Introducción a los Sistemas Difusos

Este capítulo presenta una introducción a los sistemas difusos, explorando su concepto, historia, aplicaciones y tipos. Los sistemas difusos son una herramienta poderosa para modelar y controlar sistemas complejos, utilizando un enfoque basado en el razonamiento humano.

¿Por que sistemas Difusos?

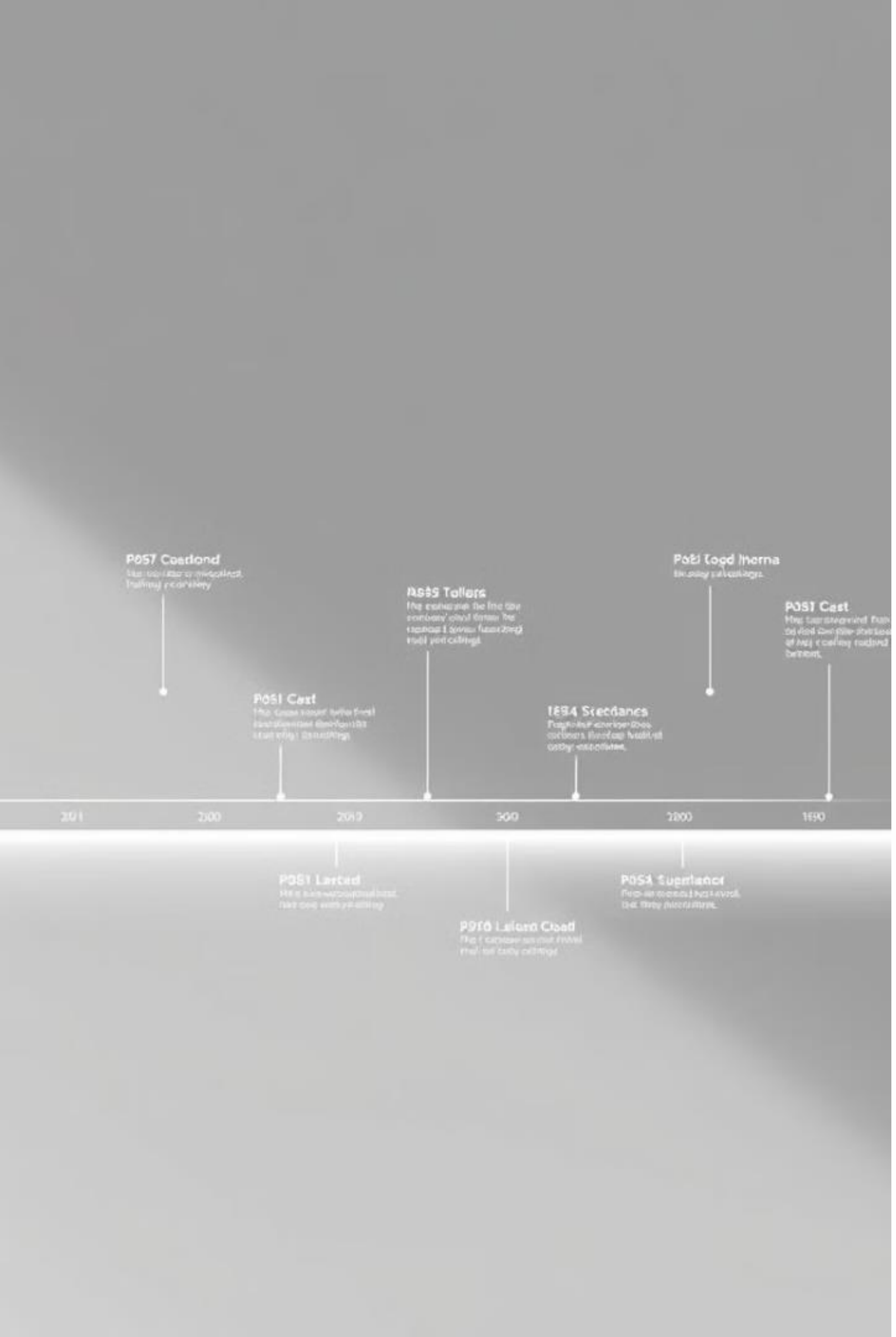
La palabra difuso se entiende como vago, impreciso. Sin embargo, solamente es un adjetivo técnico, debido a que los sistemas difusos son sistemas definidos con precisión..

Aproximación al Mundo Real

Es difícil obtener una descripción precisa del mundo real. Los sistemas difusos ofrecen una aproximación razonable y tratable, utilizando conceptos como la fusificación para modelar la imprecisión.

Sistematización del Conocimiento Humano

En la era de la información, el conocimiento humano es fundamental. Los sistemas difusos permiten sistematizar este conocimiento, integrándolo con modelos matemáticos y sensores.



Historia de la teoría difusa y sus aplicaciones

1. **1965**

   Lotfi A. Zadeh introduce la teoría de conjuntos difusos en su artículo "Fuzzy Sets".

2. **1975**

   Mamdani y Assilian desarrollan el primer controlador difuso para una máquina de vapor.

3. **1980**

   Sugeno aplica la lógica difusa en el control de una planta de purificación de agua.

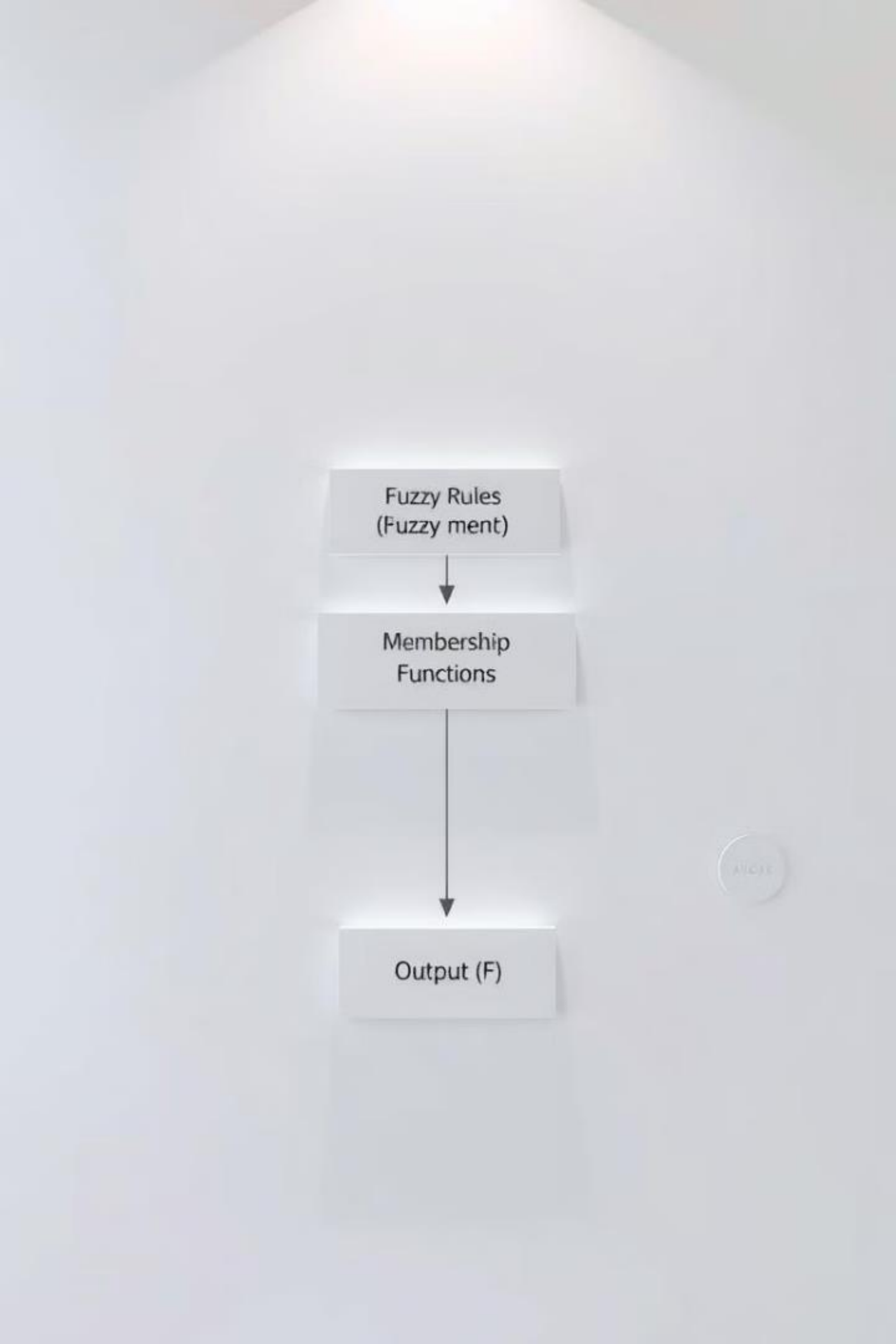
4. **1987**

   Se implementa un controlador difuso para el control del tren de Sendai-Japón.

