Streszczenie

Tematem tej pracy magisterskiej jest użycie metod Monte Carlo w estymacji współczynników greckich. Zagadnienie dotyczy instrumentów finansowych jakimi są opcje, dlatego rozdział pierwszy zaczyna się od opisu rynku opcji wraz z koniecznymi założeniami. Współczynniki greckie są narzędziem do badania wrażliwości cen opcji na zmiany parametrów, od których ta cena zależy. Kluczowym zagadnieniem w omawianiu rynku opcji jest model Blacka-Scholesa, dlatego rozdział pierwszy zawiera charakteryzację tego modelu. Następnie przechodzimy do wyjaśnienia istoty metod Monte Carlo wraz z przykładem użycia metod w wycenie opcji.
W rozdziale drugim opisujemy trzy metody estymacji współczynników greckich z użyciem metod Monte Carlo. Metoda różnic skończonych, metoda różnic po trajektoriach oraz metoda ilorazu wiarygodności. Metody są opisane oraz wsparte przykładami ich użycia. Przykłady napisane są w języku R.

Słowa kluczowe

metody Monte Carlo, opcja, ryzyko, współczynniki greckie, delta-hedging, model Blacka-Scholes'a

Dziedzina nauki i techniki

Nauki przyrodnicze, Matematyka, Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Abstract

Main topic of this thesis is estimation of Greeks by the Monte Carlo methods. Thesis starts with a description of options as deraviatives on financial market. Greeks are used to measure sensitivity of the price of options to a change in underlying parameters. In first chapter we present options in the Black-Scholes model, which is crucial for option pricing, then we describe Monte Carlo methods. Next, we discuss different types of sensitivities, which are used to determine optimal strategies for buying options. We consider 3 different methods for estimating sensitivities. Those methods are finite-difference, pathwise derivative and likelihood ratio. Each of the 3 methods is followed by multiple examples, which show the usage of Monte Carlo methods in estimating sensitivities. Examples were written in the R language and are included in this thesis.

Key words

Monte Carlo methods, option, risk, Greeks, delta-hedging, Black-Scholes model

Spis treści

Wstęp

Na rynku finansowym mamy do czynienia z pochodnym instrumentem finansowym jakim jest opcja. Opcja jest kontraktem, który daje jej nabywcy prawo do kupna lub sprzedaży instrumentu bazowego na ustalonych w kontrakcie warunkach. Oznacza to, że nabywca może w ustalonym dniu wygaśnięcia (lub przed datą wygaśnięcia, w zależności od rodzaju opcji) po określonej z góry cenie kupić określone w kontrakcie aktywa. Nabywca opcji otrzymuje prawo do jej wykorzystania, płaci za to ustaloną cenę. Wycena opcji jest złożonym problemem. Sprowadza się ona do odpowiedzi na pytanie, ile warta jest dana opcja, biorąc pod uwagę szereg parametrów wpływających na jej cenę, takich jak cena bazowa aktywa, czas pozostały do terminu wygaśnięcia, stopa procentowa, czy też parametr zmienności instrumentu bazowego. Do odpowiedzi na to pytanie stosuje się różne modele matematyczne, jak również metody numeryczne. Jednymi z najczęściej używanych metod wyceny opcji są metody Monte Carlo.
Kupno opcji wiąże się z ryzykiem inwestycyjnym. W celu zminimalizowania tego ryzyka, stosuje się strategie mające na celu badanie wrażliwości opcji na warunki panujące na rynku. Do badania wrażliwości korzystamy ze współczynników greckich.
Celem mojej pracy jest przedstawienie zastosowań metod Monte Carlo w estymacji współczynników greckich oraz zaprezentowanie przykładów użycia tych metod.

1 Rynek opcji

1.1 Model Blacka-Scholesa

Jednym z najbardziej znanych modeli opisujących rynek opcji jest model Blacka-Scholesa, który służy do wyceny instrumentów pochodnych, np. opcji. Klasyczny model Blacka-Scholesa wymaga następujących założeń.

- Działanie rynku jest ciągłe.
- W okresie ważności opcji stopa procentowa r nie zmienia się.
- Wszyscy uczestnicy rynku mogą inwestować środki lub je pożyczać według tej samej stopy procentowej.
- Pomija się koszty transakcji oraz podatki.
- Akcje można dzielić.
- W okresie ważności opcji akcje nie mogą przynosić dywidend.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ jest filtracją naturalną.

Definicja 1.1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Mówimy, że proces stochastyczny $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ jest standardowym procesem ruchu Browna (procesem Wienera), jeżeli

1. $P(W_0 = 0) = 1$,
2. $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ ma przyrosty niezależne,
3. $\forall_{0\leqslant s\leqslant t}\, W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Cena akcji zadana jest równaniem stochastycznym

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

gdzie
S_t- cena instrumentu bazowego w chwili t,
t- czas,
σ- zmienność ceny akcji,
μ- oczekiwana stopa zwrotu,
W_t- proces Wienera.

W okresie $[0, T]$ mamy stałą stopę procentową $r \geqslant 0$. Proces wartości pieniędzy dany jest wzorem

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1,$$

z czego wynika, że $B_t = e^{-rt}$.

Rozwiązaniem (1.1) jest

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma W_t + \Big(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\Big)t\Big).$$

Szczegółowe wyjaśnienie tego rozwiązania znajduje się literaturze, pozycji [2].

Dwie miary P^* i P są równoważne, jeśli są one określone na tej samej przestrzeni zdarzeń losowych $\mathcal{F}$ i w jednakowy sposób opisują zdarzenia miary 0, tj.

$$\forall_A P(A) = 0 \iff P^*(A) = 0.$$

Z twierdzenia Radona-Nikodyma jest to równoważne następującemu stwierdzeniu.
Istnieją funkcje

$$\frac{dP^*}{dP}(x) \geqslant 0, \quad \frac{dP}{dP^*}(x) \geqslant 0,$$

takie, że

$$P^*(A) = \int_A \frac{dP^*}{dP}(x)P(dx)$$

oraz

$$P(A) = \int_A \frac{dP}{dP^*}(x)P(dx),$$

dla każdego $A \in \mathcal{F}$. Funkcję tę nazywamy pochodną Radona-Nikodyma. Umożliwia nam ona liczenie warunkowej wartości oczekiwanej względem równoważnych miar. W szczególnym przypadku dostajemy

$$E_{P^*}(X) = E_{P^*}(X|\mathcal{F}_0) = E_P\Big(\frac{dP^*}{dP}X|\mathcal{F}_0\Big) = E_P\Big(\frac{dP^*}{dP}X\Big).$$

Do przedstawienia modelu Blacka-Scholesa konieczne jest wprowadzenie definicji strategii.

Definicja 1.2. Strategią inwestycyjną nazywamy mierzalny adaptowany proces $\phi = (\phi^0, \phi^1)$, gdzie ϕ^0 oznacza ilość pieniędzy, a ϕ^1 ilość akcji, spełniający warunki

$$\int_0^T |\phi_s^0| ds < \infty, \int_0^T (\phi_s^1)^2 ds < +\infty \quad \text{prawie na pewno.}$$

Proces wartości tej strategii oznaczamy przez $V_t(\phi)$,

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 B_t + \phi_t^1 S_t.$$

Definicja 1.3. Strategia inwestycyjna ϕ jest samofinansująca, gdy

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^0 r B_u du + \int_0^t \phi_u^1 \mu S_u du + \int_0^t \phi_u^1 \sigma S_u dW_u.$$

W zapisie nieformalnym, równoważne to jest

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dB_t + \phi_t^1 dS_t = \phi_t^0 r B_t dt + \phi_t^1 \mu S_t dt + \phi_t^1 \sigma S_t dW_t.$$

Klasę wszystkich strategii samofinansujących się oznaczamy Φ.

Definicja 1.4. Strategię finansową nazywa się dopuszczalną, jeżeli jej proces wartości

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 B_t + \phi_t^1 S_t$$

jest nieujemny.

Definicja 1.5. Mówimy, że strategia ϕ replikuje wypłatę H, gdy $V_T(\phi) = H$ prawie na pewno. Jeżeli wypłata H ma chociaż jedną strategię replikującą, to H jest wypłatą osiągalną.

Skorzystamy z miary martyngałowej aby pokazać, że dla każdej osiągalnej wypłaty istnieje zdyskontowany proces wartości

$$V_t^*(\phi) = V_t(\phi) e^{-rt}.$$

Ceny będziemy dyskontować przez wartość jednostki pieniężnej, czyli

$$B_t^* = \frac{B_t}{B_t} = 1, \qquad S_t^* = \frac{S_t}{B_t} = S_t e^{-rt}.$$

S^* jest więc zdyskontowanym procesem cen. Przy tak zdefiniowanym S^*, korzystając z formuły Itô

$$f(t, S_t) = S_t e^{-rt},$$

$$dS_t^* = \frac{\partial f}{\partial t} f(t, S_t) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} f(t, S_t) dS_t + 0 = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t. \tag{1.2}$$

Definicja 1.6. Miarę probabilistyczną P^* na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ nazywamy miarą martyngałową, jeżeli $P^* \sim P$ i S^* jest P^*- martyngałem lokalnym.

Aby znaleźć postać miary martyngałowej dla zdyskontowanego procesu cen S^* skorzystamy z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.1. *Miara probabilistyczna P^* o gęstości*

$$\frac{dP*}{dP} = \exp\Big(\frac{r-\mu}{\sigma}W_T - \frac{1}{2}\Big(\frac{r-\mu}{\sigma}\Big)^2 T\Big)$$

jest jedyną miarą martyngałową dla S^*. Dynamika S^* względem miary P^* jest postaci

$$dS^*_t = \sigma S^*_t d\hat{W}_t, \quad S^*_0 = s, \tag{1.3}$$

gdzie $\hat{W}_t = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma}t$ jest procesem Wienera względem P^* oraz filtracji $\mathbb{F}$, jest ona równa filtracji naturalnej dla W_t, która z kolei równa jest filtracji naturalnej $\hat{W}_t$.

Warunek (1.3) możemy zapisać w równoważnej formie

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t, \tag{1.4}$$

ponieważ

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = \mu S_t dt + \sigma S_t(d\hat{W}_t + \tfrac{r-\mu}{\sigma}dt) = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t.$$

Widzimy zatem, że przy zmianie miary na równoważną miarę martyngałową zmienność ceny akcji σ nie uległa zmianie. Z (1.4) wnioskujemy, że przy mierze martyngałowej P^* proces cen jest postaci

$$S_t = S_0 \exp\Big(\sigma\hat{W}_t + \Big(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\Big)t\Big).$$

Kolejne twierdzenie mówi o ważnej własności strategii samofinansujących się.

Twierdzenie 1.2. *Strategia $\phi = (\phi^0, \phi^1)$ jest strategią samofinansującą się wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{t\in[0,T]} V^*_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi^1_u dS^*_u.$$

Dowód. Pokażemy, że warunek w twierdzeniu (1.2) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym samofinansowania się strategii ϕ.
Wiemy, że

$$V^*_t(\phi) = V_t(\phi)e^{-rt}, \tag{1.5}$$

więc z definicji (1.3), korzystając z lematu Itô mamy

$$dV^*_t(\phi) = -re^{-rt}V_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi) + 0 = -re^{-rt}(\phi^0_t B_t + \phi^1_t S_t)dt+$$
$$+e^{-rt}(\phi^0_t dB_t + \phi^1_t dS_t) = \phi^1_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) = \phi^1_t dS^*_t,$$

czyli wzór w twierdzeniu (1.2) jest spełniony. Mamy konieczność. Teraz pokażemy dostateczność tego warunku. Ponownie z (1.5)

$$dV^*_t(\phi) = -re^{-rt}S_t\phi^0_t B_t + \phi^1_t S_t dt + e^{-rt}dV_t(\phi). \tag{1.6}$$

Z definicji strategii samofinansującej otrzymujemy

$$\phi_t^1 dS_t^* = -re^{-rt}S_t\phi_t^1 dt + e^{-rt}\phi_t^1 dS_t.$$

Założyliśmy, że zachodzi warunek z twierdzenia, więc lewe strony dwóch powyższych równości są równe, a to daje nam równość prawych stron

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dB_t + \phi_t^1 dS_t.$$

Czyli $\phi \in \Phi$. □

Twierdzenie (1.2) znajduje zastosowanie w znajdowaniu strategii samofinansujących replikujących daną wypłatę. Możemy dodatkowo sformułować następujący wniosek.

Wniosek 1.1. *Miara P^* jest miarą martyngałową dla S^* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej strategii samofinansującej ϕ zdyskontowany proces wartości $V^*(\phi)$ jest P^*-martyngałem lokalnym.*

Dowód. ($\Longrightarrow$)
Z (1.3) i twierdzenia (1.2) mamy

$$V_t^*(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 dS_u^* = V_t^*(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 \sigma dS_u^* d\hat{W}_t,$$

$\hat{W}$ jest P^* procesem Wienera, więc $V^*(\phi)$ jest P^*-martyngałem lokalnym.
($\Longleftarrow$)
Weźmy strategię stałą $\phi^0 \equiv 0$, $\phi^1 \equiv 1$. Wówczas $\phi \in \Phi$ oraz $S_t^* = V_t^*(\phi)$. Z założenia $V^*(\phi)$ jest P^*-martyngałem lokalnym, więc S^* jest P^*-martyngałem lokalnym. □

Teraz przejdziemy do wyceny w klasycznym modelu Blacka-Scholesa $\mathcal{M} = (B, S, \Phi(P^*))$.

