_1, , \mathbf{v}_p)$ est **liée**, ou que ses vecteurs, sont **linéairement indépendants** s'il existe des coefficients $c_1, \ldots, c_p$, non tous nuls, tel que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Introduction aux application linéaires

Une façon de voir l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est de considérer le vecteur $\mathbf{b}$ comme une combinaison linéaire des colonnes de A. Une autre manière vision, issue des applications réelles, est d'interpréter A comme un objet qui "agit" sur un vecteur $\mathbf{x}$ par multiplication pour produire $\mathbf{b}$.

Transformations matricielles

On définit la transformation T tel que :

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9}$$

A est une matrice de la forme $m \times n$. $\mathbb{R}^n$ est l'espace de départ. $\mathbb{R}^m$ est l'espace d'arrivée. Le vecteur $T(\mathbf{x})$ est l'image de $\mathbf{x}$.

Applications linéaires

On dit qu'une application (ou transformation) T est **linéaire** si :

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

c est un scalaire. *Résultats*

Soit T une application linéaire. Alors :

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{10}$$

et

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}) \tag{11}$$

Tel que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sot deux vecteurs dans l'espace de départ de T. c et d sont deux scalaires. Un autre résultat :

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_p\mathbf{v}_p) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_pT(\mathbf{v}_p) \tag{12}$$

Exercice 1.3

On considère une application linéaire $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Déterminer les images T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

Matrice canoniquement associée à l'application linéaire T

Soit $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors, il existe une unique matrice A telle que :

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ de } \mathbb{R}^n \tag{14}$$

A est la matrice $m \times n$ dont la j^e colonne est le vecteur $T(\mathbf{e}_j)$, où $\mathbf{e}_j$ est la j^e colonne de la matrice I_n :

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & \dots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \tag{15}$$

La matrice A est appelée **la matrice canoniquement associée à l'application linéaire** T.

Exercice 1.4

Déterminer la matrice A canoniquement associée à l'application linéaire : $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^2$.

2 Série 2 : Calcul matriciel

Opérations matricielles

Si A est une matrice $m \times n$ - c'est à dire à m lignes et n colonnes-, alors le coefficient scalaire situé à la i^e ligne et la j^e colonne de A, noté a_{ij}, est appelé coefficient (i, j) de A. Chaque colonne de A est une liste de m réels, qui défini un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On note souvent ces colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, et l'on écrit la matrice A sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \tag{16}$$

a_{ij} est le i^e coefficient du j^e vecteur colonne $\mathbf{a}_j$. (Voir la figure Fig.1)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{Column } j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
\text{Row } i & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A \\
 & \begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & & \mathbf{a}_j & & \mathbf{a}_n \end{array}
\end{array}$$

FIGURE 1 – Lignes et colonnes d'une matrice.

On appelle **coefficients diagonaux** d'une matrice $m \times n$, $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, les coefficients : $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$, ils forment **la diagonal principale** de A.

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée $n \times n$ dont les coefficients non diagonaux sont nuls. La matrice unité I_n est un exemple.

On appelle **matrice nulle**, est on le note 0, la matrice $m \times n$ dont tous les coefficients sont nuls.

Somme et multiplication par un scalaire

Deux matrices **égales** si elles ont la même taille (même nombre de lignes et de colonnes) et que les colonnes correspondantes sont égales (les coefficients correspondants sont égaux).

Si A et B sont deux matrices $m \times n$, alors on appelle **somme** $A + B$ la matrice $m \times n$ dont les colonnes sont la somme des colonnes correspondantes de A et B.

Exercice 2.1
Calculer la somme : $A+B$, $A+C$: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Si r est un scalaire et A une matrice, on définit le **produit** rA comme la matrice dont les colonnes sont obtenues en multipliant les colonnes correspondantes de A par r. Comme pour les vecteur, $-A$ désigne la matrice $(-1)A$ et $A - B$ désigne $A + (-1)B$.

Propriétés

Soit A, B deux matrices de même taille, et r et s des scalaires.

a. $A + B = B + A$
b. $(A + B) + C = A + (B + C)$
c. $A + 0 = A$
d. $r(A + B) = rA + rB$
e. $(r + s)A = rA + sA$
f. $r(sA) = (rs)A$

Exercice 2.2

Soit les matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.
Calculer les opération suivantes : $-2A,\ B - 2A,\ A + 3B,\ 2C - 3D$.

Exercice 2.3

On pose : $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Calculer $3I_2 - A$.