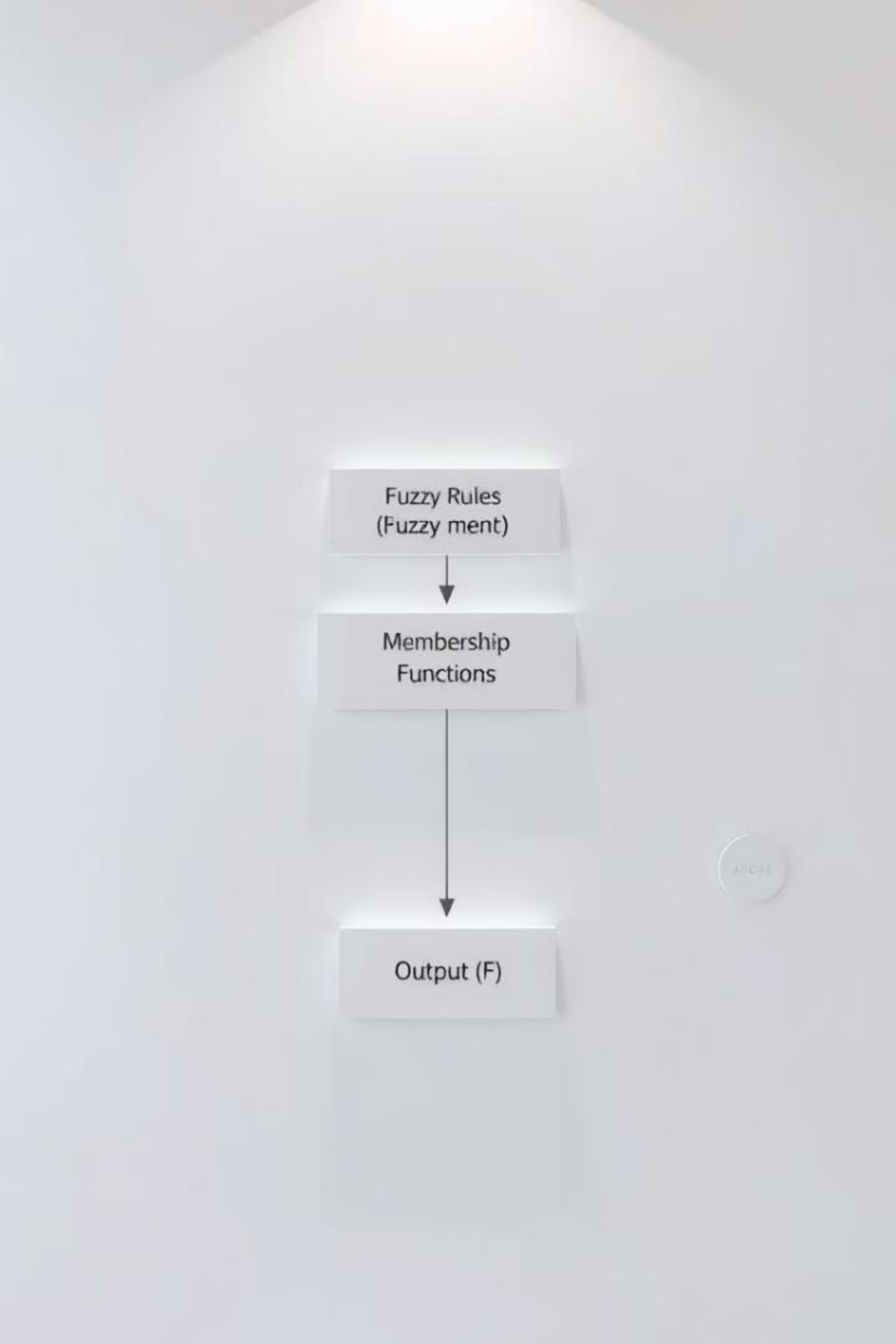
¿Qué son los sistemas Difusos?

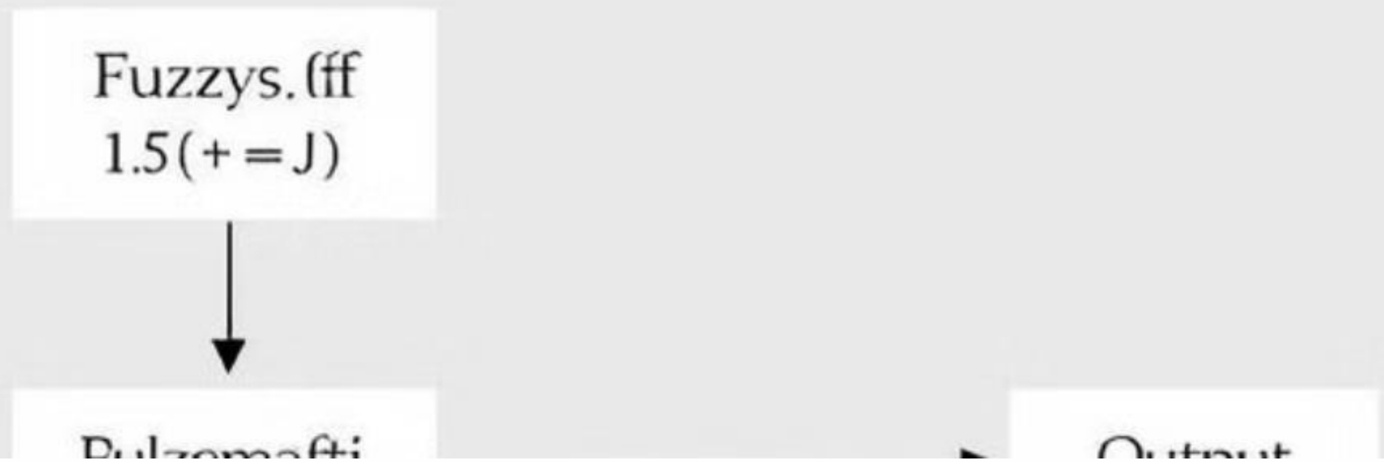
Los sistemas difusos se basan en reglas IF-THEN, que permiten modelar el conocimiento humano en forma de lenguaje natural. Estas reglas utilizan funciones de pertenencia para definir el grado de verdad de las proposiciones.

Por ejemplo, la regla "IF la velocidad de un vehículo es alta, THEN aplicamos menos fuerza a la aceleración" utiliza las funciones de pertenencia "alto" y "menos" para determinar la fuerza de la aceleración en función de la velocidad.



