

Tarea 1

Resolución de Derivadas e integrales mediante métodos numéricos

Autor: Daniel Brauer Hott
RUT: 19.335.728-8
Profesor: Valentino González C.
Auxiliares: José Vines
Jou-Hui Ho

Fecha de realización: 29 de septiembre de 2018

Fecha de entrega: 29 de septiembre de 2018

Santiago, Chile

Índice de Contenidos

1. Pregunta 1	1
1.1. Introducción	1
1.2. Procedimiento	1
1.3. Resultados	1
1.4. Conclusiones	2
2. Pregunta 2	2
2.1. Introducción	2
2.2. Procedimiento	3
2.3. Resultados	3
2.4. Conclusiones	5

Lista de Figuras

1. Gráficos de méotos con float64 y float32.	2
2. Gráfico de frecuencias con respecto al espectro usando datos de instrumento FIBAS.	4
3. Resolución con métodos numéricos de ecuación (5).	4

1. Pregunta 1

1.1. Introducción

En esta primera se compararon dos métodos, el primero y simple

$$f'(x) = \frac{f(x + \text{delta}) - f(x)}{(\text{delta})} \quad (1)$$

tiene un error asociado de $O(\text{delta})$ y un segundo método mas preciso,

$$f'(x) = \frac{-f(x + 2 * \text{delta}) + 8 * f(x - \text{delta}) - 8 * f(x - \text{delta}) + f(x - 2 * \text{delta})}{12 * \text{delta}} \quad (2)$$

tiene asociado un error de $O(\text{delta}^4)$, por otro se estudio las diferencias obtenidas al usar estos dos metodos con números del tipo float32 y float64. Con el fin de llevar a acabo lo ya mencionado se uso la función $f(x) = -\cos x$ evaluándola en $x = 1,728$

1.2. Procedimiento

Para poder comparar todos los casos se creo un arreglo con valores decreciente de delta que van desde $\text{delta} = 0,1$ hasta $\text{delta} = 10^{-6}$, cada uno de estos valores fueron usados en el primer y segundo método con lo que se obtuvo un valores aproximado de $f'(1,728)$, esto procedimiento se realizo con float64 y posteriormente con float32 y para finalmente calcular el error para cada delta como $|f'_{\text{delta}}(1,728) - \sin 1,728|$.

1.3. Resultados

Mediante el método ya mencionado se obtuvieron los siguientes dos gráficos:

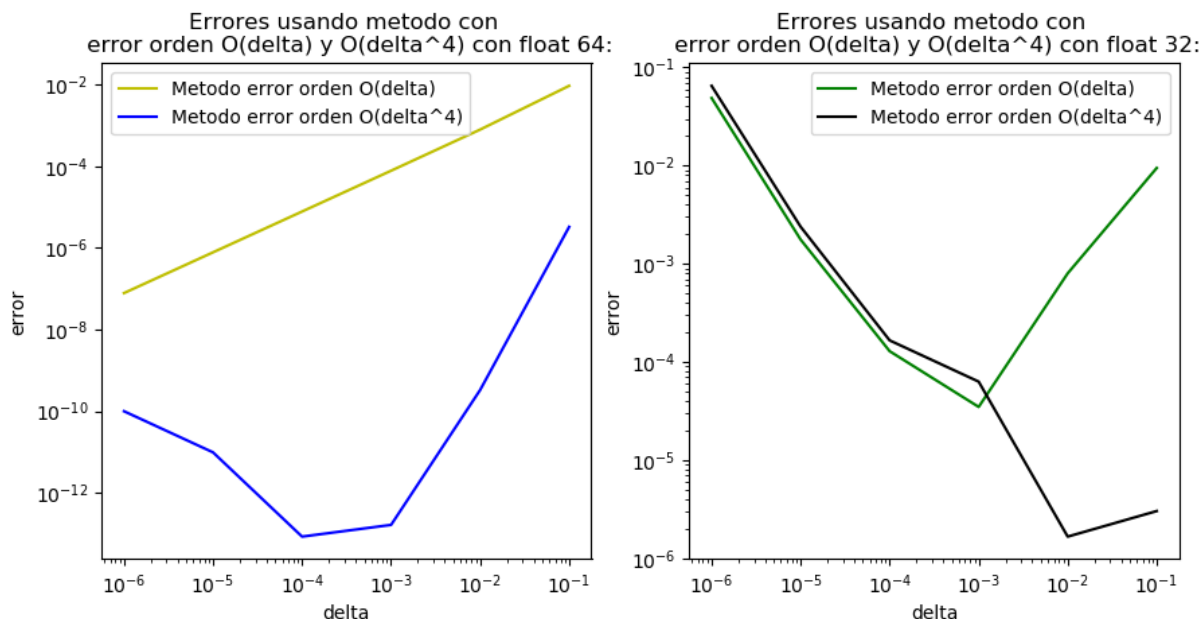


Figura 1: Gráficos de métodos con float64 y float32.