Definicja 1.7. Arbitrażem nazywamy strategię ϕ taką, że

- $V_0(\phi) = 0$
- $P(V_T(\phi) \geqslant 0) = 1$,
- $P(V_T(\phi) > 0) > 0$

dla pewnego P.

Arbitraż jest sposobem działania, który nigdy nie przynosi straty. Daje nam możliwość zysku bez ryzyka. Zdefiniujmy dodatkowo cenę arbitrażową.

Definicja 1.8. Niech $\Psi \in \Phi$. Na rynku bez możliwości arbitrażu dla osiągalnej wypłaty H, dla której istnieje proces wartości, ceną arbitrażową $\Pi_t(H)$ w chwili t nazywamy wartość w chwili t strategii samofinansującej się, która replikuje wypłatę H.

Wycenę w modelu Blacka-Scholesa zaczniemy od wykazania, że cena arbitrażowa $\Pi_t(H)$ w chwili t wypłaty H jest dobrze określona. Mówi o tym następujące twierdzenie, które dodatkowo daje nam wzór na tę cenę.

Twierdzenie 1.3. *Niech H będzie wypłatą osiągalną w $(B, S, \Phi(P^*))$. Wówczas arbitrażowa cena $\Pi_t(H)$ wypłaty H jest dobrze określona i dana przez formułę wyceny*

$$\Pi_t(H) = B_t E_{P^*}(H B_T^{-1} | \mathcal{F}_t), \quad t \in [0, T].$$

Dowód. Gdy $\phi \in \Phi(P^*)$ replikuje wypłatę H, to $V^*(\phi)$ jest P^*-martyngałem, dlatego

$$V_t^*(\phi) = E_{P^*}(V_T^*(\phi)|\mathcal{F}_t) = E_{P^*}(H B_T^{-1}|\mathcal{F}_t).$$

Proces wartości strategii replikującej wypłatę H jest wyznaczony w sposób jednoznaczny, ponieważ dla $\phi, \psi \in \Phi(P^*)$, które replikują H zachodzi

$$V_t^*(\phi) = E_{P^*}(H B_T^{-1}|\mathcal{F}_t) = V_t^*(\psi),$$

co daje nam

$$V_t(\phi) = V_t(\psi).$$

Dodatkowo

$$\Pi_t(H) = V_t(\phi) = B_t E_{P^*}(H B_T^{-1}|\mathcal{F}_t),$$

a to kończy dowód. □

Przytoczmy teraz twierdzenie dotyczące klas wypłat replikowanych.

Twierdzenie 1.4. *W modelu Blacka-Scholesa każda całkowalna z kwadratem względem P^* wypłata jest osiągalna.*

Dowód. Musimy wykazać, że dla każdego $H \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P^*)$ istnieje dopuszczalna strategia ϕ replikująca wypłatę H. Innymi słowy, musimy znaleźć $\phi \in \Phi(P^*)$ dla którego

$$\phi_t^0 B_T + \phi_t^1 S_T = H.$$

Określmy

$$M_t := E_{P^*}(e^{-rT} H|\mathcal{F}_t), \;\; t \in [0, T].$$

Wypłata H jest całkowalna z kwadratem, więc z nierówności Jensena

$$E_{P^*}(M_T^2|\mathcal{F}_t) \geqslant (E_{P^*}(M_T^2|\mathcal{F}_t))^2 = M_t^2.$$

Czyli

$$E_{P^*}(M_t^2) \leqslant (E_{P^*}(M_T^2))^2,$$

zatem zdefiniowane powyżej M_t jest martyngałem całkowalnym z kwadratem. $\mathbb{F}$ jest filtracją generowaną przez ruch Browna, więc na podstawie twierdzenia o reprezentacji [dodatek B1] istnieje adaptowany i mierzalny proces $(K_T)_{t\in[0,T]}$, dla którego $E_{P^*}(\int_0^T K_s^2 ds) < \infty$ oraz

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s d\hat{W}_s \quad \text{prawie na pewno.} \tag{1.7}$$

Jeśli zdefiniujemy strategię w następujący sposób

$$\phi_t^0 = M_t - \frac{K_t}{\sigma}, \qquad \phi_t^1 = \frac{K_t}{\sigma S_t^*}, \tag{1.8}$$

to proces wartości w chwili 0 jest postaci

$$V_0(\phi) = M_0 - \frac{K_0}{\sigma} + \frac{K_0}{\sigma S_0} S_0 = M_0.$$

Z (1.3), z warunków (1.7) oraz (1.8) oraz ponieważ pokazaliśmy, że $V_0(\phi) = M_0$ mamy

$$V_t^*(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t^1 S_t^* = M_t - \frac{K_t}{\sigma} + \frac{K_t}{\sigma} = M_t =$$

$$= M_0 + \int_0^t K_u d\hat{W}_u = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 \sigma S_u^* d\hat{W}_u = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 dS_u^*.$$

Korzystając z twierdzenia (1.2), strategia ϕ jest samofinansująca.
Dodatkowo pokazaliśmy, że $V_t^*(\phi) = M_t$, więc V_t^* jest P^*-martyngałem, co oznacza, że strategia ϕ jest dopuszczalna tzn. $\phi \in \Phi(P^*)$ oraz $V_T^*(\phi) = M_T$, czyli $V_T(\phi) = H$. □

1.1.1 Wzór Blacka-Scholesa

Rozważmy standardową europejską opcję kupna. Funkcja wypłaty tej opcji jest postaci

$$(S(T) - K)^+.$$

Dla $t = 0$ zdyskontowana funkcja wypłaty jest postaci

$$Y(T) = e^{-rT} E_{P^*}(S(T) - K)^+.$$

W celu wyliczenia tej wartości oczekiwanej, wyraźmy proces ceny $S(T)$ przy pomocy procesu Wienera $\hat{W}_t$ względem P^*.

$$d(\log S(t)) = \sigma d\hat{W}_t + \Big(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\Big) dt.$$

Stąd

$$\log S(t) = \log S(0) + \sigma \hat{W}_t + \Big(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\Big)t$$

$$S(t) = S(0)\exp\Big[\sigma \hat{W}_t + \Big(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\Big)t\Big].$$

Rozkład zmiennej $S(T)$, z własności ruchu Browna, można przedstawić w postaci rozkładu zmiennej $S(0)\exp(Z + rT)$, gdzie $Z \sim \mathcal{N}(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T)$. Dlatego

$$Y(T) = e^{-rT} E_{P^*}[S(0)\exp(Z + rT) - K]^+ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int\limits_{\log(K/S(0))-rT}^{\infty} (S(0)e^x - Ke^{-rT}) \exp\Big(- \frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}\Big) dx = (*)$$

wykonajmy teraz podstawienie $u = -(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T)/\sigma\sqrt{T}$

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{d_-} (S(0)e^{-\sigma\sqrt{T}u - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - Ke^{-rT})e^{-\frac{1}{2}u^2} du,$$

gdzie $d_\pm = (\log\frac{S(0)}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T)/\sigma\sqrt{T}$. Ponieważ

$$\exp\Big(- \sigma\sqrt{T}u - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T - \tfrac{1}{2}u^2\Big) = \exp\Big(- \tfrac{1}{2}(u + \sigma\sqrt{T})^2\Big),$$

$$Y(T) = \frac{S(0)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{d_+} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{d_-} e^{\frac{1}{2}u^2} du = S(0)\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-),$$

Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego. Ostatecznie wzór Blacka-Scholesa na cenę standardowej europejskiej opcji call jest postaci

$$C(0) = S(0)\Phi\Big(\frac{\log(\frac{S(0)}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) - Ke^{-rT}\Phi\Big(\frac{\log(\frac{S(0)}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big).$$

Możemy rozszerzyć powyższy wzór do ceny opcji kupna w dowolnym momencie t. Dla każdego $u \in [t, T]$

$$S(u) = S(t)\exp(\sigma(\hat{W}_u - \hat{W}_t) + (r - \tfrac{1}{2})(u - t)).$$

Teraz analogicznie jak wcześniej

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E_{P^*}\Big[S(t)\exp\Big(\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t\Big) - K\Big]^+.$$

$S(t)$ jest procesem $\mathcal{F}_t-$mierzalnym, przyrosty ruchu Browna $(\hat{W}_T - \hat{W}_t)$ są niezależne od $\mathcal{F}_t$, więc możemy zamienić warunkową wartość oczekiwaną $E_{P^*}(\cdot|\mathcal{F}_t)$ na zwykłą wartość oczekiwaną $E_{P^*}(\cdot)$. To daje nam ostateczny wzór na cenę europejskiej ceny call w chwili t

$$C(t) = S(t)\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-),$$

gdzie

$$d_\pm = \Big(\frac{\log(\frac{S(t)}{K}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big).$$

Znając wzór na cenę europejskiej opcji kupna automatycznie dostajemy cenę opcji sprzedaży

$$P(t) = -S(t)\Phi(-d_+) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_-).$$

1.1.2 Wrażliwość

Przy szukaniu optymalnych strategii kupna opcji, warto mieć na uwadze możliwe zmiany czynników, od których zależy wysokość wypłaty, np. ceny bazowej instrumentu, czas pozostały do terminu wygaśnięcia, zmienność instrumentu. Takie działanie nosi nazwę hedgingu. Wrażliwość na te zmiany możemy badać poprzez pochodne cząstkowe funkcji wypłaty względem tych parametrów. Poszczególne pochodne oznaczamy literami greckiego alfabetu i nazywamy je współczynnikami greckimi.

Najczęściej używanym współczynnikiem greckim jest delta Δ. Delta jest miarą wrażliwości ceny opcji na zmianę ceny instrumentu podstawowego. Wyraża się jako pochodna cząstkowa po S_0

$$\Delta = \tfrac{\partial \Pi}{\partial S_0}.$$

Delta w modelu Blacka-Scholesa jest postaci

$$\Delta_{CALL} = \tfrac{\partial C(t)}{\partial S(T)} = \Phi(d_+),$$

$$\Delta_{PUT} = \tfrac{\partial P(t)}{\partial S(T)} = -\Phi(-d_+).$$

Dla standardowej europejskiej opcji kupna delta należy do przedziału $(0, 1)$, natomiast dla opcji sprzedaży do $(-1, 0)$. Dzieje się tak, ponieważ wzrost ceny akcji powoduje, że opcja kupna jest droższa, a opcja sprzedaży tańsza.

Współczynnik Θ mierzy tempo zmiany wartości opcji ze względu na upływ czasu (ile czasu pozostało do wygaśnięcia opcji)

$$\Theta = \tfrac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

W modelu Blacka-Scholesa współczynnik ten jest postaci

$$\Theta_{CALL} = \tfrac{\partial C(t)}{\partial t} = -\tfrac{S_0\phi(d_+)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\Phi(d_-),$$

$$\Theta_{PUT} = \tfrac{\partial P(t)}{\partial t} = -\tfrac{S_0\phi(d_+)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}\Phi(-d_-).$$

Cena opcji zależy również od stopy procentowej. Wrażliwość na ten parametr mierzy współczynnik ρ

$$\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Wykorzystując wzory Blacka-Scholesa otrzymujemy

$$\rho_{CALL} \frac{\partial C(t)}{\partial r} = KTe^{-rT}\Phi(d_-),$$

$$\rho_{PUT} = \frac{\partial C(t)}{\partial r} = -KTe^{-rT}\Phi(-d_-).$$

Ostatnim współczynnikiem pierwszego stopnia jest vega ν, która dotyczy parametru zmienności σ. W modelu Blacka-Scholesa zakładamy, że parametr zmienności akcji jest stały. W praktyce jednak tak nie jest. Dlatego użyteczny może być współczynnik vega, który bada wpływ zmienności na cenę akcji

$$\nu = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}.$$

W modelu Blacka-Scholesa współczynnik vega nie różni się dla opcji call i put, jest on postaci

$$\nu = S_0\phi(d_+)\sqrt{T}.$$

Omówione do tej pory współczynniki są pochodnymi ceny opcji pierwszego rzędu. Do opracowywania strategii kupowania opcji korzysta się również ze współczynników drugiego rzędu. W tej pracy zajmiemy się tylko najbardziej znanym współczynnikiem rzędu drugiego - gammą. Γ jest postaci

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}.$$

Gamma jest więc miarą tempa zmiany ceny opcji na zmiany współczynnika Δ. W modelu Blacka-Scholesa Γ jest postaci

$$\Gamma = \frac{\phi(d_+)}{S\sigma\sqrt{T}}.$$

W drugim rozdziale szczegółowo przyjrzymy się estymacji współczynników greckich.