Multiplication matricielle

Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$ dont on note les colonnes $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$. On appelle produit de A et B et l'on note AB la matrice $m \times p$ dont les colonnes sont $A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_p$, c'est à dire :

$$AB = A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 & \ldots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Exercice 2.4

Calculer AB, où l'on a posé $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Exercice 2.5

Soit A une matrice 3×5 et B une matrice 5×2. C'est quoi la taille de AB, BA ?

Règle ligne-colonne pour le calcul de AB

Si le produit AB a un sens, alors le coefficient en i^e ligne et j^e colonne de AB est la somme des produits des composantes de la i^e ligne de A et de la j^e colonne de B. Si l'on note $(AB)_{ij}$ le coefficient (i, j) de AB et si A est une matrice $m \times n$, alors :

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b2j + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{18}$$

Exercice 2.6

Calculer le produit AB avec la méthode ligne-colonne, si on pose $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Propriétés de la multiplication matricielle

Soit A une matrice $m \times n$, et B et C deux matrices telles que les sommes et produits ci-dessous aient un sens.

a. $A(BC) = (AB)C$ (associativité de la multiplication)
b. $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité à gauche)
c. $(B + C)A = BA + CA$ (disributivité à droite)
d. $r(AB) = (rA)B$, pour tout scalaire r.
e. $I_mA = A = AI_n$ (élément unité pour la multiplication)

Notes sur le produit matricielle

1. En général, $AB \neq BA$.
2. On ne peut pas simplifier un produit de matrices. Autrement dit, si $AB = AC$, alors, il est en général *faux* que $B = C$.
3. Si un produit AB est égale à la matrice nulle, on ne peut pas en genral en déduire que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 2.7

Calculer les produits suivants, si on pose les matrices : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$: AC, CD, DB.

Exercice 2.8

Calculer $A - 5I_3$ et $(5I_3)A$, où : $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.9

Soit A une matrice 5×3 et B telle que le produit soit une matrice 5×7. Quelle est la taille de B ?

Exercice 2.10

Combien la matrice B compte-t-elle de lignes si BC est une matrice de 5×4.

Exercice 2.11

Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

Exercice 2.12

Soit les trois matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Vérifier que $AB = AC$, bien que $B \neq C$.

Puissance d'une matrice

Soit A une matrice $n \times n$ et k un entier strictement positif. On note alors A^k le produit de k matrices égales à A :

$$A^k = \underbrace{A \ldots A}_{k} \tag{19}$$

Si k est non nul et si $\mathbf{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors on obtient $A^k\mathbf{x}$ en multipliant à gauche $\mathbf{x}$ par A k fois. Si $k = 0$, alors on doit interpréter $A^0\mathbf{x}$ comme étant $\mathbf{x}$ lui-même. A^0 désigne la matrice unité.

Transposé d'une matrice

Si A est une matrice $m \times n$, on appelle **transposée** de A la matrice $n \times m$, notée A^T, dont les colonnes sont formée des lignes de A.

Propriétés de la transposée d'une matrice

Soit A et B deux matrices dont les tailles sont compatibles avec les sommes et produits écrits ci-dessous. Alors :

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A+B)^T = A^T + B^T$

c. Pour tout scalaire r, $(rA)^T = rA^T$

d. $(AB)^T = B^T A^T$

Exercice 2.13

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ et le vecteur $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Calculer : $(A\mathbf{x})^T, \mathbf{x}^T A^T, \mathbf{x}^T A, \mathbf{x}\mathbf{x}^T, \mathbf{x}^T\mathbf{x}$. Le produit $A^T\mathbf{x}^T$ est-il défini ?

Exercice 2.14

Soit une matrice 4×4 et $\mathbf{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la méthode la plus rapide pour calculer $A^2\mathbf{x}$ sur une machine avec un seul CPU ? on dénombrera les multiplications.

Inverse d'une matrice

On dit qu'une matrice A de type $n \times n$ est **inversible** s'il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que :

$$CA = I \quad \text{et} \quad AC = I \tag{20}$$

où l'on a posé $I = I_n$, la matrice unité $n \times n$. Dans ce cas, la matrice C est appelée **inverse** de A. C est déterminée de façon unique par A. Cette inverse unique est notée A^{-1}. Cette matrice est caractérisée par :

$$A^{-1}A = I \quad \text{et} \quad AA^{-1} = I \tag{21}$$

Une matrice *non* inversible est parfois dite **singulière** ; on peut donc appeler **non singulière** une matrice inversible.

Inverse d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{22}$$

Si $ad - bc = 0$, A n'est pas inversible.