1.4. Conclusiones

En los gráficos adjuntados (Figura 1) se pueden observar como en el caso en que se uso float64 se alcanza una precisión mucho mas alta usando el segundo método con error $O(\delta^4)$ que el primer método con error $O(\delta)$, pero además se puede observar que cuando delta es menor que 10^{-4} el error comienza a aumentar, pasando desde un error cercano a 10^{-13} a un error de 10^{-10} , esto es debido a que el computador ah alcanzado su capacidad máxima usando float64. En el caso del segundo gráfico se puede observar que para deltas grande el segundo método es notoriamente más preciso que el primero pero para delta menor a 10^{-2} la precisión disminuye drásticamente de tal forma que para deltas menores de 10^{-3} los resultados son menos precisos que al usar el primer método. Luego para todos los $\delta \leq 10^{-3}$ ambos aumenta su errores, esto es debido a que con float32 se llega rápidamente a la capacidad máxima de este tipo de datos, volviéndose impreciso para operaciones con números con muchos decimales, comparando ambos gráficos se observa que con float32 la limitación debido a la capacidad del tipo de dato causa problema mucho antes que con float64, lo que además se traduce en una menor precisión, esto es otra vez debido a que float32 tiene una cantidad de bits de almacenamiento considerablemente menor al float64.

2. Pregunta 2

2.1. Introducción

En esta parte se hace estudio de la radiación remanente del Big Bang que existe en el universo o igualmente conocida como radiación de fondo de microondas. Mediante las mediciones obtenidas por el instrumento FIRAS el cual fue instalado en el satélite COBE se demostrara la teoría que

predice que la radiación remanente del Big Bang debería tener el espectro de un cuerpo negro, donde la radiación de cuerpo negro esta dada por la función de Planck:

$$Bv(T) = \frac{\frac{2 \cdot h \cdot v^3}{c^2}}{e^{\frac{h \cdot v}{k_b \cdot T}} - 1} \quad (3)$$

2.2. Procedimiento

Para llegar al resulta se siguió una serie de pasos:

1. primero se gráfico la frecuencia con respecto a el espectro con el respectivo error, importando los datos desde archivo de la nasa de las mediciones del instrumento FIBAS.
2. luego se calcula la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (4)$$

la que tubo que ser normalizada, para obtener finalmente:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^3(t) \sec^2(t)}{e^{\tan(t)} - 1} dt \quad (5)$$

la cual fue calculada con el método de Simspon en el intervalo $[\epsilon, \frac{\pi}{2} - \epsilon]$ y usando el método de rectángulos con la altura igual a $f(a + \text{delta}/2)$ donde $\text{delta} = (a + b)/2$, y con esto se pudo calcular finalmente la integral en frecuencias de la formula de Planck:

$$P = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (6)$$

3. Se integró el espectro observado del instrumento FIRAS usando el método del trapecio. Este resultado fue igualado con la integral de la funcion de Planck obtenida en el punto anterior para obetener la temperatura T .
4. En este punto se repitió el gráfico del primer paso pero ahora además se reemplazo en la ecuación de Planck la temperatura obtenida en el paso anterior y la temperatura que obtuvo el instrumento FIRAS del satélite COBE.
5. se uso el modulo scipy que contiene las funciones `scipy.integrate.trapz` y `scipy.integrate.quad`. Con estas se recalculo las integrales realizadas en 2 y 4 y se midió las diferencias de tiempo entre el calculo de estas integrales como se hizo en los puntos 2 y 3 con el tiempo utilizado con este nuevo modulo.