1.2 Metody Monte Carlo

Metody Monte Carlo opierają się na zależności między prawdopodobieństwem, a wielkością próby losowej. Miara w ujęciu matematycznym opisuje pojęcie prawdopodobieństwa, poprzez powiązanie zdarzenia z możliwymi wynikami oraz określenie jego prawdopodobieństwa, jako miara zbioru możliwych wyników w stosunku do wszystkich możliwych wyników. W metodach Monte Carlo korzystamy z tej zależności w drugą stronę. Określamy prawdopodobieństwo zdarzenia, aby następnie wyznaczyć miarę interesującego nas zbioru. W praktyce oznacza to wzięcie próby losowej z przestrzeni probabilistycznej oraz ustalenie stosunku elementów próby wpadających do zbioru, który chcemy zmierzyć oraz wielkości próby losowej.

Twierdzenie 1.5 (Mocne Prawo Wielkich Liczb)**.** *Niech* $X_1, X_2, ...$ *będzie ciągiem parami niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Jeżeli* $E|X_1| < \infty$, *to*

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} EX_1,$$

P-prawie wszędzie.

Z Mocnego Prawa Wielkich Liczb wiemy, że stosunek ten zbiega do wartości faktycznej wraz ze wzrostem wielkości próby losowej.

Klasyczna metoda Monte Carlo polega na numerycznym całkowaniu. Rozważmy problem estymacji całkowania funkcji f na przedziale $[0, 1]$

$$\alpha = E[f(U)] = \int_0^1 f(x)dx,$$

gdzie U jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$.

Załóżmy, że $U_1, U_2, ...$ jest niezależną próbą losową z rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$. Estymator wartości oczekiwanej jest wówczas postaci

$$\hat{\alpha_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(U_i))$$

.

Jeżeli f jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$, to z Mocnego Prawa Wielkich Liczb

$$\hat{\alpha_n} \longrightarrow \alpha \text{ z prawdopodobieństwem 1, gdy } n \to \infty.$$

Teraz omówimy przykład użycia metody Monte Carlo w wycenie opcji

Przykład 1.1. Rozważmy opcję call na kupno akcji. Mamy następujące dane. Cena bazowa akcji to $S(0) = 60$, cena wykonania opcji $K = 70$. Stopa wolna od ryzyka równa jest $r = 8\%$. Zmienność instrumentu bazowego wynosi $\sigma = 0.2$ Opcję będzie można wykorzystać za pół roku ($T = 0.5$).

Korzystając z kodu [1] możemy obliczyć cenę tej opcji. Kod zawiera pętlę wykonującą zadane n iteracji. Każda z nich wykonuje następujące kroki.

- Wygenerowanie liczby losowej pochodzącej z rozkładu normalnego o średniej 0 i odchyleniu standardowym 1.
- Obliczenie $S(T)$ w oparciu o wzór pochodzący z modelu Blacka-Scholesa.
- Znalezienie wartości funkcji wypłaty w zależności od rodzaju opcji oraz zdyskontowanie wartości tej wypłaty.

W rezultacie wykonania tej pętli otrzymujemy n zdyskontowanych wartości wypłat. Według zasad metod Monte Carlo, ceną opcji jest wartość oczekiwana wektora tych n wartości.

Korzystając ze wzorów na ceny opcji call w modelu Blacka-Scholesa możemy obliczyć teoretyczną cenę tej opcji

$$C = S(0)\Phi(d_+) - e^{-rT}K\Phi(d_-) = 5.7562$$

Wspomnieliśmy wcześniej o zależności między prawdopodobieństwem, a wielkością próby losowej, dlatego wykonamy kod dla różnych n. Tabela poniżej przedstawia wyniki estymacji ceny opcji call w zależności od wielkości próby n.

n	Symulacja MC
100	5.851505
1000	5.815027
10000	5.809249
100000	5.798550

Porównując wyniki w tabeli z wartością teoretyczną widzimy, że im większe n, tym wartość symulacji jest bliższa wartości teoretycznej.

2 Estymacja współczynników greckich

Wartości instrumentów pochodnych zmieniają się wraz ze zmianami czynników, które wpływają na te wartości. Nazywamy to wrażliwością instrumentów pochodnych. Miarą tej wrażliwości są współczynniki greckie, które zostały opisane w poprzednim rozdziale.
Estymacja wrażliwości, czyli estymacja współczynników greckich może być wykonana z wykorzystaniem metod Monte Carlo. W tym rozdziale przedstawione zostaną 3 różne metody estymacji. Metoda różnic skończonych, metoda różnic po trajektoriach oraz metoda ilorazu wiarygodności.

2.1 Metoda różnic skończonych

Rozważmy model, który zależy od parametru θ, należącego do pewnego przedziału otwartego na prostej. Przypuśćmy, że dla każdej wartości tego parametru mamy sposób na wygenerowanie zmiennej losowej $Y(\theta)$. Niech $\alpha(\theta) = E[Y(\theta)]$. Problem estymacji wrażliwości sprowadza się do znalezienia estymatora $\alpha'(\theta)$, zależnego od θ.
Przy wycenie instrumentów pochodnych jakimi są opcje, $Y(\theta)$ jest zdyskontowaną wartością wypłaty, $\alpha(\theta)$ jest ceną opcji, natomiast θ jest dowolnym parametrem, który ma wpływ na cenę. W zależności od tego czym jest parametr θ, pochodne $\alpha'(\theta), \alpha''(\theta)$ mają różne nazwy.

2.1.1 Obciążenie

Niech $Y_1(\theta), ..., Y_n(\theta)$ będą niezależnymi realizacjami zmiennej losowej przy parametrze θ oraz weźmy n dodatkowych realizacji $Y_1(\theta+h), ..., Y_n(\theta+h)$ dla dowolnego ustalonego $h > 0$. Uśrednijmy każdy z tych zestawów, w rezultacie czego otrzymamy $\overline{Y}_n(\theta)$ oraz $\overline{Y}_n(\theta+h)$.

$$\overline{Y}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(\theta), \qquad \overline{Y}_n(\theta+h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(\theta+h).$$

Następnie zdefiniujmy estymator $\alpha'(\theta)$ różnic w przód

$$\hat{\Delta}_F \equiv \hat{\Delta}_F(n,h) = \frac{\overline{Y}_n(\theta+h) - \overline{Y}_n(\theta)}{h}.$$

W pracy będziemy badać zależność, która zachodzi między $Y_i(\theta)$ a $Y_i(\theta+h)$, na razie korzystając z własności rozkładów brzegowych wektorów $(Y_i(\theta), Y_i(\theta+h))$, $i = 1, ..., n$, wartość oczekiwaną estymatora $\alpha'(\theta)$ możemy przedstawić

$$E[\hat{\Delta}_F] = \frac{\alpha(\theta+h) - \alpha(\theta)}{h}. \tag{2.1}$$

Lemat 2.1. *Ustalmy θ należące do otwartego odcinka Θ na prostej rzeczywistej. Jeżeli funkcja α jest dwukrotnie różniczkowalna, to obciążenie estymatora pochodnej $\alpha'(\theta)$ korzystającego z metody różnic w przód równe jest*

$$Bias(\hat{\Delta}_F) = E[\hat{\Delta}_F - \alpha'(\theta)] = \tfrac{1}{2}\alpha''(\theta)h + o(h).$$

Dowód. Gdy α jest dwukrotnie różniczkowalna, to ze wzoru Taylora możemy zapisać

$$\alpha(\theta + h) = \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \tfrac{1}{2}\alpha''(\theta)h^2 + o(h^2).$$

Z (2.1) obciążenie możemy rozpisać w następujący sposób.

$$Bias(\hat{\Delta}_F) = E[\hat{\Delta}_F - \alpha'(\theta)] = E[\hat{\Delta}_F] - \alpha'(\theta) =$$

$$= \tfrac{\alpha(\theta+h)-\alpha(\theta)}{h} - \alpha'(\theta) = \tfrac{1}{h}[\alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \tfrac{1}{2}\alpha''(\theta)h^2 + o(h^2) - \alpha(\theta)] - \alpha'(\theta) =$$

$$= \alpha'(\theta) + \tfrac{1}{2}\alpha''(\theta)h + o(h) - \alpha'(\theta) = \tfrac{1}{2}\alpha''(\theta)h + o(h).$$

□

Możemy rozszerzyć estymator $\alpha'(\theta)$ otrzymany metodą różnic w przód w estymator otrzymywany metodą różnic centralnych.

$$\hat{\Delta}_C \equiv \hat{\Delta}_C(n,h) = \frac{\overline{Y}_n(\theta + h) - \overline{Y}_n(\theta - h)}{2h}.$$

Jeżeli szukamy estymatora $\alpha'(\theta)$, musimy symulować realizację Y dla θ. Estymator $\alpha'(\theta)$ różnic w przód wymaga dodatkowej symulacji dla $\theta + h$, natomiast różnic centralnych wymaga dwóch dodatkowych symulacji. Mogłoby się wydawać, że wpływa to negatywnie na użycie estymatora przy metodzie różnic centralnych, jednak dodatkowa symulacja Y znacząco wpływa na poprawę zbieżności obciążenia.

Lemat 2.2. *Jeżeli α jest co najmniej dwukrotnie różniczkowalna w otoczeniu ustalonego punktu θ należącego do otwartego odcinka Θ na prostej rzeczywistej, to obciążenie estymatora różnic centralnych jest postaci*

$$Bias(\hat{\Delta}_C) = E[\hat{\Delta}_C - \alpha'(\theta)] = o(h).$$

Dowód. Gdy α jest dwukrotnie różniczkowalna, korzystając ze wzoru Taylora możemy zapisać dwie równości

$$\alpha(\theta + h) = \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \alpha''(\theta)h^2/2 + o(h^2)$$

$$\alpha(\theta - h) = \alpha(\theta) - \alpha'(\theta)h + \alpha''(\theta)h^2/2 + o(h^2).$$

Odjęcie spowoduje zredukowanie się pochodnych drugiego rzędu, co da nam

$$Bias(\hat{\Delta}_C) = E[\hat{\Delta}_C - \alpha'(\theta)] = E[\hat{\Delta}_C] - \alpha'(\theta) = \tfrac{\alpha(\theta+h)-\alpha(\theta-h)}{2h} - \alpha'(\theta) =$$

$$= \tfrac{1}{2h}[\alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \alpha''(\theta)h^2/2 + o(h^2) - \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h - \alpha''(\theta)h^2/2 + o(h^2)] - \alpha'(\theta) =$$

$$= \tfrac{1}{2h}[2\alpha'(\theta)h + o(h^2)] - \alpha'(\theta) = \alpha'(\theta) + o(h) - \alpha'(\theta) = o(h).$$

□

Ten lemat pokazuje nam, że pod względem obciążenia, estymator $\alpha'(\theta)$ otrzymany metodą różnic centralnych jest efektywniejszy niż estymator otrzymany metodą różnic w przód.
Rozważmy jeszcze przypadek, gdy α jest więcej niż dwukrotnie różniczkowalna.

Lemat 2.3. *Jeżeli α jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną, obciążenie estymatora $\alpha'(\theta)$ korzystającego z metody różnic centralnych jest postaci*

$$Bias(\hat{\Delta}_C) = E[\hat{\Delta}_C - \alpha'(\theta)] = \tfrac{1}{6}\alpha'''(\theta)h^2 + o(h^2)$$

dla ustalonego θ należącego do otwartego odcinka Θ na prostej rzeczywistej.

Dowód. Gdy α jest trzykrotnie różniczkowalna, korzystając ze wzoru Taylora możemy zapisać

$$\alpha(\theta + h) = \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \alpha''(\theta)h^2/2 + \alpha'''(\theta)h^3/6 + o(h^3)$$

$$\alpha(\theta - h) = \alpha(\theta) - \alpha'(\theta)h + \alpha''(\theta)h^2/2 - \alpha'''(\theta)h^3/6 + o(h^3).$$

Następnie obliczamy obciążenie

$$Bias(\hat{\Delta}_C) = E[\hat{\Delta}_C - \alpha'(\theta)] = E[\hat{\Delta}_C] - \alpha'(\theta) = \tfrac{\alpha(\theta+h)-\alpha(\theta-h)}{2h} - \alpha'(\theta) =$$

$$= \tfrac{1}{2h}[\alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h + \alpha''(\theta)h^2/2 + \alpha'''(\theta)h^3/6 + o(h^3) - \alpha(\theta) + \alpha'(\theta)h - \alpha''(\theta)h^2/2 +$$

$$+\alpha'''(\theta)h^3/6 + o(h^3)] - \alpha'(\theta) = \tfrac{1}{2h}[2\alpha'(\theta)h + \alpha'''(\theta)h^3/3 + o(h^3)] - \alpha'(\theta) =$$

$$= \alpha'(\theta) + \alpha'''(\theta)h^2/6 + o(h^2) - \alpha'(\theta) = \alpha'''(\theta)h^2/6 + o(h^2).$$

□

2.1.2 Wariancja

Postaci obciążeń estymatorów $\alpha'(\theta)$ wymagają od nas brania bardzo niewielkich wartości h w celu polepszenia dokładności. Jak zobaczymy w późniejszej części pracy w lemacie (2.4), musimy brać pod uwagę wpływ h zarówno na obciążenie jak i wariancję.
Wariancja estymatora pochodnej wykorzystującego metodę różnic w przód z definicji jest postaci

$$Var[\hat{\Delta}_F(n,h)] = \frac{Var[\overline{Y}_n(\theta + h) - \overline{Y}_n(\theta)]}{h^2}.$$

Analogicznie, dla różnic centralnych

$$Var[\hat{\Delta}_C(n,h)] = \frac{Var[\overline{Y}_n(\theta + h) - \overline{Y}_n(\theta - h)]}{h^2}.$$

W obu przypadkach h^{-2} wskazuje na konsekwencje przyjęcia zbyt małego h. Ta postać wariancji pokazuje, że zależność między wartościami wysymulowanymi przy różnych wartościach θ wpływa na estymator różnic skończonych.

