

Matriz (matemáticas)

En matemáticas, una **matriz** es un arreglo bidimensional de números, y en su mayor generalidad de elementos de un anillo. Las matrices se usan generalmente para describir sistemas de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones diferenciales o representar una aplicación lineal (dada una base). Las matrices se describen en el campo de la teoría de matrices.

Las matrices se utilizan para múltiples aplicaciones y sirven, en particular, para representar los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales o para representar las aplicaciones lineales; en este último caso las matrices desempeñan el mismo papel que los datos de un vector para las aplicaciones lineales.

Pueden sumarse, multiplicarse y descomponerse de varias formas, lo que también las hace un concepto clave en el campo del álgebra lineal.

Historia

| Cronología ^[1] | |
|---------------------------|---|
| Año | Acontecimiento |
| 200 a.C. | En China los matemáticos usan series de números. |
| 1848 d.C. | J. J. Sylvester introduce el término " matriz ". |
| 1858 | Cayley publica <i>Memorias sobre la teoría de matrices</i> . |
| 1878 | Frobenius demuestra resultados fundamentales en álgebra matricial. |
| 1925 | Werner Heisenberg utiliza la teoría matricial en la mecánica cuántica |

El origen de las matrices es muy antiguo. Los cuadrados latinos y los cuadrados mágicos se estudiaron desde hace mucho tiempo. Un cuadrado mágico, 3 por 3, se registra en la literatura china hacia el 650 a. C.^[1]

Es larga la historia del uso de las matrices para resolver ecuaciones lineales. Un importante texto matemático chino que proviene del año 300 a. C. a 200 a. C., *Nueve capítulos sobre el Arte de las matemáticas (Jiu Zhang Suan Shu)*, es el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas.^[2] En el capítulo séptimo, "*Ni mucho ni poco*", el concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kōwa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693.

Los "cuadrados mágicos" eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente desde comienzos del siglo VII, quienes a su vez pudieron tomarlos de los matemáticos y astrónomos de la India, junto con otros aspectos de las matemáticas combinatorias. Todo esto sugiere que la idea provino de China. Los primeros "cuadrados mágicos" de orden 5 y 6 aparecieron en Bagdad en el 983, en la *Enciclopedia de la Hermandad de Pureza (Rasa'il Ihkwan al-Safa)*.^[1]

Después del desarrollo de la teoría de determinantes por Seki Kowa y Leibniz, a finales del siglo XVII, Cramer presentó en 1750 la ahora denominada regla de Cramer. Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron la eliminación de Gauss-Jordan en el siglo XIX.

Leibniz(1646-1716), uno de los dos fundadores del análisis, desarrolló la teoría de los determinantes en 1693 para facilitar la Resolución de las ecuaciones lineales. Gabriel Cramer tuvo que profundizar esta teoría, presentando el método de Cramer en 1750. En los años 1800, el método de eliminación de Gauss-Jordan se puso a punto.

Fue James Joseph Sylvester quien utilizó por primera vez el término « matriz » en1848/1850.

En 1853, Hamilton hizo algunos aportes a la teoría de matrices. Cayley introdujo en 1858 la **notación matricial**, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Cayley, Hamilton, Hermann Grassmann, Frobenius, Olga Taussky-Todd y John von Neumann cuentan entre los matemáticos famosos que trabajaron sobre la teoría de las matrices. En 1925, Werner Heisenberg redescubre el cálculo matricial fundando una primera formulación de lo que iba a pasar a ser la mecánica cuántica. Se le considera a este respecto como uno de los padres de la mecánica cuántica.

Olga Taussky-Todd (1906-1995), durante la II Guerra Mundial, usó la teoría de matrices para investigar el fenómeno de aeroelasticidad llamado *fluttering*.

Definiciones y notaciones

Una **matriz** es una arreglo bidimensional de números (llamados **entradas** de la matriz) ordenados en **filas** (o **renglones**) y **columnas**, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con n filas y m columnas se le denomina matriz n -por- m (escrito $n \times m$) donde $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$. El conjunto de las matrices de tamaño $n \times m$ se representa como $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$, donde \mathbb{K} es el campo al cual pertenecen las entradas. El tamaño de una matriz siempre se da con el número de filas primero y el número de columnas después. Dos matrices se dice que son iguales si tienen el mismo tamaño y las mismas entradas.