2.3. Resultados

Con los pasos ya mencionados se obtuvieron los siguientes gráficos:

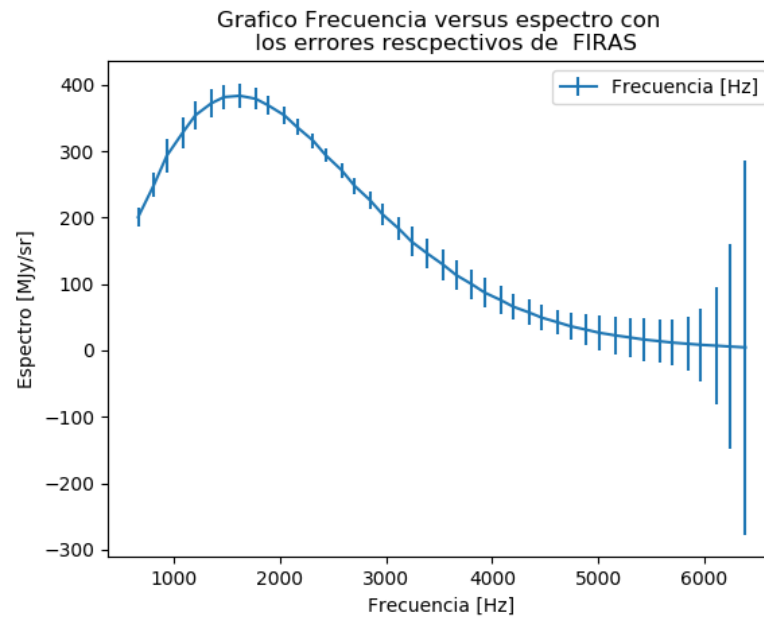


Figura 2: Gráfico de frecuencias con respecto al espectro usando datos de instrumento FIBAS.

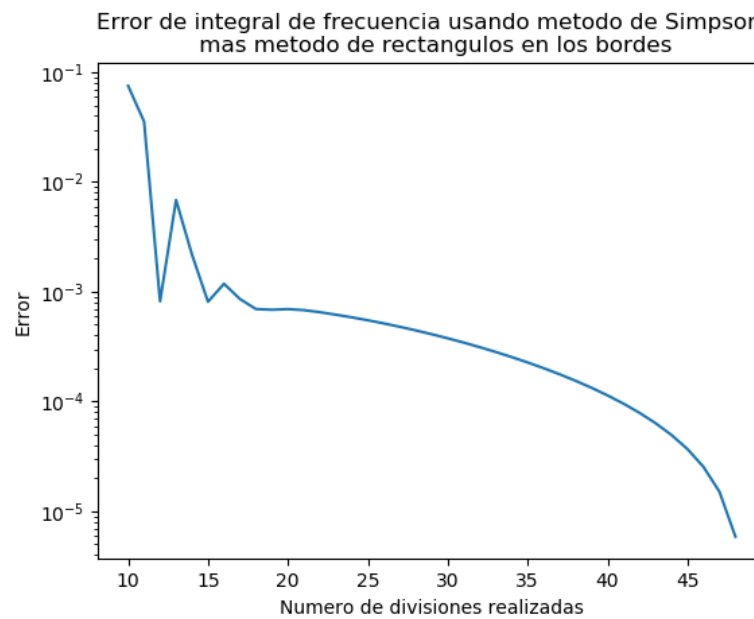


Figura 3: Resolución con métodos numéricos de ecuación (5).

Además se obtuvo que la temperatura calcula fue de 2685.6532 K.

2.4. Conclusiones

Primero se puede observar del gráfico de los datos obtenidos por el instrumento de la NASA FIBAS (figura 2), que a medida que aumenta la frecuencia aumenta considerablemente el error.

Observando la Figura 3 se puede notar que a medidas que se realizan mas divisiones el error decrece considerablemente, pero entre las 10 y 20 divisiones el error aumenta dos veces a pesar de que se aumenta el numero de divisiones, esto puede ser causado debido a que se realizo una división de forma desfavorable sobre la función que causo que se considere mayor o menor área de lo que realmente existía.

Ahora observando la temperatura obtenida se observa una diferencia con la obtenida por FIRAS, esto es debido a que para calcular de forma perfecta la temperatura se tiene que hacer entre una frecuencia que va de 0 hasta el infinito, lo cual es imposible de realizar por cualquier instrumento. Se pudo observar que el método utilizado en el tercer paso alcanzo una gran exactitud con un numero de divisiones relativamente bajo.