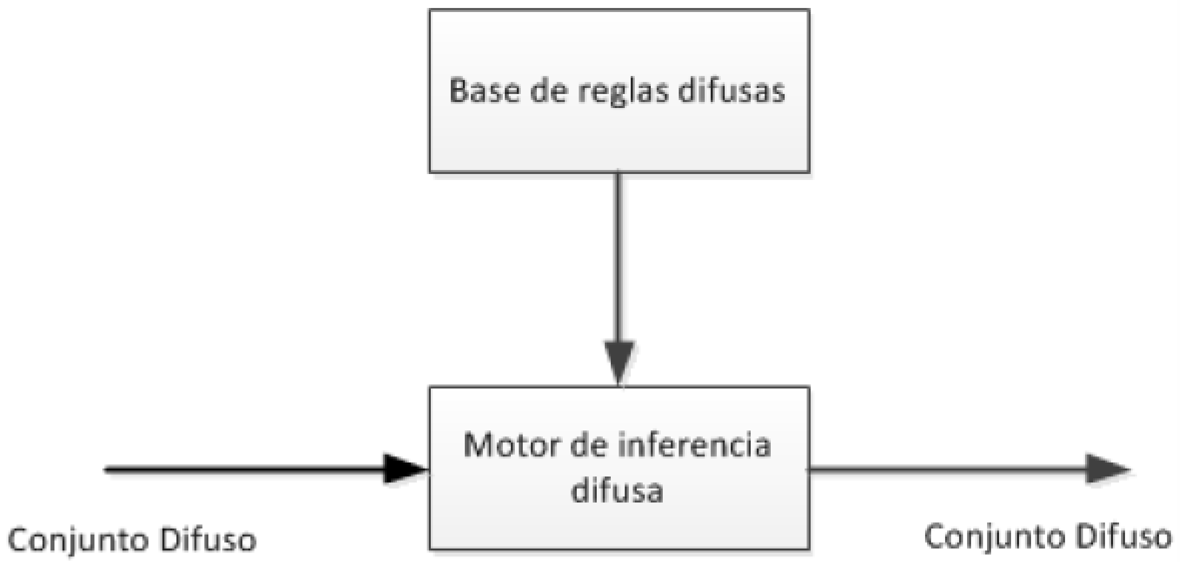
¿Qué son los sistemas Difusos?





Sistemas Difusos puros

En la figura se muestra la configuración básica de un sistema difuso puro, donde la reglas IF-THEN están en la base de reglas difusas, El motor de inferencia Difusa combina estas reglas. El principal problema con los sistemas Difusos puros es que las entradas y las salidas son conjuntos Difusos(palabras en lenguaje natural), sin embargo, en sistemas de ingeniería las salidas y las entradas son variables con valor real.



Ejemplo de Control Difuso

1. ## Regla 1

   IF la velocidad es baja, THEN aplicar más fuerza al acelerador.

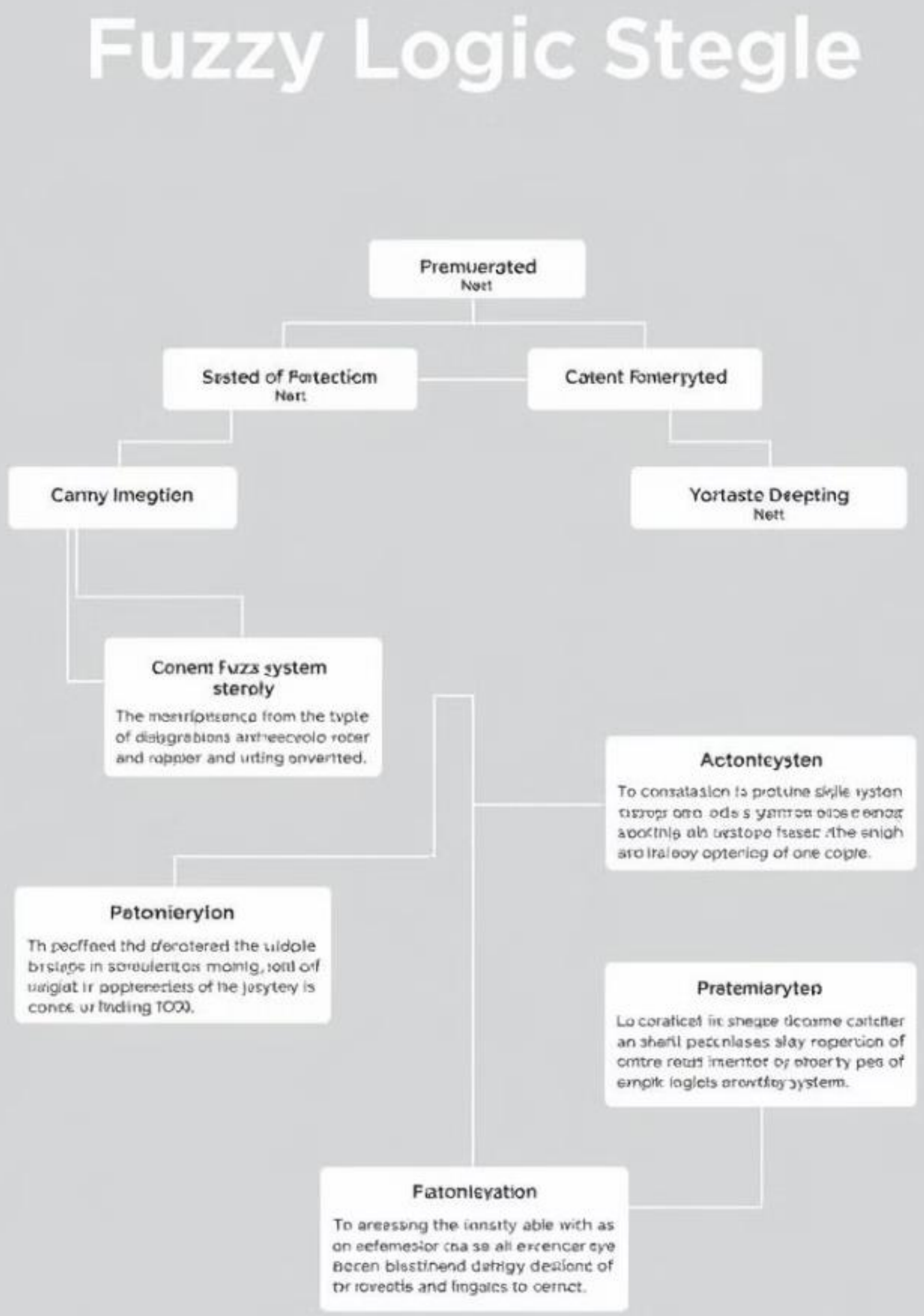
2. ## Regla 2

   IF la velocidad es mediana, THEN aplicar fuerza normal al acelerador.

3. ## Regla 3

   IF la velocidad es alta, THEN aplicar menos fuerza al acelerador.

Donde las palabras “baja”, “mas”, “mediana”, “normal”, “alta” y “menos” son caracterizadas por funciones de pertenencia, en una situación real será necesario utilizar mas reglas.
A este tipo de control se le llama controlador difuso.