A la entrada de una matriz que se encuentra en la fila i —ésima y la columna j —ésima se le llama entrada i, j o entrada (i, j) -ésimo de la matriz. En estas expresiones también se consideran primero las filas y después las columnas.

Casi siempre se denotan a las matrices con letras mayúsculas mientras que se utilizan las correspondientes letras en minúsculas para denotar las entradas de las mismas. Por ejemplo, al elemento de una matriz A que se encuentra en la fila i —ésima y la columna j —ésima se le denota como a_{ij} , donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$. Cuando se va a representar explícitamente una entrada la cuál está indexada con un i o un j con dos cifras se introduce una coma entre el índice de filas y de columnas. Así por ejemplo, la entrada que está en la primera fila y la segunda columna de la matriz A de tamaño 50×100 se representa como $a_{1,2}$ mientras que la entrada que está en la fila número 23 y la columna 100 se representa como $a_{23,100}$.

Además de utilizar letras mayúsculas para representar matrices, numerosos autores representan a las matrices con fuentes en negrita para distinguirlas de otros objetos matemáticos. Así **A** es una matriz, mientras que A es un escalar en esa notación. Sin embargo ésta notación generalmente se deja para libros y publicaciones, donde es posible hacer ésta distinción tipográfica con facilidad. En otras notaciones se considera que el contexto es lo suficientemente claro como para no usar negritas.

Otra notación, en si un abuso de notación, representa a la matriz por sus entradas, i.e. $A := (a_{ij})$ o incluso $A := a_{ij}$.

Otra definición, muy usada en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, es la de vectores fila y vectores columna. Un **vector fila** o **vector renglón** es cualquier matriz de tamaño $1 \times n$ mientras que un **vector columna** es cualquier matriz de tamaño $m \times 1$.

Finalmente a las matrices que tienen el mismo número de filas que de columnas, i.e. $m = n$, se les llama **matrices cuadradas** y el conjunto se denota $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ o alternativamente $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ejemplo

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

es una matriz de tamaño 4×3 . La entrada a_{23} es 7.

La matriz $R \in \mathcal{M}_{1 \times 9}(\mathbb{R})$

$$R = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]$$

es una matriz de tamaño 1×9 : un vector fila con 9 entradas.

Operaciones básicas

Las operaciones que se pueden hacer con matrices provienen de sus aplicaciones, sobre todo de las aplicaciones en álgebra lineal. De ese modo las operaciones, o su forma muy particular de ser implementadas, no son únicas.

Suma o adición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$. Se define la operación de **suma o adición de matrices** como una operación binaria $+: \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $(A, B) \mapsto C = A + B$ y donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ en el que la operación de suma en la última expresión es la operación binaria correspondiente pero en el campo \mathbb{K} . Por ejemplo, la entrada c_{12} es igual a la suma de los elementos a_{12} y b_{12} lo cual es $a_{12} + b_{12}$. Veamos un ejemplo más explícito. Sea $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

No es necesario que las matrices sean cuadradas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

A la luz de éstos ejemplos es inmediato ver que dos matrices se pueden sumar solamente si ambas tienen el mismo tamaño. La suma de matrices en el caso de que las entradas estén en un campo serán la asociatividad, la conmutatividad, existencia de elemento neutro aditivo y existencia de inverso aditivo. Ésto es así ya que éstas son propiedades de los campos en los que están las entradas de la matriz. A continuación se presentan las propiedades.

Propiedades

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$, donde \mathbb{K} es un campo entonces se cumplen las siguientes propiedades para la operación binaria $+$

- **Asociatividad**

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Demostración. Dada la definición de la operación binaria $+$ se sigue el resultado ya que $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ debido a que $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

- **Conmutatividad**

$$(A + B) = (B + A)$$

Demostración Dada la definición de la operación binaria $+$ se sigue el resultado ya que $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ debido a que $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

• **Existencia del elemento neutro aditivo**

Existe $0 \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Demostración Tómese $0 \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $0_{ij} = 0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ para cualquier i, j (dónde este último es el elemento neutro aditivo en el campo, el cual existe necesariamente). Entonces para cualquier $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ se sigue que $A + 0 = A$ ya que $a_{ij} + 0_{ij} = a_{ij} + 0_{\mathbb{K}} = a_{ij}$ para cualquier i, j , dado que las entradas están en un campo.

