Propiedades de los conjuntos difusos

1. Propiedad conmutativa
2. Propiedad asociativa
3. Propiedad distributiva
4. Propiedad Identidad
5. Propiedad transitiva
6. Propiedad idempotencia
7. Propiedad involutiva
8. Leyes de Morgan

Propiedad conmutativa

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$$
$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

$\mu A(x)$=[0.2, 0.5, 0.8] y $\mu B(x)$=[0.7, 0.4, 0.3] , con x=[1, 2, 4] para ambos conjuntos.

Calculamos $\mu A \cup B(x)$ = max($\mu A(x)$,$\mu B(x)$):

$\mu A \cup B(x)$ = [max(0.2, 0.7), max(0.5, 0.4), max(0.8, 0.3)] = [0.7, 0.5, 0.8]

Calculamos $\mu A \cap B(x)$ = min($\mu A(x)$,$\mu B(x)$):

$\mu A \cap B\ (x)$ = [min(0.2, 0.7), min(0.5, 0.4), min(0.8, 0.3)] = [0.2, 0.4, 0.3]

Propiedad asociativa

$$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C}$$
$$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C}$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

$\mu A(x)$=[0.2, 0.5, 0.8], $\mu B(x)$=[0.7, 0.4, 0.3] y $\mu C(x)$=[0.6, 0.3, 0.9] , con x=[1, 2, 4] para todos los conjuntos.

Propiedad distributiva

$$\underset{\sim}{C} \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = (\underset{\sim}{C} \cap \underset{\sim}{A}) \cup (\underset{\sim}{C} \cap \underset{\sim}{B})$$
$$\underset{\sim}{C} \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = (\underset{\sim}{C} \cup \underset{\sim}{A}) \cap (\underset{\sim}{C} \cup \underset{\sim}{B})$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

$\mu A(x)$ = [0.2, 0.5, 0.8], $\mu B(x)$ = [0.7, 0.4, 0.3] y $\mu C(x)$ = [0.6, 0.3, 0.9] ,

con x = [1, 2, 4] para todos los conjuntos.

Propiedad identidad

$$\underset{\sim}{A} \cup \phi = \underset{\sim}{A}; \qquad \text{máx}(\mu_{\underset{\sim}{A}}, 0) = \mu_{\underset{\sim}{A}}$$
$$\underset{\sim}{A} \cup U = U; \qquad \text{máx}(\mu_{\underset{\sim}{A}}, 1) = 1$$
$$\underset{\sim}{A} \cap \phi = \phi; \qquad \text{mín}(\mu_{\underset{\sim}{A}}, 0) = 0$$
$$\underset{\sim}{A} \cap U = \underset{\sim}{A}; \qquad \text{mín}(\mu_{\underset{\sim}{A}}, 1) = \mu_{\underset{\sim}{A}}$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

$\mu A(x)$ = [0.2, 0.5, 0.8],

Conjunto vacío: $\mu\emptyset(x)$ = [0, 0, 0],

Conjunto universal: $\mu U(x)$ = [1, 1, 1],

con x = [1, 2, 4] para todos los conjuntos.

Propiedad transitiva

$$\text{Si } \underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \text{ y } \underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{C} \quad \text{entonces} \quad \underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{C}$$
$$\text{Si } \mu_{\underset{\sim}{A}} \leq \mu_{\underset{\sim}{B}} \text{ y } \mu_{\underset{\sim}{B}} \leq \mu_{\underset{\sim}{C}} \quad \text{entonces} \quad \mu_{\underset{\sim}{A}} \leq \mu_{\underset{\sim}{C}}$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

$\mu A(x)$ = [0.2, 0.4, 0.6], $\mu B(x)$ = [0.3, 0.5, 0.7] y $\mu C(x)$ = [0.4, 0.6, 0.8] ,

con x = [2, 5, 6] para todos los conjuntos.

Propiedad idempotencia

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} &= \underset{\sim}{A} \\ \text{máx}(\mu_{\underset{\sim}{A}}, \mu_{\underset{\sim}{A}}) &= \mu_{\underset{\sim}{A}} \\ \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} &= \underset{\sim}{A} \\ \text{mín}(\mu_{\underset{\sim}{A}}, \mu_{\underset{\sim}{A}}) &= \mu_{\underset{\sim}{A}} \end{aligned}$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

$\mu A(x)$ = [0.2, 0.5, 0.8],

con x = [1, 2, 4].

Propiedad involutiva

$$\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}} = \underset{\sim}{A}$$

$$\mu_{\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}}} = 1 - \mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}} = 1 - (1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}) = \mu_{\underset{\sim}{A}}$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

$\mu A(x)$ = [0.2, 0.5, 0.8],

con x = [1, 2, 4].

Leyes de Morgan

$$\overline{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$$

$$\overline{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cup \overline{\underset{\sim}{B}}$$

Ejemplo:

Conjuntos difusos:

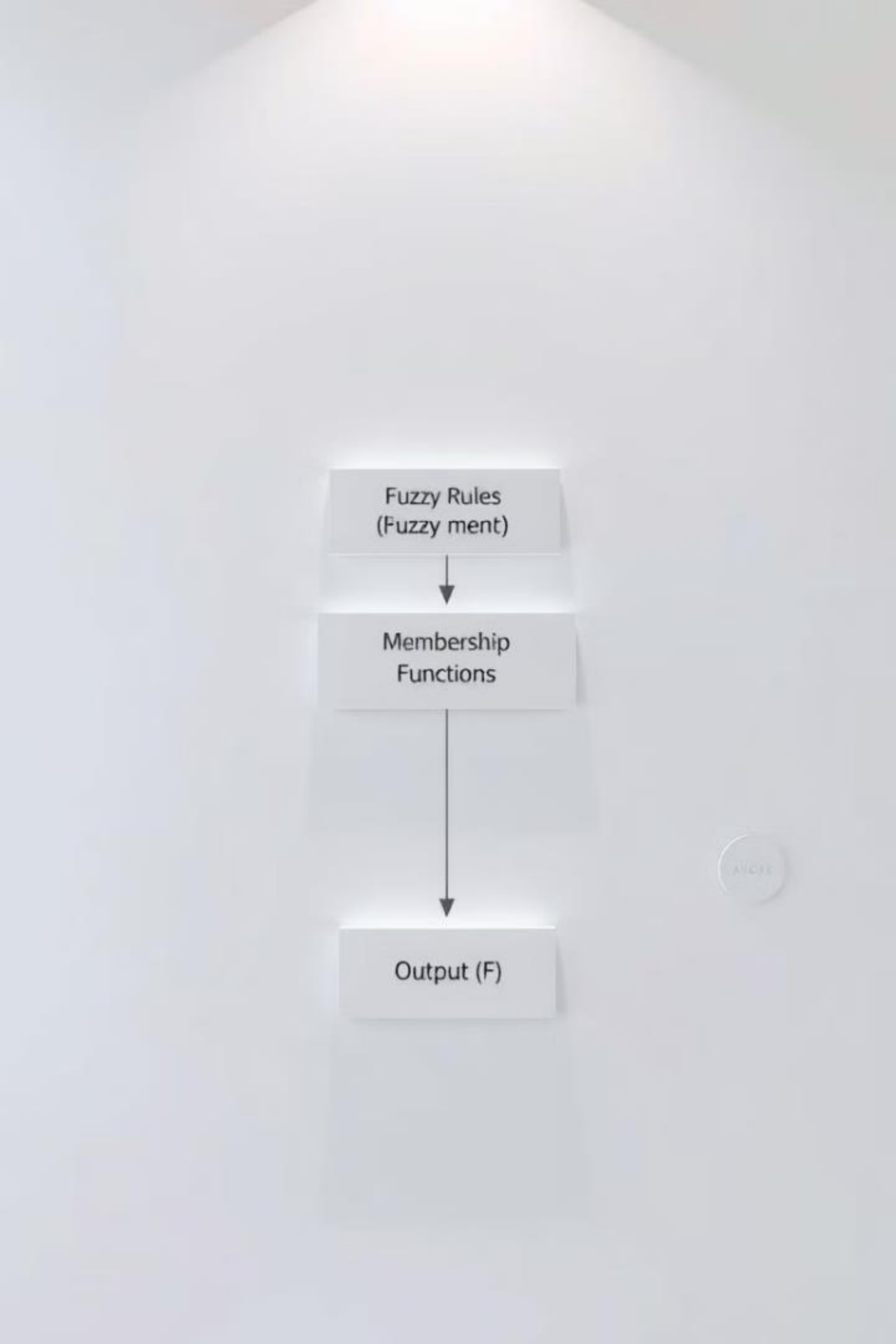
$\mu A(x)$ = [0.2, 0.5, 0.8], $\mu B(x)$ = [0.7, 0.4, 0.3],

con x = [1, 2, 4] para ambos conjuntos.

Variables Lingüísticas

Si una variable puede tomar palabras en el lenguaje natural como sus valores, se le denomina variable lingüística, donde las palabras son caracterizadas por conjuntos difusos, definidos en el universo de discurso en el que la variable es definida.

Una variable lingüística es una variable cuyo valor no es numérico, sino una palabra o frase del lenguaje natural. Estas palabras o frases son caracterizadas mediante conjuntos difusos definidos en un universo de discurso.