Tipos de Sistemas Difusos

Sistemas Difusos Puros

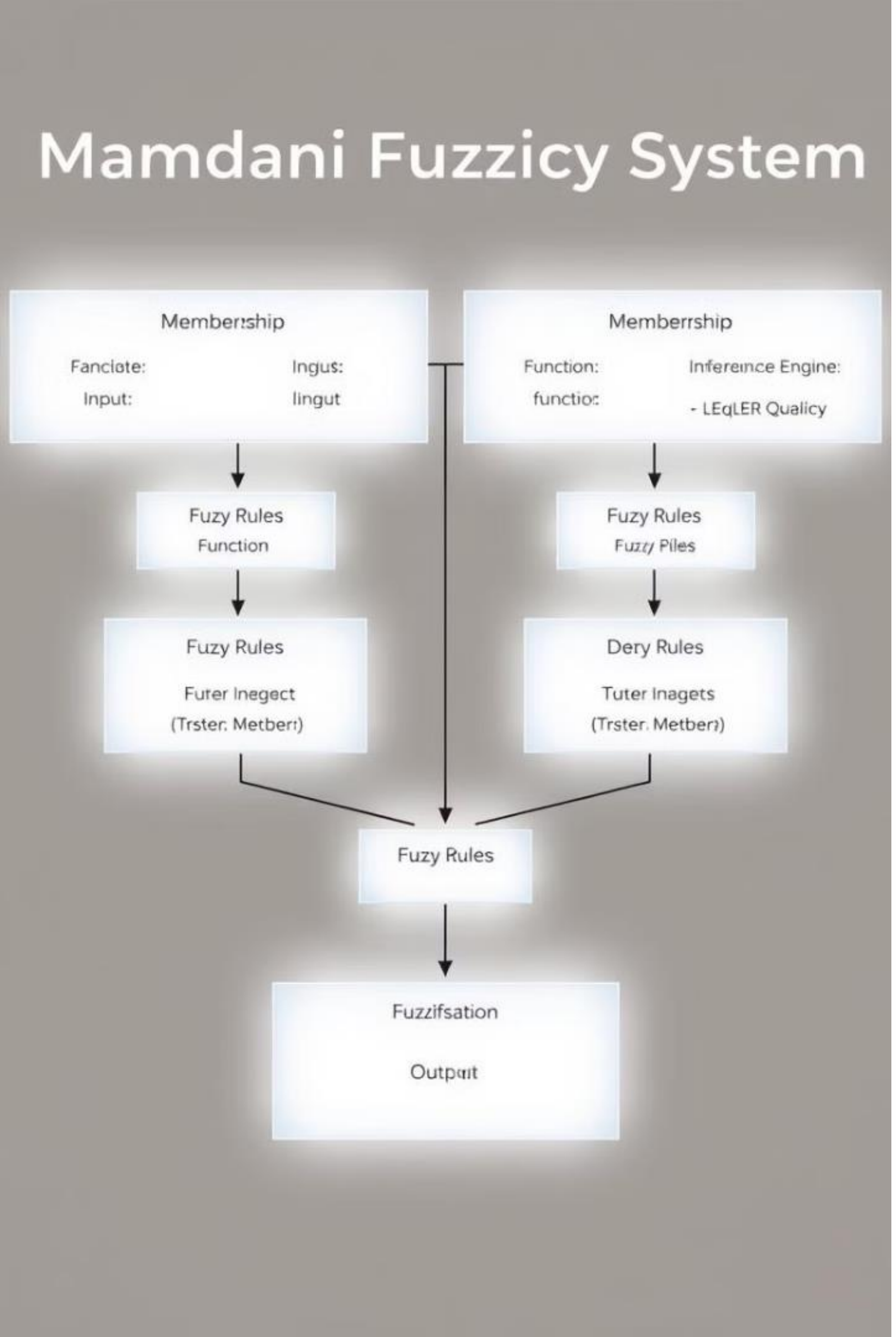
Las entradas y salidas son conjuntos difusos, lo que dificulta su aplicación en sistemas de ingeniería.

Sistemas Difusos Mamdani

Utilizan fusificadores y defusificadores para transformar variables reales en conjuntos difusos y viceversa. Son intuitivos y se adaptan bien a la intervención humana.

Sistemas Difusos Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

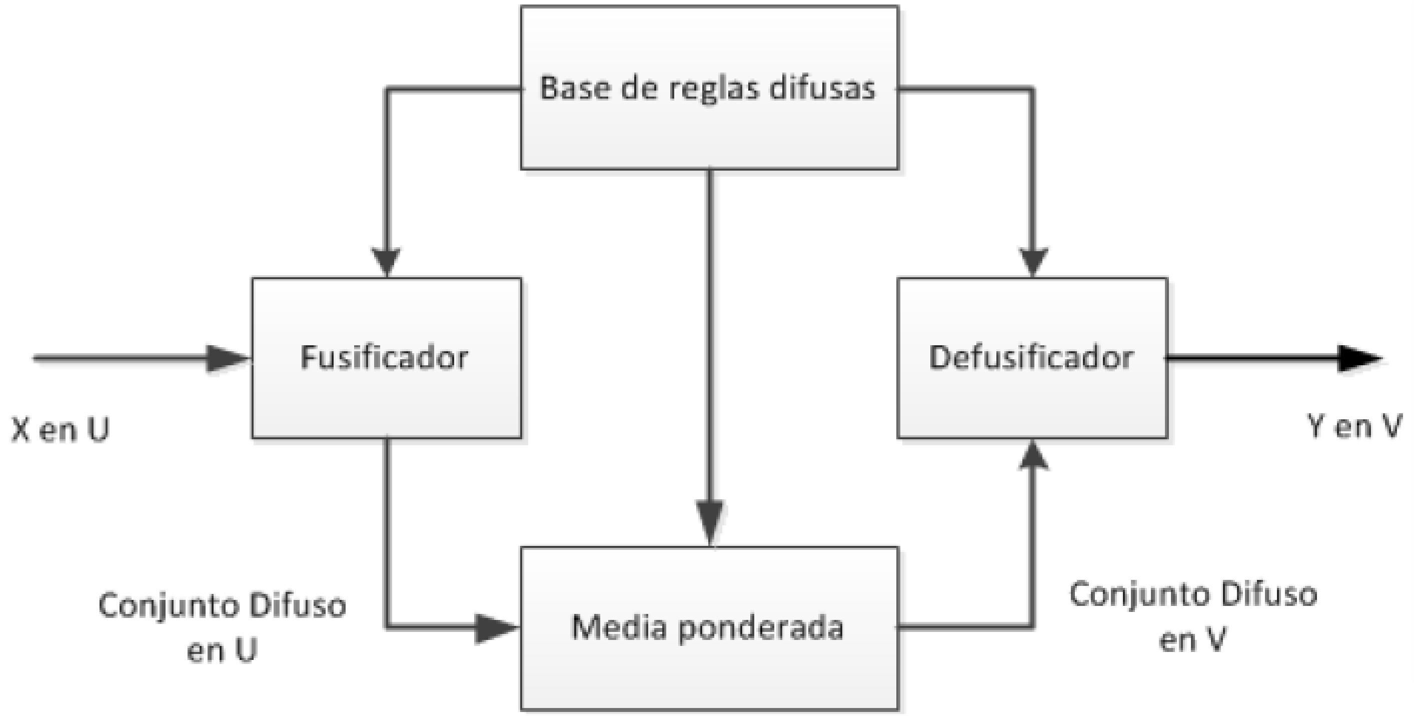
Las entradas y salidas son variables reales. Son más eficientes computacionalmente y se adaptan bien a técnicas lineales.

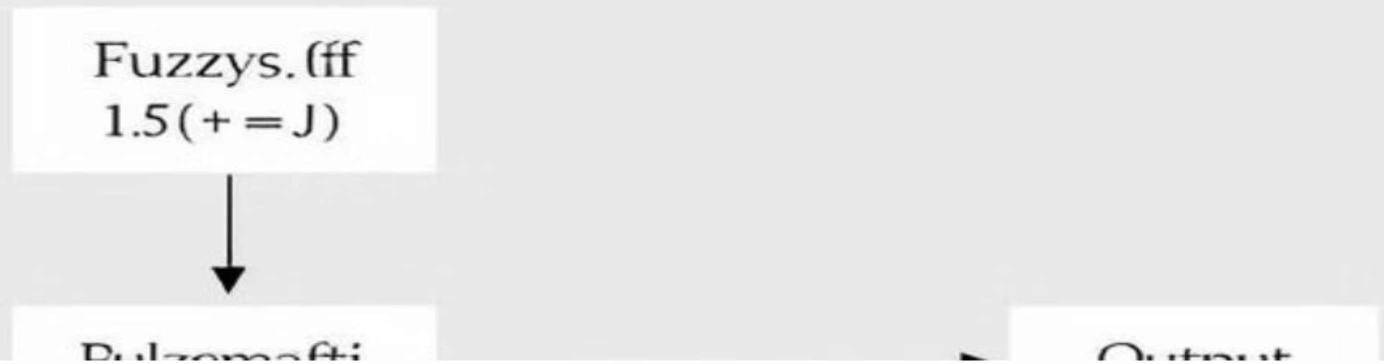


Sistemas Difusos Mamdani

Los sistemas Mamdani utilizan reglas IF-THEN para modelar el conocimiento humano. La salida de cada regla es un conjunto difuso, lo que permite una interpretación intuitiva de las reglas.

