



Metodo dei p-grafi

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

1



Metodo dei P-grafi

Rappresenta una rete tramite un grafo,
composto da nodi e archi.

I nodi del grafo corrispondono ai nodi della
rete.

Gli archi del grafo corrispondono alle linee
di trasmissione UNIDIREZIONALI.

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

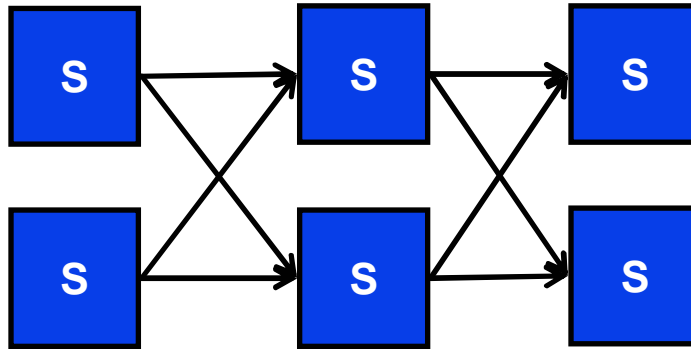
2



TNG

Esempio di rete a tre stadi

I collegamenti sono unidirezionali



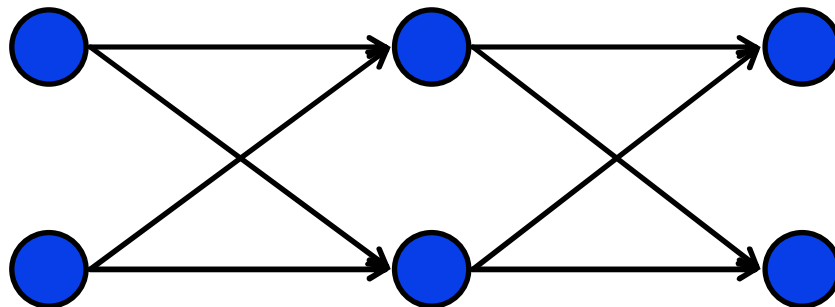
AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

3



TNG

Esempio di grafo a tre stadi

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

4

**TNG**

Riduzione del grafo

Assumendo il traffico offerto alla rete di tipo uniforme ed omogeneo, il grafo si può ridurre.

Omogeneità implica indistinguibilità fra gli ingressi.

Uniformità implica indistinguibilità fra le uscite.

AA 2004-2005

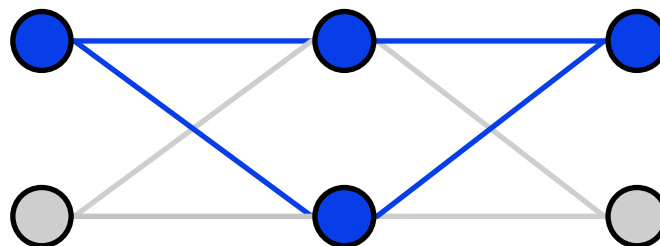
Reti e Sistemi Telematici

5

**TNG**

Riduzione del grafo

Il grafo ridotto è il sottografo formato dagli elementi che possono essere usati per connettere un ingresso ad un'uscita.



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

6



Riduzione del grafo

Il grafo ridotto ha sempre:

- un solo nodo di origine
- un solo nodo di destinazione
- uno o più nodi intermedi

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

7



Definizione di P-grafo

Un P-grafo è un grafo lineare di probabilità, ossia è un grafo in cui:

- sono assegnati un nodo di origine ed un nodo di destinazione
- ad ogni arco è associata una variabile casuale binaria

