Kapitel 6 Miscellaneous

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Lars Porth

Parmaetrisierte Algorithmen Seminar

16. 11. 2015

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Einführung

- In Kapitel 6 geht es um verschiedene algorithmischen Werkzeuge, die zu sonst nicht so gut in irgend ein anderes Kapitel gepasst hätten.
- Als erstes geht es um Expotentialzeit dynamische Programmierung
- Als zweites geht es um Ganzahlige Lineare Programmierung

6.1 Dynamische Programmierung über Subsets

6.1 Dynamische Programmierung

- TODO Hier kommt eine Beschreibung zu dynamischer Programmierung hin.

6.1.1 Set Cover

Set Cover

Definition: Überdeckung

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Mengen in einem Universum $\mathcal{U}$. Für eine Unterfamilie $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ und einer Teilmenge $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ sagen wir, dass $\mathcal{F}'$ $\mathcal{U}'$ überdeckt, wenn jedes Element von $\mathcal{U}'$ zu mindestens einer Menge von $\mathcal{F}'$ gehört ($\mathcal{U}' \subseteq \bigcup \mathcal{F}'$).

Set Cover

Im Set Cover Problem ist eine Familie von Mengen $\mathcal{F}$ gegeben in einem Universum $\mathcal{U}$ und eine positive ganze Zahl k. Die Aufgabe ist zu überprüfen ob eine Unterfamilie, mit maximal k Elementen, $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ existiert, so dass $\mathcal{F}'$ $\mathcal{U}$ überdeckt.

Theorem 6.1

Theorem 6.1

Gegeben eine Instanz des SET COVER Problems $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, k)$, kann die minimal mögliche Größe einer Unterfamilie $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, die $\mathcal{U}$ überdeckt, in Zeit $2^{|\mathcal{U}|}(|\mathcal{U}| + |\mathcal{F}|)^{\mathcal{O}(1)}$ gefunden werden.

Theorem 6.1

Beweis

- Sei $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ..., F_{|\mathcal{F}|}\}$
- Wir definieren die dynamische Programmierungs Tabelle wie folgt:
- Für jede Untermenge $X \subseteq \mathcal{U}$ und jede ganze Zahl $0 \leq j \leq |\mathcal{F}|$, definieren wir $T[X, j]$ als die minimale Größe einer Untermenge $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, ..., F_j\}$, die X überdeckt.
- Falls keine solche Teilmenge $\mathcal{F}'$ existiert setzten wir $T[X, j] = +\infty$

Theorem 6.1

Beweis

- In unserem dynamischen Algorithmus Programm berechnen wir alle $2^{|\mathcal{U}|}(\mathcal{F}+1)$ Werte $T[X,j]$
- Basis Fall: $T[\emptyset,0]=0$, $T[X,0]=+\infty$, für $X\neq\emptyset$
- Rekusiver Fall: Für $X\subseteq\mathcal{U}$ und $0\leq j\leq|\mathcal{F}|$ zeigen wir, dass $T[X,j]=min(T[X,j-1],1+T[X\backslash F_j,j-1])$

Theorem 6.1

Beweis

- Wir wollen zeigen, dass
  $T[X,j] = min(T[X,j-1], 1 + T[X \backslash F_j, j-1])$
- Dafür zeigen wir, dass in beiden Richtungen Ungleichheit gilt

Theorem 6.1

Beweis

- Wir wollen zeigen, dass $T[X, j] = min(T[X, j-1], 1 + T[X \backslash F_j, j-1])$
- Dafür zeigen wir, dass in beiden Richtungen Ungleichheit gilt
- Für $\geq$: Sei $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, ..., F_j\}$ eine Familie mit minimaler Größe, die X überdeckt, wir unterscheiden zwei Fälle:

Theorem 6.1

Beweis

- Wir wollen zeigen, dass $T[X, j] = min(T[X, j-1], 1 + T[X \backslash F_j, j-1])$
- Dafür zeigen wir, dass in beiden Richtungen Ungleichheit gilt
- Für $\geq$: Sei $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, ..., F_j\}$ eine Familie mit minimaler Größe, die X überdeckt, wir unterscheiden zwei Fälle:
  - $F_j \notin \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}'$ auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j-1]$

Theorem 6.1
Beweis

- Wir wollen zeigen, dass $T[X,j] = min(T[X,j-1], 1 + T[X\backslash F_j, j-1])$
- Dafür zeigen wir, dass in beiden Richtungen Ungleichheit gilt
- Für $\geq$: Sei $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, ..., F_j\}$ eine Familie mit minimaler Größe, die X überdeckt, wir unterscheiden zwei Fälle:
  - $F_j \notin \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}'$ auch ein zulässiger Kandidat für $T[X,j-1]$
  - $F_j \in \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}'\backslash F_j$ ein zulässiger Kandidat für $T[X\backslash F_j, j-1]$

Theorem 6.1

Beweis

- Wir wollen zeigen, dass $T[X,j] = min(T[X,j-1], 1 + T[X \backslash F_j, j-1])$
- Dafür zeigen wir, dass in beiden Richtungen Ungleichheit gilt
- Für $\geq$: Sei $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, ..., F_j\}$ eine Familie mit minimaler Größe, die X überdeckt, wir unterscheiden zwei Fälle:
  - $F_j \notin \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}'$ auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j-1]$
  - $F_j \in \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}' \backslash F_j$ ein zulässiger Kandidat für $T[X \backslash F_j, j-1]$
- Für $\leq$:

Theorem 6.1

Beweis

- Wir wollen zeigen, dass
  $T[X, j] = min(T[X, j-1], 1 + T[X \backslash F_j, j-1])$
- Dafür zeigen wir, dass in beiden Richtungen Ungleichheit gilt
- Für $\geq$: Sei $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, ..., F_j\}$ eine Familie mit minimaler Größe, die X überdeckt, wir unterscheiden zwei Fälle:
  - $F_j \notin \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}'$ auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j-1]$
  - $F_j \in \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}' \backslash F_j$ ein zulässiger Kandidat für $T[X \backslash F_j, j-1]$
- Für $\leq$:
  - jeder zulässige Kandidat $\mathcal{F}'$ für $T[X, j-1]$ ist auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j]$

Theorem 6.1

Beweis

- Wir wollen zeigen, dass $T[X, j] = min(T[X, j-1], 1 + T[X \backslash F_j, j-1])$
- Dafür zeigen wir, dass in beiden Richtungen Ungleichheit gilt
- Für $\geq$: Sei $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, ..., F_j\}$ eine Familie mit minimaler Größe, die X überdeckt, wir unterscheiden zwei Fälle:
  - $F_j \notin \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}'$ auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j-1]$
  - $F_j \in \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}' \backslash F_j$ ein zulässiger Kandidat für $T[X \backslash F_j, j-1]$
- Für $\leq$:
  - jeder zulässige Kandidat $\mathcal{F}'$ für $T[X, j-1]$ ist auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j]$
  - für jeden zulässigen Kandidaten $\mathcal{F}'$ für $T[X \backslash F_j, j-1]$ gilt, dass $\mathcal{F}' \cup F_j$ ein zulässiger Kandidat für $T[X, j]$ ist

Theorem 6.1

Beweis

- Mit diesem dynamischen Programm können wir für alle $X \subseteq U$ und $0 \leq j \leq |\mathcal{F}|$ den Wert $T[X, j]$ in versprochener Zeit berechnen.
- Der Wert den wir suchen ist $T[\mathcal{U}, |\mathcal{F}|]$

6.1.2 Steiner Baum

Steiner Baum

Steiner Baum

Sei G ein ungerichteter Graph mit n Knoten und $K \subseteq V(G)$ von Endpunkten (terminals). Ein Steiner Baum für K in G ist ein zusammenhängender Teilgraph H von G, der K enthält ($K \subseteq H$)

Steiner Baum Problem

Im (gewichteten) Steiner Baum Problem bekommt man einen ungerichteten Graphen G, eine Gewichtungsfunktion $w : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$ und eine Teilmenge von Endpunkten $K \subseteq V(G)$ gegeben. Das Ziel ist es einen Steiner Baum H für K in G zu finden, in dem $w(H) = \sum_{e \in V(H)} w(e)$ minimal ist.

Steiner Baum Problem
Dynamischer Algorithmus

- Das Ziel ist es einen dynamischen Algorithmus zu entwickeln, der in Zeit $3^{|K|}n^{\mathcal{O}(1)}$ $(n = |V(G)|)$ das Steiner Baum Problem löst.

Notation: $dist(v, u)$

Für ein Knotenpaar $u, v \in V(G)$, notieren wir die Kosten des kürzesten Pfad von v nach u als $dist(v, u)$.

- Erinnerung $dist(v, u)$ kann durch Algorithmen, wie der kürzeste Pfad Algorithmus von Dijkstra, in Polynomialzeit bestimmt werden.

Steiner Baum Problem
Vorverarbeitung

- Wir nehmen an, dass $|K| > 1$, weil sonst die Instanz des Problems trivial wäre.
- Ohne Einschränkungen nehmen weiterhin an, dass G verbunden ist.
- Als letztes setzten wir voraus, dass jeder Endpunkt aus K in G genau Grad 1 hat und sein einziger Nachbar kein Knoten aus K ist.
  - Um diese Bedingung zu erfüllen erzeugen wir für jeden Knoten $t \in K$ einen neuen Knoten t' und eine Kannte tt'

Steiner Baum Problem
Dynamischer Algorithmus

- Wir definieren nun die dynamische Tabelle: Für jede nicht leere Teilmenge $D \subset K$ und jeden Knoten $v \in V(G) \setminus K$ sei $T[D, v]$ das minimale Gewicht von einem Steiner Baum für $D \cup \{v\}$ in G.
- Als Basisfall betrachten wir die Teilmengen $D \subset K$ für die gilt $|D| = 1$. Dann gilt:
  - Sei $D = \{t\}$, dann ist einem Steiner Baum mit minimalem Gewicht von $D \cup \{v\} = \{t, v\}$.
  - Somit ist der Wert für $T[\{t\}, v] = dist(t, v)$.

Lemma 6.2

Lemma 6.2

Für jedes $D \subseteq K$ von einer Größe von mindestens 2 und jedes $v \in V(G) \setminus K$ gilt folgendes:

$$T[D, v] = \min_{\substack{u \in V(G) \setminus K \\ \emptyset \neq D' \subsetneq D}} \{ T[D', u] + T[D \setminus D', u] + dist(u, v) \}$$

Theorem 6.3

Theorem 6.3

Steiner Baum kann in Zeit $3^K n^{\mathcal{O}(1)}$

Literature