• **Existencia del inverso aditivo**

Existe $D \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$A + D = 0$$

a esta matriz D se le denota por $-A$.

Demostración Dada $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tómese $D \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $A + D = 0$. Entonces $a_{ij} + d_{ij} = 0_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$; luego, por las propiedades de campo $d_{ij} = -a_{ij}$ donde $-a_{ij}$ es el inverso aditivo de a_{ij} en el campo para cualquier i, j .

En efecto, éstas propiedades dependen del conjunto en el que estén las entradas, como se ha dicho antes, aunque en las aplicaciones generalmente los campos usados son \mathbb{R} (los números reales) y \mathbb{C} (los números complejos).

Por como se definió la operación binaria adición se dice que ésta operación es una operación interna por lo que se cumple intrínsecamente la propiedad de que $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ es cerrado bajo adición. Con éstas propiedades se tiene que $(\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano.

En el caso en que el conjunto al que pertenecen las entradas de la matriz sea un anillo $(A, +_A, \cdot_A)$, la operación de adición de matrices continúa dotando de estructura de grupo abeliano a $(\mathcal{M}_{n \times m}(A), +)$, ya que bajo un anillo $(A, +_A, \cdot_A)$ se tiene que $(A, +_A)$ es un grupo abeliano. En el caso de que las entradas estén en un grupo $(G, +_G)$, éste necesita ser un grupo abeliano para que la adición de matrices siga dotando de estructura de grupo abeliano a $(\mathcal{M}_{n \times m}(G), +)$.

Producto por un escalar

Sean $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se define la operación de **producto por un escalar** como una función $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que $(\lambda, A) \mapsto B = \lambda A$ y donde $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ en donde el producto es la operación binaria correspondiente pero en el campo \mathbb{K} . Por ejemplo, la entrada b_{12} es igual al producto λa_{12} . Veamos un ejemplo más explícito. Sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ y $2 \in \mathbb{R}$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(8) & 2(-3) \\ 2(4) & 2(-2) & 2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

También es inmediato observar que el producto por un escalar da como resultado una matriz del mismo tamaño que la original. También el producto por un escalar dependerá de la estructura algebraica en la que las entradas están. En el caso de que estén en un campo serán dos distributividades (una respecto de suma de matrices y otra respecto de suma en el campo), asociatividad y una propiedad concerniente al producto por el elemento neutro multiplicativo del campo. A continuación se presentan las propiedades.

Propiedades

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, donde \mathbb{K} es un campo, entonces se cumplen las siguientes propiedades para la operación producto por un escalar

- **Asociatividad**

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

Demostración. Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que $(\lambda\mu)a_{ij} = \lambda(\mu a_{ij})$ debido a que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

- **Distributividad respecto de la suma de matrices**

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que $\lambda(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}$ debido a que $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

- **Distributividad respecto de la suma en el campo**

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que $(\lambda + \mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij}$ debido a que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

- **Producto por el neutro multiplicativo del campo**

$$1_{\mathbb{K}}A = A$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que $1_{\mathbb{K}}(a_{ij}) = a_{ij}$ debido a que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

Por como se definió la operación de producto por escalares se dice que $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ es cerrado bajo producto por escalares. Con éstas propiedades y las de la adición se tiene que $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalares definidas antes.

En el caso de que las entradas y los escalares no estén en un campo sino en un anillo entonces no necesariamente existe el neutro multiplicativo. En caso de que exista, con lo cual el anillo es un **anillo con uno**, se dice que $\mathcal{M}_{n \times m}(A)$ es un módulo sobre A .

