



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Lars Porth

Parametrisierte Algorithmen Seminar

16. 11. 2015

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
 - Allgemeines

- 2 6.1 Dynamische Programmierung über Subsets
 - 6.1.1 Set Cover
 - 6.1.2 Steiner Tree

Einführung

Einführung

- In Kapitel 6 geht es um verschiedene algorithmischen Werkzeuge, die zu sonst nicht so gut in irgend ein anderes Kapitel gepasst hätten.
- Als erstes geht es um Exponentialzeit dynamische Programmierung
- Als zweites geht es um Ganzzahlige Lineare Programmierung

6.1 Dynamische Programmierung über Subsets

6.1 Dynamische Programmierung

- TODO Hier kommt eine Beschreibung zu dynamischer Programmierung hin.

6.1.1 Set Cover

Überdeckung

Sei \mathcal{F} eine Familie von Mengen in einem Universum \mathcal{U} . Für eine Unterfamilie $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ und einer Teilmenge $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ sagen wir, dass \mathcal{F}' \mathcal{U}' überdeckt, wenn jedes Element von \mathcal{U}' zu mindestens einer Menge von \mathcal{F}' gehört ($\mathcal{U}' \subseteq \bigcup \mathcal{F}'$).

Set Cover

Im Set Cover Problem ist eine Familie von Mengen \mathcal{F} gegeben in einem Universum \mathcal{U} und eine positive ganze Zahl k . Die Aufgabe ist zu überprüfen ob eine Unterfamilie, mit maximal k Elementen, $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ existiert, so dass \mathcal{F}' \mathcal{U} überdeckt.

Theorem 6.1

Theorem 6.1

Gegeben eine Instanz des SET COVER Problems $(\mathcal{U}, \mathcal{F}, k)$, kann die minimal mögliche Größe einer Unterfamilie $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, die \mathcal{U} überdeckt, in Zeit $2^{|\mathcal{U}|}(|\mathcal{U}| + |\mathcal{F}|)^{\mathcal{O}(1)}$ gefunden werden.

Theorem 6.1

Beweis

- Sei $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_{|\mathcal{F}|}\}$
- Wir definieren die dynamische Programmierung Tabelle wie folgt:
- Für jede Untermenge $X \subseteq \mathcal{U}$ und jede ganze Zahl $0 \leq j \leq |\mathcal{F}|$, definieren wir $T[X, j]$ als die minimale Größe einer Untermenge $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, \dots, F_j\}$, die X überdeckt. Falls keine solche Teilmenge \mathcal{F}' existiert setzen wir $T[X, j] = +\infty$
- In unserem dynamischen Algorithmus Programm berechnen wir alle $2^{|\mathcal{U}|}(\mathcal{F} + 1)$ Werte $T[X, j]$
- Basis Fall: $T[\emptyset, 0] = 0$, $T[X, 0] = +\infty$, für $X \neq \emptyset$
- Rekursiver Fall: Für $X \subseteq \mathcal{U}$ und $0 \leq j \leq |\mathcal{F}|$ zeigen wir, dass $T[X, j] = \min(T[X, j-1], 1 + T[X \setminus F_j, j-1])$

Theorem 6.1

Beweis

- $T[X, j] = \min(T[X, j - 1], 1 + T[X \setminus F_j, j - 1])$
- Dafür zeigen wir die Ungleichheit in beide Richtungen
- Für " \leq ": Sei $\mathcal{F}' \subseteq \{F_1, F_2, \dots, F_j\}$ eine Familie mit minimaler Größe, die X überdeckt, wir unterscheiden zwei Fälle:
 - $F_j \notin \mathcal{F}'$, dann ist \mathcal{F}' auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j - 1]$
 - $F_j \in \mathcal{F}'$, dann ist $\mathcal{F}' \setminus F_j$ ein zulässiger Kandidat für $T[X \setminus F_j, j - 1]$
- Für " \geq ":
 - jeder zulässige Kandidat \mathcal{F}' für $T[X, j - 1]$ ist auch ein zulässiger Kandidat für $T[X, j]$
 - für jeden zulässigen Kandidaten \mathcal{F}' für $T[X \setminus F_j, j - 1]$ gilt, dass $\mathcal{F}' \cup F_j$ ein zulässiger Kandidat für $T[X, j]$ ist

Theorem 6.1

Beweis

- Mit diesem dynamischen Programm können wir für alle $X \subseteq U$ und $0 \leq j \leq |\mathcal{F}|$ den Wert $T[X, j]$ in versprochener Zeit berechnen.
- Der Wert den wir suchen ist $T[U, |\mathcal{F}|]$

6.1.2 Steiner Tree

Steiner Tree

Erinnerung

Steiner Tree

Sei G ein ungerichteter Graph mit n Knoten und $K \subseteq V(G)$ von Endpunkten (terminals). Ein Steiner Tree für K in G ist ein zusammenhängender Teilgraph H von G , der K enthält ($K \subseteq H$)

Lemma 6.2

Lemma 6.2

Für jedes $D \subseteq K$ von einer Größe von mindestens 2 und jedes $v \in V(G) \setminus K$ gilt folgendes:

$$T[D, v] = \min_{\substack{u \in V(G) \setminus K \\ \emptyset \neq D' \subsetneq D}} \{ T[D', u] + T[D \setminus D', u] + \text{dist}(u, v) \}$$

Theorem 6.3

Theorem 6.3

Steiner Tree kann in Zeit $3^K n^{\mathcal{O}(1)}$

Literature