Załóżmy dla uproszczenia, że pary $(Y(\theta), Y(\theta+h))$ i $(Y_i(\theta), Y_i(\theta+h)), i = 1, 2, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, więc

$$Var[\overline{Y}_n(\theta+h)-\overline{Y}_n(\theta)] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(\theta+h)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(\theta)\right] = \frac{1}{n}Var[Y(\theta+h)-Y(\theta)].$$

To jak zmienia się wariancja określona wyżej przy zmianie h, uwarunkowane jest zależnością $Var[Y(\theta+h) - Y(\theta)]$ od h. Obserwujemy 3 możliwe przypadki.

$$Var[Y(\theta+h) - Y(\theta)] = \begin{cases} O(1) \\ O(h) \\ O(h^2) \end{cases} \tag{2.2}$$

Przypadek pierwszy występuje, gdy niezależnie symulujemy $Y(\theta)$ oraz $Y(\theta+h)$. Będziemy to oznaczać poprzez $\cdot_I$ ($I-$ ang. *independent*). Mamy wtedy

$$Var[Y(\theta+h) - Y(\theta)] = Var[Y(\theta+h)] + Var[Y(\theta)] \longrightarrow 2Var[Y(\theta)],$$

przy założeniu, że wariancja $Var[Y(\theta)]$ jest ciągła w θ.
Przypadek drugi to sytuacja, gdy symulujemy $Y(\theta)$ oraz $Y(\theta+h)$ przy użyciu wspólnych liczb losowych, czyli na przykład generowanie wartości Y na podstawie tego samego zestawu liczb losowych $U_1, U_2, ...$ z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1]$. Możemy to osiągnąć poprzez rozpoczęcie symulowania odpowiednio w θ i $\theta+h$ oraz zadanie generatorom liczb losowych tego samego ziarna. Taki algorytm symulowania nosi nazwę *Common Random Numbers*, stąd przypadek drugi oznaczamy $\cdot_{CRN}$.
Przypadek trzeci wymaga, aby $Y(\theta)$ oraz $Y(\theta+h)$ nie tylko pochodziły z tego samego zestawu liczb losowych, ale również aby dowolne $Y(\cdot)$ było ciągłe w punkcie θ. Ten przypadek zostanie szerzej omówiony w późniejszej części pracy.

2.1.3 Optymalny średni błąd kwadratowy MSE

Obniżenie wartości h może spowodować zwiększenie wariancji oraz obniżenie obciążenia. Minimalizacja średniego błędu kwadratowego wymaga wzięcia pod uwagę obu tych wartości.
Zwiększenie wielkości próby losowej n obniża wariancję nie wpływając na obciążenie, natomiast zmiana h wpływa zarówno na wariancję jak i obciążenie. Naszym celem jest znalezienie optymalnej zależności między tymi wielkościami.

Definicja 2.1. Błędem średniokwadratowym MSE (ang. *Mean Squared Error*) estymatora $\hat{a}$ nieznanego parametru a nazywamy wielkość

$$MSE(\hat{a}) = E((\hat{a} - a)^2).$$

Lemat 2.4. *Dla estymatora $\hat{a}$ parametru a zachodzi równość*

$$MSE(\hat{a}) = Var(\hat{a}) + Bias(\hat{a})^2,$$

gdzie $Var(\hat{a})$ i $Bias(\hat{a})$ oznaczają odpowiednio wariancję i obciążenie estymatora.

Dowód. Z definicji MSE mamy

$$MSE(\hat{a}) = E[(\hat{a} - a)^2] = E[(\hat{a} - E[\hat{a}] + E[\hat{a}] - a)^2] =$$

$$= E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2 + 2(\hat{a} - E[\hat{a}])(E[\hat{a}] - a) + (E[\hat{a}] - a)^2] =$$

$$= E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] + E[2(\hat{a} - E[\hat{a}])(E[\hat{a}] - a)] + E[(E[\hat{a}] - a)^2] =$$

$$= E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] + E[2(\hat{a} - E[\hat{a}])(E[\hat{a}] - a)] + E[(E[\hat{a}] - a)^2] = (*)$$

ponieważ $E[\hat{a}] - a$ jest stałe

$$(*) = E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] + 2(E[\hat{a}] - a)E[\hat{a} - E[\hat{a}]] + (E[\hat{a}] - a)^2 =$$

$$= E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] + 2(E[\hat{a}] - a)(E[\hat{a}] - E[\hat{a}]) + (E[\hat{a}] - a)^2 =$$

$$= E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] + (E[\hat{a}] - a)^2 = Var(\hat{a}) + Bias(\hat{a})^2.$$

□

Rozważmy estymator $\alpha'(\theta)$ różnic w przód z niezależnie wysymulowanymi θ oraz $\theta + h$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że zachodzi przypadek pierwszy z (2.2), oznaczymy to poprzez $\hat{\Delta}_{F,I} = \hat{\Delta}_{F,I}(n, h)$. Z lematu (2.4) mamy

$$MSE(\hat{\Delta}_{F,I}(n, h)) = O(h^2) + O(n^{-1}h^{-2}),$$

z czego od razu widzimy, że warunkami zbieżności błędu średniokwadratowego do 0 są $h \longrightarrow 0$ oraz $nh^2 \longrightarrow \infty$.

Aby lepiej określić średni błąd kwadratowy rozważmy jednocześnie przypadek pierwszy i drugi z (2.2). Mamy do rozważenia 4 estymatory. Estymator $\alpha'(\theta)$ różnic w przód oraz różnic centralnych, korzystające z niezależnych prób losowych lub wspólnych liczb losowych dla różnych wartości θ. Uogólnijmy te 4 przypadki do jednego estymatora $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}(n, h)$, dla którego

$$E[\hat{\Delta} - \alpha'(\theta)] = bh^\beta + o(h^\beta)$$

$$Var[\hat{\Delta}] = \frac{\sigma^2}{nh^\eta} + o(h^{-\eta})$$

dla pewnych dodatnich β, η, σ oraz b różnego od 0. Estymatory $\alpha'(\theta)$ różnic w przód i różnic centralnych zwykle mają $\beta = 1$ oraz $\beta = 2$.
Rozważmy ciąg estymatorów $\hat{\Delta}(n, h_n)$, gdzie

$$h_n = h_* n^{-\gamma}$$

dla pewnych dodatnich h_* oraz γ. Z założeń dotyczących obciążenia i wariancji otrzymujemy

$$MSE(\hat{\Delta}(n, h_n)) = b^2 h_n^{2\beta} + \frac{\sigma^2}{n h_n^{\eta}}.$$

Aby znaleźć wartość γ, która maksymalizuje tempo spadku MSE musimy policzyć pochodną

$$\frac{\partial MSE}{\partial h_n} = b^2 \cdot 2\beta \cdot h_n^{2\beta-1} + \frac{\sigma^2}{n} \cdot (-\eta) \cdot h_n^{-(\eta+1)}.$$

Warunkiem koniecznym wystąpienia ekstremum lokalnego różniczkowalnej funkcji w danym punkcie jest zerowanie się pochodnej, czyli otrzymujemy równanie

$$b^2 \cdot 2\beta \cdot h_n^{2\beta-1} + \frac{\sigma^2}{n} \cdot (-\eta) \cdot h_n^{-(\eta+1)} = 0$$

$$b^2 \cdot 2\beta \cdot h_n^{2\beta-1} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \eta \cdot h_n^{-(\eta+1)}$$

$$h_n^{2\beta-1+\eta+1} = \frac{\sigma^2 \eta}{2\beta b^2} \cdot n^{-1}$$

$$h_n^{2\beta+\eta} = \frac{\sigma^2 \eta}{2\beta b^2} \cdot n^{-1}$$

$$h_n = \Big(\frac{\sigma^2 \eta}{2\beta b^2}\Big)^{\frac{1}{2\beta+\eta}} \cdot n^{-\frac{1}{2\beta+\eta}}.$$

Ponieważ $h_n = h_* n^{-\gamma}$, dostajemy wartość

$$\gamma = \frac{1}{2\beta + \eta},$$

co daje nam prosty wniosek mówiący, że im mniejsze obciążenie, a co za tym idzie większa wartość parametru β, wartość h może być większa. Jeśli podstawimy wyznaczoną wartość γ do wzoru na MSE oraz go spierwiastkujemy, otrzymamy wzór

$$RMSE(\hat{\Delta}) = \sqrt{b^2 h_n^{2\beta} + \tfrac{\sigma^2}{n h_n^{\eta}}} = \sqrt{b^2 \cdot h_*^{2\beta} \cdot n^{-\frac{2\beta}{2\beta+\eta}} + \frac{\sigma^2}{n \cdot h_*^{\eta} \cdot n^{-\frac{\eta}{2\beta+\eta}}}} =$$

$$= \sqrt{b^2 \cdot \left(\frac{\sigma^2}{2\beta b^2}\right)^{\frac{2\beta}{2\beta+\eta}} \cdot n^{-\frac{2\beta}{2\beta+\eta}} + \frac{\sigma^2}{n \cdot (\frac{\sigma^2 \eta}{2\beta b^2})^{\frac{\eta}{2\beta+\eta}} \cdot n^{-\frac{\eta}{2\beta+\eta}}}} =$$

$$= \sqrt{O(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+\eta}}) + O(n^{\frac{\eta}{2\beta+\eta}-1})} = \sqrt{O(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+\eta}}) + O(n^{\frac{\eta-2\beta-\eta}{2\beta+\eta}})} =$$

$$= \sqrt{O(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+\eta}})} = O(n^{-\frac{\beta}{2\beta+\eta}}),$$

który jest miarą tempa zbieżności estymatora.

Zauważmy, że

$$n^{2\beta/(2\beta+\eta)} MSE(\hat{\Delta}) \longrightarrow b^2 h_*^{2\beta} + \sigma^2 h_*^{-\eta}.$$

Szukanie minimum ze względu na h_* dało nam wartość

$$h_* = (\frac{\eta\sigma^2}{2\beta b^2})^{\frac{1}{2\beta+\eta}}.$$

Dla estymatorów $\alpha'(\theta)$ różnic w przód (F) oraz różnic centralnych (C) korzystających z niezależnych prób losowych (I) i wspólnych liczb losowych (CRN) tabela poniżej przedstawia podsumowanie. Kolumny z wariancją i obciążeniem uogólniają własności dla konkretnych estymatorów. Z poniższej tabeli wynika, że jeśli spełnione są warunki dla wariancji i obciążenia, to zachodzą 3 ostatnie kolumny tej tabeli.

Estymator	Wariancja	Obciążenie	Optymalne h_n	Zbieżność	h_*
$\hat{\Delta}_{F,I}$	$\frac{\sigma^2_{F,I}}{nh^2}$	$\frac{1}{2}\alpha''(\theta)h$	$O(n^{-1/4})$	$O(n^{-1/4})$	$\left(\frac{4\sigma^2_{F,I}}{\alpha''(\theta)^2}\right)^{1/4}$
$\hat{\Delta}_{C,I}$	$\frac{\sigma^2_{C,I}}{nh^2}$	$\frac{1}{6}\alpha'''(\theta)h^2$	$O(n^{-1/6})$	$O(n^{-1/3})$	$\left(\frac{18\sigma^2_{C,I}}{\alpha''(\theta)^2}\right)^{1/6}$
$\hat{\Delta}_{F,CRN}$	$\frac{\sigma^2_{F,CRN}}{nh}$	$\frac{1}{2}\alpha''(\theta)h$	$O(n^{-1/3})$	$O(n^{-1/3})$	$\left(\frac{2\sigma^2_{F,CRN}}{\alpha''(\theta)^2}\right)^{1/3}$
$\hat{\Delta}_{C,CRN}$	$\frac{\sigma^2_{C,CRN}}{nh}$	$\frac{1}{6}\alpha'''(\theta)h^2$	$O(n^{-1/5})$	$O(n^{-2/5})$	$\left(\frac{9\sigma^2_{C,CRN}}{\alpha'''(\theta)^2}\right)^{1/5}$

Warunek $b \neq 0$ zmienia się w $\alpha''(\theta) \neq 0$ oraz $\alpha'''(\theta) \neq 0$ odpowiednio dla estymatorów $\alpha'(\theta)$ różnic w przód oraz różnic centralnych. Z tabeli wynika, że estymator $\hat{\Delta}_{C,CRN}$ wykazuje najszybszą zbieżność.
Dla każdego z estymatorów zachodzi centralne twierdzenie graniczne.

Twierdzenie 2.1. *Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. Załóżmy, że $EX_i = \mu < \infty$ oraz $0 < Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Wówczas rozkład zmiennej losowej Z_n*

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

zbiega do standardowego rozkładu normalnego, gdy $n \to \infty$.