Ahora, a partir de las propiedades básicas se puede demostrar inmediatamente que

$$\lambda 0 = 0$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que $c_{ij} = \lambda(0_{ij}) = \lambda(0_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{K}}$ para todo i, j .

$$0_{\mathbb{K}}A = 0$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que $c_{ij} = 0_{\mathbb{K}}(a_{ij}) = 0_{\mathbb{K}}$ para todo i, j debido a que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

$$\lambda A = 0 \longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ o } A = 0$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que como en un campo no hay divisores de cero entonces $\lambda(a_{ij}) = 0_{\mathbb{K}}$ para todo i, j implica que $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ o $a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$ para todo i, j , i.e. $A = 0$.

No es posible un caso en el que sólo algunas entradas de la matriz sean cero y el escalar sea no nulo ya que en esos casos estaríamos diciendo que hay divisores de cero y llegaríamos a una contradicción, ya que la suposición es que las entradas y los escalares están en un campo.

$$(-\lambda)A = \lambda(-A)$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que $(-\lambda)(a_{ij}) = (-1_{\mathbb{K}}(\lambda))a_{ij} = (\lambda(-1_{\mathbb{K}}))a_{ij} = \lambda(-1_{\mathbb{K}}(a_{ij})) = \lambda(-a_{ij})$ debido a que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j .

Este último resultado permite usar la notación $-\lambda A$ sin riesgo de ambigüedad.

Producto

El producto de matrices se define de una manera muy peculiar y hasta caprichosa cuando no se conoce su origen. El origen proviene del papel de las matrices como representaciones de aplicaciones lineales. Así el producto de matrices, como se define, proviene de la composición de aplicaciones lineales. En este contexto, el tamaño de la matriz corresponde con las dimensiones de los espacios vectoriales entre los cuales se establece la aplicación lineal. De ese modo el producto de matrices, representa la composición de aplicaciones lineales.

En efecto, en ciertas bases tenemos que $f : V \longrightarrow W$ se puede representar como $f(x) = Ax$ donde x es la representación de un vector de V en la base que se ha elegido para V en forma de vector columna. Si tenemos dos aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ entonces $f(x) = Bx$ y $g(x) = Ax$, luego la aplicación $g \circ f : V \longrightarrow U$ se representará como $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(Bx) = ABx$

donde AB es el producto de las representaciones matriciales de f, g . Nótese que la composición no se puede dar entre cualquier aplicación sino entre aplicaciones que vayan de $V \rightarrow W \rightarrow U$, en particular debe de haber una relación entre las dimensiones de los espacios vectoriales. Una vez dicho ésto podemos definir el producto de la siguiente manera.

Sean $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$. Se define el **producto de matrices** como una función

$\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$ tal que $(A, B) \mapsto C = AB$ y donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$ para

toda i, j , es decir $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{im}b_{mj}$. Por ejemplo, la entrada $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \dots + a_{1m}b_{m2}$.

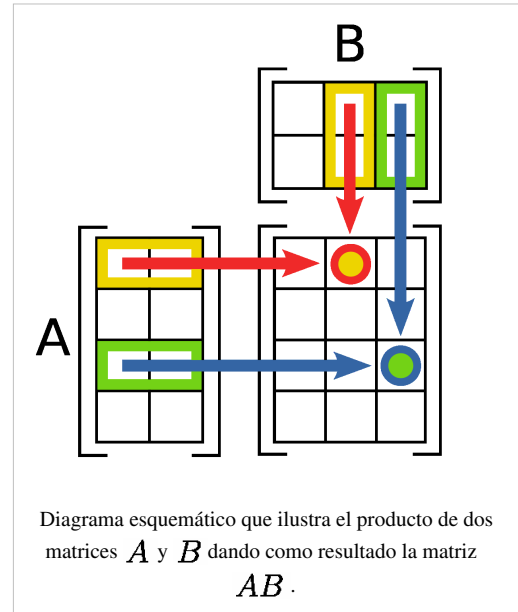
Veamos un ejemplo más explícito. Sean $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 0(2) + 2(1) & 1(1) + 0(1) + 2(0) \\ -1(3) + 3(2) + 1(1) & -1(1) + 3(1) + 1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

dónde la matriz producto es como habíamos establecido en la definición: una matriz $C \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Sin tomar en cuenta la motivación que viene desde las aplicaciones lineales, es evidente ver que si ignoramos la definición de la función de producto de matrices y sólo se toma en cuenta la definición de las entradas, el producto no estará bien definido, ya que si A no tiene el mismo número de columnas que B de filas entonces no podremos establecer en donde acaba la suma: si la acabamos en el mayor de éstos números habrá sumandos que no están definidos ya que una de las matrices no tendrá mas entradas, mientras que si tomamos el menor habrá entradas de alguna de las matrices que no se tomen en cuenta. Así es necesario que **A tenga el mismo número de columnas que B de filas para que AB exista.**