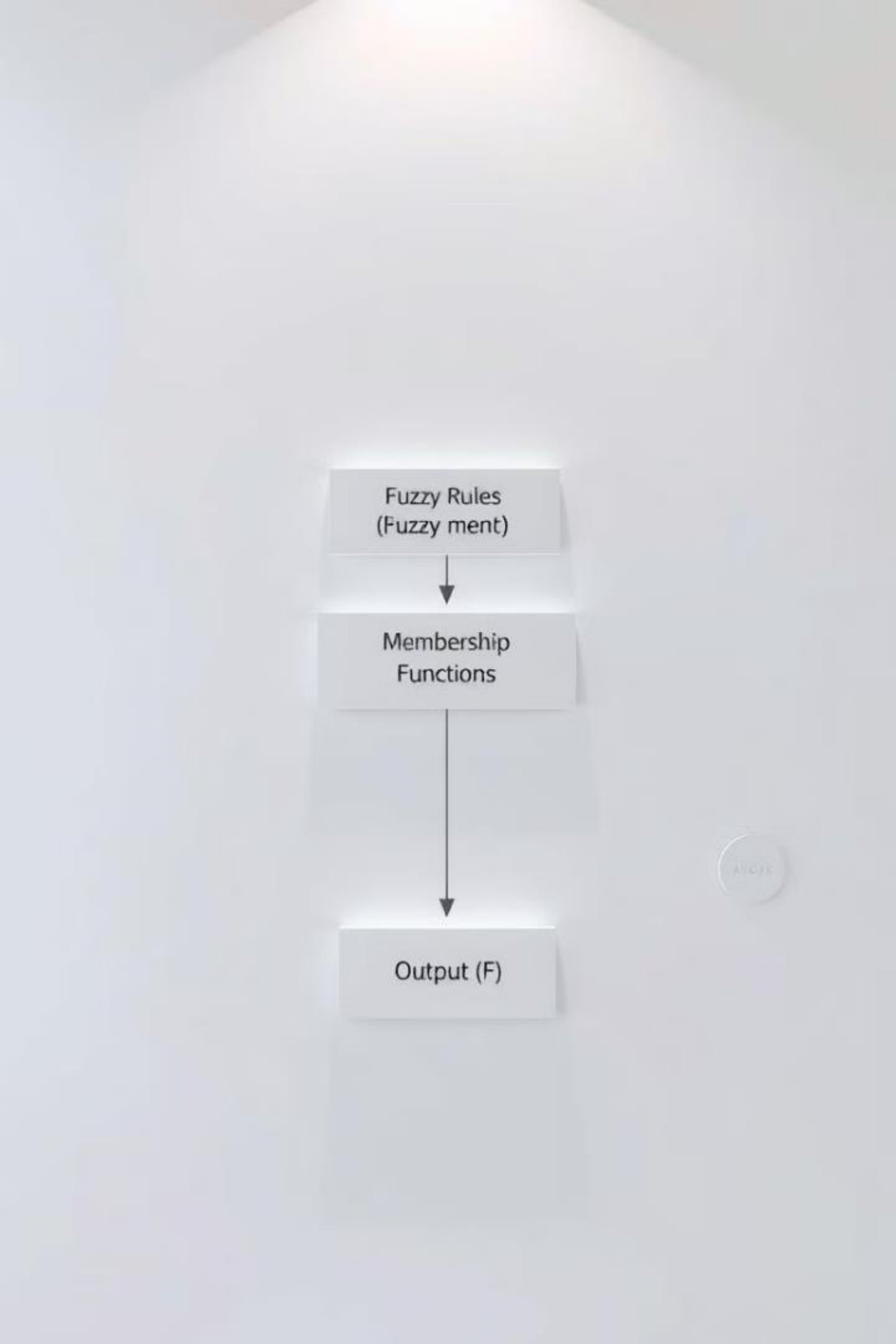
Variables Lingüísticas

Una variable lingüística se caracteriza por el quinteto:

$$(A,T(A),U,G,M)$$

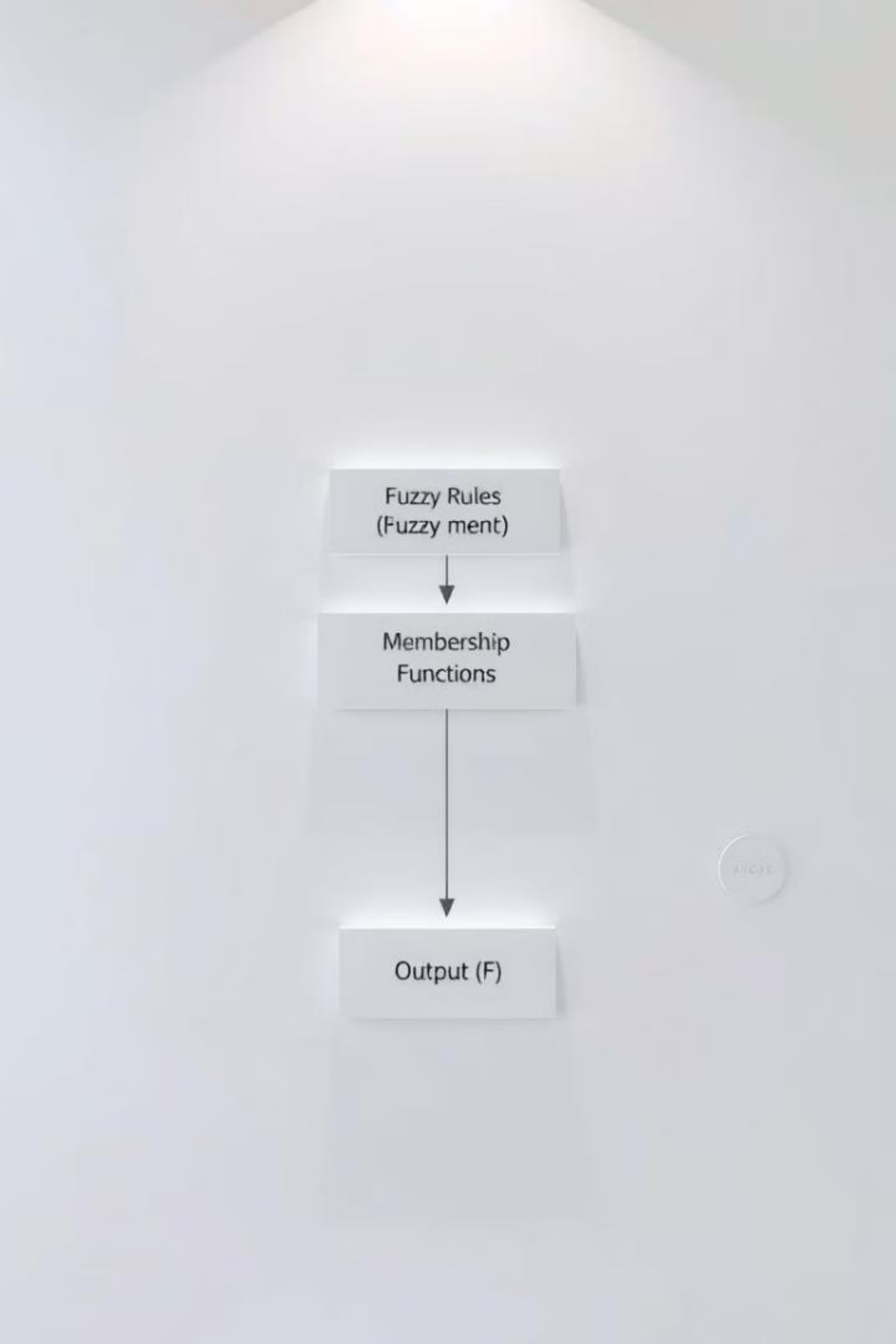
Donde:

1. A: Nombre de la variable lingüística. Ejemplo: "Temperatura".
2. $T(A)$: Conjunto de términos lingüísticos o etiquetas asociados a la variable. Ejemplo: Para "Temperatura“, $T(A)$ = {baja, moderada, alta}
3. U: Universo de discurso. Es el rango físico en el que se definen los valores. Ejemplo: Si la temperatura varía de 0°C a 100°C, entonces U = [0, 100].
4. G: Gramática. Define las reglas para combinar términos en $T(A)$. Ejemplo: Si se permite usar adjetivos como "muy alta" o "poco baja".
1. M: Mecanismo de interpretación. Asigna un conjunto difuso a cada término lingüístico en $T(A)$. Ejemplo: El término "alta" podría representarse con una función triangular o trapezoidal.

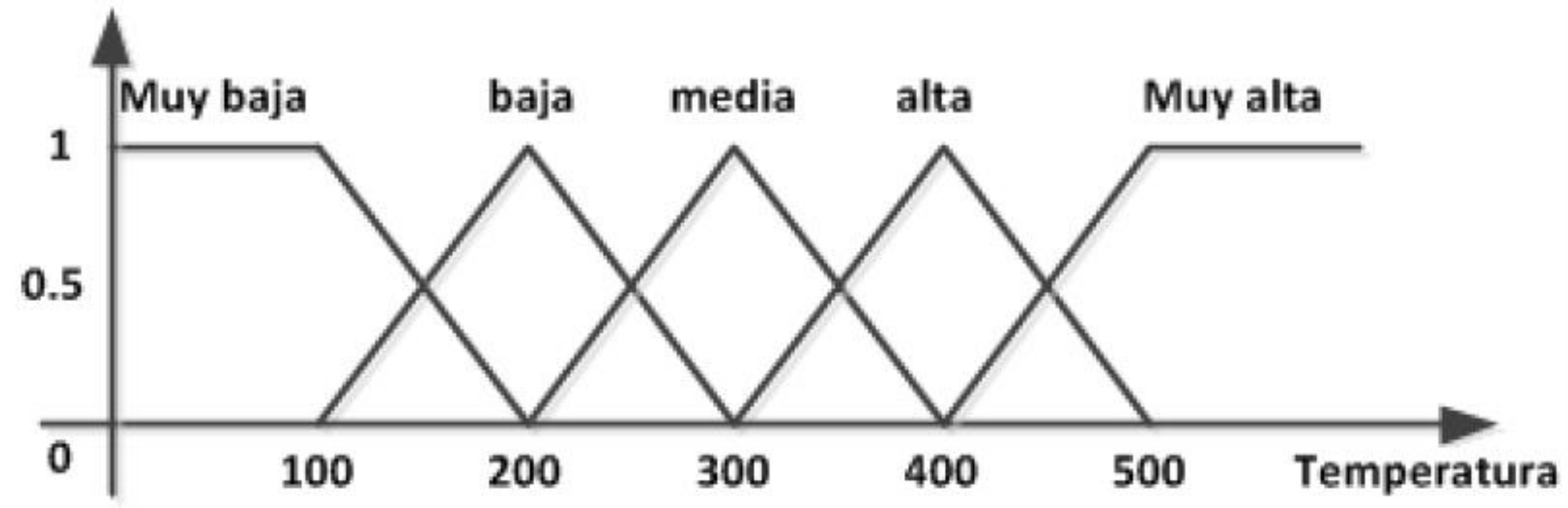


¿Por que es importante el concepto de variable lingüística?