Le nombre $ad - bc$ est appelé **déterminant** de A, et l'on note :

$$det\ A = ad - bc. \tag{23}$$

Exercice 2.15

Déterminer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Solution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Si A est une matrice $n \times n$ inversible, alors, pour tout vecteur $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet pour unique solution le vecteur $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Propriétés de l'inversion d'une matrice

a. Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} est inversible et

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{24}$$

b. Si A et B sont deux matrices $n \times n$ inversibles, alors AB est inversible, et l'inverse de AB est le produit des inverses de A et B dans l'ordre inverse.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{25}$$

c. Si A est une matrice inversible, alors A^T l'est aussi, et l'inverse de A^T est la transposée de A^{-1}.

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \tag{26}$$

d. Le produit de matrice $n \times n$ inversibles est inversible, et l'inverse est le produit des inverse en renversant l'ordre des facteurs.

Méthode du pivot de Gauss (méthode d'élimination de Gauss-Jordan) et formes échelonnées (Carl Friedrich Gauss, Wilhelm Jordan)

On appelle une ligne ou colonne non nulle une ligne ou colonne contenant au moins un coefficient non nul. On appelle **coefficient principale** d'une ligne non nulle le coefficient non nul le plus à gauche dans la ligne.

On appelle **matrice triangulaire** supérieure (respectivement inférieur) une matrice carrée dont tous les termes au dessous (respectivement au dessus) la diagonale principale sont nuls.

Définition

Une matrice rectangulaire est dite **sous forme échelonnée** (ou **sous forme échelonnée en ligne**) si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Toutes les lignes non nulles sont au-dessus de toutes les lignes nulles.
2. Le coefficient principale de chaque ligne se trouve dans une colonne située à droite de celle du coefficient principal de la ligne au-dessus d'elle.
3. Tous les coefficients situés dans une colonne en dessous d'un coefficient principal sont nuls.

Une matrice qui vérifie en outre les deux conditions ci-dessous est dite **sous forme échelonnée réduite** (ou **sous forme échelonnée en ligne réduite**) :

4. Le coefficient principal de toute ligne non nulle est égale à 1.
5. Les coefficients principaux (égaux à 1) sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

On appelle **matrice échelonnée** (respectivement **matrice échelonnée réduite**) une matrice qui est sous forme échelonnée (respectivement sous forme réduite).

Unicité de la matrice échelonnée

Toute matrice est équivalente selon les lignes à une et une seule matrice échelonnée réduite.

Opérations élémentaires sur les lignes

1. (Remplacement) Remplacer une ligne par la ligne obtenue en lui ajoutant un multiple d'une autre ligne.
2. (Échanger) Échanger deux lignes.
3. (Multiplication par un scalaire) Multiplier tous les coefficients d'une ligne par une constante non nulle.

Positions de pivot

Une fois qu'une matrice a été réduite à une forme échelonnée, les opérations que l'on effectue par la suite pour obtenir la forme échelonnée réduite ne modifient pas la position des coefficients principaux. Comme la forme échelonnée réduite d'une matrice est unique, *les coefficients principaux d'une matrice échelonnée obtenue à partir d'une matrice donnée sont toujours situés à la même position.* Ces coefficients principaux correspondent aux coefficients principaux de la forme échelonnée réduite.

On appelle **position de pivot** d'une matrice A l'emplacement dans A correspondant à un coefficient principal (égal à 1) de la forme échelonnée réduite de A. On appelle **colonne pivot** une colonne de A contenant une position de pivot.

Exercice 2.16

réduire la matrice A ci-dessous à une forme échelonnée et déterminer les colonnes pivots de A. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$.

L'algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme qui suit comporte quatre étapes et conduit à une matrice sous forme échelonnée. Une cinquième étape permet d'obtenir une matrice échelonnée réduite.

1. On considère la colonne non nulle la plus à gauche. C'est une colonne pivot. La position de pivot est en haut de cette colonne.
2. On choisit comme pivot un élément non nul de la colonne pivot. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément à la position de pivot. [si on choisit comme pivot le coefficient le plus grand en valeur absolue, on appelle cette méthode par **stratégie du pivot partiel**].
3. Au moyen d'opérations de remplacement, on fait apparaître des 0 à toutes les positions situées sous le pivot.
4. On cache (ou on ignore) la ligne contenant la position de pivot et, éventuellement, toutes les lignes au-dessus d'elle. On applique les étapes 1 à 3 à la sous-matrice restante. On répète le processus jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucune ligne non nulle à modifier.
5. On fait apparaître des 0 au-dessus de chaque pivot, en commençant par le pivot le plus à droite et en progressant vers le haut et vers la gauche. Si un pivot est différent de 1, on divise sa ligne par la valeur du pivot pour obtenir la valeur 1.

Exercice 2.17

Réduire la matrice A à une forme échelonnée réduite avec l'algorithme du pivot de Gauss. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$.