Como se puede suponer también, las propiedades de ésta operación serán más limitadas en la generalidad ya que además de las limitaciones impuestas por la naturaleza de las entradas está esta limitación respecto a tamaño. Es claro, además, que el producto de matrices no siempre es una operación interna.



Propiedades

Sean A, B, C matrices con entradas en \mathbb{K} , donde \mathbb{K} es un campo, entonces se cumplen las siguientes propiedades para el producto de matrices (considerando que los productos existan)

- **Asociatividad**

$$A(BC) = (AB)C$$

Demostración. Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que, si $A(BC) = AH = R$,

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} h_{kj} \quad h_{kj} = \sum_{\ell=1}^p b_{k\ell} c_{\ell j} \text{ por } \quad \text{lo} \quad \text{que}$$

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \sum_{\ell=1}^p b_{k\ell} c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^p s_{i\ell} c_{\ell j} = t_{ij} \text{ donde } (AB)C = SC = T \text{ debido a que}$$

$$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K} \text{ para todo } i, j. \text{ Aquí estamos considerando que } A \text{ es } n \times m, B \text{ es } m \times p \text{ y } C \text{ es } p \times q$$

- **Distributividad respecto de la suma de matrices por la derecha**

$$(A + B)C = AC + BC$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que

$$\sum_{k=1}^m (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^m b_{ik} c_{kj} \text{ debido a que } a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K} \text{ para}$$

todo i, j . Aquí estamos considerando que A es $n \times m$, B es $n \times m$ y C es $m \times p$.

- **Distributividad respecto de la suma de matrices por la izquierda**

$$A(B + C) = AB + AC$$

Demostración Dada la definición de la operación se sigue el resultado ya que

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj} \text{ debido a que } a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{K} \text{ para}$$

todo i, j . Aquí estamos considerando que A es $n \times m$, B es $m \times p$ y C es $m \times p$.

El producto de matrices no es conmutativo, si lo fuera la composición de funciones lineales sería conmutativa y eso en general no sucede. Obviamente existen casos particulares de algunos tipos de matrices en los que si hay conmutatividad. En el caso en que tengamos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tendremos que el producto entre matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ también está en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En ese caso $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ además de espacio vectorial es un álgebra sobre un campo. En el caso de que el conjunto al que pertenecen las entradas sea un anillo conmutativo con uno entonces $\mathcal{M}_n(A)$ además de módulo es un álgebra sobre un anillo. Mas aún $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ con \cdot el producto de matrices es un anillo.

Rango

El rango de una matriz A es la dimensión de la imagen de la aplicación lineal representada por A , que coincide con la dimensión de los espacios vectoriales generados por las filas o columnas de A .

Traspuesta

La traspuesta de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(X)$, donde X no es necesariamente un campo, es una matriz $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(X)$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$. Por ejemplo la entrada $b_{12} = a_{21}$.

Veamos un ejemplo más explícito. Sea $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces su traspuesta es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Así, informalmente podríamos decir que la traspuesta es aquella matriz que se obtiene de la original cambiando filas por columnas. Las notaciones usuales para denotar la traspuesta de una matriz son A^T , A^t .

La trasposición de matrices tiene las siguientes propiedades (donde ahora si el conjunto de entradas debe ser al menos un anillo conmutativo):

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A, \\ (A + B)^T &= A^T + B^T, \\ (AB)^T &= B^T A^T, \end{aligned}$$

Si $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(X)$ representa una aplicación lineal, entonces la matriz A^T describe la traspuesta de la aplicación lineal.