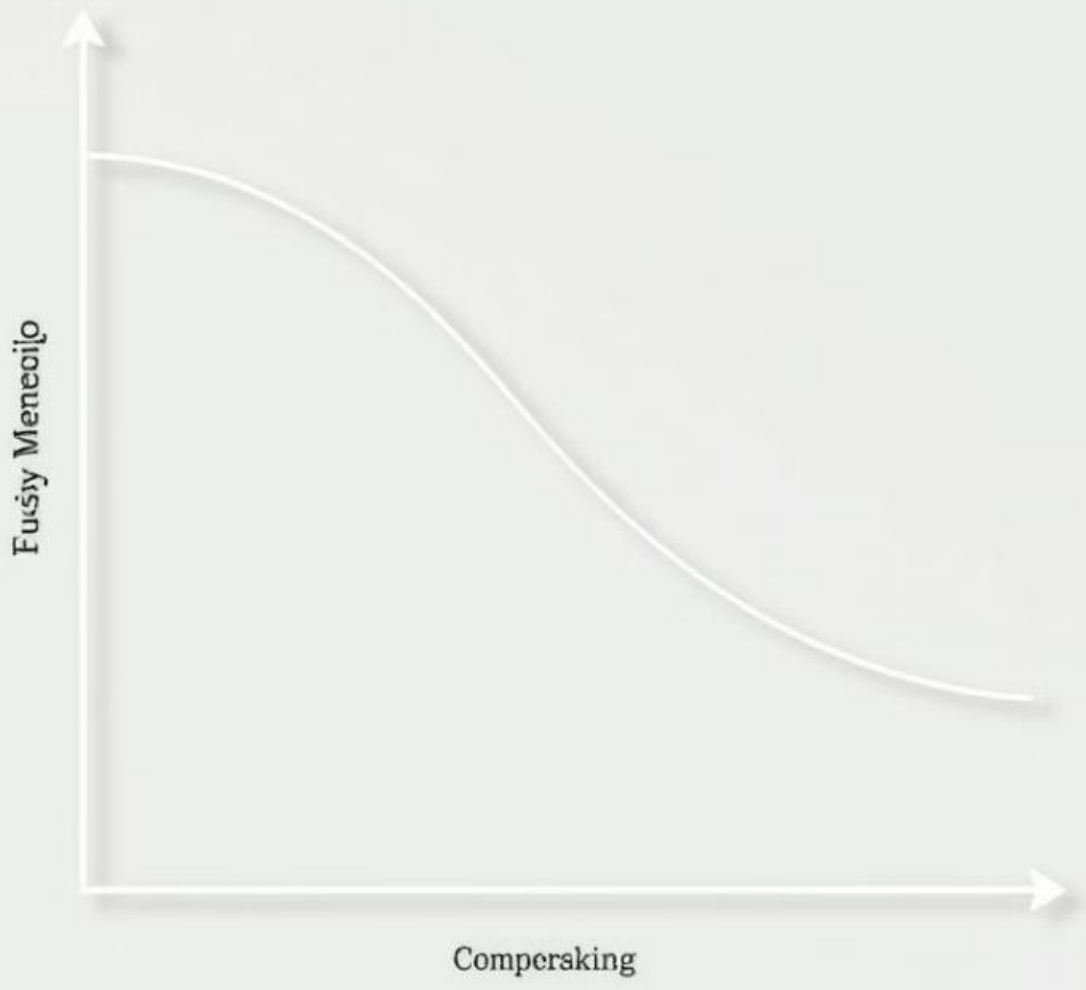
El concepto de variable lingüística es fundamental en la representación del conocimiento humano porque permite traducir información vagamente expresada en palabras a términos matemáticos precisos. Mientras que los sensores proporcionan resultados numéricos, los expertos humanos suelen usar palabras para evaluar variables. Por ejemplo, al medir la velocidad de un vehículo, un sensor puede dar un número (e.g., 39 mph), mientras que un humano puede describirla con términos como "baja" o "alta". Las variables lingüísticas permiten captar esta descripción vaga en un formato matemático exacto.

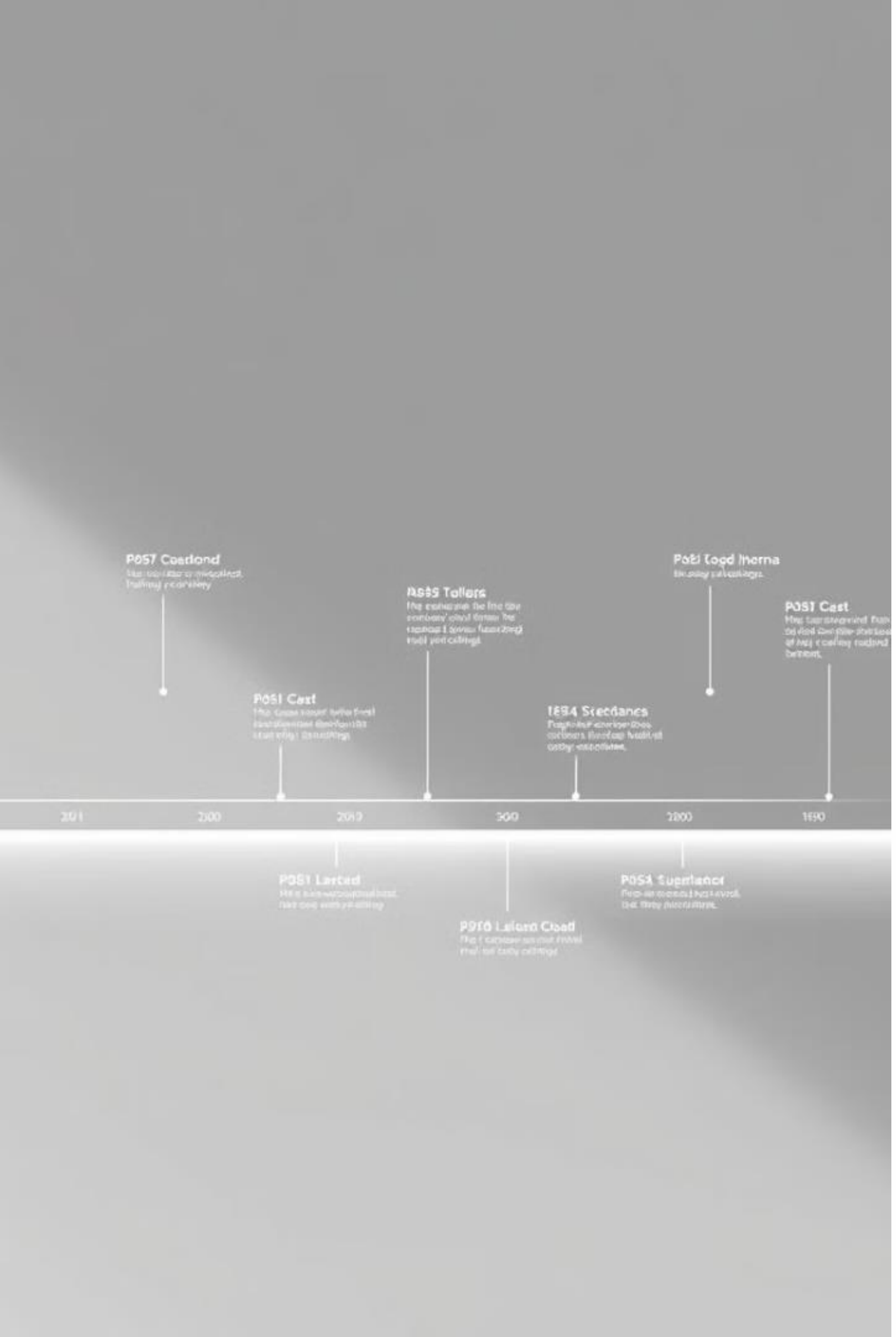


Variables Lingüísticas



1. Nombre (A): "Temperatura".
2. Conjunto de términos: ($T(A)$ = [muy baja, baja, media, alta, muy alta]
3. Universo de discurso: (U) = [0, 800]°C
4. Gramática (G): "muy baja" y "muy alta".
5. Mecanismo de interpretación (M):
   - "Muy baja": Trapezoidal [0, 0, 100, 200]
   - "baja": Triangular [100, 200, 300]
   - "media": Triangular [200, 300, 400]
   - "alta": Triangular [300, 400, 500]
   - "Muy alta": Trapezoidal [400, 500, 800, 800]