Oznacza to, że

$$n^{\frac{\beta}{2\beta+\eta}}[\hat{\Delta}(n, h_n) - \alpha'(\theta)] \implies N(bh_*^{\beta}, \frac{\sigma^2}{h_*^{\eta}})$$

dla $h_n = h_* n^{-\gamma}$ oraz $\gamma = 1/(2\beta + \eta)$. Zachodzi to dla dowolnego $h_* > 0$.
Dla estymatora różnic w przód z niezależnymi próbami losowymi parametr $\sigma^2_{F,I}$ jest zdefiniowany następująco

$$\sigma^2_{F,I} = \lim_{h \longrightarrow 0} (Var[Y(\theta + h)] + Var[Y(\theta)]) = 2Var[Y(\theta)]$$

przy założeniu ciągłości $Var[Y(\theta)]$.
Ponieważ estymator $\alpha'(\theta)$ różnic centralnych posiada mianownik $2h$, mamy

$$\sigma^2_{C,I} = \frac{Var[Y(\theta)]}{2}.$$

Wartości $\sigma^2_{F,CRN}$ oraz $\sigma^2_{C,CRN}$ zależą od łącznego rozkładu $(Y(\theta - h), Y(\theta), Y(\theta + h))$, który z kolei zależy od algorytmu użytego do symulacji. Różne algorytmy mogą różnie reagować na zmiany parametru początkowego. Inaczej jest z wariancją $Var[Y(\theta)]$, która zależy od rozkładów brzegowych $Y(\theta)$, więc wszystkie algorytmy, które losują próbkę z tego rozkładu mają tę samą wariancję.

2.2 Metoda różnic po trajektoriach

Alternatywą dla metody różnic skończonych jest metoda różnic po trajektoriach. Zanim przejdziemy do przykładów estymacji współczynników greckich tą metodą, zajmiemy się problemem nieobciążoności tego estymatora.

2.2.1 Warunki nieobciążonści

Wcześniej zauważyliśmy, że w przypadku 3 z (2.2) MSE maleje wraz ze wzrostem h. Dlatego chcemy, aby wartość h dążyła do 0 i $\alpha(\theta) = E[Y(\theta)]$ estymujemy wówczas wykorzystując własność

$$Y'(\theta) = \lim_{h\to 0} \frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h}. \tag{2.3}$$

Załóżmy, że powyższa równość zachodzi. Ten estymator ma wartość oczekiwaną $E[Y'(\theta)]$. Jest on nieobciążonym estymatorem $\alpha'(\theta)$, gdy zachodzi

$$E\left[\frac{d}{d\theta}Y(\theta)\right] = \frac{d}{d\theta}E[Y(\theta)]. \tag{2.4}$$

W (2.3) zakładamy, że pochodna istnieje z prawdopodobieństwem 1 a gdy to zachodzi nazywamy $Y'(\theta)$ pochodną Y po trajektoriach w θ.
Aby pokazać, że ten estymator jest nieobciążony, wystarczy pokazać, że zachodzi warunek (2.4), który możemy zapisać w formie twierdzenia.

Twierdzenie 2.2. *Załóżmy, że pochodna trajektorii $Y'(\theta)$ istnieje z prawdopodobieństwem 1 w $\theta \in \Theta$. Jeżeli iloraz*

$$\frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h}$$

jest jednostajnie całkowalny, to zachodzi równość

$$E\left[\lim_{h\to 0} \frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{E[Y(\theta+h)] - E[Y(\theta)]}{h}.$$

Dowód. Załóżmy, że pochodna trajektorii $Y'(\theta)$ istnieje z prawdopodobieństwem 1 oraz

$$\frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h}$$

jest jednostajnie całkowalne. Z twierdzenia B.4 jest zbieżne, więc możemy zamienić kolejnością wartość oczekiwaną i granicę. □

Twierdzenie 2.3. *Załóżmy, że zdyskontowana funkcja wypłaty Y jest funkcją argumentu $X(\theta) = (X_1(\theta), ..., X_m(\theta))$, czyli*

$$Y(\theta) = f(X_1(\theta), ..., X_m(\theta)),$$

dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Dodatkowo załóżmy, że spełnione są następujące warunki.

1. *Dla każdego $\theta \in \Theta$ $X_i'(\theta)$ istnieje z prawdopodobieństwem 1 dla $i = 1, ..., m$.*
2. *$P(X(\theta) \in D_f) = 1$ dla wszystkich $\theta \in \Theta$, gdzie $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ oznacza zbiór wszystkich punktów, w których f jest różniczkowalna.*
3. *Istnieje stała k_f taka, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^m$*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k_f ||x - y||,$$

czyli funkcja f jest lipschitzowska.

4. *Istnieje zmienna losowa κ_i, $i = 1, ..., m$ taka, że dla dowolnych $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$*

$$|X_i(\theta_2) - X_i(\theta_1)| \leqslant \kappa_i |\theta_2 - \theta_1|$$

oraz $E[\kappa_i] < \infty, i = 1, ..., m$.

Wówczas zachodzi

$$E\Big[\frac{d}{d\theta} Y(\theta)\Big] = \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)].$$

Dowód. Załóżmy, że zachodzą warunki 1-4 z powyższego twierdzenia. Wiemy, że jeżeli f jest różniczkowalna, to Y również jest różniczkowalna w punkcie θ. Z warunków 1 i 2 otrzymujemy istnienie $Y'(\theta)$ z prawdopodobieństwem 1 oraz równość

$$Y'(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(\theta)) X_i'(\theta).$$

Warunki trzeci i czwarty razem implikują warunek, że Y jest prawie na pewno lipschitzowska. Z warunku trzeciego mamy poniższą nierówność.

$$|Y(\theta_2) - Y(\theta_1)| = |f(X_1(\theta_2), ..., X_m(\theta_2)) - f(X_1(\theta_1), ..., X_m(\theta_1)| \leqslant$$

$$\leqslant k_f ||((X_1(\theta_2), ..., X_m(\theta_2)) - (X_1(\theta_1), ..., X_m(\theta_1))|| =$$

$$= k_f ||X_1(\theta_2) - X_1(\theta_1), ..., X_m(\theta_2) - X_m(\theta_1)|| = (*)$$

Teraz skorzystamy z warunku czwartego.

$$(*) \leqslant k_f ||(\kappa_1(\theta_2 - \theta_1), ..., \kappa_m(\theta_2 - \theta_1))|| = \kappa_Y |\theta_2 - \theta_1|,$$

gdzie za κ_Y przyjmujemy

$$\kappa_Y = k_f \sum_{i=1}^{m} \kappa_i.$$

Z warunku 4 otrzymujemy skończoność wartości oczekiwanej $E[\kappa_Y] < \infty$. Po podstawieniu $\theta_2 = \theta + h$ oraz $\theta_1 = \theta$

$$\left| \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right| \leqslant \kappa_Y,$$

możemy wykorzystać twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Ponieważ iloraz jest skończony, możemy przejść do granicy oraz zamienić kolejnością wartość oczekiwaną i granicę. $h \to 0$ daje nam istnienie pochodnej wartości oczekiwanej w θ i równość

$$\frac{dE[Y(\theta)]}{d\theta} = E[Y'(\theta)].$$

□

Podsumowując, jeżeli zachodzą warunki 1-4 z powyższego twierdzenia, to estymator pochodnej wartości oczekiwanej otrzymany metodą różnic po trajektoriach jest nieobciążony.

Twierdzenie 2.4. *Gdy zachodzą warunki 1-4 z twierdzenia (2.3) oraz dodatkowo wzmocnimy warunek 4. do* $E[\kappa_i^2] < \infty$. *Wówczas* $E[\kappa_Y^2] < \infty$ *oraz*

$$Var[Y(\theta + h) - Y(\theta)] = O(h^2).$$

Dowód. Załóżmy, że $E[\kappa_i^2] < \infty$. W dowodzie twierdzenia (2.3) pokazaliśmy już, że

$$\kappa_Y = k_f \sum_{i=1}^{m} \kappa_i.$$

Ponieważ kwadrat sumy jest ograniczony przez sumę kwadratów

$$E[\kappa_Y^2] = E\left[\left(k_f \sum_{i=1}^{m} \kappa_i\right)^2\right] \leqslant E\left[\sum_{i=1}^{m} k_f^2 \kappa_i^2\right] = (*)$$

Teraz z nierówności Jensena oraz z założenia $E[\kappa_i^2] < \infty$

$$(*) \leqslant \sum_{i=1}^{m} k_f^2 E[\kappa_i^2] < \infty.$$

W poprzednim dowodzie pokazaliśmy też, że

$$\left| \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right| \leqslant \kappa_Y,$$

więc mamy

$$E\left[\frac{(Y(\theta + h) - Y(\theta))^2}{h^2}\right] \leqslant E[\kappa_Y^2]$$

$$E[(Y(\theta + h) - Y(\theta))^2] \leqslant E[\kappa_Y^2] h^2.$$

Dodatkowo z definicji wariancji

$$E[(Y(\theta + h) - Y(\theta))^2] = Var[Y(\theta + h) - Y(\theta)] + (E[Y(\theta + h) - Y(\theta)])^2 = O(h^2).$$

Z tego wynika, że

$$Var[Y(\theta + h) - Y(\theta)] = O(h^2).$$

□

Na podstawie dwóch powyższych twierdzeń oraz twierdzenia B.2 zauważamy, że przypadek trzeci z (2.2) zachodzi wtedy, gdy $Y'(\theta)$ istnieje z prawdopodobieństwem 1 i $E[Y(\theta)]$ jest różniczkowalne.

Wniosek 2.1. *Jeżeli $Y'(\theta)$ istnieje z prawdopodobieństwem 1 i $E[Y(\theta)]$ jest różniczkowalna oraz $Var[Y(\theta+h)-Y(\theta)] = O(h^2)$, to drugi moment centralny*

$$E\Big[\Big(\frac{Y(\theta+h)-Y(\theta)}{h}\Big)^2\Big]$$

jest ograniczony i jednostajnie całkowalny, a

$$E[(Y(\theta+h)-Y(\theta))^2] = O(h^2).$$

2.2.2 Przykłady

Przykład 2.1 (Współczynniki greckie w modelu Black'a-Scholes'a.)**.** Rozważmy europejską opcję call. Niech Y będzie zdyskontowaną funkcją wypłaty tej opcji, czyli

$$Y = e^{-rT}[S(T)-K]^+,$$

gdzie

$$S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}, Z \sim N(0,1). \tag{2.5}$$

Rozważmy na początku pochodną funkcji wypłaty względem $S(0)$, niech r, σ, T, K będą dodatnimi stałymi. Korzystając z reguły łańcuchowej różniczkowania, mamy

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)}\frac{dS(T)}{dS(0)}. \tag{2.6}$$

Dla pierwszego z dwóch czynników mamy

$$\frac{d}{dx}max(0, x-K) = \begin{cases} 0, x < K \\ 1, x > K \end{cases}.$$

Pochodna tej funkcji nie istnieje w punkcie $x = K$. Ale ponieważ prawdopodobieństwo zdarzenia $\{S(T) = K\}$ wynosi 0, Y jest prawie na pewno różniczkowalna względem $S(T)$ oraz ma pochodną

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}.$$

Drugi czynnik, z (2.4) równy jest

$$\frac{dS(T)}{dS(0)} = \frac{S(T)}{S(0)}.$$

Łącząc obydwa czynniki z (2.5) dostajemy estymator pochodnej różnic po trajektoriach

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT}\frac{S(T)}{S(0)}\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}},$$

który jest uzyskiwany z symulacji $S(T)$. Ponieważ badaliśmy pochodną względem $S(0)$, powyższy estymator jest estymatorem współczynnika delta.
Możemy zmodyfikować pochodną, aby otrzymać wzór na vegę w modelu Blacka-Scholesa. Zastąpmy (2.5) przez

$$\frac{dY}{d\sigma} = \frac{dY}{dS(T)}\frac{dS(T)}{d\sigma}.$$

Pierwszy czynnik pozostał niezmieniony, natomiast drugi liczymy z (2.4). Łącząc dwa dostajemy estymator pochodnej uzyskiwany metodą różnic po trajektoriach

$$\frac{dY}{d\sigma} = e^{-rT}(-\sigma T + \sqrt{T}Z)S(T)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}.$$

Wartość oczekiwana tego wyrażenia jest vegą modelu Blacka Scholesa. Korzystając z (2.4) możemy pozbyć się Z i napisać estymator vegi jako

$$\frac{dY}{d\sigma} = e^{-rT} \cdot \frac{log(S(T)/S(0)) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma} \cdot S(T)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}.$$

Kolejnym ze współczynników greckich jest ρ, miara wrażliwości na zmianę stopy wolnej od ryzyka. W tym przypadku pochodną policzyć musimy inaczej, ponieważ pochodna $dY/dS(T)$ występująca w rozpisaniu reguły łańcuchowej zależy od r.

$$\begin{aligned}\tfrac{dY}{dr} = (e^{-rT}[S(T)-K]^+)' &= -Te^{-rT}(S(T)-K)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} + e^{-rT}S'(T)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} = \\ &= -Te^{-rT}(S(T) - K)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} + e^{-rT}S(T)T\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} = \\ &= e^{-rT}T\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}(K - S(T) + S(T)) = e^{-rT}TK\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}\end{aligned}$$

Ostatnim ze współczynników greckich pierwszego rzędu jest θ, który mierzy wrażliwość na upływ czasu. Ponownie nie możemy skorzystać z reguły łańcuchowej, ponieważ pierwszy czynnik zależy od T.

$$\begin{aligned}\tfrac{dY}{dT} = -(e^{-rT}[S(T)-K]^+)' &= re^{-rT}(S(T)-K)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} - e^{-rT}S'(T)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} = \\ &= re^{-rT}(S(T) - K)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} - e^{-rT}S(T)(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \tfrac{\sigma Z}{2\sqrt{T}})\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} = \\ &= -e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}(r(K - S(T)) + S(T)(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \tfrac{\sigma Z}{2\sqrt{T}})) = \\ &= -e^{-rT}(rK + S(T)(-\tfrac{1}{2}\sigma^2 + \tfrac{\sigma Z}{2\sqrt{T}}))\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}\end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku vegi, możemy pozbyć się Z korzystając ze wzoru (2.4)

$$\frac{dY}{dT} = -e^{-rT}\Big(rK + S(T) \cdot \frac{log(S(T)/S(0)) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{2T}\Big)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}$$

W metodach Monte Carlo musimy wysymulować wartości $S(T)$, a następnie policzyć wartość oczekiwaną. Wartości oczekiwane poszczególnych estymatorów są odpowiednimi współczynnikami greckimi w modelu Blacka-Scholesa.
Aby porównać wartości teoretyczne współczynników greckich z wynikami pochodzącymi z symulacji Monte Carlo musimy rozważyć przykład z zadanymi wartościami $S(0), r, \sigma, T, K$. Rozważmy więc opcję call na kupno akcji. Mamy o niej następujące informacje.