En un sistema Mamdani, **la salida de cada regla es un conjunto difuso**. Dado que los sistemas Mamdani tienen bases de reglas más intuitivas y fáciles de entender, son muy adecuados para aplicaciones de sistemas expertos en las que las reglas se crean a partir del conocimiento de expertos humanos, como los diagnósticos médicos..

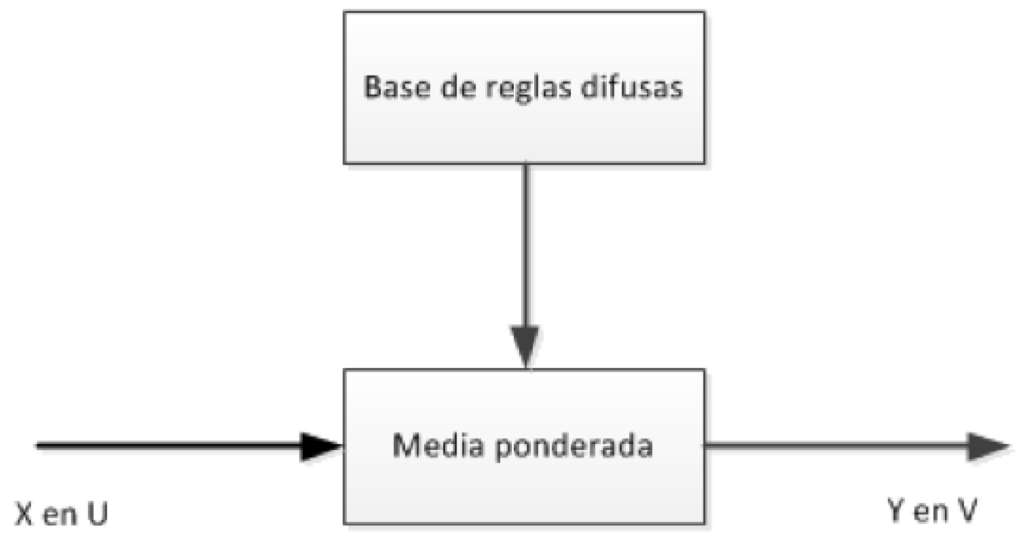




Sistemas Difusos Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

La inferencia difusa de Sugeno, también conocida como inferencia difusa de Takagi-Sugeno-Kang, utiliza funciones de pertenencia de salida únicas (singleton) que son constantes o una función lineal de los valores de entrada. El proceso de defuzzificación para un sistema Sugeno es más eficiente computacionalmente comparado con el de un sistema Mamdani, ya que utiliza un promedio ponderado o una suma ponderada de unos cuantos puntos de datos en lugar de calcular un centroide de un área bidimensional.

Los sistemas difusos Takagi-Sugeno-Kang (TSK) usan reglas de la siguiente forma:
IF la velocidad *x* de un vehículo es alta, **THEN** la fuerza aplicada al acelerador es Y=cx.



Aplicaciones de los Sistemas Difusos

Maquinas de Lavar Ropa

Controlan el tiempo de lavado, enjuague y centrifugado, y el nivel de agua.

Estabilizador de Imágenes Digitales

Compensan el movimiento de la mano para obtener imágenes más estables.

Sistemas de Vehículos

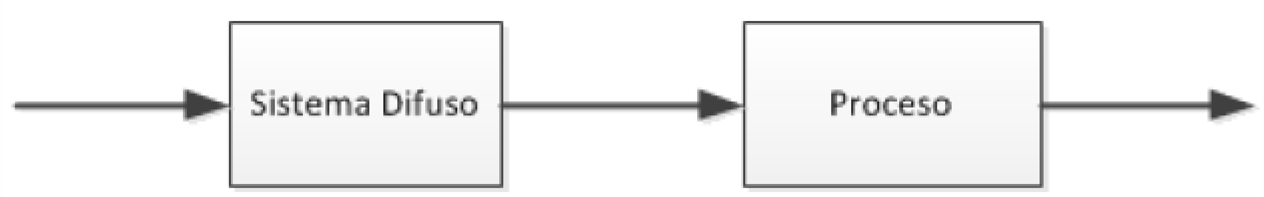
Adaptan el cambio de caja al estilo de manejo, la carga del vehículo y la pendiente.

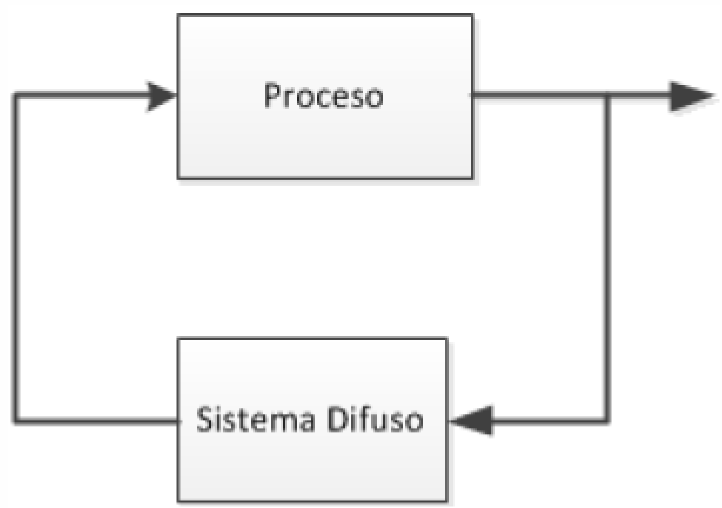
Control de Trenes

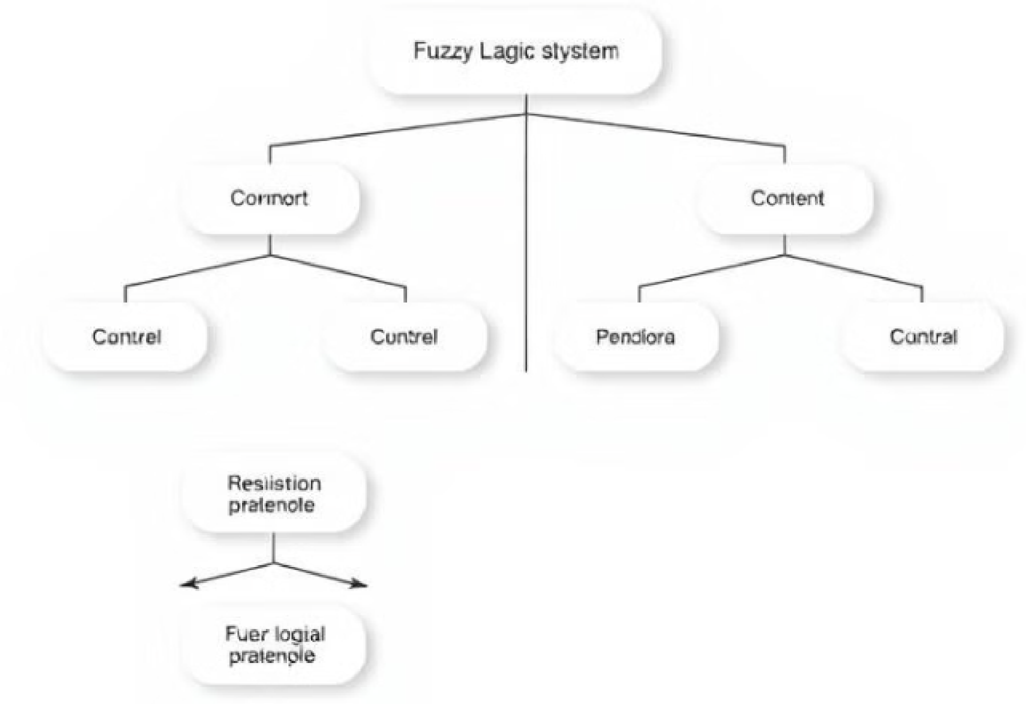
Controlan la velocidad y la detención del tren, priorizando la seguridad, el confort y la precisión.