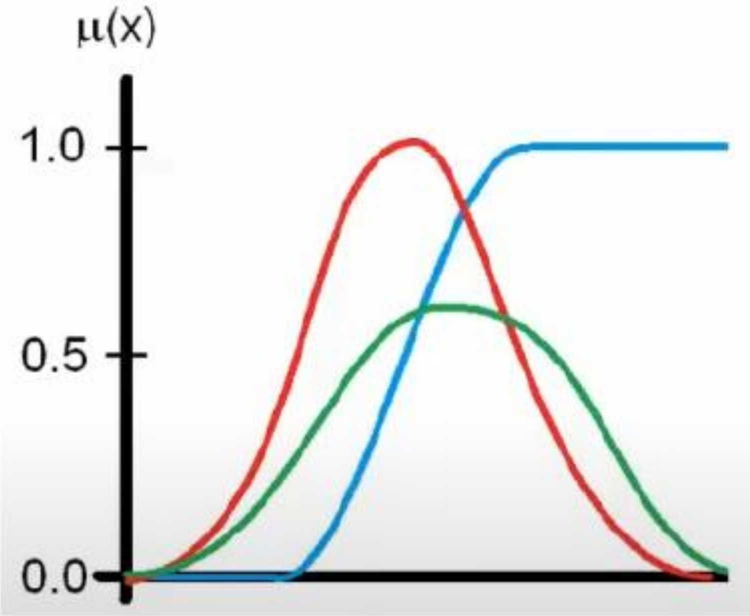


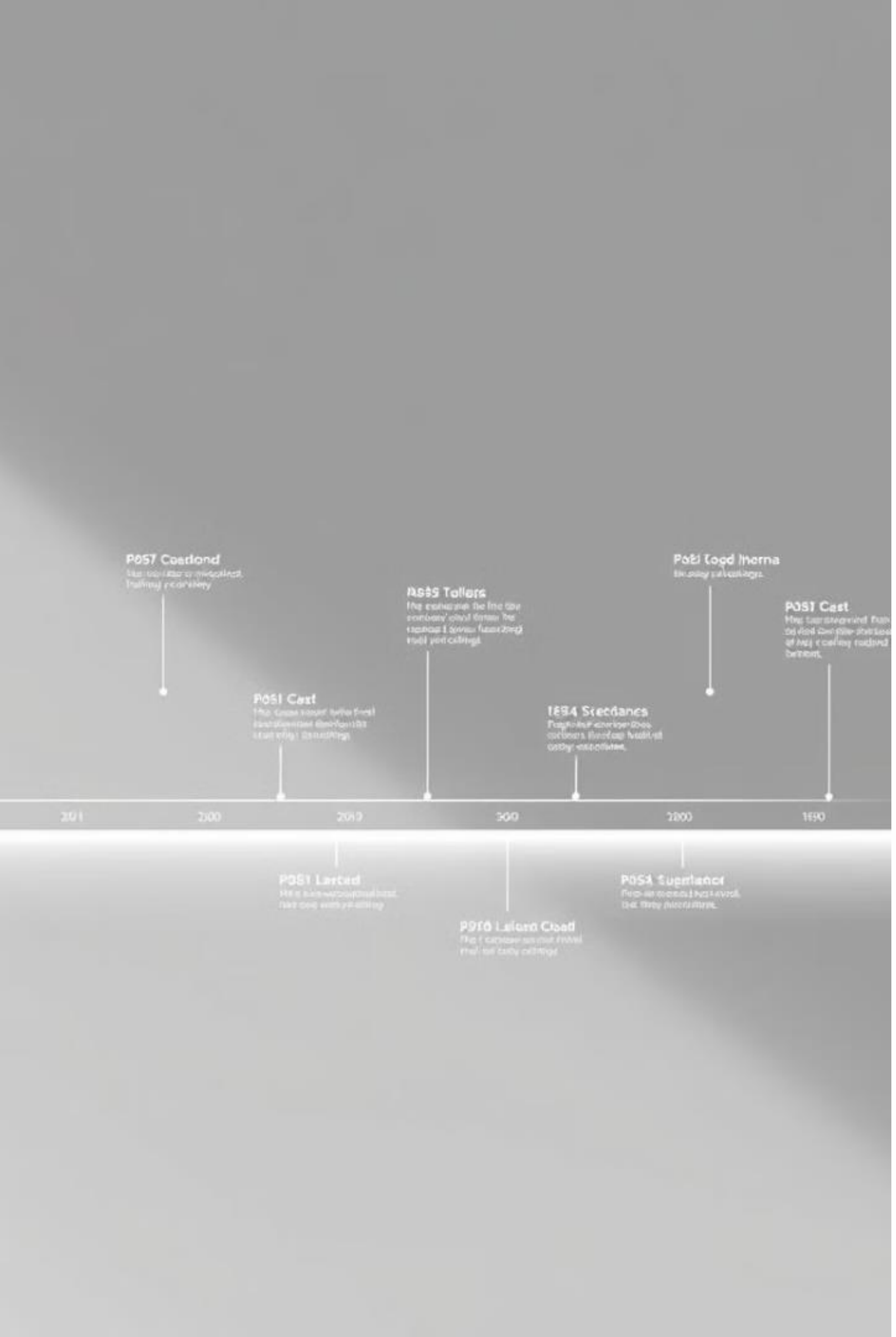


Tipo de funciones de pertenencia

Función de pertenencia normal y sub normal

Una función de pertenencia normal tiene núcleo (alcanza el valor 1), en la Figura las funciones de pertenencia de color rojo y azul son funciones de pertenencias normales, mientras que la función de pertenencia de color verde es una función subnormal.

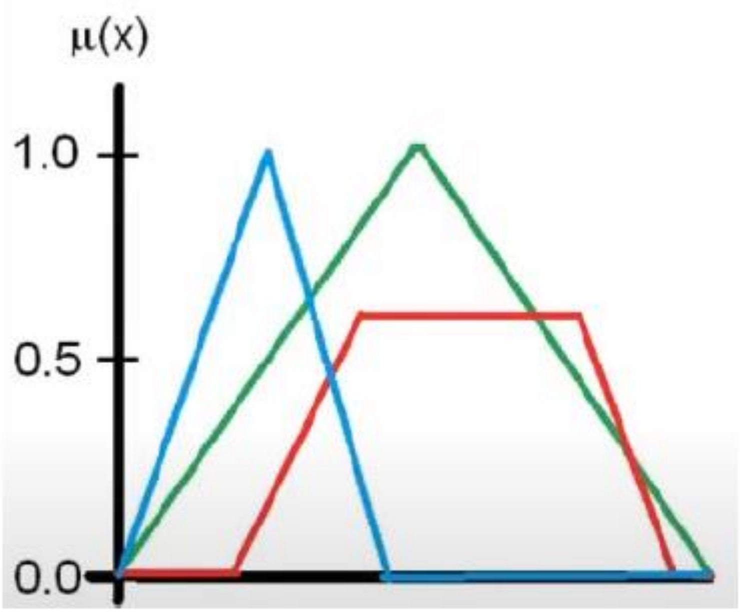


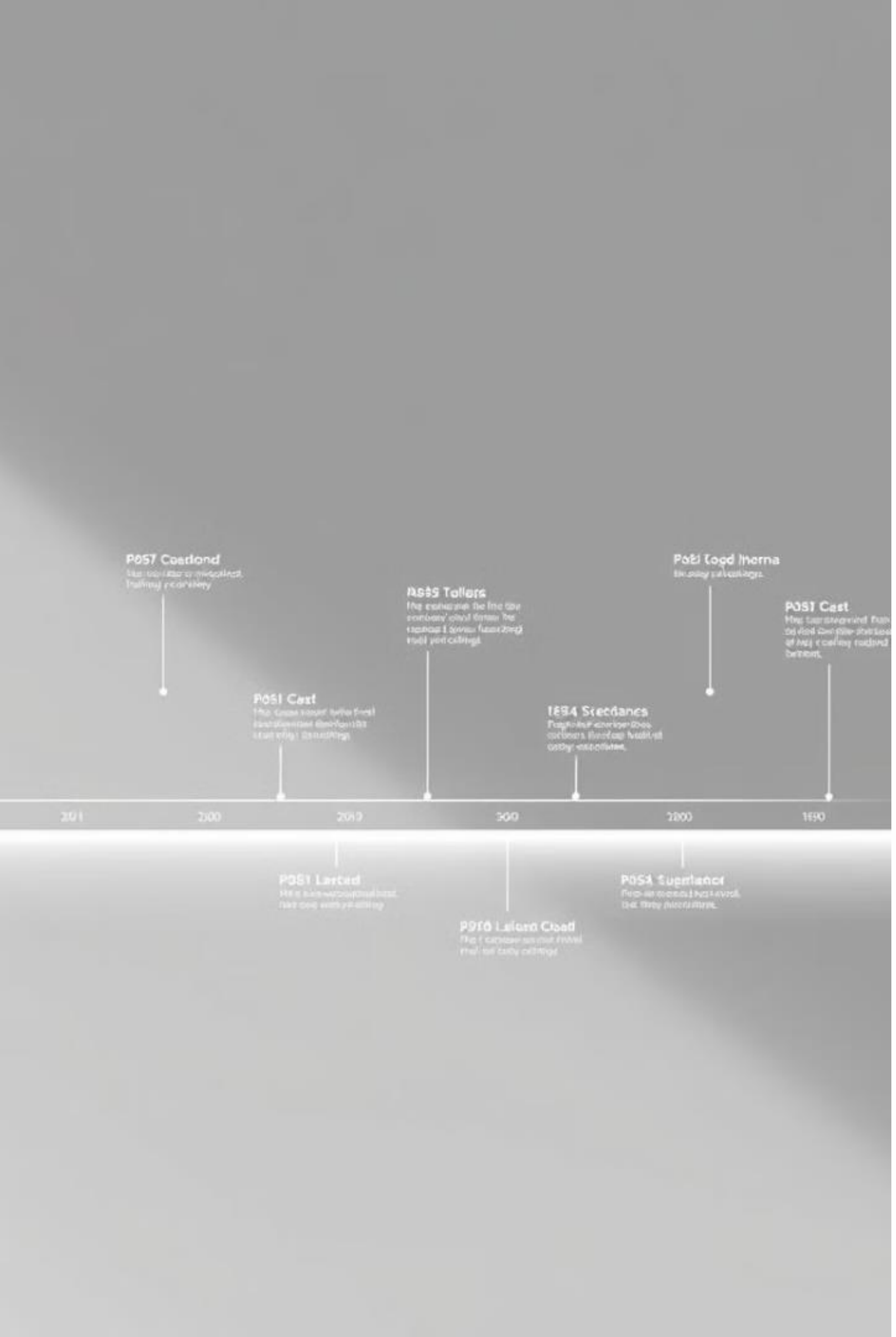


Tipo de funciones de pertenencia

Función de pertenencia simétrica y no simétrica

En la Figura la función de pertenencia de color verde es simétrica mientras que las de colores rojo y azul no son simétricas.