3 Décomposition LU (hors série)

Exercice HS.1

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A (i.e. $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).
2) Donner la décomposition LU de la matrice A en spécifiant les matrices M_i, L_i : $M_3M_2M_1A = L_1L_2L_3U$.
3) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 1.5 & 4 & -14 & -6.5 \end{pmatrix}^T$.
4) Soit $B = U^TAL^T$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B.

Exercice HS.2

1) Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

.

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T$.
3) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

Exercice HS.3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Donner la factorisation LU de A.
2) En déduire la solution du problème $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T$.

4 Décomposition des matrices symétriques : LDM^T, LDL^T et Cholesky

Exercice HS.4

Trouver la décomposition en LDM^T de A, tel que : $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 9 & 15 & 42 \\ 12 & 54 & 194 \end{pmatrix}$.

Exercice HS.5

Donner la factorisation LDL^T de la matrice symétrique A tel que : $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 45 & 80 \\ 30 & 80 & 171 \end{pmatrix}$.

Exercice HS.6

Donner la décomposition De Cholesky de la matrice symétrique définie positive A, tel que : $A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

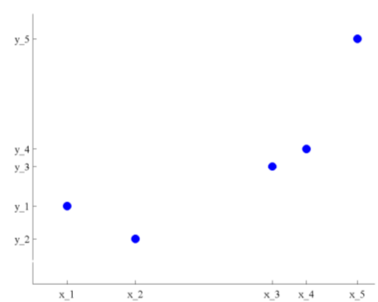
5 Les moindres carrés dans $\mathbb{R}$ (régression simple)

Nous présentons dans cette section la notion de la régression simple (monovariable) et comment trouver ses coefficients avec la méthode des moindres carrés (version scalaire et matricielle). Nous abordons au passage la minimisation (optimisation) d'un coût et le lien avec la résolution d'un système d'équations linéaires.

1. **Version scalaire** [1]

   Le problème de la régression linéaire :
   Dans une expérimentation, nous avons collecté n couples d'observations (x, y) tel que :
   - x : la variable explicative qui représente la température.
   - y : la variable à expliquer qui représente concentration en ozone.

   Nous disposons de 5 échantillons qui sont présentés dans la figure Fig.2. Nous cherchons dans l'expérimentation à expliquer la concentration en



x	1	2	4	4,5	5,25
y	-1	-2	0,5	1	4

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

FIGURE 2 – 5 Échantillons de l'expérimentation.

   ozone en fonction de la température via une droite. Dans un sens, on cherche une droite qui représente "au mieux" la relation linéaire :

$$y = ax + b \tag{27}$$

   tel que : $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Cours de S.Canu, La régression linéaire. STPI2, M8. 8 Avril 2014.

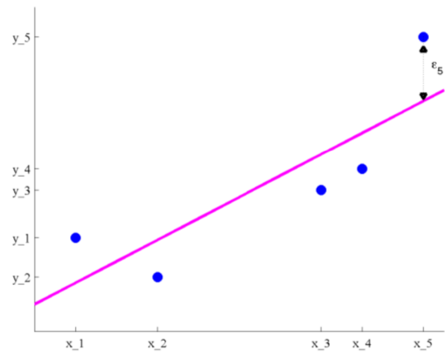


FIGURE 3 – Un exemple de droite.

Nous présentons un exemple de droite dans la figure 3. La difficulté pour déterminer cette droite est que les observations ne se trouvent pas exactement sur une droite. Il y a un bruit ε. Donc, on redéfinit l'équation de notre droite comme ceci :

$$y = ax + b + \varepsilon \tag{28}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$. On appelle ε un bruit ou une erreur. Chaque observation i a sa propre erreur ε_i. Donc, on se retrouve avec le triple $(a_i, b_i, \varepsilon_i)$.

Le modèle linéaire :
Le modèle linéaire pose la relation suivante entre la variable explicative x et la variable à expliquer y avec les paramètres inconnus (a, b, ε) sous la forme :

$$y = ax + b + \varepsilon \tag{29}$$

avec a = (a, b) $\in \mathbb{R}^2$, La moyenne du bruit : $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$. Variance du bruit : $\mathbb{E}(\varepsilon^2) = \sigma^2$. On peut dire que ce qu'on observe dans la réalité est l'effet du modèle mélangé avec un bruit :

$$\text{observation} = \text{modèle} + \text{bruit} \tag{30}$$

Notations :

- Variable explicative : $x \in \mathbb{R}^p$ (pour le moment $p = 1$).
- Variable à expliquer : $y \in \mathbb{R}$.
- Erreur (bruit) : ε.
- Paramètres scalaires du modèle : $a, b \in \mathbb{R}$.
- Paramètres vectoriels du modèles : $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$.

