UBA – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Departamento de Computación

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Primer cuatrimestre de 2020

15 de mayo de 2020

Taller de matrices y tableros

Ejercicio 1: Dados dos vectores, calcular la matriz que resulta de hacer el producto vectorial entre ambos.

`proc productoVectorial` (in u: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in v: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out res: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  `Pre` $\{True\}$
  `Post` $\{esMatrizDeAltoYAncho(res, |u|, |v|) \wedge_L cadaCoordenadaEsElProducto(res, u, v)\}$
}

`pred esMatrizDeAltoYAncho` (mat: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, alto: $\mathbb{Z}$, ancho: $\mathbb{Z}$) {
  $|mat| = alto \wedge todasLasFilasTienenAncho(mat, ancho)$
}

`pred todasLasFilasTienenAncho` (matriz: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, ancho: $\mathbb{Z}$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |matriz| \longrightarrow_L |matriz[i]| = ancho)$
}

`pred cadaCoordenadaEsElProducto` (producto: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, vectorFila: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, vectorColumna: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |vectorFila| \wedge_L 0 \leq j < |vectorColumna| \longrightarrow_L producto[i][j] = vectorFila[i] * vectorColumna[j])$
}

Ejercicio 2: Dada una matriz cuadrada, modificarla para obtener su traspuesta.

`proc trasponer` (inout m: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  `Pre` $\{m = m_0 \wedge esCuadrada(m)\}$
  `Post` $\{esMatrizDeAltoYAncho(m, |m_0|, |m_0|) \wedge_L cadaCoordenadaEsLaTraspuesta(m, m_0)\}$
}

`pred esCuadrada` (m: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |m| \rightarrow_L |m[i]| = |m|)$
}

`pred cadaCoordenadaEsLaTraspuesta` (traspuesta: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, original: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |traspuesta| \wedge 0 \leq j < |traspuesta| \rightarrow_L traspuesta[i][j] = original[j][i]))$
}

Ejercicio 3: Multiplicar matrices.

`proc multiplicar` (in m1: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, in m2: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, out res: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  `Pre` $\{|m1| > 0 \wedge |m2| > 0 \wedge_L |m2[0]| > 0 \wedge |m1[0]| = |m2| \wedge_L todasLasFilasTienenAncho(m1, |m1[0]|) \wedge todasLasFilasTienenAncho(m2, |m2[0]|)\}$
  `Post` $\{esMatrizDeAltoYAncho(res, |m1|, |m2[0]|) \wedge_L (\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |m1| \wedge_L 0 \leq j \leq |m2[0]| \longrightarrow_L res[i][j] = \sum_{k=0}^{|m2|-1} m1[i][k] * m2[k][j])\}$
}

Ejercicio 4: Dada una matriz, devolver otra matriz reemplazando cada casillero por el promedio de sus vecinos.

`proc promediar` (in m: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, out res: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  `Pre` $\{|m| \geq 2 \wedge_L |m[0]| \geq 2 \wedge_L todasLasFilasTienenAncho(m, |m[0]|)\}$
  `Post` $\{esMatrizDeAltoYAncho(res, |m|, |m[i]|) \wedge_L cadaCoordenadaEsElPromedioDeSusVecinos(res, m)\}$
}

`pred cadaCoordenadaEsElPromedioDeSusVecinos` (res: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, m: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})\ 0 \leq i < |res| \wedge 0 \leq j < |res[i]| \longrightarrow_L res[i][j] = promedioVecinos(m, i, j)$
}

`aux promedioVecinos` (m : $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, i: $\mathbb{Z}$, j: $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{Z}$ = $sumaVecinos(m, i, j)$ div $cantidadVecinos(m, i, j)$;

`aux sumaVecinos` (m: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, i: $\mathbb{Z}$, j: $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{Z}$ = $\sum_{a=i-1}^{i+1} \sum_{b=j-1}^{j+1}$ if $enRango(m, a, b)$ then $m[a][b]$ else 0 fi ;

`aux cantidadVecinos` (m: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, i: $\mathbb{Z}$, j: $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{Z}$ = $\sum_{a=i-1}^{i+1} \sum_{b=j-1}^{j+1}$ if $enRango(m, a, b)$ then 1 else 0 fi ;

`pred enRango` (m: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, i: $\mathbb{Z}$, j: $\mathbb{Z}$) {

$0 \leq i < |m| \land 0 \leq j < |m[a]|$
}

Ejercicio 5: Contar cuántos picos tiene una matriz, donde un pico es un elemento que es mayor que todos sus vecinos.

proc contarPicos (in m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, out res: $\mathbb{Z}$) {
Pre $\{|m| \geq 2 \land_L |m[0]| \geq 2 \land todasLasFilasTienenAncho(m, |m[0]|)\}$
Post $\{res = \sum_{i=0}^{|m|} \sum_{j=0}^{|m[i]|} \text{if } esPico(m,i,j) \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ fi}\}$
}

pred esPico (m : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, i: $\mathbb{Z}$, j: $\mathbb{Z}$) {
$(\forall a : \mathbb{Z})(\forall b : \mathbb{Z})(esVecino(m,i,j,a,b) \longrightarrow_L m[i][j] > m[a][b])$
}
pred esVecino (m : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, i: $\mathbb{Z}$, j: $\mathbb{Z}$, a: $\mathbb{Z}$, b: $\mathbb{Z}$) {
$(a \neq i \lor b \neq j) \land i-1 \leq a \leq i+1 \land j-1 \leq b \leq j+1 \land enRango(m,a,b)$
}

Ejercicio 6: Dada una matriz cuadrada, decidir si es triangular (inferior o superior).