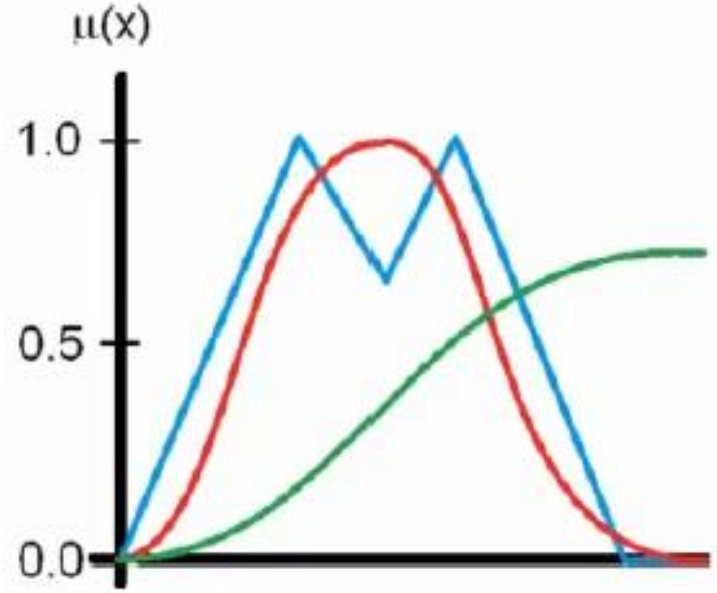




Tipo de funciones de pertenencia

Función de pertenencia convexa y no convexa

En la Figura se observa que las funciones de pertenencia de color rojo y verde son convexas mientras que la de color azul no es convexa



Funciones de pertenencia típicas

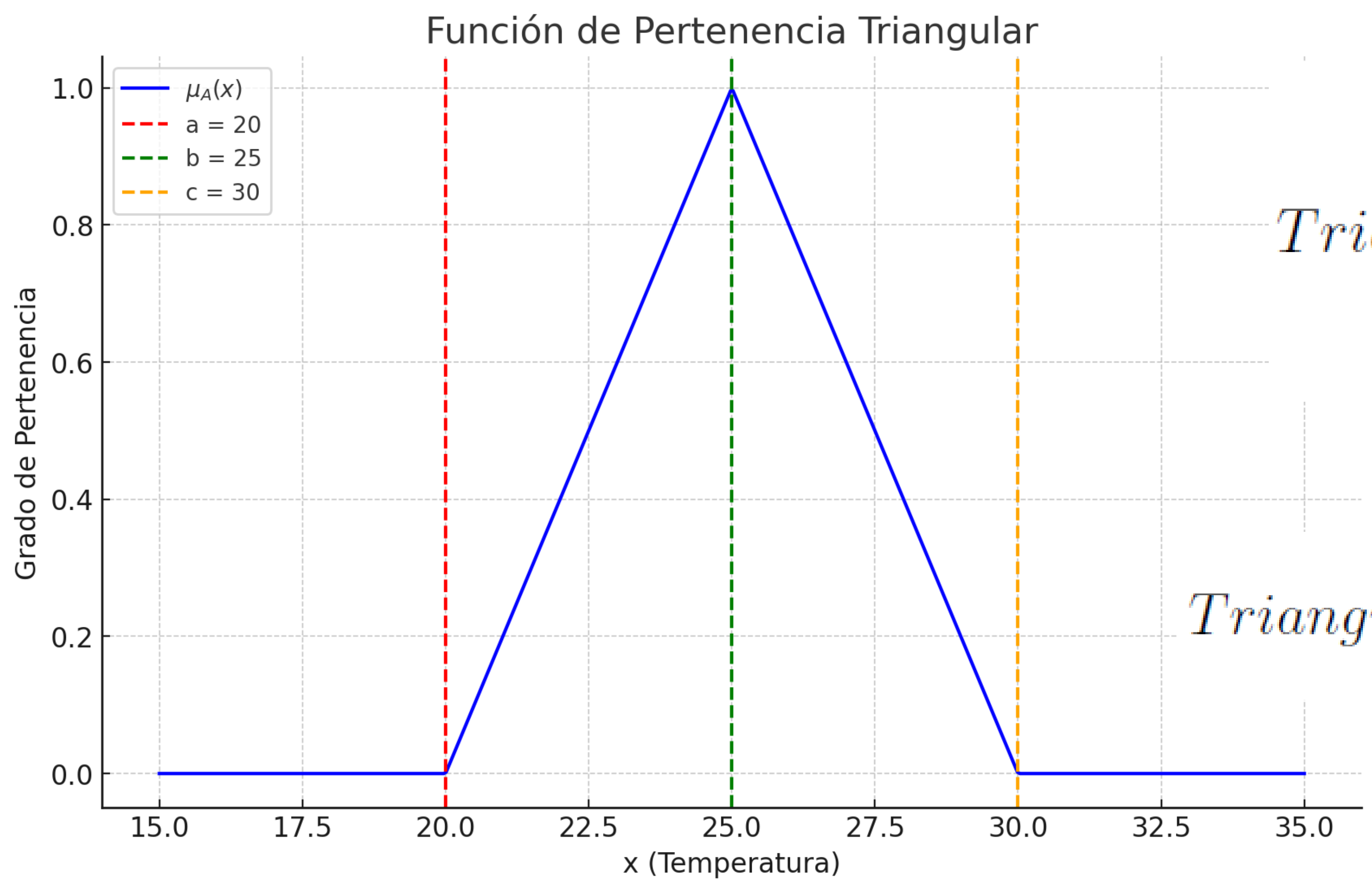
La función de pertenencia define el grado de pertenencia de un valor a un conjunto difuso. Se representa como un conjunto de pares ordenados, y su valor indica qué tan bien el valor u se ajusta al concepto que representa el conjunto difuso F.

$$\underset{\sim}{F} = \{(u, \mu_{\underset{\sim}{F}}(u))/u \in U\}$$

el valor de $\mu F(u)$ indica el grado en el que el valor u de la variable U esta incluida en el concepto representado por la etiqueta F. Para la definición de estas funciones de pertenencia se utiliza convencionalmente ciertas familias de formas estándar, las mas frecuentes son las siguientes funciones.

Funciones de pertenencia típicas

Función de pertenencia triangular

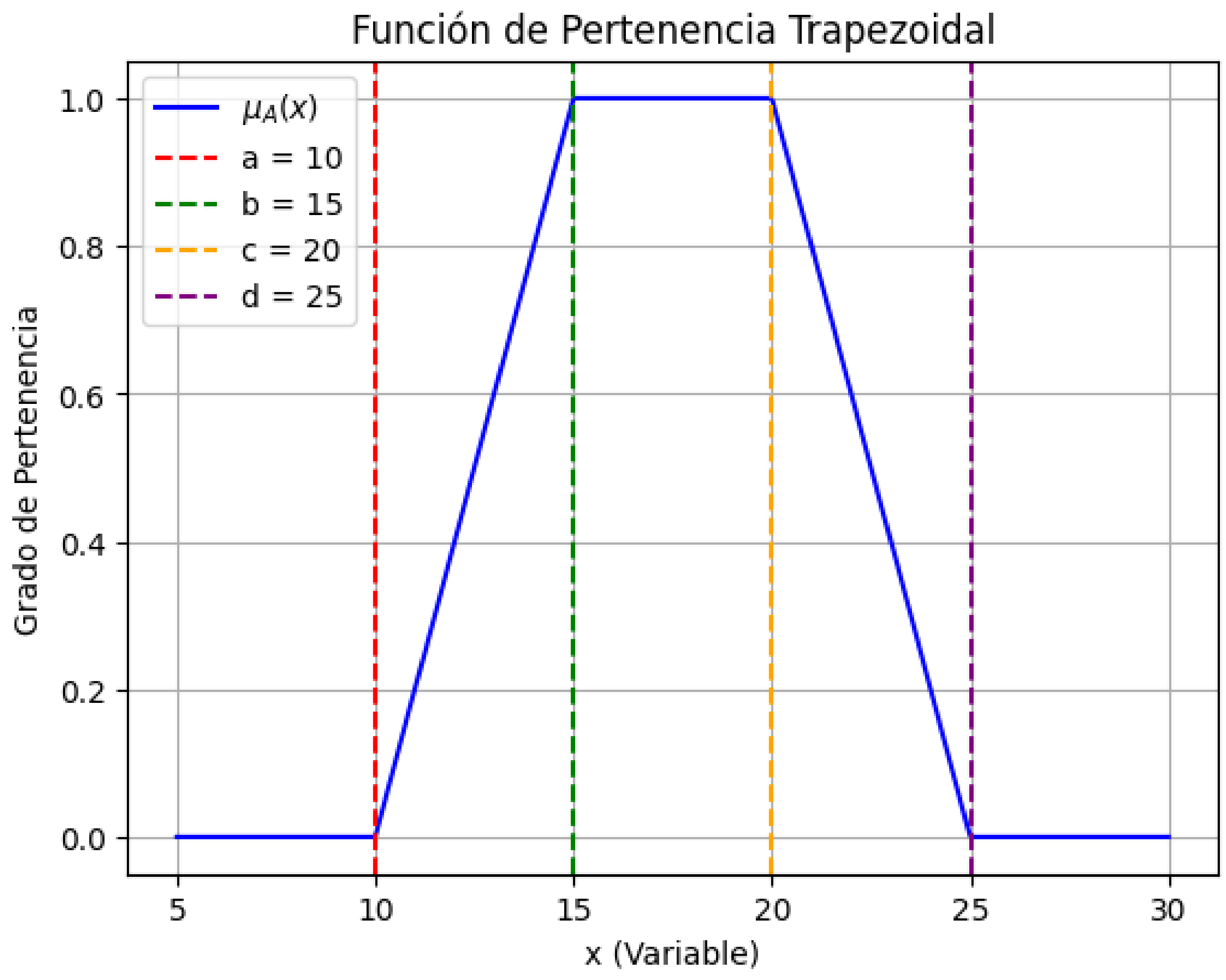


$$Triangulo(x;a,b,c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

$$Triangulo(x;a,b,c) = max\left(min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Funciones de pertenencia típicas