- Le modèle : $y = f(x, \boldsymbol{a}) + \varepsilon$.
- Les paramètres estimés du modèle : $\hat{\boldsymbol{a}}$.
- Prédiction : $\hat{y} = f(x, \hat{\boldsymbol{a}})$.
- Variable aléatoires : ε et donc y et donc $\hat{\boldsymbol{a}}$.

On écrit :

$$y = \underbrace{ax + b}_{f(x,\boldsymbol{a})} + \varepsilon \tag{31}$$

Le critère des moindres carrés :
Nous rappelons que nous cherchions une droite qui représente "au mieux" toutes les observations (i.e. la droite essaye de passer par toutes les observations). Une manière d'interpréter cet objectif est de dire qu'on cherche une droite qui a une distance "plus petite" par rapport à toutes les observations. Ceci peut être écrit comme suit :

$$\min_{a,b} J(a,b)$$
$$J(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{y_i - ax_i - b}_{\varepsilon_i})^2$$

n est le nombre total des observations (Fig.4).

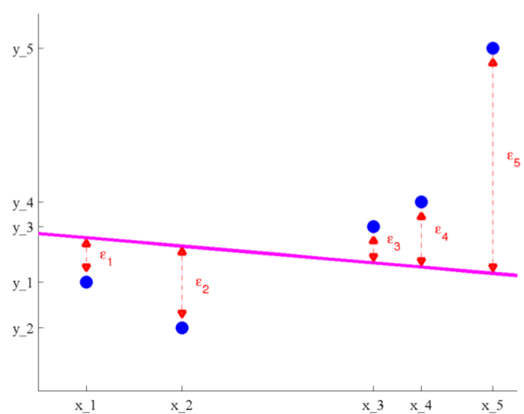


FIGURE 4 – Erreur du modèle (les résidus).

Le problème des moindres carrés : forme d'un système d'équations linéaires :
Les observation dont nous disposons peuvent aussi être vues comme un

système de n équations linéaires à $2 + n$ inconnues (a, b, ε). Ce système s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} ax_1 + b + \varepsilon_1 & = y1 \\ \dots \\ ax_i + b + \varepsilon_i & = y_i \\ \dots \\ ax_n + b + \varepsilon_n & = y_n \end{cases}$$

On cherche a, b qui minimise simultanément tous les ε_i, $i = 1, \dots, n$:

$$J(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{y_i - ax_i - b}_{\varepsilon_i})^2 \tag{32}$$

On appelle J le coût.

Résolution du problème des moindres carrés :
L'équation Eq.32 est sous une forme quadratique convexe. Donc, elle admet une unique solution $\boldsymbol{a} = (a, b)$ pour lequel Eq.32 soit minimale. La figure Fig.5,6 représentent un exemple d'une fonction quadratique convexe en 1D et 2D respectivement.

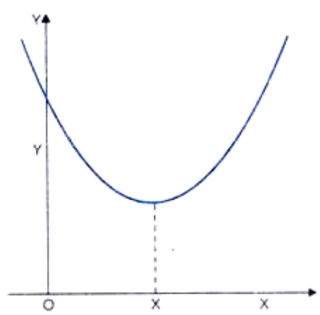


FIGURE 5 – Fonction quadratique convexe 1D (Abscisse : le paramètre du modèle. Ordonnés : valeur du coût (J)).

Dans la figure Fig.5, la solution (le paramètre en abscisse qui minimise le coût (ordonné)) a une caractéristique spécifique : c'est le point dont lequel la dérivée du coût s'annule (et aussi change de direction).
Dans le même sens, dans la figure Fig.6, la solution de Eq.32 (i.e. les paramètres $\hat{\boldsymbol{a}} = (\hat{a}, \hat{b})$ qui minimise le coût J de Eq.32) a la caractéristique qui est le point dont lequel la dérivé de J s'annule (et change de direction).
Dans ce cas, on dit que $J(\hat{a}, \hat{b})$ est un minimum global.

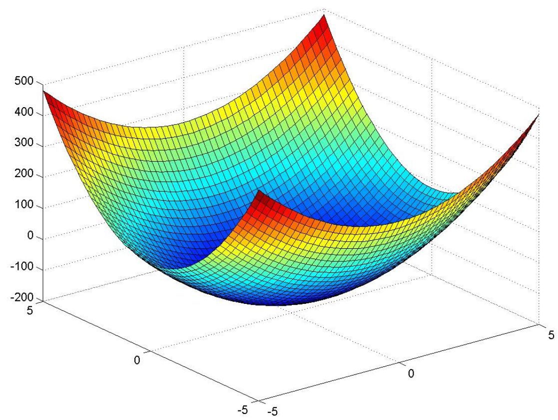


FIGURE 6 – Fonction quadratique convexe 2D (x : le paramètre a du modèle. y : le paramètre b du modèle. z : la valeur du coût (J)).