Como se aplican

Los sistemas Difusos se aplican a una gran variedad de campos tales como Control Automático, Procesamiento de Señales, Comunicación, etc.
Sin embargo, las aplicaciones mas importantes se concentran en problemas de Control Automático.
Los sistemas difusos pueden ser usados en lazo abierto o en lazo cerrado tal como se muestra en las figuras.







Matemática de los Sistemas Difusos

Este capítulo explora los fundamentos matemáticos de los sistemas difusos, introduciendo conceptos clave como conjuntos difusos, funciones de pertenencia y operaciones en conjuntos difusos.

Conjuntos Clásicos

Definición

Un conjunto clásico es una colección de objetos que comparten una característica común. Los elementos de un conjunto se pueden determinar por extensión (enumerando cada elemento) o por comprensión (describiendo la propiedad que define el conjunto).

Función Característica

La función característica de un conjunto clásico asigna un valor de 1 a los elementos que pertenecen al conjunto y 0 a los que no.

Sea f una función de A en B y sea T un subconjunto de A, es decir, $A \xrightarrow{f} B$ y $T \subset A$ también se considera que $f(T) \subset B$. Entonces $f(T)$, se define como un conjunto de las imágenes de los elementos de T.

$$x_A : U \to \{1, 0\}$$

Definida por:

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si x} \in A \\ 0 \text{ si x} \notin A \end{cases}$$

Conjuntos Difusos

Los conjuntos difusos, introducidos por Lotfi Zadeh en 1965, permiten que los elementos pertenezcan a un conjunto en diferentes grados, expresados por un valor de pertenencia entre 0 y 1.

La función de pertenencia asigna un valor de pertenencia a cada elemento del conjunto, indicando su grado de pertenencia al conjunto difuso.

Dado un conjunto universo X y un conjunto difuso $\underset{\sim}{A}$, se define la función $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$, para cualquier elemento x, tal que $0 \leq \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq 1$, a $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ se le llama **función de pertenencia**. El valor de $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ se llama **grado de pertenencia** de x. La función de pertenencia $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ de un conjunto difuso $\underset{\sim}{A}$ es una función definida por:

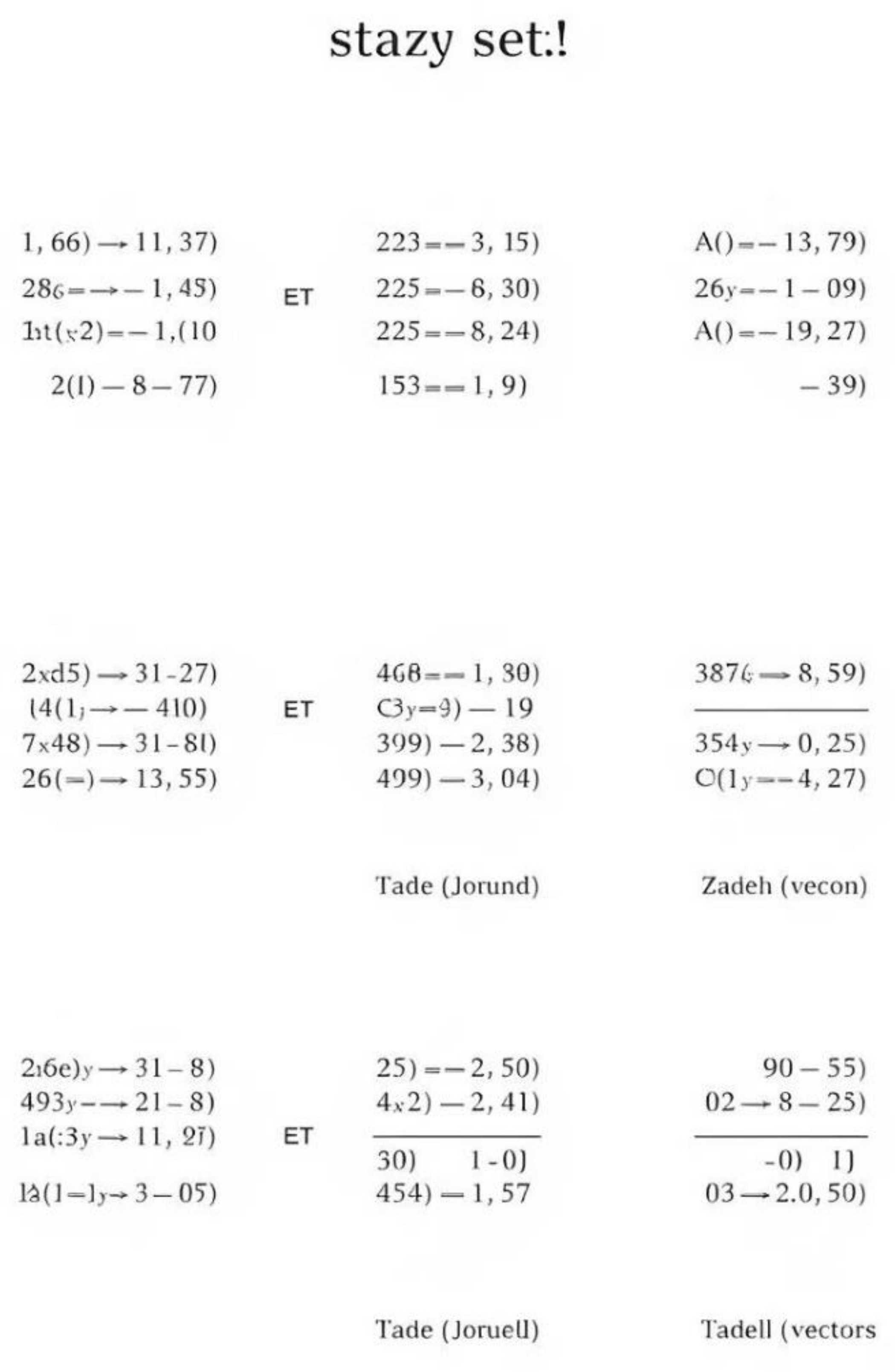
$$\mu_{\underset{\sim}{A}} : X \rightarrow [0, 1]$$

Donde $[0, 1]$ es un intervalo real.

Ejemplos de Conjuntos Difusos

Considere el conjunto de todas las edades de las personas. Podemos definir conjuntos difusos como "joven", "adulto" y "viejo", donde la pertenencia a cada conjunto es gradual.

Por ejemplo, una persona de 20 años puede pertenecer al conjunto "joven" con un grado de pertenencia de 0.8, mientras que una persona de 60 años puede pertenecer al conjunto "viejo" con un grado de pertenencia de 0.6.



Representación de Conjuntos Difusos

En el Dominio Finito.

Representación de Zadeh

Esta representación utiliza una suma ponderada de los elementos del conjunto, donde el peso es el grado de pertenencia.

Par Ordenado

Cada elemento del conjunto se representa como un par ordenado, donde el primer elemento es el valor y el segundo es el grado de pertenencia.

Vector

El conjunto se representa como un vector, donde cada elemento del vector corresponde al grado de pertenencia de un elemento del conjunto.

Representación de Zadeh

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{x \in X} \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}{x_i}$$

En la ecuación anterior no se entiende como fracciones o sumas, sino la relación del grado de pertenencia $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$ de x_i a $\underset{\sim}{A}$, y la sumatoria representa el conjunto difuso global en el dominio X.