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

8



Definizione di P-grafo

Le variabili casuali binarie associate agli archi

- hanno distribuzioni stazionarie
- sono statisticamente indipendenti

AA 2004-2005

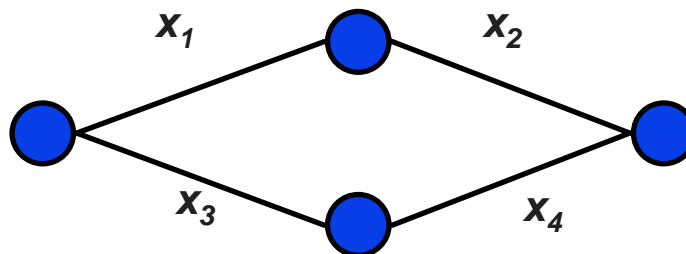
Reti e Sistemi Telematici

9



Esempio

Indico con x_i la variabile casuale binaria associata all' i -esimo arco del grafo.



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

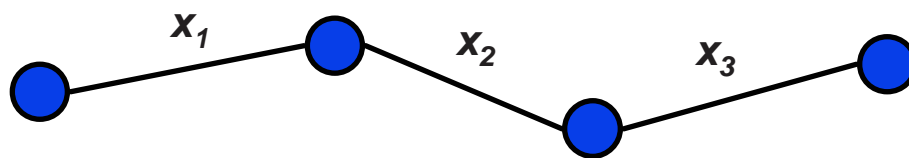
10



TNG

Classificazione dei P-grafi

Un P-grafo è detto essere di tipo *serie* se ha un solo percorso fra il nodo di origine e quello di destinazione.



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

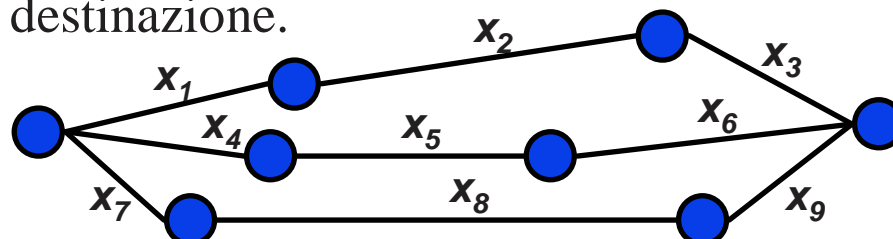
11



TNG

Classificazione dei P-grafi

Un P-grafo è detto essere di tipo *serie-parallelo* se ha un più percorsi disgiunti fra il nodo di origine e quello di destinazione.



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

12

**TNG**

Applicazioni

Il metodo dei P-grafi può essere usato per:

- l'analisi della congestione
 - la variabile casuale indica lo stato *libero/occupato* del collegamento
- l'analisi dell'affidabilità
 - la variabile casuale indica lo stato *funzionante/guasto* del collegamento

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

13

**TNG**

Forma canonica di un P-grafo

La forma canonica di un P-grafo dato

- è il P-grafo che si ottiene congiungendo il nodo di origine con quello di destinazione mediante l'insieme dei percorsi diretti ingresso-uscita
- è un grafo di tipo serie-parallelo