Calcul du gradient :
On pose :

$$\min_{a,b} J(a,b)$$
$$\text{tel que : } J(a,b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \tag{33}$$

Pour résoudre Eq.33, on calcule le gradient (la dérivée) du coût J par rapport à chaque paramètre (variable) a, b comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial J(a,b)}{\partial a} & = a\sum_{i=1}^{n} x_{i=1}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \\ \frac{\partial J(a,b)}{\partial b} & = a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn - \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

On appliquant la condition d'optimalité sur les paramètres (i.e. la dérivé dans le point solution doit être égale à zéro), on trouve :

$$(\hat{a}, \hat{b}) \text{ est une solution du problème } \min_{a,b} J(a,b) \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial J(\hat{a},\hat{b})}{\partial a} & = 0 \\ \frac{\partial J(\hat{a},\hat{b})}{\partial b} & = 0 \end{cases} \tag{34}$$

La solution de Eq.34 est donnée par :

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_{i=1}^2 x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_{i=1})^2} \quad , \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} - \hat{a}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2. **Version vectorielle** [2]

Nous considérons la notation suivante :

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix},\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

La norme L_2 d'un vecteur $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est une valeur réel ($\in \mathbb{R}$) et définie comme suit (Eq.35) :

$$||v||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \tag{35}$$

Donc, le carrée de L_2 est (Eq.36) :

$$||v||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \tag{36}$$

On pose : $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{e}$. Donc, $\varepsilon = \boldsymbol{y} - \underbrace{a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$.

Comme nous l'avons vu avant, un modèle est représenté par un paire de paramètre (a, b) tel que :

$$\begin{cases} y_1 & = ax_1 + b + \varepsilon_1 \\ \dots \\ y_i & = ax_i + b + \varepsilon_i \\ \dots \\ y_n & = ax_n + b + \varepsilon_n \end{cases} \tag{37}$$

tel que : $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}, \varepsilon, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ sont vecteurs de $\mathbb{R}^n$. (Fig.7).

On pose : $X = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}$ la matrice des observations (augmentée de 1).

2. Cours de S.Canu, La régression multiple. STPI2, M8. 28 Mars 2011.

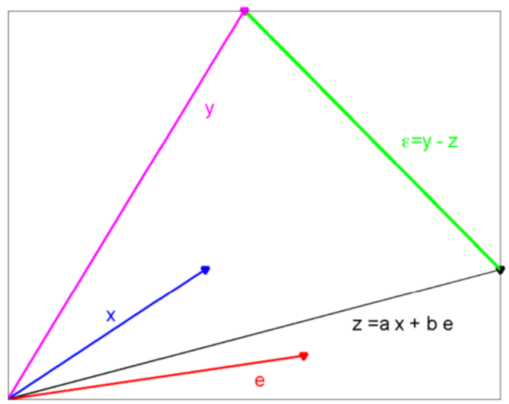


FIGURE 7 – Représentation vectorielle du modèle et des résidus.

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ la variable à expliquer. $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ le vecteur des inconnus (paramètre du modèle). La forme matricielle du système des équations linéaires Eq.37 est données sous la forme :

$$X\alpha + \varepsilon = \boldsymbol{y} \tag{38}$$

Version matricielle du coût :
Le problème des moindres carrée se récrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\min_{\alpha} J(\alpha) \\ \text{tel que : } J(\alpha) &= \frac{1}{2}||\boldsymbol{y} - X\alpha||2_2 \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} - \alpha^T X^T \boldsymbol{y} + \frac{1}{2}\alpha^T X^T X\alpha \end{aligned} \tag{39}$$

Nous posons le nombre des variables explicatives p. Dans le cas de la régression simple, $p = 1$. Donc, sa dérivées partielles s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} \ - \ \alpha^T X^T \boldsymbol{y} \ + \ \frac{1}{2}\alpha^T X^T X\alpha \\ \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i} &= 0 \ - \ w_i \ + \ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p+1}(M_{ij} + M_{ji})\alpha_j \end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{w} = X^T\boldsymbol{y}$ et $M = X^T X$. Au final, la gradient du coût est (Eq.40) :

$$\nabla J(\hat{\alpha}) = -\boldsymbol{w} + M\alpha = -X^T\boldsymbol{y} + X^T X\hat{\alpha} \tag{40}$$

La minimisation du coût :
La minimisation du cout $J(\alpha)$ est réalisée lorsque le gradient du coût s'annule (Eq.41) :

$$\nabla J(\hat{\alpha}) = 0 \quad \iff -X^T\boldsymbol{y} + X^T X\hat{\alpha} = 0 \tag{41}$$

Dans le cas de la régression simple, on pose : $X^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$,
$X^TX = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$. On obtient la formulation (Eq.42) :

$$-\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Qui est un système d'équation linéaires à deux inconnus : $(\hat{a}, \hat{b})$.