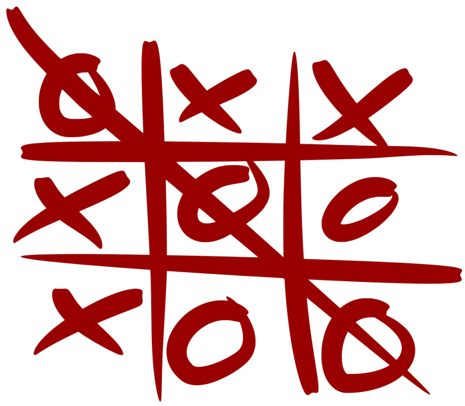
proc esTriangular (in m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, out res: Bool) {
Pre $\{esCuadrada(m)\}$
Post $\{res = true \leftrightarrow esTriangularSuperior(m) \lor esTriangularInferior(m)\}$
}
pred esTriangularInferior (m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(enRango(m,i,j) \land i < j \longrightarrow_L m[i][j] == 0)$
}
pred esTriangularSuperior (m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(enRango(m,i,j) \land j < i \longrightarrow_L m[i][j] == 0)$
}

Ejercicio 7: Decidir si, dado un tablero (no necesariamente de 8 x 8) con reinas de ajedrez, existen dos reinas que se amenazan entre sí.

proc hayAmenaza (in m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, out res: Bool) {
Pre $\{|m| \geq 2 \land_L |m[0]| \geq 2 \land_L todasLasFilasTienenAncho(m, |m[0]|) \land esBinaria(m)\}$
Post $\{res = true \leftrightarrow existeAmenaza(m)\}$
}
pred esBinaria (m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |m| \land 0 \leq j < |m[i]| \rightarrow_L 0 \leq m[i][j] \leq 1)$
}
pred existeAmenaza (m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
$(\exists i1 : \mathbb{Z})(0 \leq i1 < |m| \land_L (\exists j1 : \mathbb{Z})(0 \leq j1 < |m[i1]| \land_L m[i1][j1] = 1 \land amenazaAlguna(m, i1, j1)))$
}
pred amenazaAlguna (m: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, i1: $\mathbb{Z}$, j1: $\mathbb{Z}$) {
$(\exists i2 : \mathbb{Z})(0 \leq i2 < |m| \land_L (\exists j2 : \mathbb{Z})(0 \leq j2 < |m[i2]| \land_L m[i2][j2] = 1 \land seAmenazan(i1, j1, i2, j2)))$
}
pred seAmenazan (i1: $\mathbb{Z}$, j1: $\mathbb{Z}$, i2: $\mathbb{Z}$, j2: $\mathbb{Z}$) {
$(i1 \neq i2 \lor j1 \neq j2) \land (i1 = i2 \ \lor \ j1 = j2 \ \lor \ abs(i1-i2) = abs(j1-j2))$
}
aux abs (t : $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{Z}$ = if $t \geq 0$ then t else $-t$ fi;

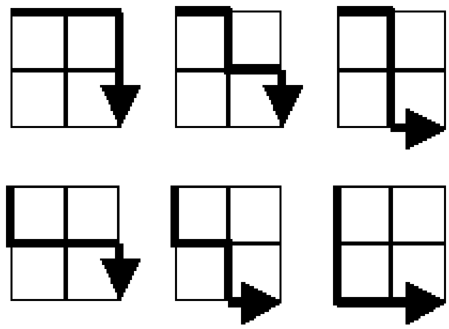
Ejercicio 8: Dada una matriz cuadrada de $n \times n$, devolver la diferencia absoluta entre la suma de sus dos diagonales. Una diagonal es la que empieza en la posición (0,0) y termina en (n-1,n-1), y la otra que va entre las posiciones (0,n-1) y (n-1,0).

Ejercicio Adicional TaTeTi: Escribir un algoritmo que verifique si una partida de TaTeTi está terminada.



Muy fácil? Ahora generalizarlo para un tateti de N columnas y N filas.
Generar varios TESTs para verificar la implementación.

Ejercicio Adicional "Willy, el robot" Supongamos que tenemos un robot sentado en la esquina arriba izquierda de una grilla de X*Y. El robot se puede mover en dos direcciones: para abajo y para la derecha.



Escribir un algoritmo que determine cuántos caminos posibles puede hacer el robot para llegar de la posición (0,0) a la (X,Y). Queda prohibido usar la fórmula cerrada para calcularlo.
Generar varios TESTs para verificar la implementación.