Ejemplo: Dado un conjunto difuso denominado "varios" con dominio $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. La representación de Zadeh se da por la siguiente expresión:

$$\text{“}varios\text{”} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.7}{7} + \frac{0.3}{8} + \frac{0}{9} + \frac{0}{10}$$

Par ordenado

$$\underset{\sim}{A} = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)), x \in X\}$$

Así, cada elemento x de X tiene un grado de pertenencia que es completamente determinado por el conjunto de duplas de la ecuación anterior. La representación del ejemplo anterior usando la representación de par ordenado se da por la siguiente ecuación:

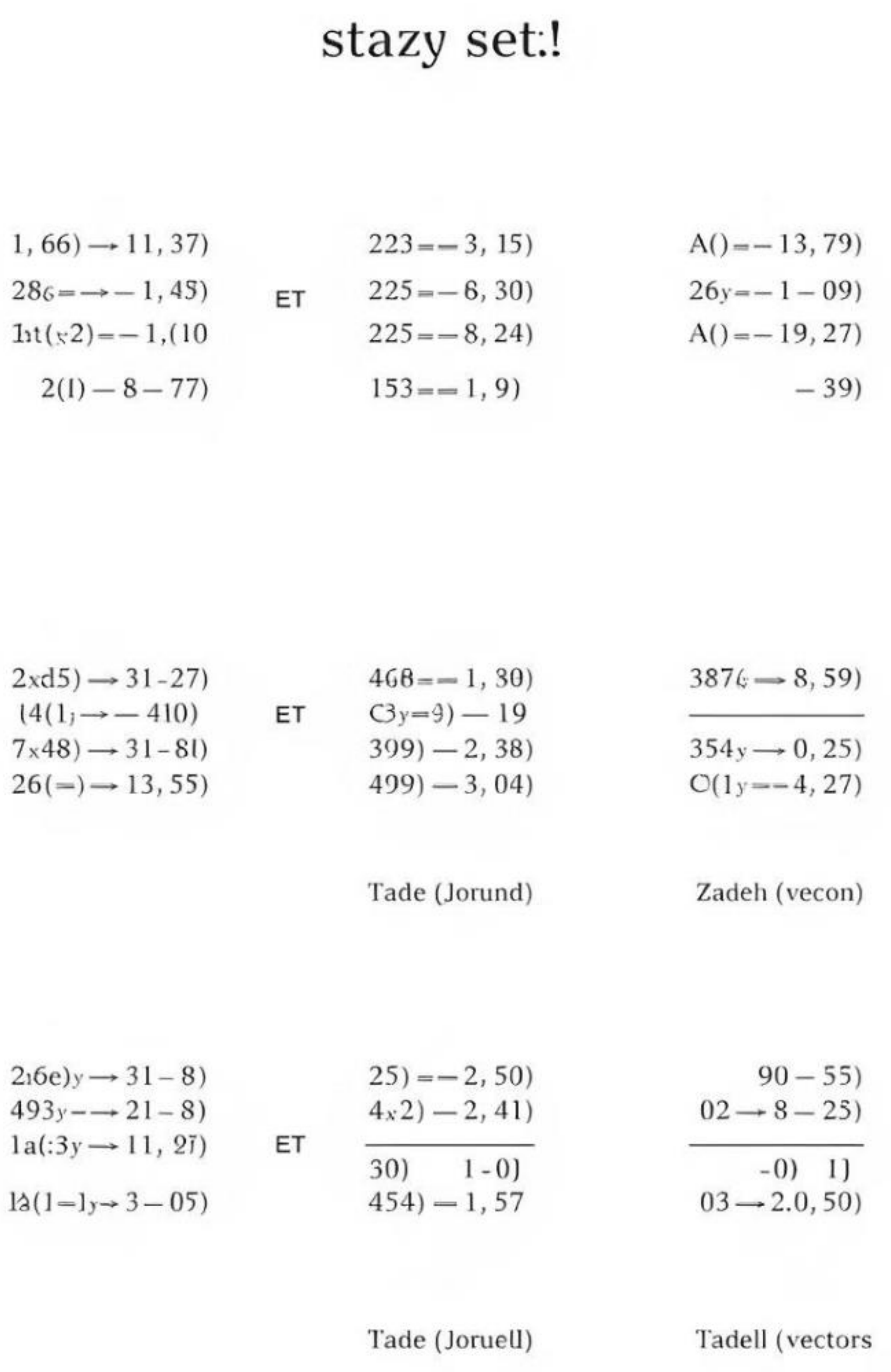
$$\text{“}varios\text{”} = \{(1,0),(2,0),(3,0.3),(4,0.7),(5,1),\cdots$$
$$\cdots(6,1),(7,0.7),(8,0.3),(9,0),(10,0)\}$$

Vector

$$\underset{\sim}{A} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, ..., \mu_n\}$$

La representación del ejemplo anterior usando la representación por vector se da en la siguiente ecuación:

$$\text{“}varios\text{”} = \{0, 0, 0.3, 0.7, 1, 1, 0.7, 0.3, 0, 0\}$$



Representación de Conjuntos Difusos

En el Dominio Infinito.

Representación de funciones. Cuando X es la representación de un dominio infinito, $\underset{\sim}{A}$ puede ser expresado por la siguiente ecuación:

$$\underset{\sim}{A} = \int_{\underset{\sim}{A}} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x$$

El símbolo $\int$ no representa calculo integra, solo representa un numero infinito de elementos combinados. Ejemplo: Considerando las edades del ser humano se define el conjunto difuso "viejo" que puede ser representado por la siguiente ecuación:

$$\text{“}viejo\text{”} = \int_{50}^{200} \left[1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} /x.$$

El subíndice en el símbolo integral representa que 50 años es el límite más bajo del conjunto difuso "viejo". Las personas menores de 50 años no pertenecen al conjunto "viejo"; El superíndice en el símbolo integral representa que 200 años es el límite superior del conjunto. La fracción después del símbolo integral representa el grado de pertenencia de cierto elemento x.

Características de las Funciones de Pertenencia

1 Núcleo

El núcleo es el conjunto de elementos que tienen un grado de pertenencia de 1.

$$nucleo(\underset{\sim}{A}) = \{x \in U \backslash \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1\}$$

2 Frontera

La frontera es el conjunto de elementos que tienen un grado de pertenencia entre 0 y 1.

$$frontera(\underset{\sim}{A}) = \{x \in U \backslash 0 < \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < 1\}$$

3 Soporte

El soporte es el conjunto de elementos que tienen un grado de pertenencia mayor que 0.

$$supp(\underset{\sim}{A}) = \{x \in U \backslash \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0\}$$

El soporte esta constituido por el núcleo y las fronteras.

Si el punto de soporte esta representado por un solo punto en U, este se denomina singleton difuso.

4 Centro

El centro es el valor promedio de los elementos que tienen el grado de pertenencia máximo.