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

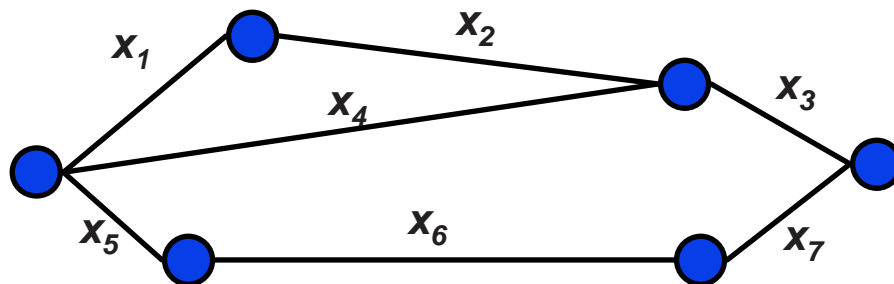
14



TNG

Riduzione a forma canonica

Partiamo da un P-grafo non serie-parallelo



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

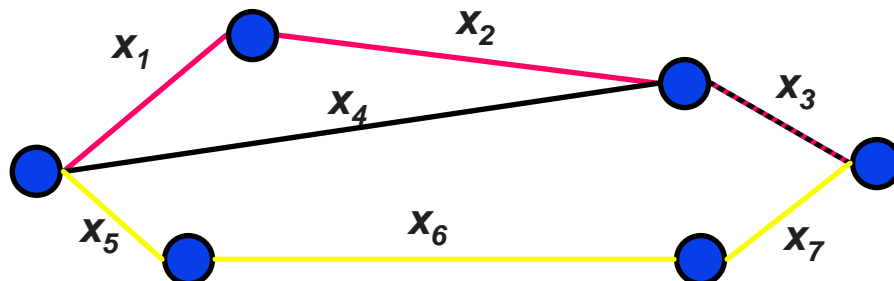
15



TNG

Riduzione a forma canonica

Troviamo tutti i possibili percorsi diretti ingresso-uscita



AA 2004-2005

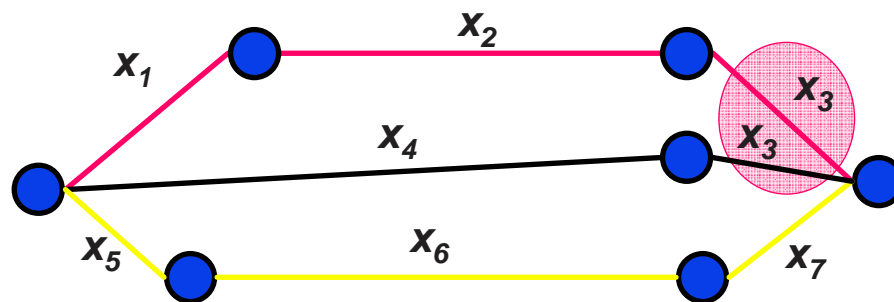
Reti e Sistemi Telematici

16



Riduzione a forma canonica

Tracciamo il grafo in forma canonica
(serie-parallelo)



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

17



Riduzione a forma canonica

I collegamenti che sono duplicati nella
riduzione a forma canonica mantengono
la stessa variabile casuale associata al
collegamento originario.

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

18



Funzione di connessione di un P-grafo

È una funzione di tipo binario (vale 1 o 0)

Ha come argomenti le variabili casuali associate agli archi del grafo per cui è calcolata

Vale 1 se esiste almeno un percorso ingresso-uscita avente le variabili casuali associate tutte di valore (0 altrimenti)