Matrices cuadradas y definiciones relacionadas

Una **matriz cuadrada** es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas. El conjunto de todas las matrices cuadradas n -por- n junto a la suma y la multiplicación de matrices, es un anillo que generalmente no es conmutativo.

$M(n, \mathbf{R})$, el anillo de las matrices cuadradas reales, es un álgebra asociativa real unitaria. $M(n, \mathbf{C})$, el anillo de las matrices cuadradas complejas, es un álgebra asociativa compleja.

La **matriz identidad** \mathbf{I}_n de orden n es la matriz n por n en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás elementos son iguales a 0. La matriz identidad se denomina así porque satisface las ecuaciones $\mathbf{M}\mathbf{I}_n = \mathbf{M}$ y $\mathbf{I}_n \mathbf{N} = \mathbf{N}$ para cualquier matriz \mathbf{M} m por n y \mathbf{N} n por k . Por ejemplo, si $n = 3$:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz identidad es el elemento unitario en el anillo de matrices cuadradas.

Los elementos invertibles de este anillo se llaman **matrices invertibles** o **matrices no singulares**. Una matriz \mathbf{A} n por n es invertible si y sólo si existe una matriz \mathbf{B} tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA}.$$

En este caso, \mathbf{B} es la **matriz inversa** de \mathbf{A} , identificada por \mathbf{A}^{-1} . El conjunto de todas las matrices invertibles n por n forma un grupo (concretamente un grupo de Lie) bajo la multiplicación de matrices, el grupo lineal general.

Si λ es un número y \mathbf{v} es un vector no nulo tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces se dice que \mathbf{v} es un vector propio de \mathbf{A} y que λ es su valor propio asociado. El número λ es un valor propio de \mathbf{A} si y sólo si $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ no es invertible, lo que sucede si y sólo si $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$, donde $p_{\mathbf{A}}(x)$ es el polinomio característico de \mathbf{A} . $p_{\mathbf{A}}(x)$ es un polinomio de grado n y por lo tanto, tiene n raíces complejas múltiples raíces si se cuentan de acuerdo a su multiplicidad. Cada matriz cuadrada tiene como mucho n valores propios complejos.

El determinante de una matriz cuadrada \mathbf{A} es el producto de sus n valores propios, pero también puede ser definida por la *fórmula de Leibniz*. Las matrices invertibles son precisamente las matrices cuyo determinante es distinto de cero.

El algoritmo de eliminación gaussiana puede ser usado para calcular el determinante, el rango y la inversa de una matriz y para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal, lo que equivale a la suma de sus n valores propios.

Una matriz de Vandermonde es una matriz cuadrada cuyas filas son las potencias de un número. Su determinante es fácil de calcular.

Las matrices en la Computación

Las matrices son utilizadas ampliamente en la computación, por su facilidad y liviandad para manipular información. En este contexto, son una buena forma para representar grafos, y son muy utilizadas en el cálculo numérico. En la computación gráfica, las matrices son ampliamente usadas para lograr animaciones de objetos y formas.

Teoría de matrices

La **teoría de matrices** es un rama de las matemáticas que se centra en el estudio de matrices. Inicialmente una rama secundaria del álgebra lineal, ha venido cubriendo también los temas relacionados con la teoría de grafos, el álgebra, la combinatoria y la estadística.

Matrices relacionadas con otros temas

Una matriz puede identificarse a una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Así la teoría de las matrices habitualmente se considera como una rama del álgebra lineal. Las matrices cuadradas desempeñan un papel particular, porque el conjunto de matrices de orden n (n entero natural no nulo dado) posee propiedades de « estabilidad » de operaciones.

Los conceptos de matriz estocástica y matriz doblemente estocástica son herramientas importantes para estudiar los procesos estocásticos, en probabilidad y en estadística.

Las matrices definidas positivas aparecen en la búsqueda de máximos y mínimos de funciones a valores reales, y a varias variables.

Es también importante disponer de una teoría de matrices a coeficientes en un anillo. En particular, las matrices a coeficientes en el anillo de polinomios se utilizan en teoría de mandos.

En matemáticas puras, los anillos de matrices pueden proporcionar un rico campo de contraejemplos para conjeturas matemáticas.