Lien entre : moindres carrés, système d'équations linéaires, résolution de $Ax = b$, factorisation matricielle :
Nous avons vu que la résolution du problème des moindres carrés (Eq.39) revient à résoudre le système d'équations linéaires suivant (Eq.43) :

$$X^TX\hat{\alpha} = X^T\boldsymbol{y} \tag{43}$$

Le système d'équations linéaires Eq.43 peut s'écrire sous la forme $A\boldsymbol{x} = b$:

$$\underbrace{X^TX}_{A}\underbrace{\hat{\alpha}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{X^T\boldsymbol{y}}_{b} \tag{44}$$

Donc, la résolution d'un problème des moindres carrés revient à résoudre un système d'équations linéaires de la forme $A\boldsymbol{x} = b$. Pour cela, différentes approches sont possibles :

- Méthode directe : inverse d'une matrice. $\hat{\alpha} = (X^TX)^{-1}X^T\boldsymbol{y}$
- Factorisation matricielle : LU, Cholesky.
- Factorisation QR (plus en détails plus tard) :
  (a) $X = QR$, Q matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure.
  (b) $(R^TQ^TQR)\hat{\alpha} = R^TQ^T\boldsymbol{y}$.
  (c) $R\hat{\alpha} = Q^T\boldsymbol{y}$.

Comment faire lorsqu'on est en face de plusieurs variables explicatives (multi-dimensionnel) ? [TODO]

6 Factorisation QR : Méthode de Householder

Exercice HS.7

Donner une décomposition QR de A en utilisant la méthode de Householder :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 35 & 5 \\ -4 & -30 & -15 & 55 \\ -8 & 40 & -80 & -65 \\ 23 & -15 & 30 & 15 \end{pmatrix} .$$

Exercice HS.8
Donner les deux premières itérations (traitement de la 1ère et 2ème colonnes) de la décomposition QR de la matrice A en utilisant la méthode de Householder :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

7 Méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire

7.1 Normes des vecteurs/matrices

Exercice HS.9
Trouver la norme l_∞ et l_2 des vecteurs suivants :

a) $x = \left[3, -4, 0, \frac{3}{2}\right]^T$

b) $x = \left[2, 1, -3, 4\right]^T$

c) $x = \left[\sin k, \cos k, 2^k\right]^T$, pour un k entier positif fixe.

d) $x = \left[\frac{4}{k+1}, \frac{2}{k^2}, k^2 e^{-k}\right]^T$, pour un k entier postif fixe.

Exercice HS.10

a) Vérifier que la fonction $||.||_1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ comme suit :

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

est une norme dans $\mathbb{R}^n$.

b) Trouver $||x||_1$ des vecteurs donnés dans l'exercice HS.9.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x||_1 \geq ||x||_2$.

Exercice HS.11
Montrer que les séquences suivantes convergent par rapport à la norme l_∞ et trouver leur limite :

a) $x^{(k)} = \left[1/k, e^{1-k}, -2/k^2\right]^T$

b) $x^{(k)} = \left[e^{-k}\cos k, k\sin(1/k), 3 + k^{-2}\right]^T$

c) $x^{(k)} = \left[ke^{-k^2}, \cos(k)/k, \sqrt{k^2+k} - k\right]^T$

d) $x^{(k)} = \left[e^{1/k}, (k^2+1)/(1-k^2), (1/k^2)(1+3+5+\cdots+(2k-1))\right]^T$

Exercice HS.12
Calculer la norme l_∞ des matrices suivantes :

a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Exercice HS.13
Les systèmes linéaires suivante $Ax = b$ ont x comme solution et $\tilde{x}$ comme une solution approximative. Calculer : $||x - \tilde{x}||_\infty$ et $||A\tilde{x} - b||_\infty$:

a)

$$\begin{cases} 1/2x_1 + 1/3x_2 & = 1/63 \\ 1/3x_1 + 1/4x_2 & = 1/168 \end{cases}$$