- Cena bazowa akcji to $S(0) = 1.1$.
- Cena wykonania opcji $K = 1.05$.
- Stopa wolna od ryzyka $r = 6\%$ w skali roku.
- Zmienność instrumentu bazowego $\sigma = 0.2$
- Czas wykonania $T = 1$ (opcję będzie można wykorzystać za rok).

Wartości teoretyczne policzyć możemy ze wzorów na współczynniki greckie modelu Blacka-Scholesa.

$$\Delta_C = \Phi\left(\frac{log(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$\nu = S(0)\phi\left(\frac{log(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\sqrt{T}$$

$$\rho_C = KTe^{-rT}\Phi\left(\frac{log(S(0)/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$\theta_C = \frac{S(0)\phi\left(\frac{log(S(0)/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}\Phi\left(\frac{log(S(0)/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

W powyższych wzorach Φ oraz ϕ oznaczają odpowiednio dystrybuantę oraz gęstość standardowego rozkładu normalnego.

Współczynnik	Wartość teoretyczna	Symulacja MC
delta	0.7365026	0.74051690
vega	0.3592561	0.35968384
rho	0.6599083	0.66371797
theta	-0.0755201	-0.07579146

Powyższa tabela przedstawia porównanie wyników symulacji [kod 2] z wartościami teoretycznymi pochodzącymi ze wzorów Blacka-Scholesa. Tabela potwierdza poprawność symulacji, ponieważ wartości współczynników otrzymane obiema metodami są bardzo zbliżone.

Przykład 2.2. Przyjmijmy, że instrument bazowy jest modelowany przez geometryczny ruch Browna, ale tym razem załóżmy że wypłaty są zależne od trajektorii. Niech

$$S(t_i) = S(t_{i-1})e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)[t_i-t_{i-1}]+\sigma\sqrt{t_i-t_{i-1}}Zi}, \; i = 1, ..., m,$$

gdzie $Z_1, ..., Z_m$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym o średniej 0 i odchyleniu standardowym 1.
Rozważmy azjatycką opcję call

$$Y = e^{-rT}[\overline{S} - K]^+, \text{ gdzie}$$

$$\overline{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S(t_i),$$

dla pewnych ustalonych dat $0 < t_1 < ... < t_m \leqslant T$. Wypłata opcji azjatyckiej zależy od średniej ceny instrumentu bazowego w okresie ważności opcji. Jak w przykładzie poprzednim mamy

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{d\overline{S}}\frac{d\overline{S}}{dS(0)} = e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\overline{S}>K\}}\frac{d\overline{S}}{dS(0)}.$$

Mamy równość

$$\frac{d\overline{S}}{dS(0)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{dS(t_i)}{dS(0)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{S(t_i)}{S(0)} = \frac{\overline{S}}{S(0)}.$$

Delta estymatora pochodnej różnicami po trajektoriach opcji jest postaci

$$\tfrac{dY}{dS(0)} = e^{-rT}\mathbb{1}_{\{\overline{S}>K\}}\tfrac{\tilde{S}}{S(0)}.$$

Ten estymator jest nieobciążony. Ponieważ nie istnieje wzór na opcję azjatycką, ten estymator daje nam realną wartość współczynnika . $\overline{S}$ byłoby symulowane w każdym przypadku estymowania ceny opcji, więc ten estymator wymaga dodatkowych symulacji.
Dodatkowo rozważmy wrażliwość opcji azjatyckiej na zmienność σ. Parametr zmienności σ wpływa na $S(t_i)$ poprzez występowanie we wzorze, ale również przez zależność $S(t_{i-1})$ od σ. Poprzez zróżniczkowanie obu stron dostajemy

$$\tfrac{dS(t_i)}{d\sigma} = \tfrac{dS(t_{i-1})}{d\sigma}\tfrac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} + S(t_i)[-\sigma(t_i - t_{i-1}) + \sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i].$$

Z warunkiem początkowym $\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = 0$, to równanie ma rozwiązanie

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = S(t_i)[-\sigma t_i + \sum_{j=1}^{i}\sqrt{t_j - t_{j-1}}Z_j],$$

co możemy również zapisać w postaci

$$\frac{dS(t_i)}{d\sigma} = S(t_i)[log(S(t_i)/S(0)) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t_i]/\sigma.$$

Estymator pochodnej różnicami po trajektoriach vegi opcji azjatyckiej jest równy

$$e^{-rT}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{dS(t_i)}{d\sigma}\mathbb{1}_{\{\tilde{S}>K\}}.$$

Jak w poprzednim przykładzie, aby przetestować działanie symulacji Monte Carlo, musimy przyjąć konkretne wartości parametrów. Niech będą one takie same jak w przykładzie poprzednim.

- Cena bazowa akcji to $S(0) = 1.1$.
- Cena wykonania opcji $K = 1.05$.
- Stopa wolna od ryzyka $r = 6\%$ w skali roku.
- Zmienność instrumentu bazowego $\sigma = 0.2$
- Czas wykonania $T = 1$ (opcję będzie można wykorzystać za rok).

Wyniki symulacji z kodu 3 przedstawione są w poniższej tabeli.

Współczynnik	Symulacja MC
delta	0.7416177
vega	0.1858914

Tym razem nie możemy porównać symulacji z wartościami teoretycznymi. Widzimy jednak, że wartości współczynników różnią się w stosunku do przykładu wcześniejszego, mimo że użyliśmy tych samych wartości parametrów. Dzięki temu widzimy jak ważny jest przy estymacji rodzaj opcji, a co za tym idzie sposób liczenia wypłaty.

2.3 Metoda ilorazu wiarygodności

Jak zostało to opisane w poprzednim podrozdziale, metody różnic po trajektoriach używamy głównie wtedy, gdy wypłaty jako funkcje parametrów są ciągłe. Metoda ilorazu wiarygodności daje nam alternatywne podejście do estymacji, które nie wymaga różniczkowalności funkcji wypłat.

2.3.1 Metoda

Rozważmy zdyskontowaną funkcję wypłaty Y wyrażoną jako funkcja f, której argumentem jest wektor losowy $X = (X_1, ..., X_m)$. X_i mogą reprezentować różne aktywa bazowe lub wartości jednego aktywa bazowego w różnych momentach czasu. W metodzie ilorazu wiarygodności zakładamy, że X ma funkcję gęstości g zależną od pewnego parametru θ.
Oczekiwana zdyskontowana wypłata dana jest wzorem

$$E_\theta[Y] = E_\theta[f(X_1, ..., X_m)] = \int_{\mathcal{R}^m} f(x) g_\theta(x) dx.$$

Zakładamy, że możemy zamienić kolejność różniczkowania i całkowania, wtedy

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int_{\mathcal{R}^m} f(x) \frac{d}{d\theta} g_\theta(x) dx.$$

Jeśli to zachodzi, możemy wykonać następującą operację

$$\frac{d}{d\theta} E_\theta[Y] = \int_{\mathcal{R}^m} f(x) \frac{\dot{g}_\theta(x)}{g_\theta(x)} g_\theta(x) dx = E_\theta\Big[f(X) \frac{\dot{g}_\theta(x)}{g_\theta(x)}\Big],$$

gdzie $\dot{g}_\theta$ oznacza $dg_\theta/d\theta$. A z tego wynika, że

$$f(X) \frac{\dot{g}_\theta(x)}{g_\theta(x)} \tag{2.7}$$

jest nieobciążonym estymatorem pochodnej $E_\theta[Y]$. To jest estymator uzyskany metodą ilorazu wiarygodności.
Jak w metodzie różnic po trajektoriach, opieramy się tutaj na możliwości zamiany kolejności całkowania i różniczkowania. Ta zamiana jest jednak łatwa do uzasadnienia, ponieważ funkcje gęstości są zwykle różniczkowalnymi funkcjami swoich parametrów, funkcje wypłat nie były. Stąd, zamiana kolejności działań rzadko będzie problemem w metodzie ilorazu wiarygodności. W rozważanych w późniejszej części pracy przykładach, zakładamy więc, że możemy tej zmiany dokonać.

Przykład 2.3. Metodę ilorazu wiarygodności łatwo połączyć z metodą różnic po trajektoriach. Aby to zilustrować rozważmy przykład.

Przypuśćmy, że X jest zmienną losową pochodzącą z rozkładu normalnego o średniej θ i odchyleniu standardowym 1 oraz $Y = f(X)$ dla pewnej funkcji f. Gęstość

X równa jest $g_\theta(x) = \phi(x-\theta)$, gdzie ϕ jest gęstością standardowego rozkładu normalnego. Powtarzając kroki opisane powyżej, otrzymujemy estymator

$$f(X)\frac{\dot{g}_\theta(x)}{g_\theta(x)} = f(X)\frac{-\phi'(X-\theta)}{\phi'(X-\theta)} = f(X)\frac{-\frac{e^{\frac{-(X-\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-2(X-\theta)}{2}}{\frac{e^{\frac{-(X-\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}} = f(X)(X-\theta)$$

dla pochodnej $E_\theta[Y]$. Moglibyśmy również napisać $X(\theta) = \theta + Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz wykorzystać metodę trajektorii do otrzymania estymatora

$$Y'(\theta) = f'(X)\frac{dX}{d\theta} = f'(X).$$

To pokazuje nam, dowolność rozpatrywania parametru θ względem trajektorii i gęstości.

Teraz rozważmy przykład użycia metody ilorazu wiarygodności w estymacji współczynników greckich.

Przykład 2.4. Do estymacji delty w modelu Blacka Scholesa z wykorzystaniem metody ilorazu wiarygodności, musimy przyjąć, że $S(0)$ jest parametrem gęstości $S(T)$. Rozważmy europejską opcję kupna. Przypomnijmy, że

$$S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}, Z \sim N(0,1).$$

Ponieważ $(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z$ ma rozkład normalny, wiemy że $S(T)/S(0)$ ma rozkład log-normalny

$$S(T)/S(0) \sim \mathcal{LN}\Big((r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T\Big),$$

a stąd gęstość jest postaci

$$g(x) = \Phi'(\frac{log(x/S(0)) - (r-1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\frac{log(x/S(0)) - (r-1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}).$$

Oznaczmy tę gęstość przez

$$g(x) = \tfrac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x)), \qquad \zeta(x) = \tfrac{log(x/S(0))-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

gdzie ϕ oznacza gęstość standardowego rozkładu normalnego. Aby znaleźć estymator delty określony w (2.6), liczymy poniższy iloraz

$$\frac{dg(x)/dS(0)}{g(x)} = \frac{(\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x)))'}{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))} = \frac{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))\cdot(-\zeta(x))\cdot\zeta'(x)}{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))} =$$

$$= -\zeta(x)\frac{d\zeta(x)}{dS(0)} = -\zeta(x)\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{-x}{S(0)^2}\frac{S(0)}{x} = \frac{log(x/S(0)) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{S(0)\sigma^2 T}$$

Wzór na deltę dostajemy poprzez przemnożenie powyższej pochodnej przez zdyskontowaną funkcję wypłaty

$$\Delta = e^{-rT}\Big(\frac{log(x/S(0)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{S(0)\sigma^2 T}\Big)(S(T) - K)^+.$$

Jeżeli $S(T)$ jest generowane przy użyciu standardowego rozkładu normalnego jak w rozdziale (2.2.1), wówczas $\zeta(S(T)) = Z$ i estymator upraszcza się do postaci

$$e^{-rT}\frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}}(S(T) - K)^+.$$

Jak widzimy, postać $S(T)$ nie wpływa na postać estymatora, niezależnie od $S(T)$ estymator jest powyższej postaci. To odróżnia tę metodę od metody różnic po trajektoriach, nie zależy ona od zdyskontowanej funkcji wypłaty. Dodatkowo po wyznaczeniu estymatora delty, łatwo przejść do estymatorów innych współczynników. Dla vegi mamy

$$\frac{dg(x)/d\sigma}{g(x)} = -\frac{1}{\sigma} - \zeta(x)\frac{d\zeta(x)}{d\sigma},$$

gdzie

$$\frac{d\zeta(x)}{d\sigma} = \frac{log(S(0)/x) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma^2\sqrt{T}}.$$

Estymatory współczynników są iloczynami zdyskontowanej funkcji wypłaty i pochodnej, stąd estymator vegi jest postaci

$$\nu = e^{-rT}\Big(\frac{Z^2 - 1}{\sigma} - Z\sqrt{T}\Big)(S(T) - K)^+.$$

Po wyznaczeniu wzorów na estymatory przejdźmy do zastosowania ich w symulacjach. Ponieważ estymujemy współczynniki modelu Blacka-Scholesa, możemy porównać je z wartościami teoretycznymi [kod 4]. Tak jak we wcześniejszych przykładach, musimy przyjąć konkretne wartości parametrów. Niech mają one następujące wartości.