Función de pertenencia trapezoidal

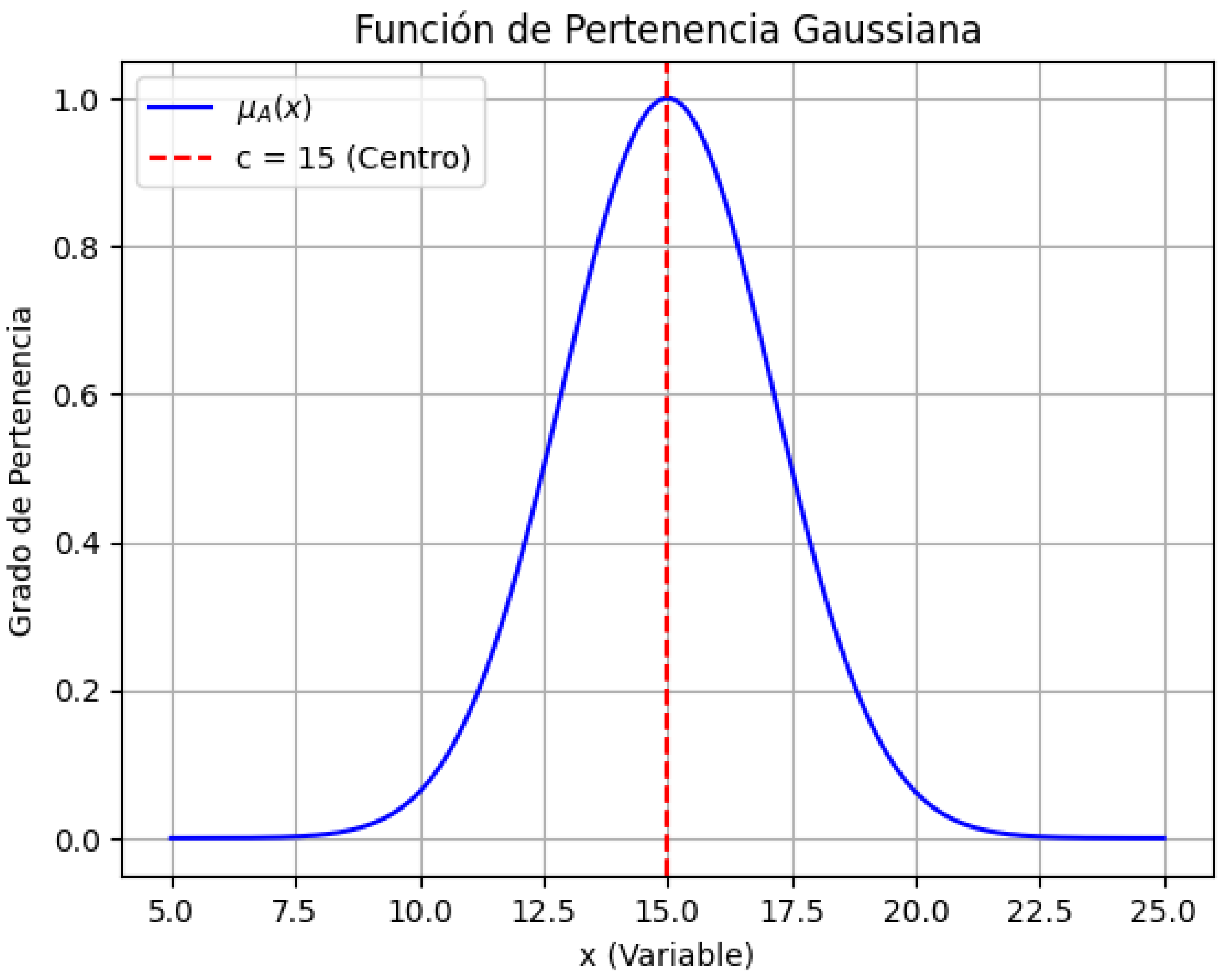


$$Trapezoide(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

$$Trapezoide(x; a, b, c, d) = max\left(min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

Funciones de pertenencia típicas

Función de pertenencia Gaussiana.



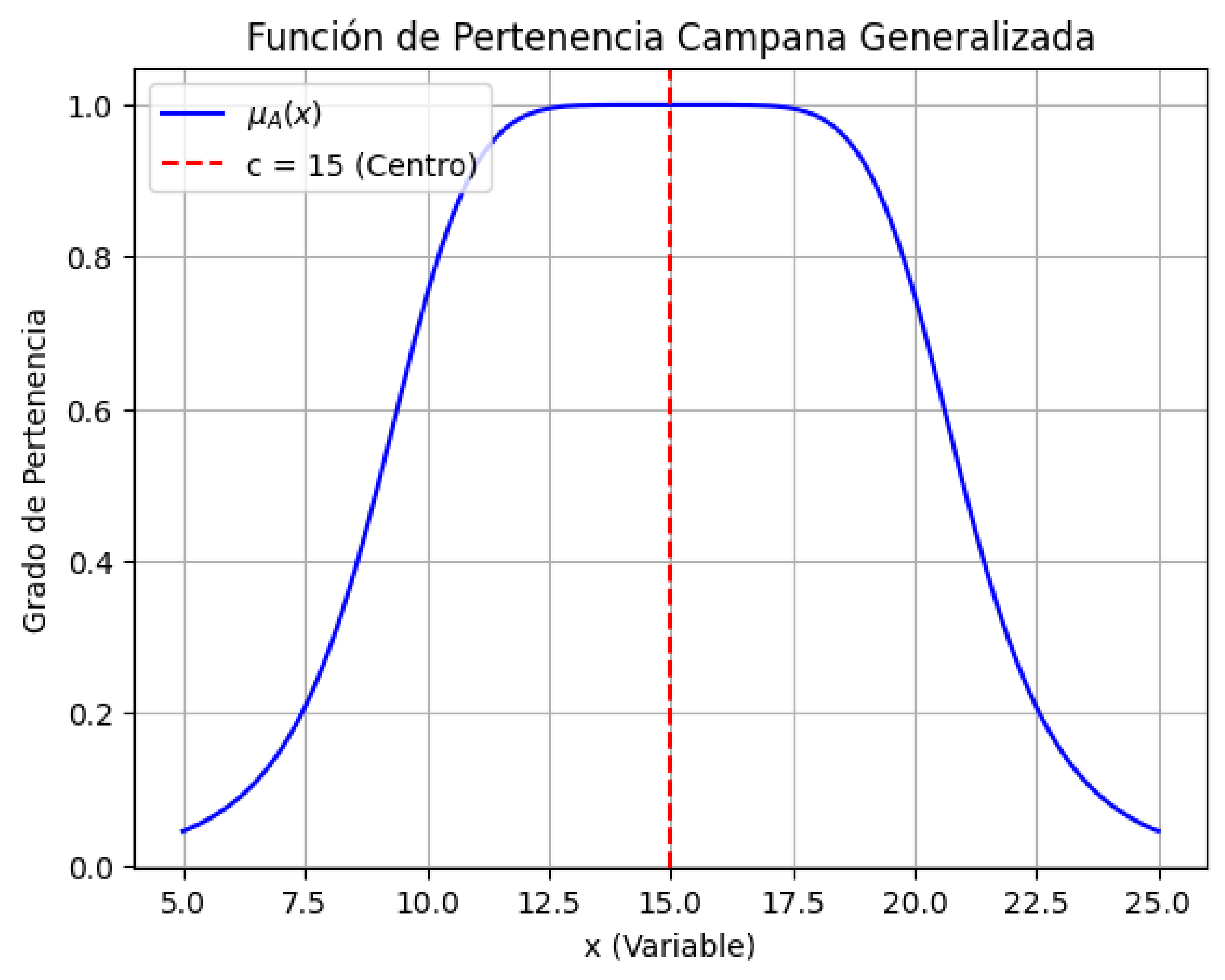
$$Gaussiana(x; \sigma, c) = e^{-0.5\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

La figura muestra la función de pertenencia Gaussiana con los siguientes valores Gaussiana (x : 15, 3)

La función de pertenencia Gaussiana es una función con derivada continua, es cerrada y simétrica.

Funciones de pertenencia típicas

Función de pertenencia campana generalizada



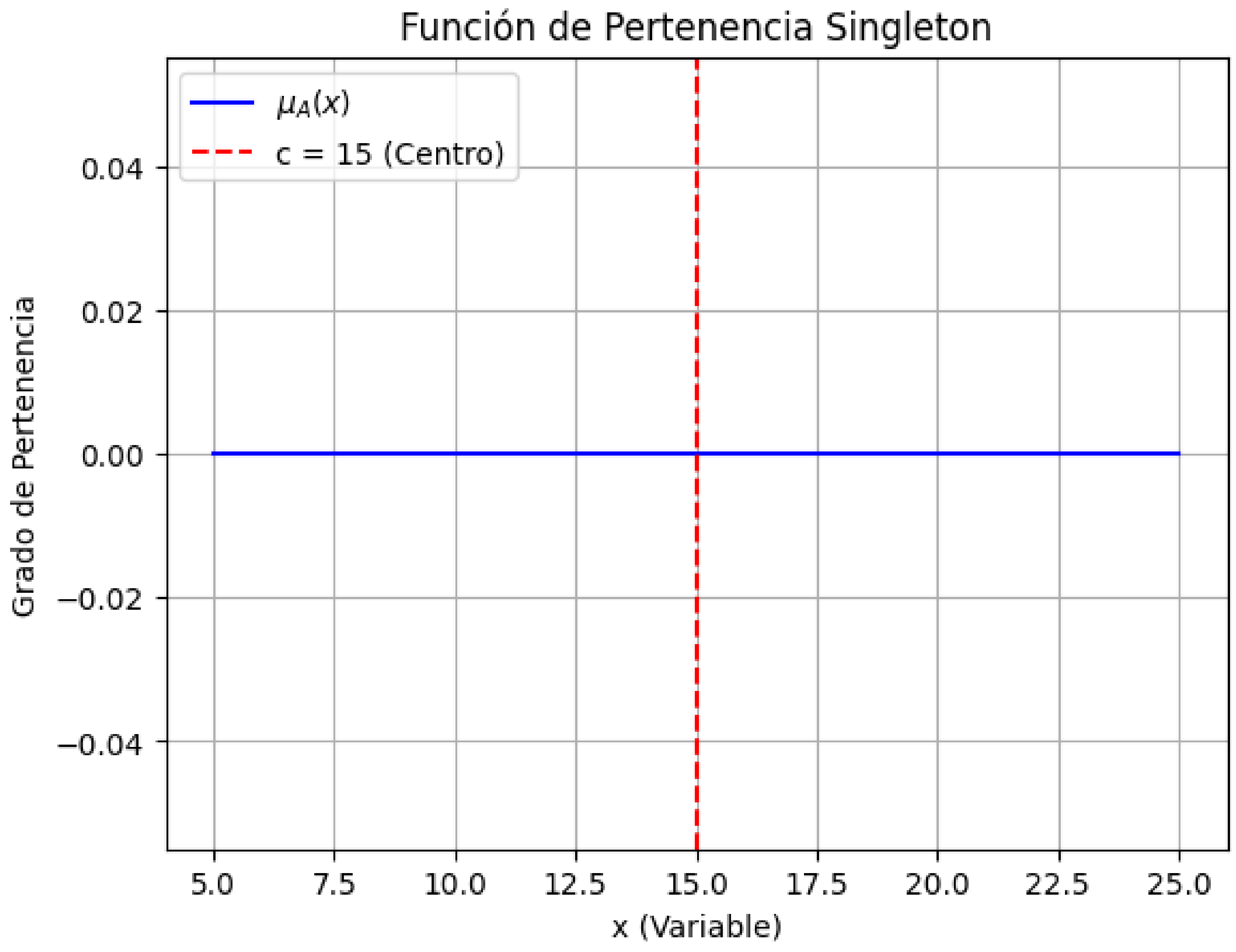
$$Campana(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