AA 2004-2005

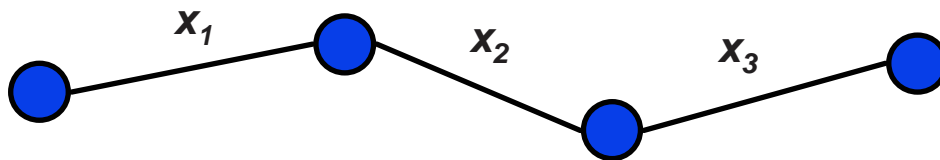
Reti e Sistemi Telematici

19



Funzione di connessione - P-grafi serie

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^3 x_i = x_1 x_2 x_3$$



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

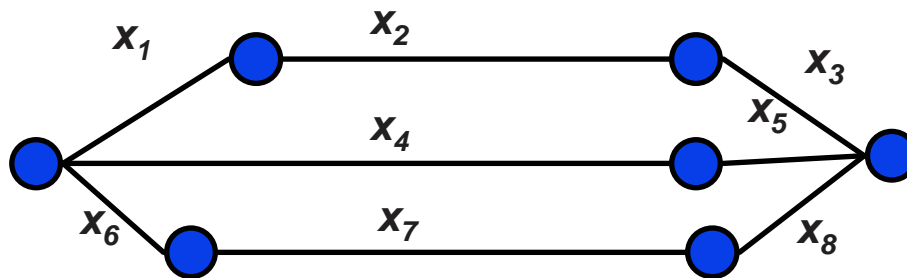
20



TNG

Funzione di connessione - P-grafi serie-parallelo

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - \varphi_i(x))$$



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

21

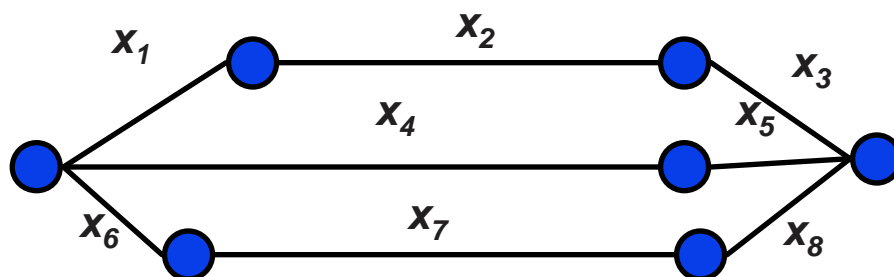


TNG

Funzione di connessione - P-grafi serie-parallelo

$$\varphi_1(x) = x_1 x_2 x_3 \quad \varphi_3(x) = x_6 x_7 x_8$$

$$\varphi_2(x) = x_4 x_5$$



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

22



Calcolo della probabilità di blocco

La funzione di connessione di un P-grafo è una funzione di variabili casuali e quindi è a sua volta una variabile casuale

Indica la probabilità di non avere un percorso libero fra il nodo di ingresso e quello di uscita

$$P\{B\} = P\{\varphi(x) = 0\}$$

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

23

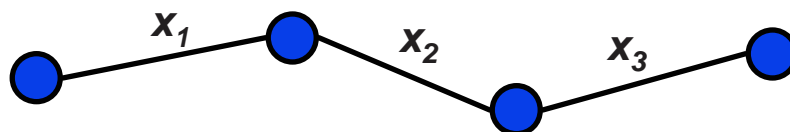


Calcolo della probabilità di blocco - P-grafi serie

$$P\{B\} = P\{\varphi(x) = 0\} = 1 - P\{\varphi(x) = 1\}$$

$$P\{B\} = 1 - \prod_{i=1}^3 P\{x_i = 1\} = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - P\{x_i = 0\})$$

$$P\{B\} = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - p_i)$$



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

24



TNG

Calcolo della $P\{B\}$ - P-grafi canonici

Si calcola la probabilità di blocco $p^{(i)}$ di ognuno degli R sottografi di tipo serie del P-grafo.

Si ha blocco se e solo se tutti i sottografi serie sono bloccati e quindi

$$P\{B\} = \prod_{i=1}^R p^{(i)}$$

AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

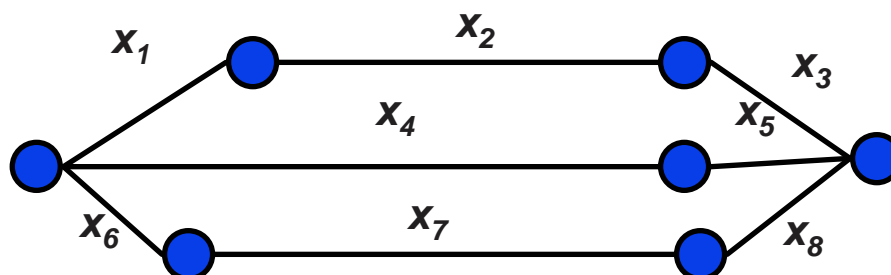
25



TNG

Calcolo della $P\{B\}$ - P-grafi canonici

$$P\{B\} = \prod_{i=1}^3 p^{(i)}$$



AA 2004-2005

Reti e Sistemi Telematici

26

**Calcolo della $P\{B\}$ - P-grafi canonici**

$$p^{(1)} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$$

$$p^{(2)} = 1 - (1 - p_4)(1 - p_5)$$

$$p^{(3)} = 1 - (1 - p_6)(1 - p_7)(1 - p_8)$$