- Cena bazowa akcji to $S(0) = 50$.
- Cena wykonania opcji $K = 45$.
- Stopa wolna od ryzyka $r = 8\%$ w skali roku.
- Zmienność instrumentu bazowego $\sigma = 0.3$
- Czas wykonania $T = 1$ (opcję będzie można wykorzystać za rok).

Tabela poniżej przedstawia porównanie współczynników obliczonych ze wzorów teoretycznych i symulacji Monte Carlo.

Współczynnik	Wartość teoretyczna	Symulacja MC
delta	0.7787173	0.7803797
vega	14.8540647	15.3171394

Wyniki przedstawione w tabeli przedstawiają symulacje dla $n = 100000$. Widzimy, że w przypadku obu współczynników wartości teoretyczne i pochodzące z symulacji są podobne.

2.3.2 Współczynniki drugiego rzędu

Estymator różnic po trajektoriach sprawia problemy przy estymacji pochodnych drugiego stopnia. W metodzie ilorazu wiarygodności nie ma różnicy, czy estymujemy pochodne pierwszego czy drugiego stopnia.
Niech $\ddot{g}_\theta$ oznacza drugą pochodną g_θ w punkcie θ. Przyjmując te same założenia i przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w przypadku $\dot{g}_\theta$ zauważamy, że

$$f(X)\frac{\ddot{g}_\theta(X)}{g_\theta(X)} \tag{2.8}$$

jest nieobciążonym estymatorem

$$\frac{d^2 E_\theta[f(X)]}{d\theta^2}.$$

Zilustrujemy to poniższym przykładem.

Przykład 2.5 (Gamma w modelu Blacka-Scholesa)**.** Gamma jest współczynnikiem greckim stopnia drugiego. Do znalezienia estymatora gammy skorzystamy z (2.6).
Analogicznie jak w przykładzie (2.4)

$$S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}, Z \sim N(0,1)$$

$$g(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x)) \qquad \zeta(x) = \frac{log(x/S(0)) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

$$\frac{d^2 g(S(T))/dS^2(0)}{g(S(T))} = \frac{(\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x)))''}{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))} = \frac{(\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))\cdot(-\zeta(x))\cdot\zeta'(x))'}{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))\cdot[(\zeta(x))^2\cdot(\zeta'(x))^2 - (\zeta'(x))^2 + \zeta(x)\zeta''(x)]}{\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\phi(\zeta(x))} =$$

$$= (\zeta'(x))^2[(\zeta(x))^2 - 1] + \zeta(x)\zeta''(x) = (\frac{d\zeta(x)}{dS(0)})^2[(\zeta(x))^2-1] + \zeta(x)\cdot\frac{d^2\zeta(x)}{dS(0)^2} =$$

$$= (\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{-x}{S(0)^2}\frac{S(0)}{x})^2([(\zeta(x))^2-1] + \zeta(x)\cdot(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{-x}{S(0)^2}\frac{S(0)}{x})' =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2 T S(0)^2}[(\zeta(x))^2 - 1] + \zeta(x) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{T}S(0)^2} =$$
$$= \frac{\zeta(S(T))^2 - 1}{S(0)^2\sigma^2 T} - \frac{\zeta(S(T))}{S(0)^2\sigma\sqrt{T}}.$$

Przemnożenie powyższej pochodnej przez zdyskontowaną funkcję wypłaty $Y = e^{-rT}(S(T) - K)^+$ daje nam nieobciążony estymator współczynnika gamma.

$$\Gamma = \left[\frac{\zeta(S(T))^2-1}{S(0)^2\sigma^2 T} - \frac{\zeta(S(T))}{S(0)^2\sigma\sqrt{T}}\right] e^{-rT}(S(T) - K)^+.$$

Ponieważ jest to gamma modelu Blacka-Scholesa, możemy porównać symulacje z wartościami teoretycznymi [kod 5]. Przyjmijmy, następujące wartości parametrów.

- Cena bazowa akcji to $S(0) = 50$.
- Cena wykonania opcji $K = 45$.
- Stopa wolna od ryzyka $r = 8\%$ w skali roku.
- Zmienność instrumentu bazowego $\sigma = 0.3$
- Czas wykonania $T = 1$ (opcję będzie można wykorzystać za rok).

Współczynnik	Wartość teoretyczna	Symulacja MC
gamma	0.01980542	0.01817341

Tabela potwierdza, że estymator otrzymany metodą ilorazu wiarygodności zgadza się z wartością teoretyczną.

Przykład 2.6. Drugie pochodne możemy również estymować łącząc metodę różnic po trajektoriach z metodą ilorazu wiarygodności. Ponieważ przy drugich pochodnych operację różniczkowania musimy wykonać 2 razy, estymatory będą zależały od kolejności użycia metod.
W tym przykładzie wyestymujemy gammę i deltę modelu Blacka-Scholesa. Dla przypomnienia

$$S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}, Z \sim N(0,1).$$

W pierwszej części zaczniemy od metody ilorazu wiarygodności, następnie skorzystamy z metody różnic po trajektoriach. Pokazaliśmy już w przykładzie (2.4), że estymator delty uzyskany metodą wiarygodności jest postaci

$$e^{-rT}\frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}}(S(T) - K)^+.$$

Dlatego estymator gammy pochodzący z połączenia metod w tej kolejności jest postaci

$$\frac{d}{dS(0)}\Big(e^{-rT}(S(T)-K)^{+}\frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}}\Big) = \Big[e^{-rT}\Big(e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}\frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}} - \frac{S(T)Z}{S(0)^2\sigma\sqrt{T}}+$$

$$+\frac{Z}{S(0)^2\sigma\sqrt{T}}K\Big)\Big]\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} = e^{-rT}\frac{Z}{S(0)^2\sigma\sqrt{T}}K(S(T)-K)^{+}.$$

Teraz zamienimy kolejność metod i zacznijmy od metody różnic po trajektoriach. Z przykładu 2.1. mamy estymator delty

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT}\frac{S(T)}{S(0)}\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}.$$

Estymator gammy jest wówczas postaci

$$e^{-rT}\Big(\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}\frac{S(T)}{S(0)}\cdot\frac{Z}{S(0)\sigma\sqrt{T}} + \mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}S(T)\frac{d}{dS(0)}\frac{1}{S(0)}\Big) =$$

$$= e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}}\Big(\frac{S(T)}{S(0)^2}\Big)\Big(\frac{Z}{\sigma\sqrt{T}}-1\Big).$$

Natomiast użycie jedynie metody ilorazu wiarygodności prowadzi do estymatora

$$e^{-rT}\Big(\frac{Z^2-1}{S(0)^2\sigma^2 T} - \frac{Z}{S(0)^2\sigma\sqrt{T}}\Big)(S(T)-K)^{+}.$$

Aby porównać estymatory otrzymane różnymi sposobami przyjmijmy następujące wartości parametrów

- Cena bazowa akcji to $S(0) = 100$
- Stopa wolna od ryzyka $r = 5\%$ w skali roku.
- Zmienność instrumentu bazowego $\sigma = 0.3$

Rozważymy kilka wartości K i T. Tabele poniżej przedstawiają porównanie estymatorów uzyskanych na 3 różne sposoby -kombinacjami metody ilorazu wiarygodności (LR) i metody różnic po trajektoriach (PW) w różnej kolejności oraz metodą ilorazu wiarygodności [kod 6].

1. $T = 0.1$

K	Wartość teoretyczna	LR-PW	PW-LR	LR
90	0.02020582	0.02029671	0.02034055	0.02098968
100	0.04184189	0.04194662	0.04198921	0.04245018
110	0.02793373	0.02793364	0.02790319	0.02710552

2. $T = 0.5$

K	Wartość teoretyczna	LR-PW	PW-LR	LR
90	0.01450607	0.0143272	0.01424483	0.01365826
100	0.01834072	0.01847399	0.01849634	0.01865624
110	0.01833469	0.01835769	0.01832913	0.01782366

Porównaliśmy estymatory współczynnika gamma dla dwóch różnych T oraz dla trzech wartości K dla każdego z tych T. W każdym z tych przypadków najbliżej wartości teoretycznej Γ był estymator pochodzący z połączenia metod, w którym zaczęliśmy od metody ilorazu wiarygodności wiarygodności, a następnie skorzystaliśmy z metody różnic po trajektoriach.

Podsumowanie

W pierwszej części pracy został zaprezentowany model Blacka-Scholesa. Jest to model teoretyczny, dzięki niemu jesteśmy w stanie obliczyć nie tylko cenę opcji, ale również wyznaczyć wartości współczynników greckich.
W mojej pracy starałam się zaprezentować alternatywę dla modelu Blacka-Scholesa, tj. metody numeryczne Monte Carlo. Przede wszystkim chciałam pokazać wykorzystanie metod Monte Carlo w estymacji współczynników greckich. Zaprezentowane zostały 3 różne metody, każda z nich opiera się na innych założeniach. Podchodzą one do estymacji z innej strony. Bazując na modelu Blacka-Scholesa, byłam w stanie porównać wyniki symulacji z wartościami faktycznymi. Taka możliwość istnieje jednak tylko w przypadku opcji europejskich. Dlatego też, metody Monte Carlo są niezwykle ważne przy innych rodzajach opcji, kiedy nie możemy skorzystać ze wzorów.
Jak pokazały to liczne przykłady, wyniki pochodzące z symulacji zgadzają się z wartościami teoretycznymi, co wskazuje na słuszność metod symulacyjnych. Należy jednak pamiętać, że wyniki te są jedynie przybliżone. Są jednak sposoby na kontrolowanie błędu metody, np. badanie obciążenia i wariancji estymatorów.

A Kody

1. Kod do przykładu 1.1.

```
#zdefiniowanie parametrow z przykladu
S0<-60
K<-70
r<-0.08
sigma<-0.5
T<-0.5

#obliczenie wartosci teoretycznej
#pnorm- dystrybuanta rozkladu normalnego
C<-S0*pnorm((log(S0/K)+(r+ 0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T)))
-exp(-r*T)*K*pnorm((log(S0/K)+(r- 0.5*sigma^2)*T)/
(sigma*sqrt(T)))

#macierz wynikow
wyniki<-data.frame(matrix(NA, nrow = 4, ncol = 2))
colnames(wyniki)<-c("n", "Symulacje MC")
#ustalenie roznych wartosci n
wyniki$n<-c(100, 1000, 10000, 100000)

n<-100000

opcja_call<-data.frame(matrix(NA, nrow = n, ncol = 3))
colnames(opcja_call)<-c("Z", "S", "C")

for ( i in 1:n){
#losowanie liczby ze standardowego rozkladu normalnego
opcja_call$Z[i]<-rnorm(1)
#obliczenie wartosci S(t)
opcja_call$S[i]<-S0*exp((r-0.5*sigma^2)*T+
sigma*sqrt(T)*opcja_call$Z[i])
#wartosc zdyskontowanej funkcji wyplaty
opcja_call$C[i]<-exp(-r*T)*max(0,opcja_call$S[i]-K)
}

#zapisanie wyniku, ktorym jest srednia z symulacji C
wyniki[which(wyniki$n==n),2]<-mean(opcja_call$C)
```