La figura muestra la función de pertenencia campana generalizada con los siguientes valores Campana(x : 15, 6, 3)

La función de pertenencia campana generalizada es una función con derivada continua, es cerrada y simétrica.

Funciones de pertenencia típicas

Función de pertenencia singleton.



$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}$$

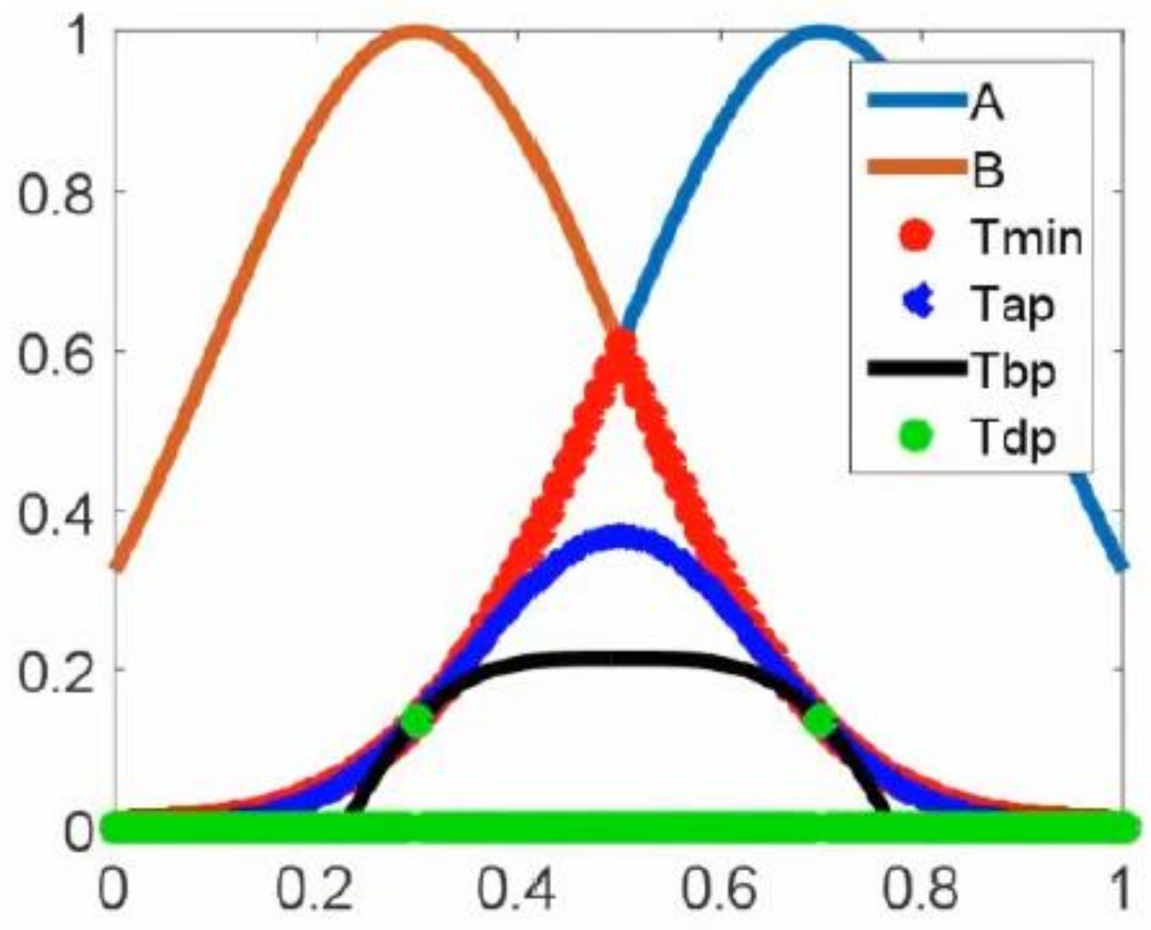
Operadores Difusos generalizados

Además de la unión de conjuntos difusos (max), intersección de conjuntos difusos (min) y el complemento difuso, existen otros operadores difusos.

Norma T.

La intersección de A y B puede representarse en general como una función T : [0, 1] × [0, 1] → [0, 1] o como un operador binario Δ, tal que $\mu A \cap B(x, y) = T(\mu A(x), \mu B(y)) = \mu A(x) \Delta \mu B(y)$

Acotada	T(0, 0) = 0 y T(a, 1) = T(1, a) = a
Monotónica	T(a, b) ≤ T(c, d) si a ≤ c y b ≤ d
Conmutativa	T(a, b) = T(b, a)
Asociativa	T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)



Operadores que cumplen con la norma T:

Mínimo	Tmin(a, b) = min(a, b) = a ∧ b
Producto algebraico	Tap(a, b) = ab
Producto Frontera	Tbp(a, b) = 0 ∨ (a + b − 1)
Producto Drástico	

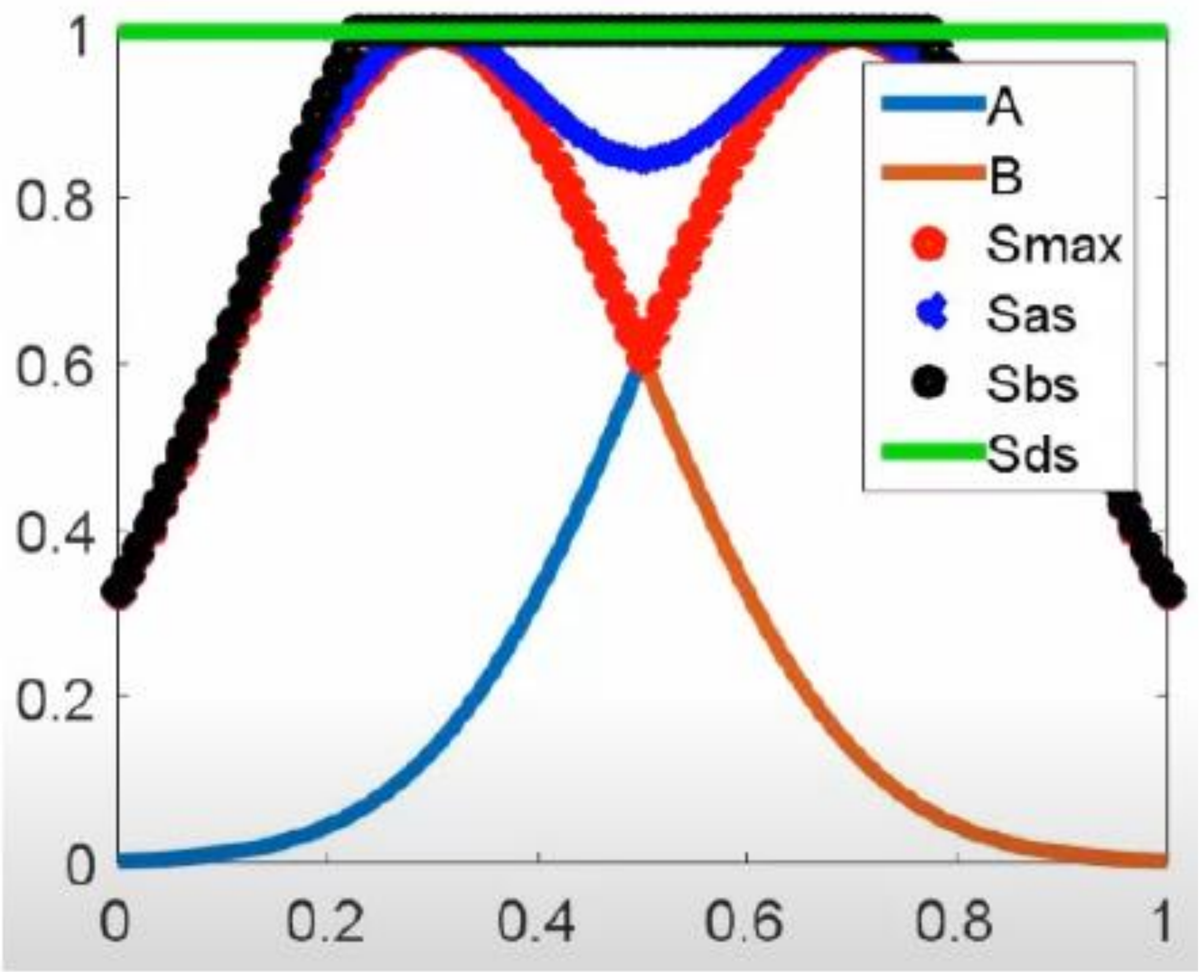
$$T_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, \text{ si} & b = 1 \\ b, \text{ si} & a = 1 \\ 0, \text{ si} & a, b < 1 \end{cases}$$

Operadores Difusos generalizados

Norma S.