Características de las Funciones de Pertenencia

5

Punto Crossover

El punto crossover es el elemento que tiene un grado de pertenencia de 0.5.

$$cruce(\underset{\sim}{A}) = \{x \in U \backslash \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.5\}$$

6

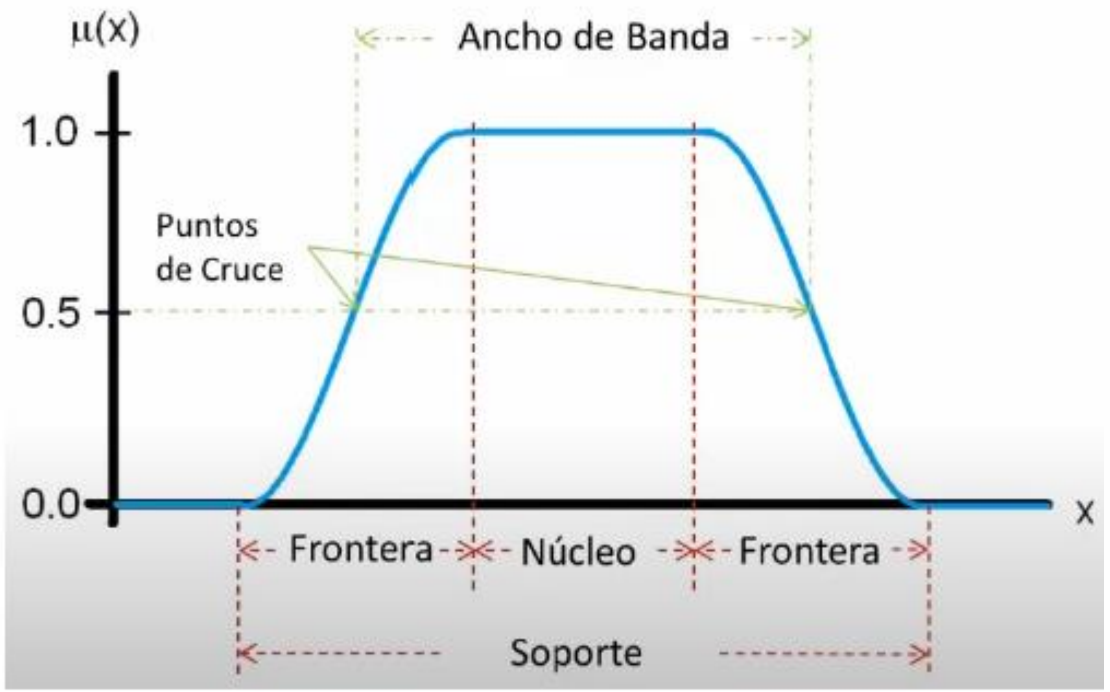
Altura

La altura es el valor máximo de la función de pertenencia.

7

Ancho

$$ancho(\underset{\sim}{A}) = x_2 - x_1$$



Características de las funciones de pertenencia

Operaciones en Conjuntos Difusos

Igualdad

Dos conjuntos difusos son iguales si sus funciones de pertenencia son idénticas para todos los elementos del universo de discurso.

Dados los conjuntos difusos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ definidos en el mismo universo de discurso. Se dice que $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son iguales si y solo si:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} x = \mu_{\underset{\sim}{B}} x; \forall x \in U$$

Unión

La unión de dos conjuntos difusos es un nuevo conjunto difuso donde el grado de pertenencia de cada elemento es el máximo de los grados de pertenencia en los conjuntos originales.

La union de $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ es un conjunto difuso en U, denotado por $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$, de quien la función de pertenencia es definida por:

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)); \forall x \in U$$

Operaciones en Conjuntos Difusos (Cont.)

Intersección

La intersección de dos conjuntos difusos es un nuevo conjunto difuso donde el grado de pertenencia de cada elemento es el mínimo de los grados de pertenencia en los conjuntos originales.

La intersección de $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ es un conjunto difuso $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ en U con función de pertenencia.

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)); \forall x \in U$$

Complemento

El complemento de un conjunto difuso es un nuevo conjunto difuso donde el grado de pertenencia de cada elemento es 1 menos el grado de pertenencia en el conjunto original.

El complemento de $\underset{\sim}{A}$ esta definido por la función de pertenencia

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x); \forall x \in U$$

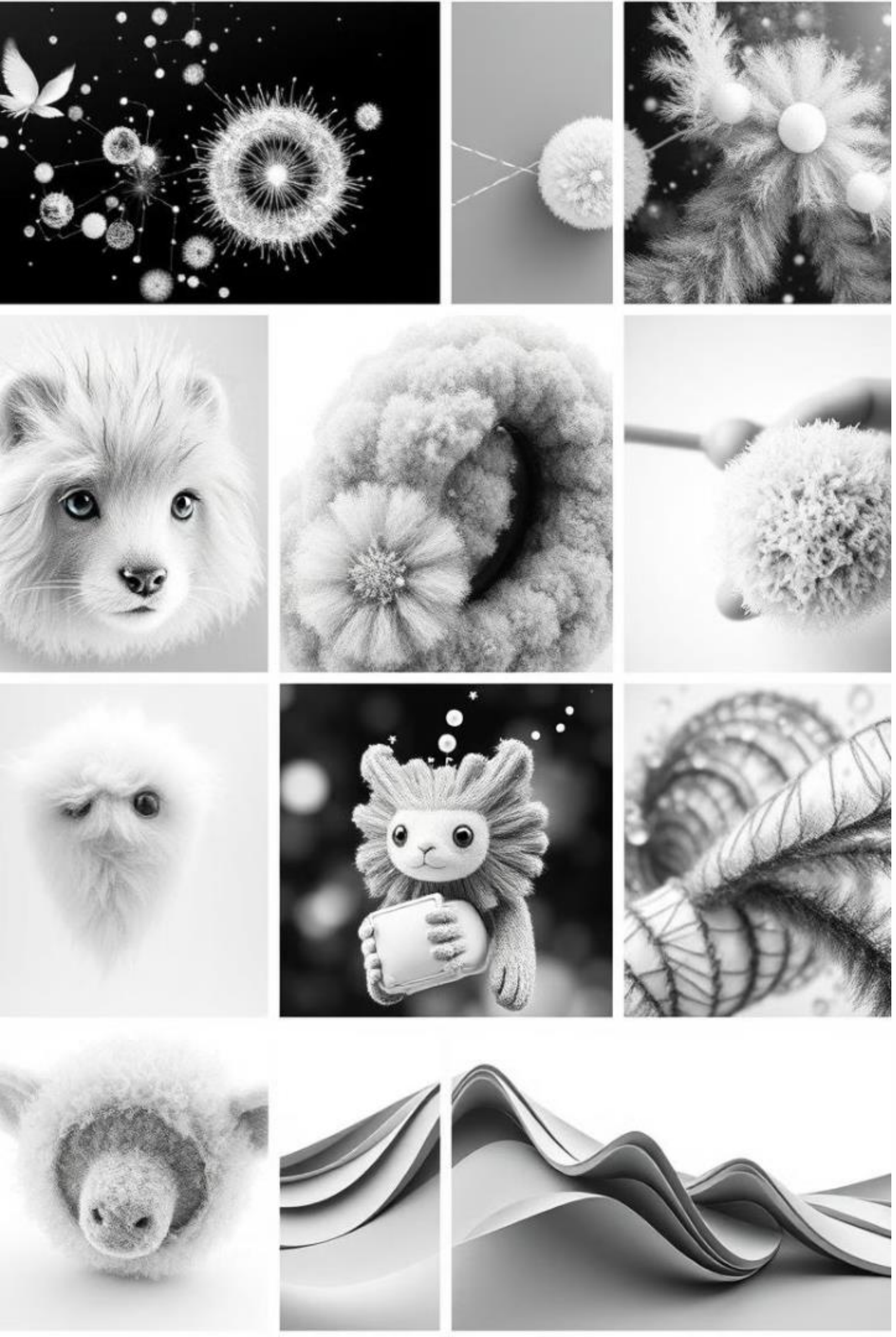
Operaciones en Conjuntos Difusos (Cont.)

Inclusión

Un conjunto difuso *A* esta incluido en un conjunto difuso *B* si el grado de pertenencia de cada elemento en *A* es menor o igual al grado de pertenencia del mismo elemento en *B*.

Se dice que $\underset{\sim}{B}$ contiene a $\underset{\sim}{A}$, y se denota por $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, si y solo si:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} x \leq \mu_{\underset{\sim}{B}} x; \forall x \in U$$



Aplicaciones de la Matemática de los Sistemas Difusos

La matemática de los sistemas difusos tiene aplicaciones en una amplia gama de campos, incluyendo control de procesos, toma de decisiones, reconocimiento de patrones, procesamiento de imágenes y sistemas expertos.

Su capacidad para manejar la incertidumbre y la imprecisión la hace particularmente adecuada para modelar sistemas complejos y situaciones reales.