2. Kod do przykładu 2.1.

```
#utworzenie macierzy wynikow
wyniki<-data.frame(matrix(NA, nrow = 100000, ncol = 6))
colnames(wyniki)<-c("Z", "S", "delta", "vega", "rho", "theta")

#zdefiniowanie parametrow z przykladu
S0<-1.1
K<-1.05
r<-0.06
sigma<-0.2
T<-1

#obliczenie wartosci teoretycznych
delta<-pnorm((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T)))
vega<-S0*dnorm((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T)))
*sqrt(T)
rho<-K*T*exp(-r*T)*pnorm(((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*
T)/(sigma*sqrt(T)))-sigma*sqrt(T))
theta<-(-1)*S0*dnorm((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*
sqrt(T)))*sigma/(2*sqrt(T))-r*K*exp(-r*T)*pnorm((log(S0/K)+
(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T))-sigma*sqrt(T))

for( i in 1:1000000){

#losowanie liczby ze standardowego rozkladu normalnego
wyniki$Z[i]<-rnorm(1)
#obliczenie wartosci S(t)
wyniki$S[i]<-S0*exp((r-0.5*(sigma^2))*T+sigma*
sqrt(T)*wyniki$Z[i])
#wartosc funkcji wyplaty
if(max(0,wyniki$S[i]-K)==0 ){
#zero gdy opcja nie bedzie wykorzystana
wyniki$delta[i]<-0
wyniki$vega[i]<-0
wyniki$rho[i]<-0
wyniki$theta[i]<-0
} else{
# w przeciwnym przypadku czynnik dyskontujacy
#przemnozony przez odpowiednia pochodna
wyniki$delta[i]<-exp(-r*T)*(wyniki$S[i]/S0)
wyniki$vega[i]<-exp(-r*T)*((log(wyniki$S[i]/S0)-
(r+0.5*sigma^2)*T)/sigma)*wyniki$S[i]
wyniki$rho[i]<-exp(-r*T)*T*K
wyniki$theta[i]<--exp(-r*T)*(r*K+ (log(wyniki$S[i]/S0)-
(r+0.5*sigma^2)*T)/(2*T)*wyniki$S[i])
}}
```

```
przyklad1<-data.frame(matrix(NA, nrow = 4, ncol = 3))
colnames(przyklad1)<-c("Wspolczynnik", "Teoretyczna", "MC")
#zapisanie wynikow teoretycznych
przyklad1$Wspolczynnik<-c("delta", "vega", "rho", "theta")
przyklad1$Teoretyczna<-c(delta, vega, rho, theta)
# wynikiem drugim jest wartosc oczekiwana symulacji
przyklad1$MC<-c(mean(wyniki$delta), mean(wyniki$vega),
mean(wyniki$rho), mean(wyniki$theta))

View(przyklad1)
```

3. Kod do przykładu 2.2.

```
#utworzenie macierzy wynikow
wyniki<-data.frame(matrix(NA, nrow = 100000, ncol =3))
colnames(wyniki)<-c("srS", "delta", "vega")

#zdefiniowanie parametrow z przykladu
S0<-1.1
K<-1.05
r<-0.06
sigma<-0.2
T<-1
ile_t<-20

#ustalenie odstepow czasu do wyliczenia trajektorii
t<-seq(from=0,to=1,length.out = ile_t)
S<-c()
dsigma<-c()

for ( j in 1:100000){
#wartosci w chwili zero
S<-c()
dsigma<-c()
S[1]<-S0
dsigma[1]<-0

for( i in 2:ile_t){
#rekurencyjny wzor na S
S[i]=S[i-1]*exp((r-0.5*(sigma^2))*(t[i]-t[i-1])+
sigma*sqrt(t[i]-t[i-1])*rnorm(1))
dsigma[i]<-S[i]*(log(S[i]/S0)-(r+
0.5*sigma^2)*t[i])/sigma
}
#srednie S
wyniki$srS[j]<-mean(S)

#funkcja wyplaty
#zero gdy opcja nie bedzie wykorzystana
if(max(0,wyniki$srS[j]-K)==0 ){
wyniki$delta[j]<-0
wyniki$vega[j]<-0
}
#zdyskontowana funkcja wyplaty
else{
wyniki$delta[j]<-exp(-r*T)*(wyniki$srS[j]/S0)
wyniki$vega[j]<-exp(-r*T)*mean(dsigma)

}
```

```
}

#zapisanie wynikow
przyklad2<-data.frame(matrix(NA, nrow = 2, ncol = 2))
colnames(przyklad2)<-c("Wspolczynnik", "MC")

przyklad2$Wspolczynnik<-c("delta", "vega")
#wartosc oczekiwana z symulacji
przyklad2$MC<-c(mean(wyniki$delta), mean(wyniki$vega))

View(przyklad2)
```

4. Kod do przykładu 2.4.

```
#utworzenie macierzy wynikow
wyniki<-data.frame(matrix(NA, nrow = 100000, ncol =4))
colnames(wyniki)<-c( "Z", "S", "delta", "vega")

#zdefiniowanie parametrow z przykladu
S0<-50
K<-45
r<-0.08
sigma<-0.3
T<-1

for( i in 1 :100000){
#losowanie liczby ze standardowego rozkladu normalnego
wyniki$Z[i]<-rnorm(1)
# obliczenie S
wyniki$S[i]<-S0*exp((r-0.5*(sigma^2))*T
+sigma*sqrt(T)*wyniki$Z[i])

#funkcja wyplaty
if(max(0,wyniki$S[i]-K)==0){

wyniki$delta[i]<-0
wyniki$vega[i]<-0
}
else{
wyniki$delta[i]<-exp(-r*T)*wyniki$Z[i]/
(S0*sigma*sqrt(T))*(wyniki$S[i]-K)
wyniki$vega[i]<-exp(-r*T)*(((((wyniki$Z[i])^2)
-1)/sigma)-(wyniki$Z[i])*sqrt(T))*(wyniki$S[i]-K)
}}

#obliczenie wartosci teoretycznych wspolczynnikow
delta<-pnorm((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T)))
vega<-S0*dnorm((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/
(sigma*sqrt(T)))*sqrt(T)

#zdefiniowanie macierzy wynikow
przyklad3<-data.frame(matrix(NA, nrow = 2, ncol = 3))
colnames(przyklad3)<-c("Wspolczynnik", "Teoretyczna", "MC")

przyklad3$Wspolczynnik<-c("delta", "vega")
#wartosc oczekiwana symulacji
przyklad3$MC<-c(mean(wyniki$delta), mean(wyniki$vega))
przyklad3$Teoretyczna<-c(delta, vega)

View(przyklad3)
```

5. Kod do przykładu 2.5.

```
#utworzenie macierzy wynikow
wyniki<-data.frame(matrix(NA, nrow = 100000, ncol =2))
colnames(wyniki)<-c( "S", "gamma")

#zdefiniowanie parametrow z przykladu
S0<-50
K<-45
r<-0.08
sigma<-0.3
T<-1

#implementacja funkcji zeta
zeta<-function(x){
return((log(x/S0)-(r-0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T)))
}

for( i in 1 :100000){
#losowanie liczby ze standardowego rozkladu normalnego
wyniki$Z[i]<-rnorm(1)
#obliczenie wartosci S
wyniki$S[i]<-S0*exp((r-0.5*(sigma^2))*T+
sigma*sqrt(T)*wyniki$Z[i])

#funkcja wyplaty
if(max(0,wyniki$S[i]-K)==0){

wyniki$gamma[i]<-0
}
else{
wyniki$gamma[i]<-exp(-r*T)*((zeta(wyniki$S[i])^2-1)/
(S0*S0*sigma*sigma*T)-zeta(wyniki$S[i])/(S0*S0*
sigma*sqrt(T)))*(wyniki$S[i]-K)
}}

#wartosc teoretyczna
gamma<-dnorm((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/
(sigma*sqrt(T)))/(S0*sigma*sqrt(T))

#utworzenie macierzy wynikow
przyklad4<-data.frame(matrix(NA, nrow = 1, ncol = 3))
colnames(przyklad4)<-c("Wspolczynnik", "Teoretyczna", "MC")

przyklad4$Wspolczynnik<-c("gamma")
#wartosc oczekiwana symulacji
przyklad4$MC<-c(mean(wyniki$gamma))
przyklad4$Teoretyczna<-c(gamma)
```

6. Kod do przykładu 2.6.

```
#zdefiniowanie parametrow z przykladu
S0<-100
r<-0.05
sigma<-0.3

#utworzenie macierzy wynikow
wyniki<-data.frame(matrix(NA, nrow = 100000, ncol =6))
colnames(wyniki)<-c("S", "delta1", "gamma1",
 "delta2", "gamma2", "gamma3")

T<-0.1
K<-90

gamma<-dnorm((log(S0/K)+(r+0.5*sigma^2)*T)/
(sigma*sqrt(T)))/(S0*sigma*sqrt(T))

for( i in 1:1000000){
#losowanie liczby ze standardowego rozkladu normalnego
Z<-rnorm(1)
#obliczenie wartosci S
wyniki$S[i]<-S0*exp((r-0.5*(sigma^2))*T+sigma*sqrt(T)*Z)
#funkcja wyplaty
if(max(0,wyniki$S[i]-K)==0){

wyniki$delta1[i]<-0
wyniki$delta2[i]<-0
wyniki$gamma1[i]<-0
wyniki$gamma2[i]<-0
wyniki$gamma3[i]<-0
}
else{
wyniki$delta1[i]<-exp(-r*T)*Z/(S0*sigma*sqrt(T))*
(wyniki$S[i]-K)
wyniki$gamma1[i]<-exp(-r*T)*Z*K/(sigma*sqrt(T)*S0^2)
wyniki$delta2[i]<-exp(-r*T)*(wyniki$S[i]/S0)
wyniki$gamma2[i]<-exp(-r*T)*(wyniki$S[i]/(S0^2))*
(Z/(sigma*sqrt(T))-1)
wyniki$gamma3[i]<-exp(-r*T)*(((Z^2)-1)/((S0^2)*
(sigma^2)*T)-Z/((S0^2)*(sigma)*sqrt(T)))*(wyniki$S[i]-K)
}}


przyklad5<-data.frame(matrix(NA, nrow = 1, ncol = 5))
colnames(przyklad5)<-c("Wspolczynnik",
 "Teoretyczna", "LRPW", "PWLR" ,"LR")
```

```
#wartosc oczekiwana z symulacji
przyklad5$Wspolczynnik<-c("gamma")
przyklad5$LRPW<-c( mean(wyniki$gamma1))
przyklad5$PWLR<-c(mean(wyniki$gamma2))
przyklad5$LR<-c(mean(wyniki$gamma3))
przyklad5$Teoretyczna<-c(gamma)
View(przyklad5)
```

B Definicje i twierdzenia

W tym dodatku przedstawione zostaną ważne definicje i twierdzenia użyte w pracy.

B.1

Twierdzenie B.1 (Twierdzenie o reprezentacji martyngałowej). *Niech $W_t = (W_t^1, ..., W_t^n)$ będzie n- wymiarowym ruchem Browna względem miary P^*. Załóżmy, że $M_t = (M_t^1, ..., M_t^n)$ jest n-wymiarowym P^*-martyngałem, takim że*

$$dM_t^j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}(t) dW_t^i.$$

Macierz zmienności $(\sigma_{ij}(t))_{ij}^n$ jest nieosobliwa z prawdopodobieństwem 1. Wtedy jeżeli N_t jest 1- wymiarowym P^*-martyngałem, to istnieje n-wymiarowy $\mathcal{F}_t-$ prognozowalny proces $\phi_t = (\phi_t^1, ..., \phi_t^n)$, taki że

$$\int_0^T (\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t) \phi_t^j)^2 dt < \infty$$

oraz

$$N_t = N_0 + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \phi_s^j dM_s^j.$$

B.2

Definicja B.1. Rodzinę zmiennych losowych $\{X_i, i \in I\}$ nazywamy jednostajnie całkowalną, jeśli

$$\lim_{C \to \infty} \sup_{i \in I} E|X_i| I_{\{|X_i| > C\}} = 0.$$

Twierdzenie B.2. *Klasa zmiennych losowych ograniczonych w L^p dla $p > 1$ jest jednostajnie całkowalna.*

Twierdzenie B.3 (Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej). *Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych, który zbiega do X prawie na pewno. Załóżmy, że istnieje zmienna losowa Y taka, że $|X_n| \leqslant Y$ prawie na pewno dla wszystkich n oraz $\mathbb{E}[Y] < \infty$. Wówczas*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

Uogólnieniem twierdzenia Lebesgue'a jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie B.4. *Ciąg $\{X_n\}$ zbiega do X w L^1 według normy wtedy i tylko wtedy, gdy zbiega do X według miary i jednostajnie całkowalny.*

Literatura

[1] Glasserman P.: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer 2003

[2] Jakubowski J.: *Modele matematyczne rynków instrumentów pochodnych I*, Uniwersytet Warszawski, 2011

[3] Hull J. C.: *Options, futures, and other derivatives*, Tenth edition, Pearson Education, 2018

[4] Weron A, Weron R.: *Inżynieria finansowa*, wydanie drugie, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1999

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_integrability [data dostępu 10.06.2019]

[6] Ziętek-Kwaśniewska K.: *Symulacje Monte Carlo jako metoda wyceny opcji*, http://www.kis.pwszchelm.pl/publikacje/VIII/Zietek.pdf [dostęp online 15.05.2019]

[7] https://www.probabilitycourse.com/chapter7/7_1_2_central_limit_theorem.php [dostęp online 11.04.2019]

[8] Haugh M.: *Estimating the Greeks*, 2017 http://www.columbia.edu/ mh2078/MonteCarlo/MCS_Greeks.pdf [dostęp online 15.05.2019]

[9] Latała R.: *Wstęp do analizy stochastycznej*, Uniwersytet Warszawski, 2011

[10] https://www.probabilitycourse.com/chapter7/7_1_2_central_limit_theorem.php [dostęp online 11.04.2019]

[11] https://nptel.ac.in/courses/108106083/lecture21_ExpectationofCRVs.pdf [dostęp online 24.05.2019]