La union de A y B se puede representarse en general como una función $S : [0, 1]\times[0, 1] \to [0, 1]$ o como un operador binario $\perp$, tal que $\mu A\cup B(x, y) = S(\mu A(x), \mu B(y)) = \mu A(x)\perp\mu B(y)$

Acotada	$S(1, 1) = 1$ y $T(a, 0) = T(0, a) = a$
Monotónica	$S(a, b) \leq S(c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$
Conmutativa	$S(a, b) = S(b, a)$
Asociativa	$S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$



Operadores que cumplen con la norma S:

Máximo	$Smax(a, b) = max(a, b) = a \vee b$
Suma algebraica	$Sas(a, b) = a + b - ab$
Suma Frontera	$Sbs(a, b) = 1 \wedge (a + b)$
Suma Drástico	

$$S_{ds}(a,b) = \begin{cases} a, \text{ si} & b = 0 \\ b, \text{ si} & a = 0 \\ 1, \text{ si} & a, b > 0 \end{cases}$$

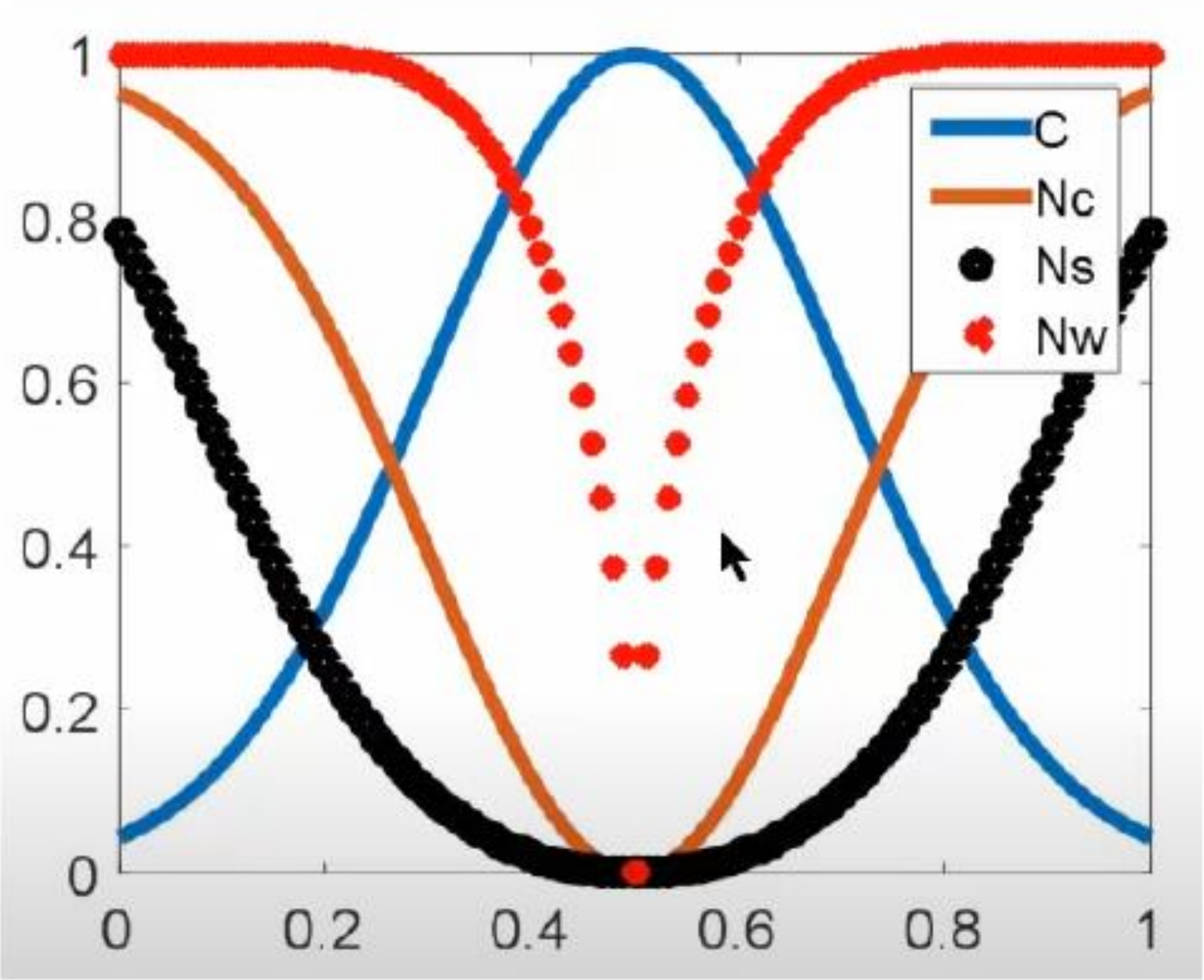
Operadores Difusos generalizados

Complemento difuso.

El complemento de un conjunto difuso A se puede generalizarse considerandolo como una función N : [0, 1] → [0, 1], tal que $\mu A^{-} = N(\mu A(x))$

Propiedades del complemento difuso:

Acotada	N(0) = 1 y N(1) = 0
Monotónica	N(a) ≥ N(b) si a ≤ b
Involutiva	N(N(a)) = a



Operadores que cumplen con complemento:

Complemento clásico	$N_c(a) = 1 - a$
Complemento de Sugeno	$N_s(a) = \frac{1-a}{1+sa}$ donde $s > -1$
Complemento de Yager	$N_w(a) = (1 - a^w)^{1/w}$ donde $w > 0$

Reglas difusas IF-THEN

Las reglas difusas IF-THEN es una expresión condicional que tiene la forma siguiente:

$$\underbrace{\text{IF proposicion difusa}}_{antecedente}, \underbrace{\text{THEN proposicion difusa}}_{consecuente}$$

Proposiciones difusas

Existen dos tipos de proposiciones difusas:

- Proposiciones atómicas difusas — x es A
- Proposiciones compuestas difusas — x es S ***o*** x es no M; x es no S ***y*** x es F

usando los conectores "y", "o" y "no"

Por ejemplo S, M y F podrían representar a los conjuntos difusos referidos a la variable lingüística velocidad, estos conjuntos podrían ser lento, mediana y rápida respectivamente.

Operaciones en Lógica clásica vs lógica Difusa

Operaciones en lógica clásica

Proposición clásica es una sentencia que puede ser verdadera (1) o falsa (0), las operaciones lógicas que se pueden hacer entre proposiciones son:

- Conjunción $\wedge$ (Y)
- Disyunción $\vee$ (O)
- Negación $\neg$
- Implicación $\rightarrow$
- Equivalencia $\leftrightarrow$
- O exclusiva $\underline{\vee}$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \underline{\vee} q$
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Todas las operaciones compuestas se pueden escribir en función de las operaciones elementales (conjunción, disyunción y negación).

Operaciones en Lógica clásica vs lógica Difusa

Operaciones en lógica difusa

Proposición Difusa es una sentencia que puede tomar valores entre 0 y 1, las operaciones lógicas que se pueden hacer entre proposiciones son:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\bar{p}$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

- Conjunción $V(p \wedge q) = min(V(p), V(q))$
- Disyunción $V(p \vee q) = max(V(p), V(q))$
- Negación $V(\bar{p}) = 1 - V(p)$
- Implicación $V(p \rightarrow q) = V(\bar{p} \vee q) = max(1 - V(p), V(q))$
- Equivalencia $V(p \leftrightarrow q) = V[(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})] = \max\{\min[V(p), V(q)], \min[1 - V(p), 1 - V(q)]\}$

Todas las operaciones compuestas se pueden escribir en función de las operaciones elementales (conjunción, disyunción y negación).

Interpretación de las reglas difusas IF-THEN

Debido a que las proposiciones difusas son interpretadas como relaciones difusas, la pregunta es como interpretar la operación IF-THEN. En el calculo proposicional clásico, la expresión *IF p THEN q* se escribe como $p \rightarrow q$ donde p y q son variables proposicionales, donde su función de verdad esta descrita en la tabla:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las reglas difusas IF-THEN se pueden obtener reemplazando p y q con proposiciones difusas, podemos interpretar las reglas difusas IF-THEN reemplazando los operadores ∨, ∧, con los operadores unión difusa, intersección difusa y el complemento difuso respectivamente.

Interpretación de las reglas difusas IF-THEN

Se considera la siguiente regla difusa: IF x es A, THEN y es B

donde *x* y *y* son variables lingüísticas (por ejemplo, "temperatura" y "potencia del ventilador").
A, B son valores lingüísticos (por ejemplo, "baja" o "alta").
Se pueden formar las siguientes reglas difusas:

SI la presión es alta,	ENTONCES el volumen es grande.
SI la carretera es sinuosa,	ENTONCES la carretera es peligrosa.
SI el tomate está rojo,	ENTONTES el tomate está maduro.

En la literatura existen diferentes interpretaciones de las reglas difusas IF-THEN, a continuación, se dan a conocer algunas de ellas.

Interpretación de las reglas difusas IF-THEN

Hay varias maneras de interpretar la conexión entre el antecedente (x es A) y el consecuente (y es B) en lógica difusa. Las más comunes son:

Implicación de Dienes-Rescher

La relación difusa se define como: $\mu QD(x,y)$ = max(1−$\mu A(x)$, $\mu B(y)$), donde evalúa la veracidad de la regla basándose en la diferencia entre $\mu A(x)$μ A (x) y $\mu B(y)$μ B (y).

Implicación de Zadeh

La relación difusa se define como: $\mu QZ(x,y)$ = max(min($\mu A(x)$, $\mu B(y)$), 1−$\mu A(x)$), donde evalúa tanto el antecedente como el consecuente. Si el antecedente tiene un valor bajo, el consecuente tiene más libertad de ser verdadero.

Implicación de Mamdani

La relación difusa se define como: $\mu QMM(x,y)$ = min($\mu A(x)$, $\mu B(y)$), donde esta es la interpretación más utilizada en sistemas difusos. Evalúa la intensidad de la relación entre el antecedente y el consecuente.