Algunos teoremas

- Teorema de Cayley-Hamilton

Matriz y grafos

En teoría de los grafos, a todo grafo etiquetado corresponde la matriz de adyacencia. Una matriz de permutación es una matriz que representa una permutación; matriz cuadrada cuyos coeficientes son 0 o 1, con un solo 1 en cada línea y cada columna. Estas matrices se utilizan en combinatorio.

En la teoría de grafos, se llama matriz de un grafo a la matriz que indica en la línea i y la columna j el número de aristas que enlazan el vértice i al vértice j . En un grafo no orientado, la matriz es simétrica. La suma de los elementos de una columna permite determinar el grado de un vértice. La matriz M^n indica en la línea i y la columna j el número de caminos a n aristas que adjuntan el vértice i al vértice j .

Referencias

- **Beezer, Rob**, *Un primer curso en álgebra lineal* ^[3], licencia bajo GFDL. (En inglés)
- **Jim Hefferon**: *Álgebra lineal* ^[4] (Libros de texto en línea) (En inglés)

Enlaces externos

- Una breve historia del álgebra lineal y de la teoría de matrices lineal ^[5] (En inglés)
- Matemáticas/Matrices ^[6] (En Wikilibros)

Notas

[1] Swaney, Mark. History of Magic Squares (<http://www.arthurmag.com/magpie/?p=449>).

[2] cited by

[3] <http://linear.ups.edu/index.html>

[4] <http://joshua.smcvt.edu/linalg.html/>

[5] <http://darkwing.uoregon.edu/~vitulli/441.sp04/LinAlgHistory.html>

[6] <http://es.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1ticas/Matrices>

Fuentes y contribuyentes del artículo

Matriz (matemáticas) *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65079500> *Contribuyentes:* 2orejas1boca, 3coma14, Adruiz, Af3, Airunp, Alberto Salguero, Alexandrosas, Alhen, Amadis, Andreasmperu, Angelsaracho, Antur, Antón Franchó, Astroza, Açipni-Lovrij, Baiji, BlackBeast, CHV, CaStarCo, Casary, CayoMarcio, Chewie, Cinabrium, Creosota, Danicm, Danielba894, Davidsevilla, Davius, DefLog, Diegusjaimes, Dnu72, Eduardo Lima, El Hoy, Elessar.telkontarg, Emijrp, Epnob, Esceptic0, Euclides, Eudescontreras, Euratom, Ezequieldiazbarral, Farisori, Franco68, FrancoGG, Fsd141, Gaius iulius caesar, Gengiskanhg, GermanX, HUB, Halfdrag, Hprmedina, Humberto, Igna, Inajle, Ingenioso Hidalgo, Isha, IvanStepaniuk, J. A. Gélvez, J.delanoy, JMPerez, Jatt, Javierito92, Jcaraballo, Jecanre, Jjafjiaf, Jkbw, JIbezares, Jorge 2701, JorgeGG, Joseaperez, Jtico, Juan Mayordomo, Julinspi, Julio Isaac Moreno Díaz, Kender00, Komputisto, Kved, L&T2, La Maga, Lampsako, Leonpolanco, Lourdes Cardenal, Macalla, Malgutz, Manwë, Marcodallacamina, Matdrodes, MatemáticaAlejandra, Mcapdevila, Mgallege, Moriel, Mortadelo2005, Mpinomej, Mushii, Nodulation, Numbo3, Paintman, Pieter, Proferichardperez, Pólux, QFLRICRADO, Queninosta, Rastrojo, Rdaneel, Retama, Ricard Delgado Gonzalo, Ricardogpn, Roberto Fiadone, Rojasyesid, Romero Schmidtke, RoyFocker, Rubpe19, Sabbut, Sanbec, Santiago Hernández, Sebanievas87, Sheldonspock, Steve.jaramillov, SuperBraulio13, Tano4595, Technopat, Tigerfenix, Tostadora, Triku, Umburi, Veltys, Veon, Vitamine, Waka Waka, Will vm, Yeza, Yopohari, Zorosandro, 408 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

Archivo:Matrix multiplication diagram.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Matrix_multiplication_diagram.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* User:Bilou

Licencia

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported
[//creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)