$x = \begin{bmatrix} 1/7 & -1/6 \end{bmatrix}^T, \tilde{x} = x = \begin{bmatrix} 0.142 & -0.166 \end{bmatrix}^T$

b)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = 2 \end{cases}$$

$x = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 5 \end{bmatrix}^T, \tilde{x} = x = \begin{bmatrix} -0.33 & -7.9 & 5.8 \end{bmatrix}^T$

c)

$$\begin{cases} 0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 & = 0.06 \\ 0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 & = 0.3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 11 \end{cases}$$

$x = \begin{bmatrix} 1.827586 & 0.6551724 & 1.965517 \end{bmatrix}^T, \tilde{x} = x = \begin{bmatrix} 1.8 & 0.64 & 1.9 \end{bmatrix}^T$

Exercice HS.15
Calculer la norme $||.||_1$ des matrices données dans l'excercice HS.12 tel que : $||A||_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Exercice HS.16
Montre par un exemple que la fonction $||A||_\uplus = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$ ne définie pas une norme de matrice.

Exercice HS.18
Soit le théorème suivant :

Pour chaque $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ et $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ dans $\mathbb{R}^n$ alors :

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right\}^{1/2} = ||x||_2 \cdot ||y||_2 \, .$$

Soit le théorème : pour $p > 1$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

La norme de Frobenius est définie pour une matrice $n \times n$ tel que :

$$||A||_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

a) Montre que $||.||_F$ est une norme de matrice. (utiliser les théorèmes en dessus. Pour montrer : $||AB||_F \leq ||A||_F\ ||B||_F$ travailler plutôt sur $||AB||_F^2$).

b) Calculer $||.||_F$ des matrices suivantes :

   a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

7.2 Méthode itératives : Jacobi, Gauss-Seidel

Exercice HS.19
Trouves les deux itérations de la méthode Jacobi et Gauss-Seidel du système suivant en utilisant $x^0 = 0$:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Exercice HS.20
Le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

a comme solution : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

1. Montrer que : $\rho(T_j) = 0$. (sachant que : $x^k = T_j x^{k-1} + c_j$ pour la méthode de Jacobi).
2. Calculer $\rho(T_g) = 2$. (sachant que : $x^k = T_g x^{k-1} + c_j$ pour la méthode de Gauss-Seidel).
3. Sachant $\rho(T_j)$ et $\rho(T_g)$, quelle méthode itérative choisir pour résoudre le système linéaire ?
4. La méthode de Jacobi et Gauss-Seidel ont donné respectivement les deux solutions : $x^{23} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.99 & -1.00 \end{bmatrix}^T$, $x^{25} = \begin{bmatrix} -20.82 & 2.00 & -22.82 \end{bmatrix}^T$. Qu'es ce qu'on peut dire sur les deux méthodes ?

Exercice HS.21
Le système linéaire :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

a comme solution : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

1. Montrer que : $\rho(T_j) = \sqrt{5}/2$.
2. Montrer que : $\rho(T_g) = 1/2$.
3. Quelle méthode choisir pour résoudre le système ?

Exercice HS.22

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Es ce que la matrice A est à diagonale strictement dominante ?
2. Calculer $\rho(T_g)$ et $\rho(T_j)$. Sachant que les racines approximatifs de : $x^3 + 7/8x - 1/4$ sont : $x \approx 0.26455, x \approx -0.13228 \pm 0.96306i$.
   Quelle conclusion ?
3. Qu'es ce qui se passe (par rapport à la convergence des deux méthodes) lorsqu'on effectue le changement suivant :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0.2 \\ -1/2x_1 + x_2 - 1/4x_3 &= -1.425 \\ x_1 - 1/2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

   sachant que les racines approximatifs de : $x^3 + \frac{15}{8}x - 1/2$ sont : $x \approx 0.25755, x \approx -0.12878 \pm 1.38735$.

8 Valeurs et vecteurs propres

Bonne nouvelle année.

Exercice HS.23
Déterminer les valeurs/les vecteurs propres de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice HS.24
Déterminer la norme l_2 de la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice HS.25
On appelle une matrice $n \times n$ A **convergente** si : $\lim_{k\to\infty}(A^k)_{ij} = 0,$ pour tout i, j.

Soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A est elle convergente ?

Exercice HS.26
Soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{bmatrix}.$$

Sans faire de calcule des valeurs/vecteurs propres, déterminer parmi les vecteurs suivants, lesquels sont vecteurs propres ? Identifier les valeurs propres correspondantes :

1. $v_1 = (-1, 1, 0, 1)^T$
2. $v_2 = (1, 0, -1, 0)^T$
3. $v_3 = (-1, 0, 2, 2)^T$
4. $v_4 = (0, 1, -3, 0)^T$

Exercice HS.27

Sans faire de calcule, donner l'ensemble des valeurs propres des matrices suivantes :

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad et \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$